ACH2043

Hierarquia de Chomsky/ Gramáticas regulares

Professora:
Ariane Machado Lima

Aulas anteriores

Linguagens regulares: (o que é mesmo?)

Aulas anteriores

Linguagens regulares: conjuntos de cadeias que são reconhecidas por:

- AFDs (autômatos finitos determinísticos)
- AFNs (autômatos finitos não-determinísticos)
- ERs (expressões regulares)
- Todos formalismos equivalentes (sabemos converter um no outro)

Aulas anteriores

Linguagens regulares: conjuntos de cadeias que são reconhecidas por:

- AFDs (autômatos finitos determinísticos)
- AFNs (autômatos finitos não-determinísticos)
- ERs (expressões regulares)
- Todos formalismos equivalentes (sabemos converter um no outro)

Hoje veremos mais um formalismo equivalente:

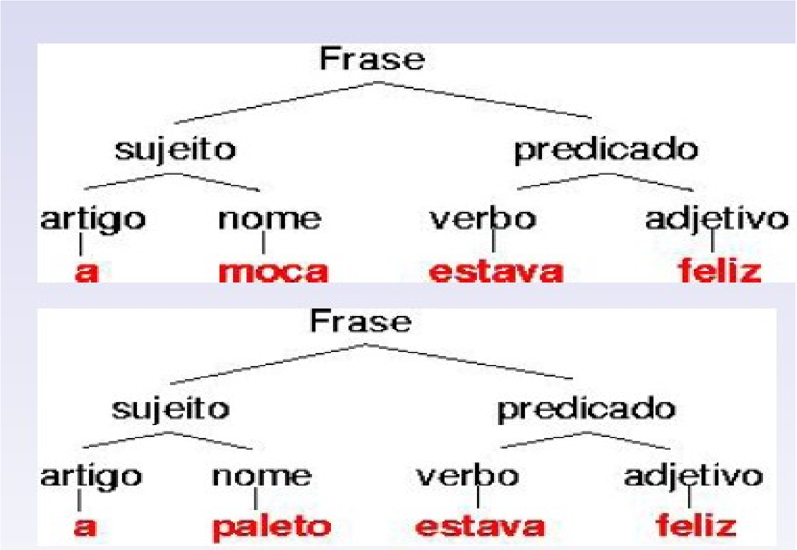
- Gramáticas Regulares

Gramáticas

conjunto de produções

símbolo inicial

Frase	→	sujeito	predicado
sujeito	→	artigo	nome
artigo	→	a	
artigo	→	o	
nome	→	paletó	
nome	→	moça	
nome	→	dia	
predicado	→	verbo	adjetivo
verbo	→	é	
verbo	→	estava	
adjectivo	→	feliz	
adjectivo	→	azul	



símbolos não-terminais

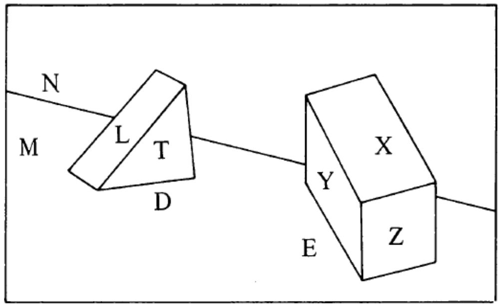
símbolos terminais

Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de sequências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex1: sequências de sítios de ligação de um dado fator de transcrição

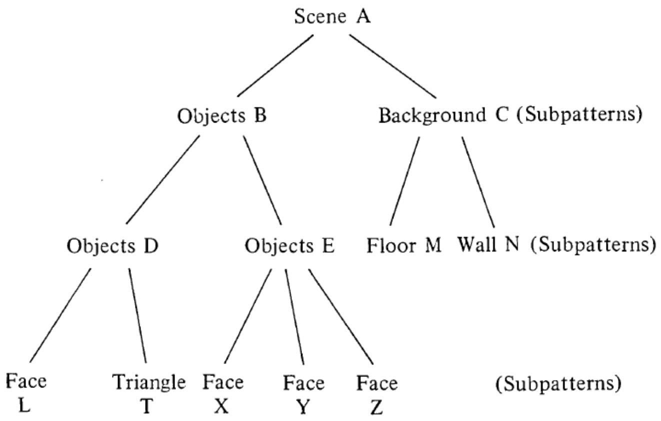
Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de sequências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: sequências que representam imagens que seguem um padrão



Scene A

a

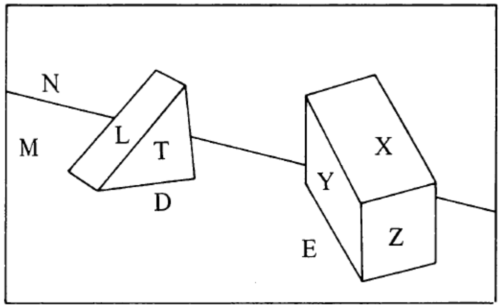


<Scene A> → <Objects B> <Background C>
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

(((LT)(XYZ))(MN))

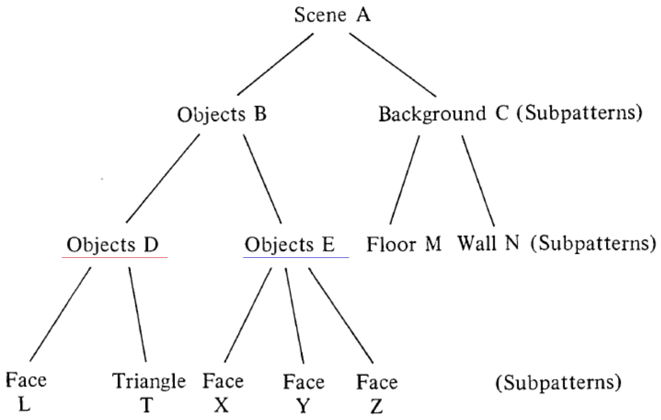
Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de sequências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: sequências que representam imagens que seguem um padrão



Scene A

a

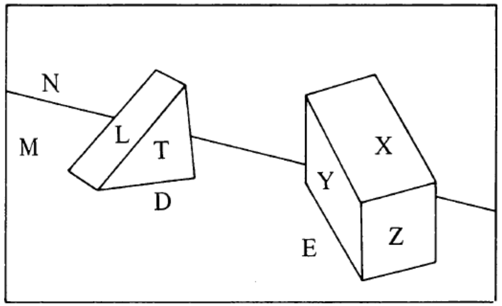


<Scene A> → <Objects B> <Background C>
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

(((LT)(XYZ))(MN))

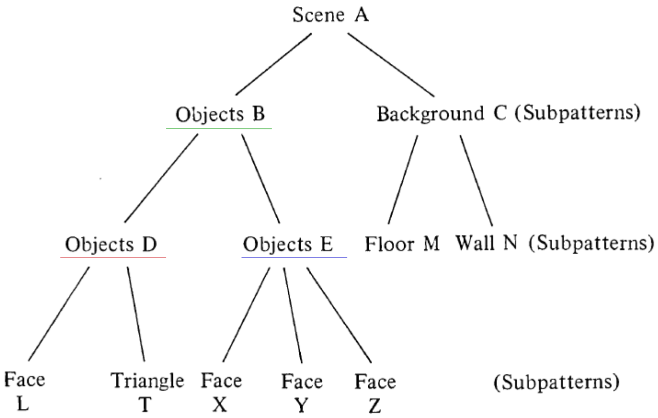
Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de sequências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: sequências que representam imagens que seguem um padrão



Scene A

a

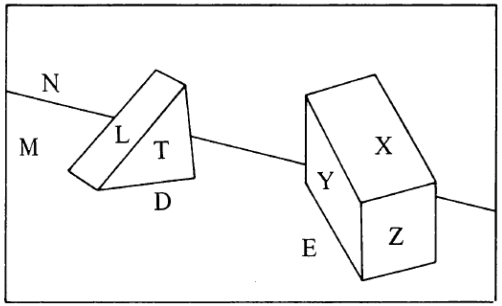


<Scene A> → <Objects B> <Background C>
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

(((LT)(XYZ))(MN))

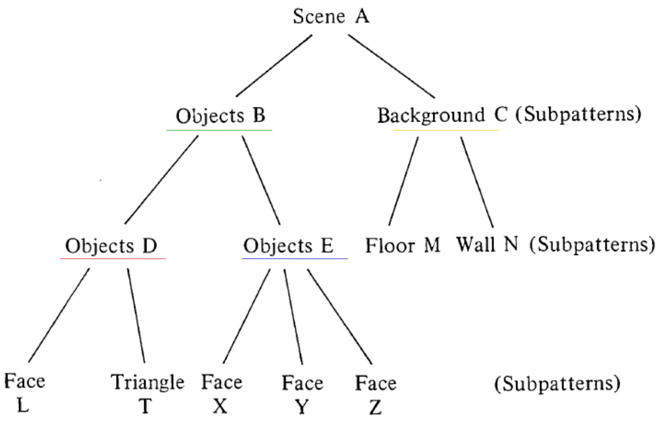
Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de sequências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: sequências que representam imagens que seguem um padrão



