UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

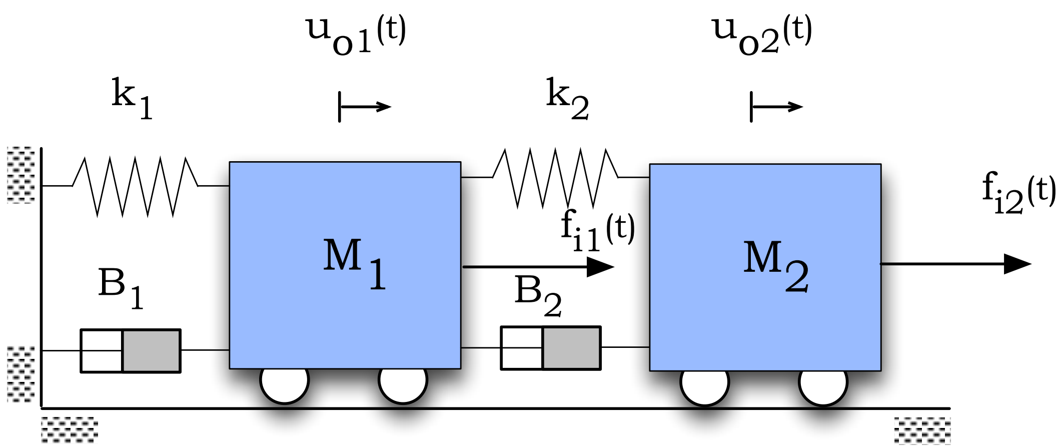
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Mecânicos
Exemplos

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

Exemplo # 1

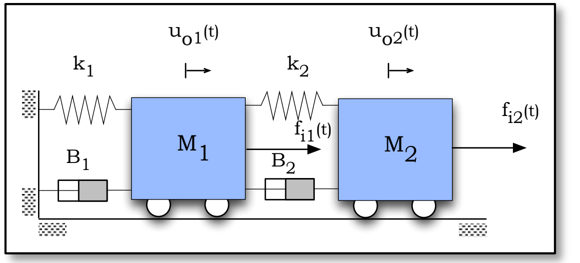
Considere o modelo físico abaixo:



Obtenha as F.T. relacionando as saídas $u_{o1}(t)$ e $u_{o2}(t)$ com as entradas $f_{i1}(t)$ e $f_{i2}(t)$. Todos os elementos são puros e ideais.

Hipóteses Simplificadoras

Como já partimos de um modelo físico, as hipóteses simplificadoras resumem-se em:

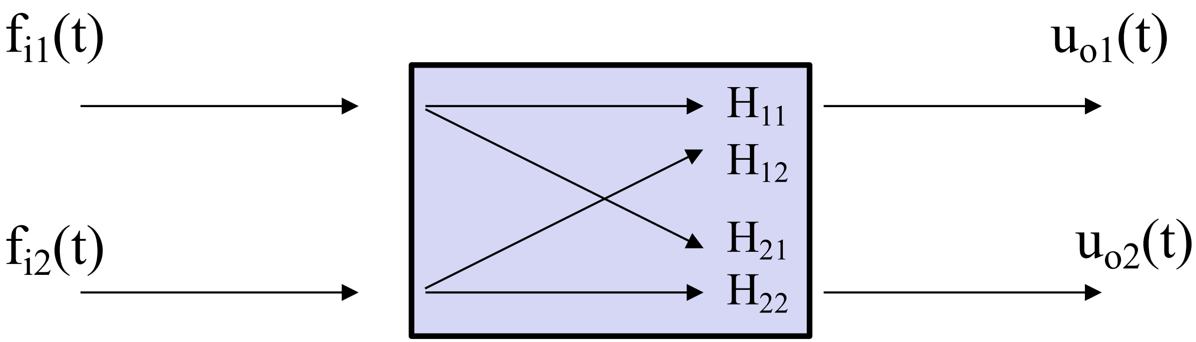


- Todos os elementos são puros e ideais
- Não existe atrito entre as massas e a superfície horizontal. Ou de forma equivalente, considera-se que todos os fenômenos dissipativos estejam concentrados nos elementos amortecedores de constantes B_1 e B_2.
- As entradas $f_{i1}(t)$ e $f_{i2}(t)$ são conhecidas e independentes do sistema.

Em seguida, faremos algumas considerações adicionais importantes sobre as relações entrada/saída para o nosso modelo !

Relações Entrada/Saída (Quais F.T. queremos ?)

Iniciamos a solução reconhecendo que trata-se de um sistema com 02 entradas e 02 saídas e, de acordo com a visão sistêmica discutida em sala de aula temos



Como ilustrado acima, notamos que existem 04 combinações possíveis entre as entradas e saídas do sistema. Vale aqui lembrarmos o conceito de F.T. discutido nas aulas presenciais

F. T..: Razão entre as transformadas de Laplace de uma dada variável de saída e de uma dada entrada, considerando-se nulas todas as condições iniciais do problema bem como as demais entradas.

