

⇒ ③ Sistemas de eq. lineares: métodos iterativos

(quando os métodos diretos não são possíveis, ex: limitação de memória).

⇒ processo iterativo: $\vec{x}^{(k)} = f(\vec{x}^{(k-1)})$

tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}^{(k)} - \hat{\vec{x}}\| = 0$ (convergência)

solução exata de $A\vec{x} = \vec{b}$

• $\|\vec{x}\|$ → norma euclidiana do vetor \vec{x}

⇒ critérios de parada: (while)

atualizações {

- erro absoluto: $\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\| < \epsilon$
- erro relativo: $\frac{\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\|}{\|\vec{x}^{(k+1)}\|} < \epsilon$

check {

- resíduos: $\|\vec{b} - A\vec{x}^{(k)}\| < \epsilon$

loop finite {

- máximo de iterações K_{max}

* Método de Gauss - Jacobi (2)

{ Quaterni: Jacobi
 { Franceo: Jacobi - Richardson

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

isola os x_i 's da diagonal principal

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1m}x_m^{(k)}) / a_{11} \\ \vdots \\ x_m^{(k+1)} = (b_m - a_{m1}x_1^{(k)} - a_{m2}x_2^{(k)} - \dots - a_{mm-1}x_{m-1}^{(k)}) / a_{mm} \end{cases}$$

de forma equivalente (matricial):

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

"quebra" em 2

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$(A - D + D)\vec{x} = \vec{b}$$

$$(A - D)\vec{x}^{(k)} + D\vec{x}^{(k+1)} = \vec{b}$$

$$D\vec{x}^{(k+1)} = \vec{b} - (A - D)\vec{x}^{(k)}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(A - D)\vec{x}^{(k)}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}$$

• Critério de convergência: $\vec{x}^{(k+1)} = B \vec{x}^{(k)} + \vec{g}$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \| \vec{x}^{(k)} - \vec{x} \| = 0$ se e somente se $\rho(B) < 1$, onde

$$\rho(B) \Rightarrow \text{raio espectral de } B = \max_{i=1 \dots m} \{ |\lambda_i| \}$$

onde λ_i são os autovalores de B .

justificativa:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(k+1)} &= B \vec{x}^{(k)} + \vec{g} \\ \hat{\vec{x}} &= B \hat{\vec{x}} + \vec{g} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\vec{x}^{(k+1)} - \hat{\vec{x}}}_{\text{erro } \vec{e}^{(k+1)}} = B \underbrace{(\vec{x}^{(k)} - \hat{\vec{x}})}_{\text{erro } \vec{e}^{(k)}}$$

$$\vec{e}^{(k+1)} = \underbrace{(B)}_{\text{matriz de iterações}} \vec{e}^{(k)}$$

raio espectral (autovalores) de $B \rightarrow$ indica o efeito máximo que a transf. linear B tem no "tamanho" dos vetores

$$\| \vec{e}^{(k+1)} \| \leq \rho(B) \| \vec{e}^{(k)} \|$$

logo, se $\rho(B) < 1$, o erro diminui com $k \rightarrow \infty$.

* obs: os métodos iterativos mão funcionam para qualquer matriz $A_{n \times n}$ tal que $A \vec{x} = \vec{b}$.

* Método de Gauss-Seidel: aceleração da convergência do método de Jacobi (4)

$$\Rightarrow \text{no cálculo de } x_i^{(k+1)} \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)} \\ x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_m^{(k)} \end{array} \right.$$

$$A \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A = L + R \left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow \text{triang. esq. com diag. principal de } A \\ R \rightarrow \text{triang. direita sem diag. princ. de } A. \end{array} \right.$$

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow (L + R) \vec{x} = \vec{b}$$

$$L \vec{x}^{(k+1)} + R \vec{x}^{(k)} = \vec{b}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = (-L^{-1}R \vec{x}^{(k)}) + L^{-1}\vec{b}$$

de forma equivalente:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1m}x_m^{(k)}) / a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2m}x_m^{(k)}) / a_{22} \\ \vdots \\ x_m^{(k+1)} = (b_m - a_{m1}x_1^{(k+1)} - a_{m2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{m,m-1}x_{m-1}^{(k+1)}) / a_{mm} \end{cases}$$

- obs:
- Gauss-Seidel: tende a ser mais rápido
 - Gauss-Jacobi: paralelizável.