Scene A

a

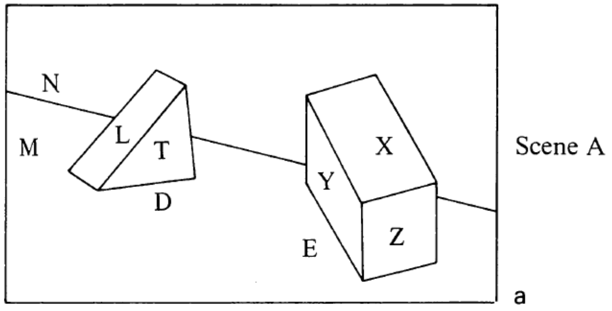


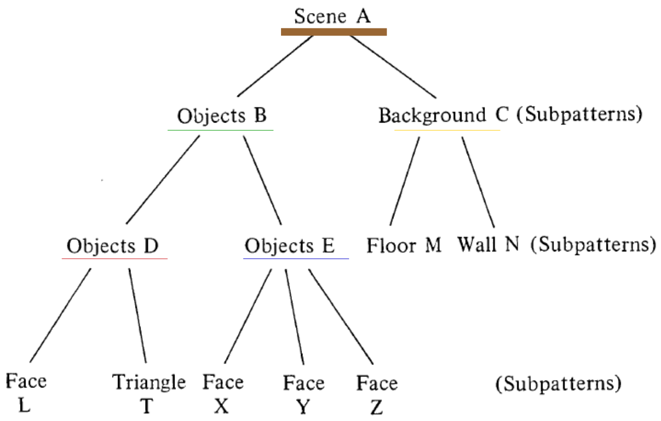
<Scene A> → <Objects B> <Background C>
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

(((LT)(XYZ))(MN))

Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de sequências** (cadeias)
- → representa um padrão
- Ex2: sequências que representam imagens que seguem um padrão





<Scene A> → <Objects B> <Background C>
<Objects B> → <Objects D> <Objects E>
<Objects D> → <Face L> <Triangle T>
<Objects E> → <Face X> <Face Y> <Face Z>
<Background C> → <Floor M> <Wall N>

(((LT)(XYZ))(MN))

Gramáticas

- Uma gramática é capaz de representar um **conjunto de sequências** (cadeias)
- → representa um padrão
- A linguagem pode ser infinita (ex: todas as sequências de dígitos que começam com 1), mas pode ser representada por uma gramática finita (conjunto finito de elementos)
- Pode ser definida pelo especialista
- Pode ser aprendida (inferência gramatical)
- Pode enumerar (gerar) sequências desse padrão
- Pode ser utilizada para analisar se uma dada sequência pertence a esse padrão (classificação, reconhecimento)

Agora a parte “chata”…

algumas definições formais

Operador * e variantes

- 0 ou mais concatenações de símbolos do conjunto ao qual o operador está sendo aplicado
- Ex: D = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} e L = {a,b,c,…,z,A,B,C,…,Z}
  - D*: 0 ou mais dígitos
  - Um número segue o padrão DD* (ou pertence ao conjunto DD*}
  - Uma variável (de uma dada linguagem de programação) poderia ser definida como uma cadeia que segue o padrão L(D U L)*
- +: abreviação para 1 ou mais
- n: n concatenações
- Ex:
  - D^+ = DD*
  - D^nL^n: n dígitos seguidos de n letras (mesmo número de dígitos e letras, mas todos os dígitos vêm antes)

IMPORTANTE: Se esse n é uma variável, isso não é uma expressão regular!!!

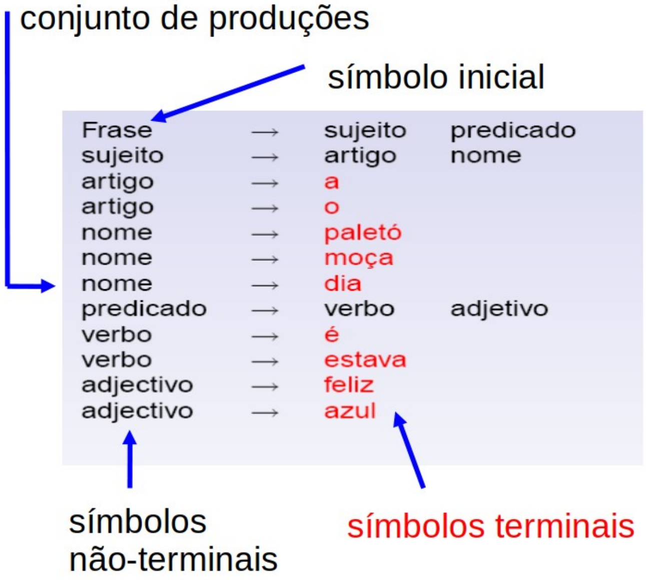
Linguagem e alfabeto

- Uma linguagem é um conjunto de cadeias sobre um conjunto Σ de símbolos (isto é, um subconjunto de Σ*)
- Σ é normalmente chamado de alfabeto (conjunto de símbolos que aparecem nas suas cadeias de interesse). Ex:
  - Σ = {A, C, G, T} para sequências de DNA
  - Σ = {0,1} para representar pixels de uma imagem em preto e branco
  - Σ = cada caracter digitável em um programa de computador
  - Σ = as várias palavras possíveis de um idioma
  - …
- ε ou λ : string vazia (corresponde a “”) - não pertence a Σ (mas pertence a Σ*)
- A linguagem é o que se quer representar (cada classe)

Gramáticas

- Definição: uma **gramática** G é uma quádrupla (V, Σ, S, P), na qual
  - V é o conjunto de símbolos não-terminais (ou variáveis)
  - Σ é o conjunto de símbolos terminais (ou alfabeto)
  - S é o símbolo inicial
  - P é o conjunto de produções da forma

$$\underbrace{(\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*}_{\text{lado esquerdo}} \rightarrow \underbrace{(\Sigma \cup V)^*}_{\text{lado direito}}$$



Gramáticas

- Definição: uma **gramática** G é uma quádrupla (V, Σ, S, P), na qual
  - V é o conjunto de símbolos não-terminais (ou variáveis)
  - Σ é o conjunto de símbolos terminais (ou alfabeto)
  - S é o símbolo inicial
  - P é o conjunto de produções da forma

$$\underbrace{(\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*}_{\text{lado esquerdo}} \rightarrow \underbrace{(\Sigma \cup V)^*}_{\text{lado direito}}$$

O símbolo inicial é o que aparece do lado esquerdo da primeira produção

conjunto de produções

símbolo inicial

Frase	→	sujeito	predicado
sujeito	→	artigo	nome
artigo	→	a	
artigo	→	o	
nome	→	paletó	
nome	→	moça	
nome	→	dia	
predicado	→	verbo	adjetivo
verbo	→	é	
verbo	→	estava	
adjectivo	→	feliz	
adjectivo	→	azul	

símbolos não-terminais

símbolos terminais

Gramáticas

- Uma **forma sentencial** de uma gramática G é qualquer cadeia obtida pela aplicação recorrente das seguintes regras:
  - S (símbolo inicial de G) é uma forma sentencial
  - Sejam $\alpha\rho\beta$ uma forma sentencial de G e $\rho \rightarrow \gamma$ uma produção de G. Então $\alpha\gamma\beta$ é também uma forma sentencial de G .

($\alpha,\beta,\gamma \in (\Sigma \cup V)^*$ e $\rho \in (\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*$)

Frase	→	sujeito	predicado
sujeito	→	artigo	nome
artigo	→	a	
artigo	→	o	
nome	→	paletó	
nome	→	moça	
nome	→	dia	
predicado	→	verbo	adjetivo
verbo	→	é	
verbo	→	estava	
adjectivo	→	feliz	
adjectivo	→	azul	

Ex de formas sentenciais:
<Frase>
<sujeito> <predicado>
<sujeito> <verbo> <adjetivo>
<sujeito> é <adjetivo>

Gramáticas

- Uma **forma sentencial** de uma gramática G é qualquer cadeia obtida pela aplicação recorrente das seguintes regras:
  - S (símbolo inicial de G) é uma forma sentencial
  - Sejam $\alpha\rho\beta$ uma forma sentencial de G e $\rho \rightarrow \gamma$ uma produção de G. Então $\alpha\gamma\beta$ é também uma forma sentencial de G .

