Equações semilineares de segunda ordem

O objetivo desta aula é classificar as equações semilineares de segunda ordem e definir suas curvas características e suas formas canônicas.

Uma EDP semilinear de segunda ordem é uma equação da forma

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y). \qquad (1)$$

Vamos supor que a, b, c são contínuas e não se anulam simultamente em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

O discriminante da equação (1) é a função

$$\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Definição. A EDP (1) é

(i) parabólica em $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $\delta(x_0, y_0) = 0$,

(ii) hiperbólica em $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $\delta(x_0, y_0) > 0$,

(iii) elíptica em $(x_0, y_0) \in \Omega$ se $\delta(x_0, y_0) < 0$.

Definição. A EDP (1) é

(i) parabólica se for parabólica em todo $(x_0, y_0) \in \Omega$,

(ii) hiperbólica se for hiperbólica em todo $(x_0, y_0) \in \Omega$,

(iii) elíptica se for elíptica em todo $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Exemplo 1. A equação do calor

$$u_y = \alpha^2 u_{xx}$$

é parabólica. A equação da onda

$$u_{yy} = c^2 u_{xx}$$

é hiperbólica. A equação de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

é elíptica.

Exemplo 2. A equação de Tricomi

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

é de tipo mista pois é

(i) parabólica em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$,

(ii) hiperbólica em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$,

(iii) elíptica em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

Proposição 1. O tipo da EDP (1) é invariante sob mudança de variáveis de classe C^2.

Demonstração. Sejam

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y)$$

funções com derivadas parciais até segunda ordem contínuas em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ com jacobiano

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, a equação

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta)$$

pode resolvida em uma vizinhança de

$$(\xi_0,\eta_0) = (\xi(x_0,y_0), \eta(x_0,y_0))$$

e as funções x e y são de classe C^2 nessa vizinhança.

Definindo

$$v(\xi, \eta) = u(x, y)$$

nessa vizinha, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\
u_y &= v_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx} \\
u_{yy} &= v_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy} \\
u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}
\end{aligned}$$

Portanto, se u for uma solução de (1), então v é solução da equação

$$A(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta). \qquad (2)$$

onde

$$
\begin{aligned}
A(\xi,\eta) &= a(x,y)(\xi_x)^2 + 2b(x,y)\xi_x\xi_y + c(x,y)(\xi_y)^2 \\
B(\xi,\eta) &= a(x,y)\xi_x\eta_x + b(x,y)(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c(x,y)\xi_y\eta_y \qquad (3) \\
C(\xi,\eta) &= a(x,y)(\eta_x)^2 + 2b(x,y)\eta_x\eta_y + c(x,y)(\eta_y)^2.
\end{aligned}
$$

Calculando o discriminante da equação (2) obtemos

$$B(\xi,\eta)^2 - A(\xi,\eta)C(\xi,\eta) = \left(b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y)\right)\left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^2$$

ou seja,

$$B(\xi,\eta)^2 - A(\xi,\eta)C(\xi,\eta) = \delta(x,y)\left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^2$$

Como o jacobiano nunca se anula em uma vizinhança de (x_0, y_0), o sinal do discriminante

$$B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta)C(\xi, \eta)$$

da equação (2) é igual ao sinal de $\delta(x_0, y_0)$. Portanto, a equação (1) é parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em (x_0, y_0) se, e somente se, a equação (2) é parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em (ξ_0, η_0). A demonstração da Proposição 1 está completa.

Curvas Características

Para equações de segunda ordem, curvas características são curvas planas ao longo das a equação de segunda ordem pode ser escrita em uma forma contendo apnas derivadas totais de u_x e u_y.

Como estamos supondo que a, b e c não se anulam simultaneamente, sem perda de generalidade vamos supor que a nunca se anula no aberto Ω.