  $(\alpha,\beta,\gamma \in (\Sigma \cup V)^*$ e $\rho \in (\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*)$
- Derivação direta:
  - Somente 1 substituição
  - $\alpha\rho\beta \Rightarrow \alpha\gamma\beta$

Ex:
<predicado> → <verbo> <adjetivo>

a moça <predicado> => a moça <verbo> <adjetivo>

Gramáticas

- Derivação: aplicação de zero ou mais derivações diretas
  - $\alpha \Rightarrow^* \mu$
  - isto é, $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mu$
- Uma cadeia w ($w \in \Sigma^*$) é uma sentença de G se $S \Rightarrow^* w$ (S sendo o símbolo inicial)
- Linguagem gerada por G:

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w \}$$

Gramáticas - Exemplos

- G = (V, Σ, S, P), onde
  - V = {S, A}
  - Σ = {0,1,2,3}
  - S = S
  - P = {

    $S \rightarrow 0S33$

    $S \rightarrow A$

    $A \rightarrow 12$

    $A \rightarrow \varepsilon$

  }

- Ex de formas sentenciais:

S, 0S33, 00S3333, 00A3333

- 0S33 => 00S3333
- 0S33 =>* 00A3333
- 0S33 =>* 0S33
- Ex de sentenças:

00123333, 12, ε

- L(G) =

Gramáticas - Exemplos

- G = (V, Σ, S, P), onde
  - V = {S, A}
  - Σ = {0,1,2,3}
  - S = S
  - P = {

    S → 0S33

    S → A

    A → 12

    A → ε

  }

- Ex de formas sentenciais:

S, 0S33, 00S3333, 00A3333

- 0S33 => 00S3333
- 0S33 =>* 00A3333
- 0S33 =>* 0S33
- Ex de sentenças:

00123333, 12, ε

- L(G) = $\{0^m1^n2^n3^{2m} \mid m \geq 0$ e $n = 0$ ou $n=1\}$

Gramáticas - Exemplos

- $G = (V, \Sigma, S, P)$, onde
  - $V = \{S, A\}$
  - $\Sigma = \{0,1,2,3\}$
  - $S = S$
  - $P = \{$

    $S \rightarrow 0S33$

    $S \rightarrow A$

    $A \rightarrow 12$

    $A \rightarrow \varepsilon$

  $\}$

- Ex de formas sentenciais:

S, 0S33, 00S3333, 00A3333

- 0S33 => 00S3333
- 0S33 =>* 00A3333
- 0S33 =>* 0S33
- Ex de sentenças:

00123333, 12, ε

- $L(G) = \{0^m 1^n 2^n 3^{2m} \mid m \geq 0 \text{ e } n = 0 \text{ ou } n = 1\}$

De novo, isso NÃO É expressão regular!!!

Gramáticas - Simplificação

- G = (V, Σ, S, P), onde
  - V = {S, A}
  - Σ = {0,1,2,3}
  - S = S
  - P = {

    $S \rightarrow 0S33$

    $S \rightarrow A$

    $A \rightarrow 12$

    $A \rightarrow \varepsilon$

  }

- G = (V, Σ, S, P), onde
  - V = {S, A}
  - Σ = {0,1,2,3}
  - S = S
  - P = {

    $S \rightarrow 0S33 \mid A$

    $A \rightarrow 12 \mid \varepsilon$

  }

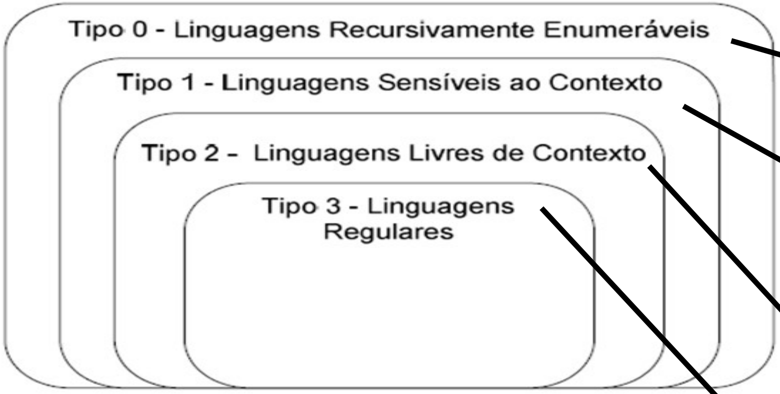
Gramáticas

- Gramáticas são dispositivos geradores (geram cadeias)
- Há dispositivos formais equivalentes (ex: autômatos, máquinas de Turing) que são reconhecedores (reconhecem se uma cadeia pertence à linguagem)
- Dada uma cadeia w, reconhecer se w Є L(G) é um processo chamado análise sintática
- Dependendo do formato das produções, a análise sintática pode ser mais ou menos complexa

Hierarquia de Chomsky

- Hierarquia das linguagens em classes de acordo com a sua complexidade relativa (Noam Chomsky, 1956)
- Cada classe de linguagem pode ser gerada por um tipo de gramática (formato das produções)
- Cada tipo de gramática tem uma complexidade de análise sintática diferente
- Importância na prática: dada uma linguagem, saber qual o dispositivo mais eficiente para análise sintática

Hierarquia de Chomsky



Fonte: Adaptado de Matsuno (2006)

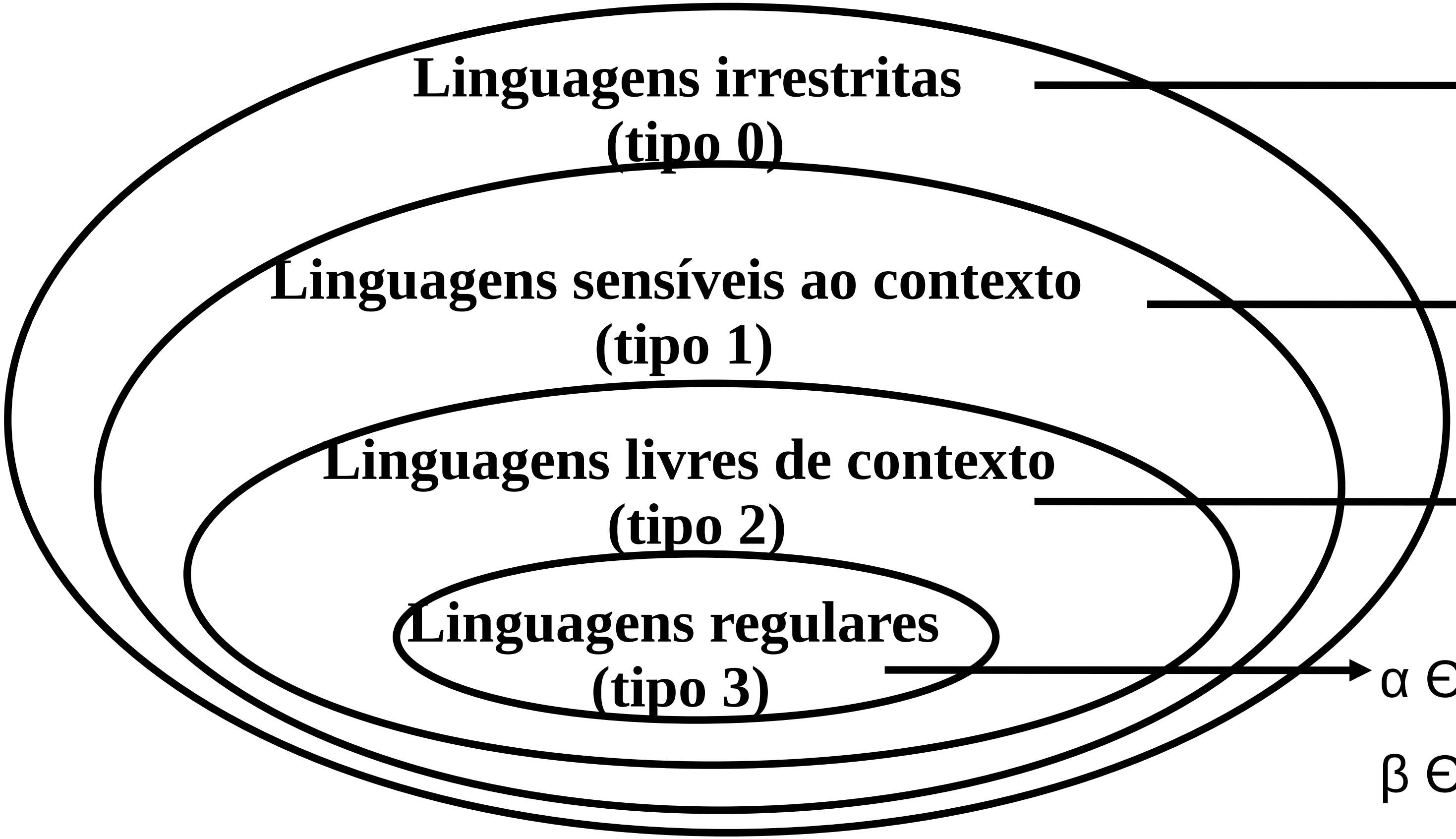
Linguagem	Autômato	Gramática	Reconhecimento
Recursivamente enumerável	Máquina de Turing com fita infinita	Irrestrita $Baa \rightarrow A$	Indecidível ?
Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita finita	Sensível ao contexto $At \rightarrow aA$	NP-Completo
Livre de contexto	Autômato de pilha	Livre de contexto $S \rightarrow gSc$	Polinomial
Regular	Autômato finito	Regular $A \rightarrow cA$	Linear

Fonte: Adaptado de Searls (2002)

Hierarquia de Chomsky

Formato das produções

$\alpha \rightarrow \beta$



$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$
$|\alpha| <= |\beta|$

$\alpha \in V$

$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

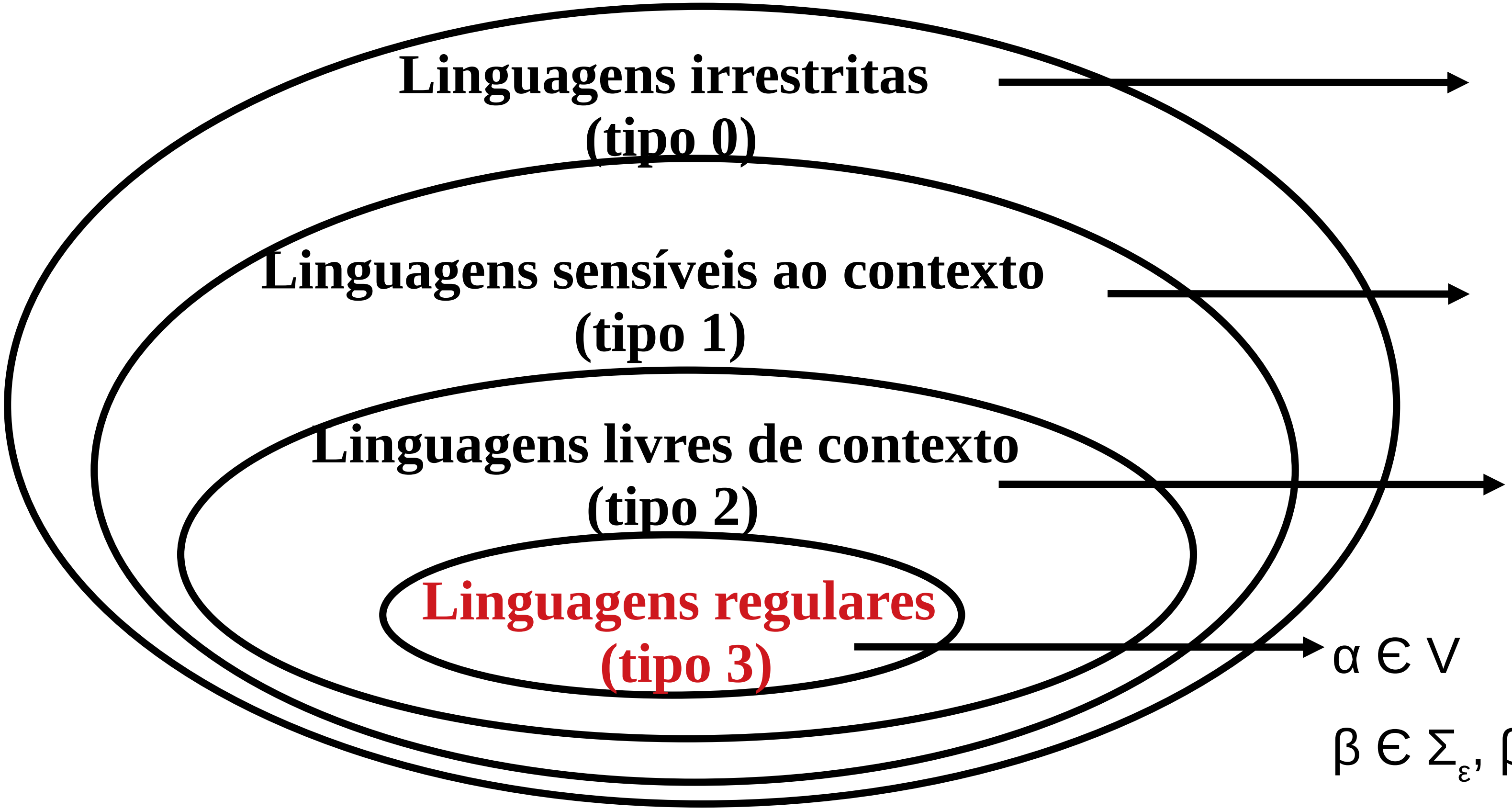
$\alpha \in V$

$\beta \in \Sigma_{\varepsilon}$, $\beta \in V$, $\beta \in$ ($V\Sigma$ou ΣV)

Gramáticas regulares

Hierarquia de Chomsky

$$\alpha \rightarrow \beta$$



Tipo 0:
$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

Tipo 1:
$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$
$|\alpha| <= |\beta|$

Tipo 2:
$\alpha \in V$

$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

Tipo 3:
$\alpha \in V$

$\beta \in \Sigma_\varepsilon$, $\beta \in V$, $\beta \in$ ($V\Sigma$ ou ΣV)

Gramáticas regulares

Uma gramática é **regular** se ela for

linear à esquerda ou **linear à direita**

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0,\ S \rightarrow S1,\ S \rightarrow 0,\ S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

S

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:
$V = \{S\}$
$\Sigma = \{0,1\}$
$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0,\ S \rightarrow S1,\ S \rightarrow 0,\ S \rightarrow 1\}$
Derivação da cadeia 1101
$S \Rightarrow S1$

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:
$V = \{S\}$
$\Sigma = \{0,1\}$
$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$
Derivação da cadeia 1101
$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01$

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:
V = {S}
Σ = {0,1}
S = S

Linear à esquerda:

P = { S → S0, S → S1, S → 0, S → 1}
Derivação da cadeia 1101
S => S1 => S01 => S101

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:
$V = \{S\}$
$\Sigma = \{0,1\}$
$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$
Derivação da cadeia 1101
S => S1 => S01 => S101 => 1101

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:
V = {S}
Σ = {0,1}
S = S

Linear à esquerda:

P = { S → S0, S → S1, S → 0, S → 1}
Derivação da cadeia 1101
S => S1 => S01 => S101 => 1101

Linear à direita:

P = { S → 0S, S → 1S, S → 0, S → 1}
Derivação da cadeia 1101
S

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:
$V = \{S\}$
$\Sigma = \{0,1\}$
$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$
Derivação da cadeia 1101
$S \Rightarrow S1 \Rightarrow S01 \Rightarrow S101 \Rightarrow 1101$

Linear à direita:

$P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$
Derivação da cadeia 1101
$S \Rightarrow 1S$

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

S => S1 => S01 => S101 => 1101

Linear à direita:

$P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

S => 1S => 11S

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

S => S1 => S01 => S101 => 1101

Linear à direita:

$P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$

Derivação da cadeia 1101

S => 1S => 11S => 110S

Gramáticas lineares

$\alpha \rightarrow \beta$

- Gramática linear à esquerda:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in V\Sigma$

- Gramática linear à direita:
  - $\alpha \in V$
  - $\beta \in \Sigma$ ou $\beta = \varepsilon$ ou $\beta \in V$ ou $\beta \in \Sigma V$

Exemplos: para ambas, considere:
$V = \{S\}$
$\Sigma = \{0,1\}$
$S = S$

Linear à esquerda:

$P = \{ S \rightarrow S0, S \rightarrow S1, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$
Derivação da cadeia 1101
S => S1 => S01 => S101 => 1101

Linear à direita:

$P = \{ S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1S, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1\}$
Derivação da cadeia 1101
S => 1S => 11S => 110S => 1101

Gramáticas regulares

- Duas gramáticas são equivalentes se elas geram exatamente a mesma linguagem
- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Uma linguagem é regular se e somente se ela é gerada por uma gramática regular (ou seja, por uma gramática linear à esquerda ou à direita)

Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

```
atga
atgg
atta
aaga
cgag
```

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{$

$\Sigma = ?$

$S =$

Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

```
atga
atgg
atta
aaga
cgag
```

$P = \{ S_1 \rightarrow$

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_1,$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_1$

Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

```
atga
atgg
atta
aaga
cgag
```

$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3$

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_1,$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_1$

Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

```
atga
atgg
atta
aaga
cgag
```

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_1,$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_1$

$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3$

$S_2 \rightarrow tS_4 \mid aS_5$

$S_4 \rightarrow gS_6 \mid tS_7$

$S_6 \rightarrow a \mid g$

Exemplo

Vamos projetar uma gramática regular (linear à direita) para reconhecer essa linguagem:

```
atga
atgg
atta
aaga
cgag
```