A EDP (1) é equivalente ao sistema de primeira ordem

$$
\begin{aligned}
&p = u_x \\
&q = u_y \\
&a(x, y)p_x + 2b(x, y)p_y + c(x, y)q_y = f(x, y, u, p, q)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Sendo u de classe C^2 podemos eliminar u das duas primeiras equações em (4) derivando a primeira em relação a y e a segunda em relação a x, obtemos

$$p_y - q_x = 0. \tag{5}$$

Multiplicando a equação (5) por uma função $\lambda = \lambda(x, y)$ (a ser determinada) e somando com a terceira equação de (4), obtemos

$$ap_x + 2bp_y + \lambda p_y - \lambda q_x + cq_y = f(x, y, u, p, q),$$

ou equivalentemente

$$a\left(p_x + \frac{2b+\lambda}{a}p_y\right) - \lambda\left(q_x - \frac{c}{\lambda}q_y\right) = f(x, y, u, p, q). \tag{6}$$

Por outro lado, a derivada em relação a x de uma função $w(x, y)$ ao longo da curva $y = y(x)$ no plano xy é dada por

$$\frac{d}{dx} w(x, y(x)) = w_x + w_y \frac{dy}{dx}.$$

Portanto, escrevendo (6) na forma

$$a \frac{dP}{dx} - \lambda \frac{dQ}{dx} = f(x, y, u, p, q).$$

onde $P(x) = p(x, y(x))$ e $Q(x) = q(x, y(x))$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b + \lambda}{a} = -\frac{c}{\lambda} \tag{7}$$

e λ tem que satisfazer

$$\lambda^2 + 2b\lambda + ac = 0.$$

Assim,

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - ac}$$

e

$$\frac{2b + \lambda}{a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{8}$$

Então, se

$$\frac{dy}{dx} = \mu(x, y), \tag{9}$$

comparando (7) e (8), vemos que μ satisfaz

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0. \tag{10}$$

As curvas definidas por (9) com μ solução de (10), quando existem, são chamadas curvas características da EDP (1).

Portanto o sinal do discriminante $\delta = b^2 - ac$ determina se existem duas, uma ou nenhuma solução real $\mu(x, y)$ da equação (10).

Concluímos que no caso hiperbólico ($\delta > 0$) existem duas famílias de curvas características, no caso parabólico ($\delta = 0$) existe apenas uma família de curvas características, enquanto no caso elíptico ($\delta < 0$) não existe nenhuma.

Exemplo 3. Vamos determinar as características para a equação da onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

onde $c > 0$ é constante. Como vimos no Exemplo 1, essa equação é hiperbólica, portanto tem duas famílias de caracteristicas. Escrevendo a equação na forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

temos $a(t,x) = 1$, $b(t,x) = 0$ e $c(t,x) = -c^2$. Logo a equação (10) fica

$$\mu^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm c.$$

Então

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \Rightarrow x = \pm ct + k,$$

onde k é uma constante arbitrária. Logo as características são as famílias $x + ct = k_1$ e $x - ct = k_2$, ode k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo 4. Vamos determinar as características para a equação do calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},$$

onde $\alpha > 0$ é constante. Como vimos no Exemplo 1, essa equação é parabólica, portanto tem apenas uma família de caracteristicas. Escrevendo a equação na forma

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0,$$

temos $a(t,x) = -\alpha^2$, $b(t,x) = 0$ e $c(t,x) = 0$. Logo a equação (10) fica

$$-\alpha^2\mu^2 = 0 \Rightarrow \mu = 0.$$

Então

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow t = k,$$

onde k é uma constante arbitrária. Logo as características são as reta $t = k$, onde k é uma constante arbitrária.

Formas Canônicas

Considere a EDP semilinear de segunda ordem

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y). \quad (11)$$

Vamos supor que a, b, c são de classe C^1 e não se anulam simultamente em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (sem perda de generalidade, vamos supor que a nunca se anula em Ω). A forma normal de uma equação elíptica é

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = g(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta); \quad (12)$$

a de uma equação parabólica é

$$v_{\eta\eta} = g(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta) \quad (13)$$

e uma equação hiperbólica é

$$v_{\xi\eta} = g(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta). \quad (14)$$

Vamos começar a discutindo o caso hiperbólico. Neste caso temos duas famílias de curvas características y_1 e y_2 com

$$\frac{dy_1}{dx} = \mu_1 := \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad \frac{dy_2}{dx} = \mu_2 := \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{15}$$

Como a EDP é simples ao longo das caracterísiticas é natural procurar uma mudança de variáveis $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ tal que ξ é constante ao longo da família de característica y_1 e η é constante ao longo da família de característica y_2.