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_1$

$P = \{ S_1 \rightarrow aS_2 \mid cS_3$

$S_2 \rightarrow tS_4 \mid aS_5$

$S_4 \rightarrow gS_6 \mid tS_7$

$S_6 \rightarrow a \mid g$

$S_7 \rightarrow a$

$S_5 \rightarrow gS_8$

$S_8 \rightarrow a$

$S_3 \rightarrow gS_9$

$S_9 \rightarrow aS_{10}$

$S_{10} \rightarrow g$

$\}$

Equivalência entre autômatos finitos e gramáticas regulares

Gramáticas regulares e autômatos finitos

- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Toda gramática **linear à direita** é equivalente a um **autômato finito**, que é o dispositivo reconhecedor de linguagens regulares.
- Enquanto uma gramática regular gera cadeias de uma linguagem L, um autômato finito (para L) é capaz de analisar uma dada cadeia de entrada w e aceitá-la se w ϵ L ou rejeitá-la caso contrário (classificação).

atga
atgg
atta
aaga
cgag

Exemplo

gramática regular (linear à direita)

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{\ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$

$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$

$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$

$S_5 \rightarrow a \mid g$

$S_6 \rightarrow a$

$S_4 \rightarrow gS_7$

$S_7 \rightarrow a$

$S_2 \rightarrow gS_8$

$S_8 \rightarrow aS_9$

$S_9 \rightarrow g$

$\}$

AFN ????

atga
atgg
atta
aaga
cgag

Exemplo

gramática regular (linear à direita)

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$

$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$

$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$

$S_5 \rightarrow a \mid g$

$S_6 \rightarrow a$

$S_4 \rightarrow gS_7$

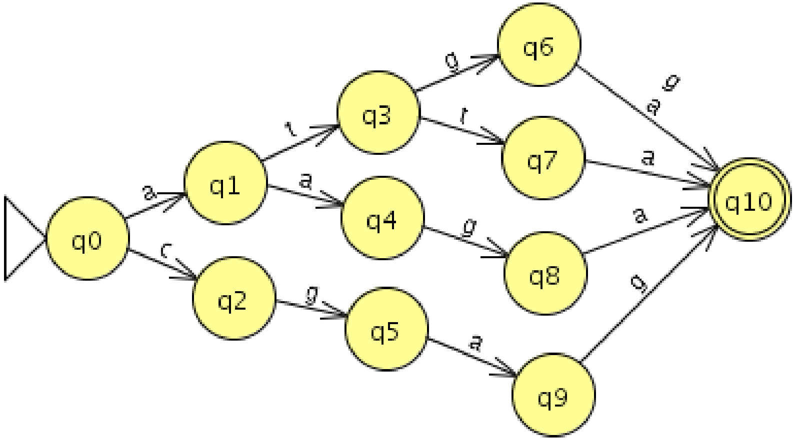
$S_7 \rightarrow a$

$S_2 \rightarrow gS_8$

$S_8 \rightarrow aS_9$

$S_9 \rightarrow g$

$\}$



AFN

Gramáticas regulares e autômatos finitos

- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Toda gramática **linear à direita** é equivalente a um **autômato finito**, que é o dispositivo reconhecedor de linguagens regulares (prova mais à frente).
- =>
- <=

Gramáticas lineares à direita => AFN

$G = (V, \Sigma, S, P)$, $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

Q = ?

q_0 = ?

F = {Z}

δ = ... (vou construir) $\delta \leftarrow \emptyset$

para cada produção em P

se $X \rightarrow aY$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow Y$,   então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow a$,   então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow \varepsilon$,   então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{\ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$

$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$

$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$

$S_5 \rightarrow a \mid g$

$S_6 \rightarrow a$

$S_4 \rightarrow gS_7$

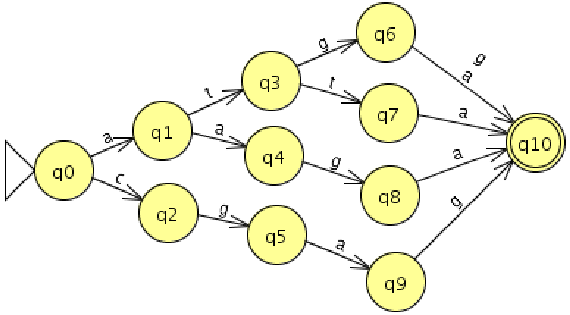
$S_7 \rightarrow a$

$S_2 \rightarrow gS_8$

$S_8 \rightarrow aS_9$

$S_9 \rightarrow g$

}



Gramáticas lineares à direita => AFN

$G = (V, \Sigma, S, P)$, $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

$Q = V \cup \{Z\}$, Z não pertence a V

$q_0 = ?$

$F = \{Z\}$

$\delta = \ldots$ (vou construir) $\delta \leftarrow \varnothing$

para cada produção em P

se $X \rightarrow aY$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow Y$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow a$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow \varepsilon$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

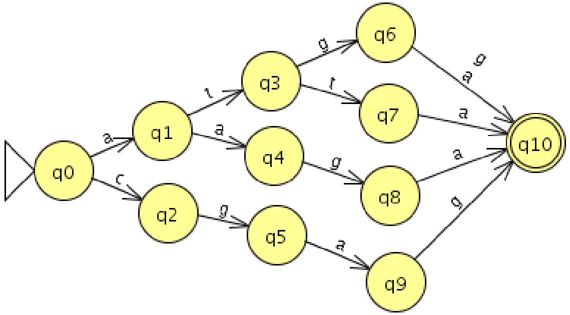
$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$
$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$
$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$
$S_5 \rightarrow a \mid g$
$S_6 \rightarrow a$
$S_4 \rightarrow gS_7$
$S_7 \rightarrow a$
$S_2 \rightarrow gS_8$
$S_8 \rightarrow aS_9$
$S_9 \rightarrow g$
$\}$



Gramáticas lineares à direita => AFN

$G = (V, \Sigma, S, P)$, $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

$Q = V \cup \{Z\}$, Z não pertence a V

$q_0 = S$

$F = \{Z\}$

$\delta = \dots$ (vou construir) $\delta \leftarrow \emptyset$

para cada produção em P

se $X \rightarrow aY$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow Y$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow a$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

se $X \rightarrow \varepsilon$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{\ \}$

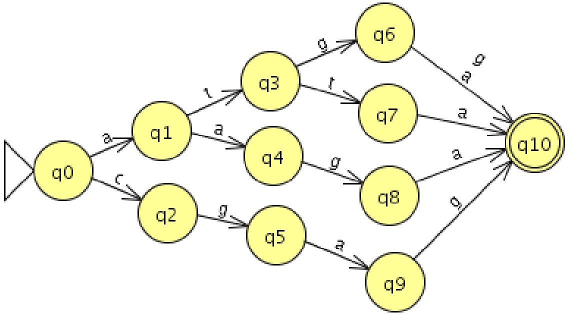
$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,$
$S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$
$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$
$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$
$S_5 \rightarrow a \mid g$
$S_6 \rightarrow a$
$S_4 \rightarrow gS_7$
$S_7 \rightarrow a$
$S_2 \rightarrow gS_8$
$S_8 \rightarrow aS_9$
$S_9 \rightarrow g$
$\}$



Gramáticas lineares à direita => AFN

$G = (V, \Sigma, S, P)$, $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

$Q = V \cup \{Z\}$, Z não pertence a V

$q_0 = S$

$F = \{Z\}$

δ = ... (vou construir) $\delta \leftarrow \emptyset$

para cada produção em P

se $X \rightarrow aY$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,a) = Y \}$

se $X \rightarrow Y$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \}$

se $X \rightarrow a$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \}$

se $X \rightarrow \varepsilon$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \}$

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$

$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$

$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$

$S_5 \rightarrow a \mid g$

$S_6 \rightarrow a$

$S_4 \rightarrow gS_7$

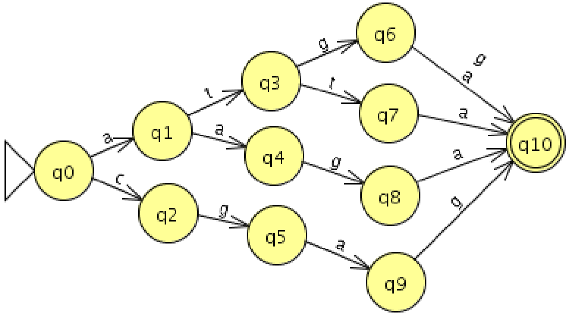
$S_7 \rightarrow a$

$S_2 \rightarrow gS_8$

$S_8 \rightarrow aS_9$

$S_9 \rightarrow g$

$\}$



Gramáticas lineares à direita => AFN

$G = (V, \Sigma, S, P)$, $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

$Q = V \cup \{Z\}$, Z não pertence a V

$q_0 = S$

$F = \{Z\}$

$\delta = \ldots$ (vou construir) $\delta \leftarrow \varnothing$

para cada produção em P

se $X \rightarrow aY$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,a) = Y \}$

se $X \rightarrow Y$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,\varepsilon) = Y \}$

se $X \rightarrow a$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \}$

se $X \rightarrow \varepsilon$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \}$