Procuramos ξ e η satisfazendo as equações de primeira ordem

$$\xi_x + \mu_1 \xi_y = 0, \quad \xi_y \neq 0, \tag{16}$$

$$\eta_x + \mu_2 \eta_y = 0, \quad \eta_y \neq 0.. \tag{17}$$

Como a, b, c são de classe C^1 e a não se anula em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, então μ_1, μ_2 são de classe C^1 em Ω e podemos achar as soluções ξ, η de (16), (17) de classe C^2. Além disso, como $\mu_1 \neq \mu_2$ em todos os pontos de Ω, a transformação

$$(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$$

define de fato uma mudança de variáveis porque o jacobiano

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = (\mu_1 - \mu_2)\xi_y \eta_y \neq 0, \quad \forall\, (x, y) \in \Omega.$$

Definindo então

$$v(\xi, \eta) = u(x, y)$$

e usando (2) e (3), temos

$$A(\xi, \eta) v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta) v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta) v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \qquad (18)$$

onde

$$A(\xi,\eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = a\mu_1^2\xi_y^2 - 2b\mu_1\xi_y^2 + c\xi_y^2 = 0,$$
$$C(\xi,\eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = a\mu_2^2\eta_y^2 - 2b\mu_2\eta_y^2 + c\eta_y^2 = 0.$$

Lembrando que

$$B(\xi,\eta)^2 - A(\xi,\eta)C(\xi,\eta) = \delta(x,y)\left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^2 > 0$$

segue que $B(\xi,\eta) \neq 0$ e portanto

$$v_{\xi\eta} = g(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta).$$

Com essa mudança de variáveis a EDP (11) fica na forma (14).

Exemplo. Vamos reduzir a equação da onda $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ à forma canônica.

As curvas características são

$$x + ct = k_1, \quad x - ct = k_2.$$

Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Defina $v(\xi, \eta) = u(t, x)$. Obtemos

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta} \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \iff -4c v_{\xi\eta} = 0 \iff v_{\xi\eta} = 0.$$

No caso parabólico existe apenas uma família de curvas características. Como no caso hiperbólico, podemos obter $\xi = \xi(x, y)$ satisfazendo

$$\xi_x + \mu \xi_y = 0$$

onde μ é a única raiz de $a\mu^2 - 2b\mu + c = 0$. Escolhendo qualquer função $\eta = \eta(x, y)$ de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

em todos os pontos de Ω. Como no caso hiperbólico, $A(\xi, \eta) = 0$. Usando isso e a equação

$$B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta) C(\xi, \eta) = \delta(x, y) \left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right)^2 = 0,$$

segue que $B(\xi, \eta) = 0$. Por outro lado, $C(\xi, \eta) \neq 0$ porque a equação é de segunda ordem. Dividindo a equação (18) por $C(\xi, \eta)$ a EDP (11) fica na forma (13).

Exemplo. Reduza a equação

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

à forma canônica.
Como $a = b = c = 1$, $\delta = b^2 - ac = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a EDP é parabólica em $\mathbb{R}^2$. A única solução da equação (10) é $\mu = 1$, logo as curvas características são as retas $y = x + k$, k uma constante arbitrária, de modo que tomamos $\xi = y - x$. Escolhendo $\eta = y + x$, temos

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = -2 \neq 0.$$

Tomando $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, u é solução dessa EDP se e somente se v satisfaz

$$v_{\eta\eta} = 0.$$

No caso elíptico, como as raízes da equação (10) são complexas conjugadas, podemos repetir o argumento do caso hiperbólico para encontrar que a EDP (11) é reduzida a forma

$$v_{\xi\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$$

mas as funções ξ e η não são reais, mas são complexas conjugadas. Para obter a forma canônica fazemos a transformação adicional

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{i}{2}(\eta - \xi).$$

Pela regra da cadeia segue que

$$v_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta})$$

de modo que a forma canônica desejada é

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} = h(\alpha, \beta, v, v_\alpha, v_\beta).$$

Exemplo. Reduza a equação

$$u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

à forma canônica.

Neste caso $\mu_1 = ix$ e $\mu_2 = -ix$. Pela identidade (15),

$$y = \frac{i}{2}x^2 + k_1, \quad y = -\frac{i}{2}x^2 + k_2$$

de modo que

$$iy + \frac{1}{2}x^2 = ik_1, \quad -iy + \frac{1}{2}x^2 = ik_2$$

onde k_1, k_2 são constantes arbitrárias. Assim podemos tomar

$$\xi = iy + \frac{1}{2}x^2, \quad \eta = -iy + \frac{1}{2}x^2$$

e portanto

$$\alpha = \frac{1}{2}x^2, \quad \beta = y.$$

Fica como exercício mostrar que a equação é então transformada à forma canônica

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\alpha} v_{\alpha}.$$