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$

$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$

$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$

$S_5 \rightarrow a \mid g$

$S_6 \rightarrow a$

$S_4 \rightarrow gS_7$

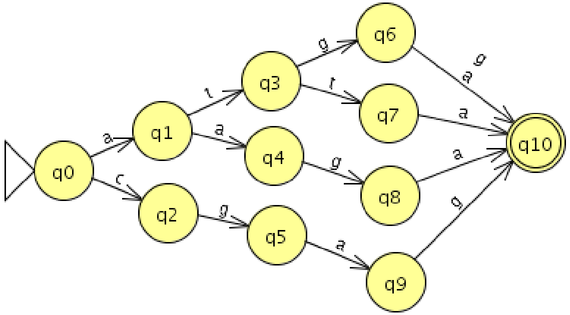
$S_7 \rightarrow a$

$S_2 \rightarrow gS_8$

$S_8 \rightarrow aS_9$

$S_9 \rightarrow g$

$\}$



Gramáticas lineares à direita => AFN

$G = (V, \Sigma, S, P)$, $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

$Q = V \cup \{Z\}$, Z não pertence a V

$q_0 = S$

$F = \{Z\}$

$\delta = \ldots$ (vou construir) $\delta \leftarrow \emptyset$

para cada produção em P

se $X \rightarrow aY$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,a) = Y \}$

se $X \rightarrow Y$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,\varepsilon) = Y \}$

se $X \rightarrow a$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,a) = Z \}$

se $X \rightarrow \varepsilon$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \}$

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$

$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$

$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$

$S_5 \rightarrow a \mid g$

$S_6 \rightarrow a$

$S_4 \rightarrow gS_7$

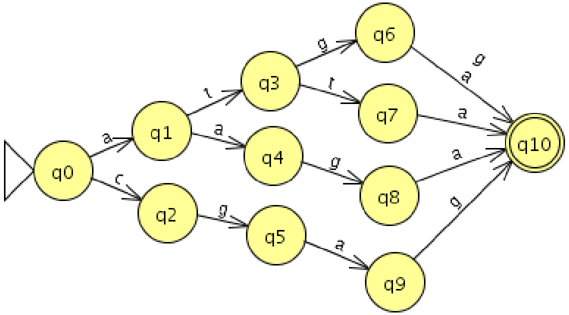
$S_7 \rightarrow a$

$S_2 \rightarrow gS_8$

$S_8 \rightarrow aS_9$

$S_9 \rightarrow g$

$\}$



Gramáticas lineares à direita => AFN

$G = (V, \Sigma, S, P)$, $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

$Q = V \cup \{Z\}$, Z não pertence a V

$q_0 = S$

$F = \{Z\}$

δ = ... (vou construir) $\delta \leftarrow \varnothing$

para cada produção em P

se $X \rightarrow aY$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,a) = Y \}$

se $X \rightarrow Y$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,\varepsilon) = Y \}$

se $X \rightarrow a$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,a) = Z \}$

se $X \rightarrow \varepsilon$, então $\delta \leftarrow \delta \cup \{ \delta(X,\varepsilon) = Z \}$

$G = \{V, \Sigma, S, P\}$

$V = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9\}$

$\Sigma = \{a, c, g, t\}$

$S = S_0$

$P = \{ S_0 \rightarrow aS_1 \mid cS_2$

$S_1 \rightarrow tS_3 \mid aS_4$

$S_3 \rightarrow gS_5 \mid tS_6$

$S_5 \rightarrow a \mid g$

$S_6 \rightarrow a$

$S_4 \rightarrow gS_7$

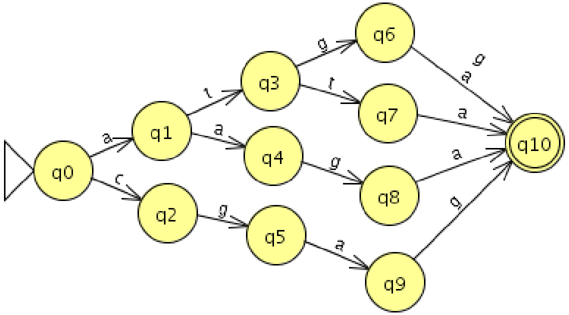
$S_7 \rightarrow a$

$S_2 \rightarrow gS_8$

$S_8 \rightarrow aS_9$

$S_9 \rightarrow g$

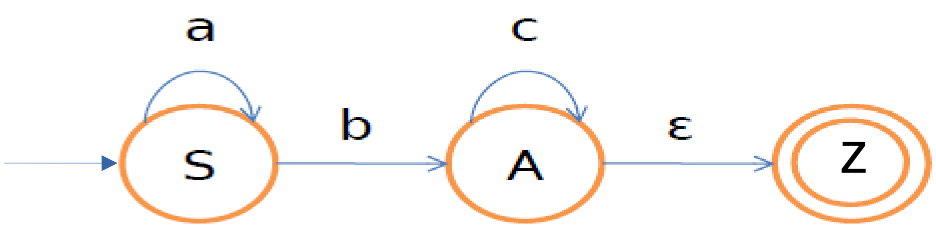
$\}$



Exemplo

$S \rightarrow aS \mid bA$

$A \rightarrow cA \mid \varepsilon$

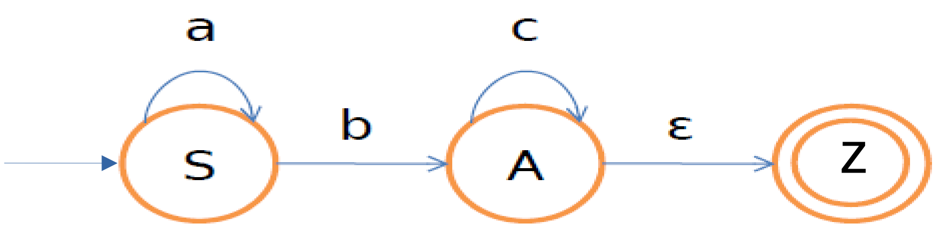


Exemplo

$S \rightarrow aS \mid bA$

$A \rightarrow cA \mid \varepsilon$

L(G) =
?

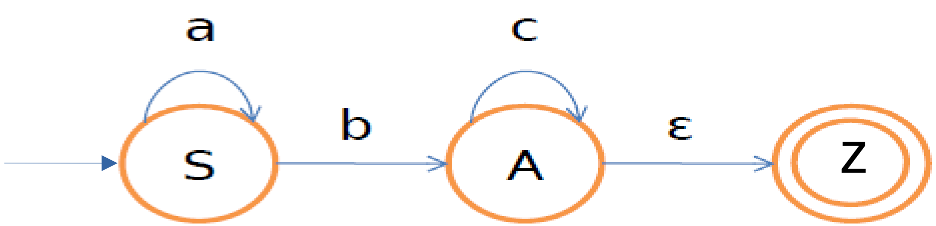


Exemplo

$S \rightarrow aS \mid bA$

$A \rightarrow cA \mid \varepsilon$

$L(G) =$
a^*bc^*



AFN => Gramáticas lineares à direita

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, $G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = ?$

$S = ?$

$P = \ldots$ (vou construir) $P \leftarrow \varnothing$

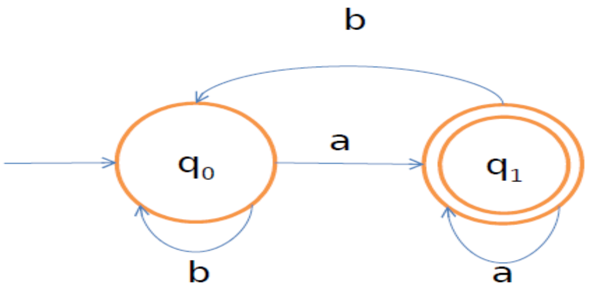
para cada transição de δ

Se $\delta(X,a) = Y$ então $P \leftarrow \{\ \}$

Se $\delta(X,\varepsilon) = Y$ então $P \leftarrow \{\ \}$

para cada estado X de F

$P \leftarrow \{\ \}$



AFN => Gramáticas lineares à direita

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, $G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = Q$

$S = ?$

$P = \dots$ (vou construir) $P \leftarrow \emptyset$

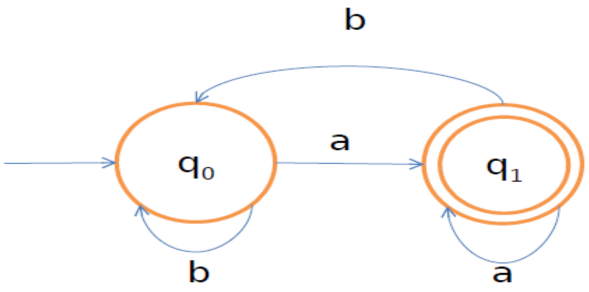
para cada transição de δ

Se $\delta(X,a) = Y$ então $P \leftarrow \{\ \}$

Se $\delta(X,\varepsilon) = Y$ então $P \leftarrow \{\ \}$

para cada estado X de F

$P \leftarrow \{\ \}$



$q_0 \rightarrow$

$q_1 \rightarrow$

AFN => Gramáticas lineares à direita

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, $G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = Q$

$S = q_0$

$P = \ldots$ (vou construir) $P \leftarrow \varnothing$

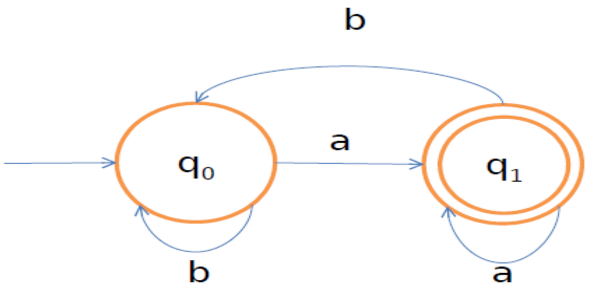
para cada transição de δ

Se $\delta(X,a) = Y$ então $P \leftarrow \{\,\}$

Se $\delta(X,\varepsilon) = Y$ então $P \leftarrow \{\,\}$

para cada estado X de F

$P \leftarrow \{\,\}$



$q_0 \rightarrow$

$q_1 \rightarrow$

AFN => Gramáticas lineares à direita

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, $G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = Q$

$S = q_0$

$P = \ldots$ (vou construir) $P \leftarrow \varnothing$

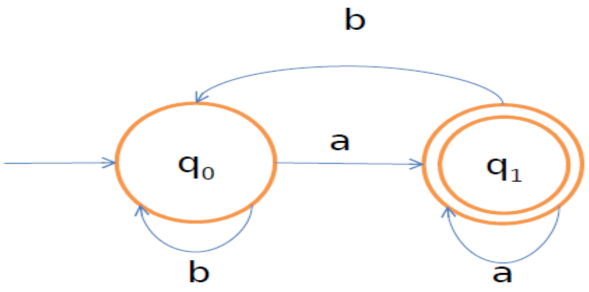
para cada transição de δ

Se $\delta(X,a) = Y$ então $P \leftarrow \{X \rightarrow aY\}$

Se $\delta(X,\varepsilon) = Y$ então $P \leftarrow \{\,\}$

para cada estado X de F

$P \leftarrow \{\,\}$



$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_0$

$q_1 \rightarrow aq_1 \mid bq_0$

AFN => Gramáticas lineares à direita

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, $G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = Q$

$S = q_0$

$P = \ldots$ (vou construir) $P \leftarrow \emptyset$

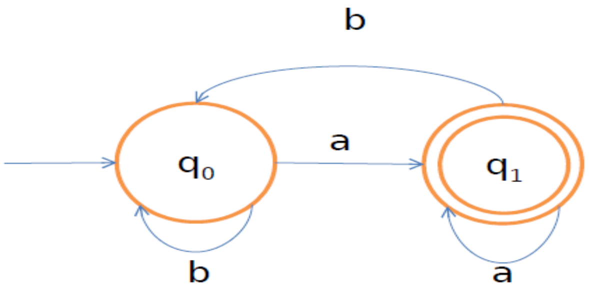
para cada transição de δ

Se $\delta(X,a) = Y$ então $P \leftarrow \{X \rightarrow aY\}$

Se $\delta(X,\varepsilon) = Y$ então $P \leftarrow \{X \rightarrow Y\}$

para cada estado X de F

$P \leftarrow \{\}$



$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_0$

$q_1 \rightarrow aq_1 \mid bq_0$

AFN => Gramáticas lineares à direita

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, $G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = Q$

$S = q_0$

$P = \ldots$ (vou construir) $P \leftarrow \emptyset$

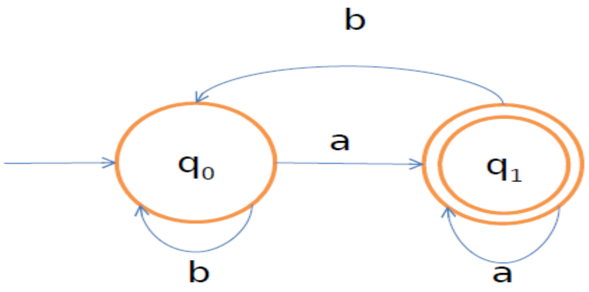
para cada transição de δ

Se $\delta(X,a) = Y$ então $P \leftarrow \{X \rightarrow aY\}$

Se $\delta(X,\varepsilon) = Y$ então $P \leftarrow \{X \rightarrow Y\}$

para cada estado X de F

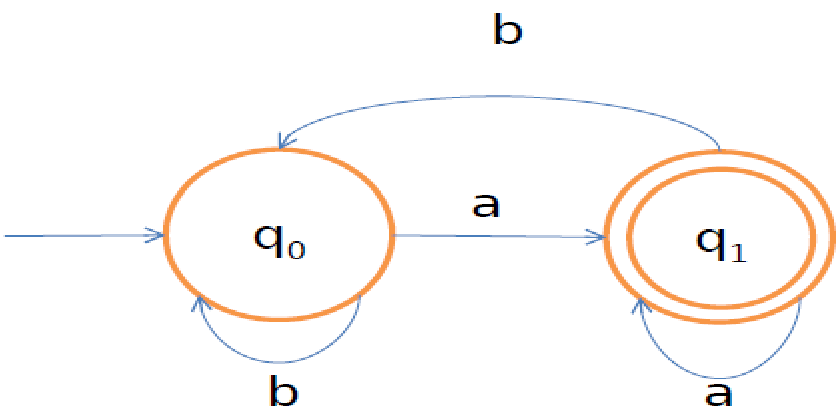
$P \leftarrow \{X \rightarrow \varepsilon\}$



$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_0$

$q_1 \rightarrow aq_1 \mid bq_0 \mid \varepsilon$

Exemplo

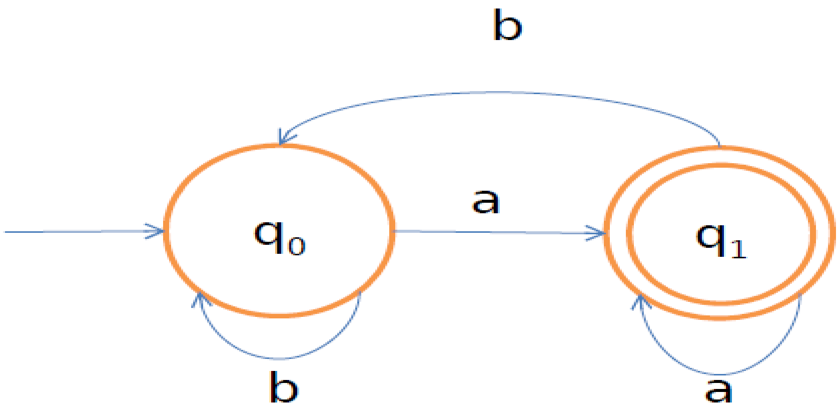


$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_0$

$q_1 \rightarrow aq_1 \mid bq_0 \mid \varepsilon$

L (G) = ?

Exemplo



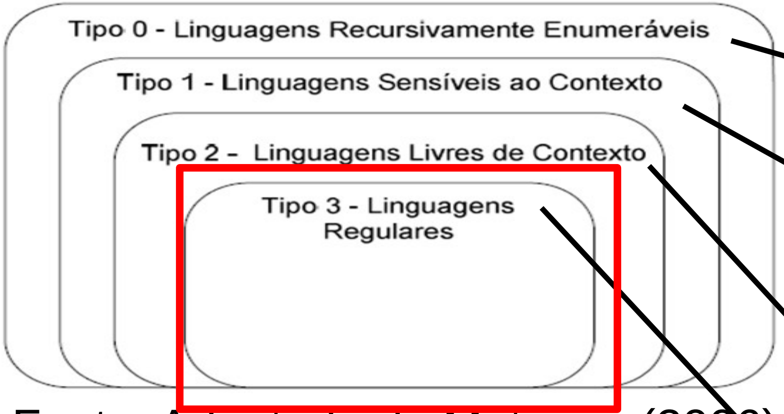
$$q_0 \rightarrow aq_1 \mid bq_0$$
$$q_1 \rightarrow aq_1 \mid bq_0 \mid \varepsilon$$

$$L(G) = b^*a^+(b^+a^+)^*$$

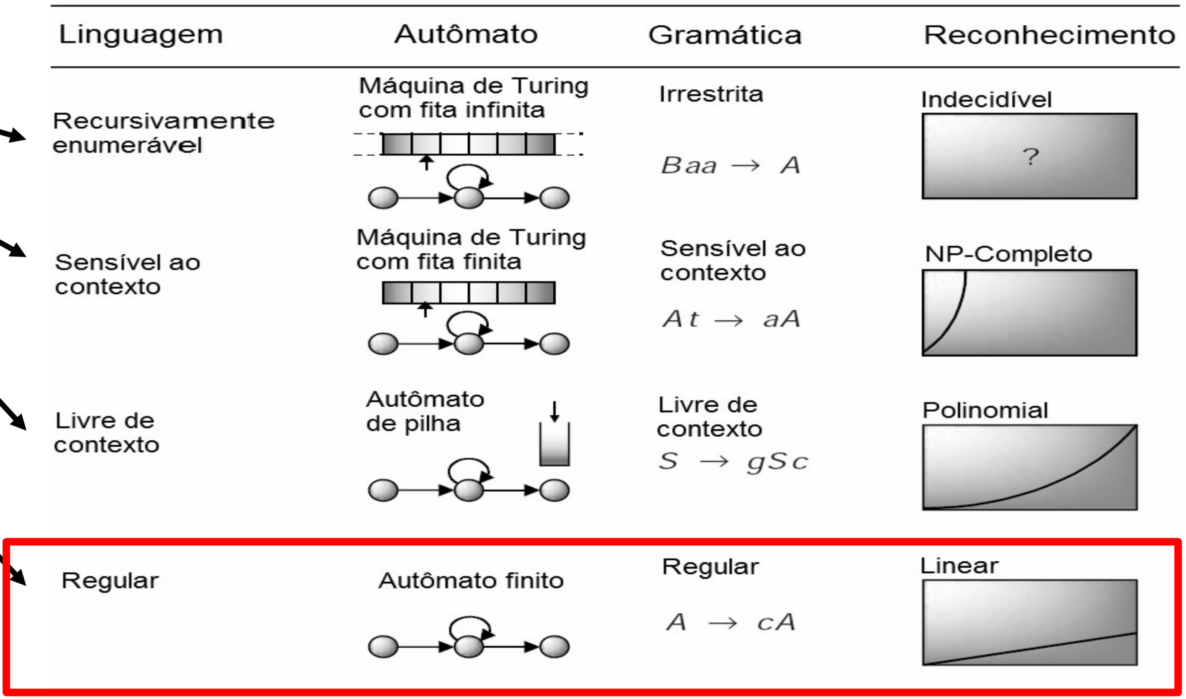
Gramáticas regulares e autômatos finitos

- Uma linguagem é regular se ela é gerada por uma gramática regular
- Uma gramática é regular se ela for linear à esquerda ou linear à direita
- Toda gramática **linear à esquerda** é equivalente a uma gramática **linear à direita** e vice-versa (prova em [RAMOS, 2009]).
- Toda gramática **linear à direita** é equivalente a um **autômato finito**, que é o dispositivo reconhecedor de linguagens regulares.

Hierarquia de Chomsky



Fonte: Adaptado de Matsuno (2006)



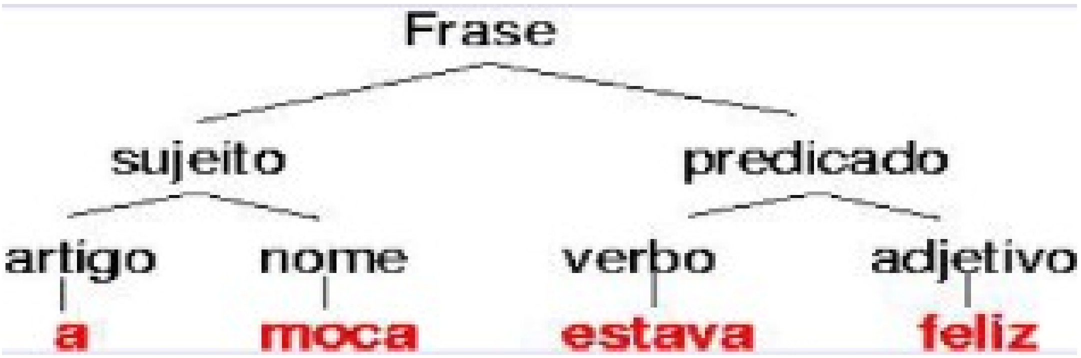
Fonte: Adaptado de Searls (2002)

Linguagens regulares

Mas não se engane! Muitas linguagens são mais que regulares…

Linguagens regulares

Mas não se engane! Muitas linguagens são mais que regulares...



Linguagens regulares

Mas muitas são !

IEICE TRANS. INF. & SYST., VOL.E94–D, NO.5 MAY 2011

PAPER *Special Section on Formal Approach*

Modeling, Verification and Testing of Web Applications Using Model Checker

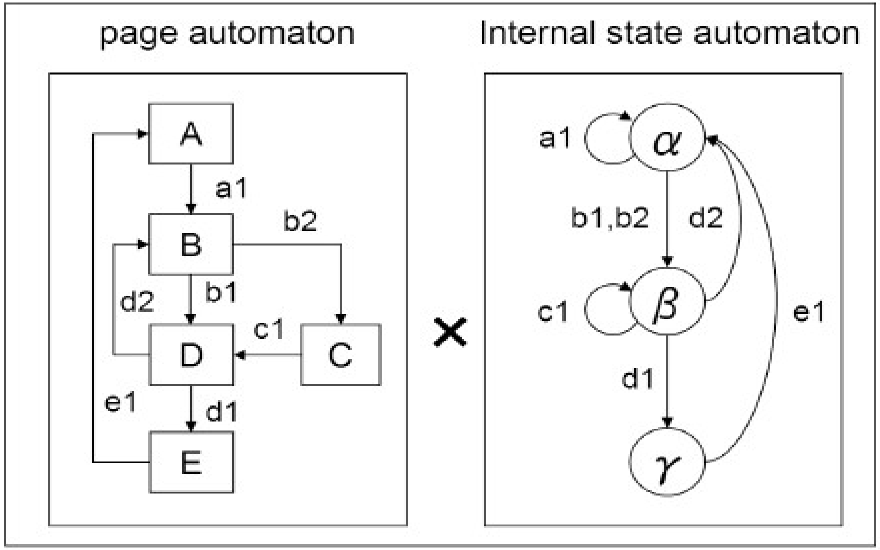


Fig. 1 Model of Web application.

Exercícios

1) Converta a seguinte gramática em um AFN:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aX \mid bY \mid cZ \\
X &\rightarrow bS \mid cX \mid d \\
Y &\rightarrow bZ \mid aY \mid cS \\
Z &\rightarrow cY \mid aZ \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

2) Converta o seguinte autômato em uma gramática regular:

$$
\begin{aligned}
&M_1 = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\}, \{a,b,c\}, \{(q_0,a) \rightarrow q_0, \\
&(q_0,\varepsilon) \rightarrow q_1, (q_1,b) \rightarrow q_1, (q_1,\varepsilon) \rightarrow q_2, \\
&(q_2,a) \rightarrow q_2, (q_2,\varepsilon) \rightarrow q_3, (q_3,c) \rightarrow q_3\}, q_0, \{q_3\}),
\end{aligned}
$$

3) Desenhe o diagrama de estados abaixo e o converta em uma gramática regular:

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7,q_8,q_9\} \\
\Sigma &= \{a,b,c,d,e\} \\
F &= \{q_2,q_3,q_9\} \\
\delta &= \{(q_0,a) \rightarrow q_1, (q_0,a) \rightarrow q_7, (q_1,b) \rightarrow q_2, \\
&\quad (q_1,c) \rightarrow q_3, (q_2,c) \rightarrow q_1, (q_2,e) \rightarrow q_0, \\
&\quad (q_3,d) \rightarrow q_4, (q_4,e) \rightarrow q_4, (q_4,\varepsilon) \rightarrow q_5, \\
&\quad (q_5,e) \rightarrow q_0, (q_5,a) \rightarrow q_6, (q_5,\varepsilon) \rightarrow q_0, \\
&\quad (q_6,\varepsilon) \rightarrow q_3, (q_6,\varepsilon) \rightarrow q_8, (q_7,b) \rightarrow q_8, \\
&\quad (q_8,b) \rightarrow q_9, (q_8,c) \rightarrow q_9, (q_9,\varepsilon) \rightarrow q_8, \\
&\quad (q_9,\varepsilon) \rightarrow q_7, (q_9,b) \rightarrow q_2\}
\end{aligned}
$$

Referências

- RAMOS, M. V. M.; NETO, J. J.; VEJA, I. S. **Linguagens Formais: Teoria, Modelagem e Implementação**. Ed. Bookman, 2009. Cap 3.