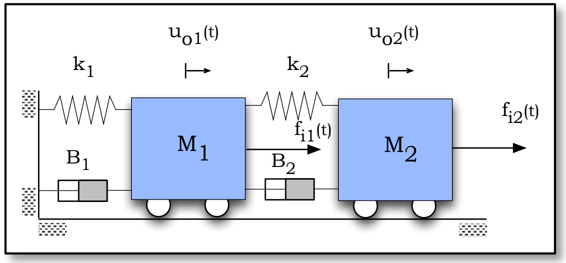
Equações de Movimento

Como já partimos do modelo físico e considerando elementos puros e ideais, as hipóteses simplificadoras já estão definidas, restando apenas considerar que as entradas são conhecidas e independentes do sistema. Então, as equações de movimento no domínio do tempo são obtidas a partir da aplicação da segunda lei do movimento de Newton às massas M_1 e M_2, ou seja:

M_1

$$M_1\ddot{u}_{o1} + (B_1 + B_2)\dot{u}_{o1} + (K_1 + K_2)u_{o1} - B_2\dot{u}_{o2} - K_2 u_{o2} = f_{i1}$$

$$\sum_{r=1}^{N} \vec{f}_r = M_r \ddot{u}_r$$



$$M_2\ddot{u}_{o2} + B_2\dot{u}_{o2} + K_2 u_{o2} - B_2\dot{u}_{o1} - K_2 u_{o1} = f_{i2}$$

M_2

As equações de movimento acima podem ser escritas na forma matricial:

Cont. ...

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{o1} \\ \ddot{u}_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & -B_2 \\ -B_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{o1} \\ \dot{u}_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \end{Bmatrix}$$

Algumas observações importantes sobre as EDOs do sistema:

- ***São lineares e não homogêneas***
- ***Parâmetros constantes (M_r, B_r, K_r)***
- ***São acopladas no domínio do tempo***
- ***As matrizes dos coeficientes são simétricas***

O próximo passo é transformar as EDOs do sistema para o domínio de Laplace. Para isto definimos:

$$F_{i1}(s) = \mathcal{L}\left(f_{i1}(t)\right) \qquad U_{o1}(s) = \mathcal{L}\left(u_{o1}(t)\right)$$

$$F_{i2}(s) = \mathcal{L}\left(f_{i2}(t)\right) \qquad U_{o2}(s) = \mathcal{L}\left(u_{o2}(t)\right)$$

Cont. ...

E, ainda, considerando-se nulas as condições iniciais para todas as variáveis obtemos as seguintes equações algébricas no domínio de Laplace

$$\boxed{\begin{bmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + K_1 + K_2 & -(B_2 s + K_2) \\ -(B_2 s + K_2) & M_2 s^2 + B_2 s + K_2 \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} U_{o1}(s) \\ U_{o2}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{i1}(s) \\ F_{i2}(s) \end{Bmatrix}$$

ou de forma compacta

$$[A(s)]\{U_o(s)\} = \{F_i(s)\}$$

A solução do sistema de equações acima fornece as respectivas expressões para as variáveis de saída do sistema. Usaremos a *regra de Krammer*.

Cont. ...

Solução para $U_{o1}(s)$ e $U_{o2}(s)$: $U_{o1}(s) = \dfrac{\Delta_{o1(s)}}{\Delta(s)}$ $U_{o2}(s) = \dfrac{\Delta_{o2}(s)}{\Delta(s)}$

onde:

$$\Delta_{o1}(s) = \begin{vmatrix} F_{i1}(s) & -(B_2 s + K_2) \\ F_{i2}(s) & M_2 s^2 + B_2 s + K_2(s) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{o2}(s) = \begin{vmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2) & F_{i1}(s) \\ -(B_2 s + K_2) & F_{i2}(s) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + K_1 + K_2 & -(B_2 s + K_2) \\ -(B_2 s + K_2) & M_2 s^2 + B_2 s + K_2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta(s) = M_1 M_2 s^4 + (M_1 B_2 + M_2 (B_1 + B_2))\, s^3 + \\ (M_1 K_2 + B_1 B_2 + M_2 (K_1 + K_2))\, s^2 + (B_1 K_2 + B_2 K_1)\, s + K_1 K_2\end{gathered}}$$

Polinômio Característico do Modelo

Cont. ...

Logo temos para as soluções

$$U_{o1}(s) = \frac{F_{i1}(s)(M_2 s^2 + B_2 s + K_2)}{\Delta(s)} + \frac{F_{i2}(s)(B_2 s + K_2)}{\Delta(s)}$$

$$U_{o2}(s) = \frac{F_{i1}(s)(B_2 s + K_2)}{\Delta(s)} + \frac{F_{i2}(s)(M_1 M_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2))}{\Delta(s)}$$

e, que podem ser reescritas como:

$$U_{o1}(s) = H_{11}(s)F_{i1}(s) + H_{12}F_{i2}(s)$$

$$U_{o2}(s) = H_{21}(s)F_{i1}(s) + H_{22}F_{i2}(s)$$

Cont. ...

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} U_{o1}(s) \\ U_{o2}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{i1}(s) \\ F_{i2}(s) \end{Bmatrix}$$

Com:

$$H_{11}(s) = \frac{M_2 s^2 + B_2 s + K_2}{\Delta(s)} \qquad H_{12}(s) = \frac{B_2 s + K_2}{\Delta(s)}$$

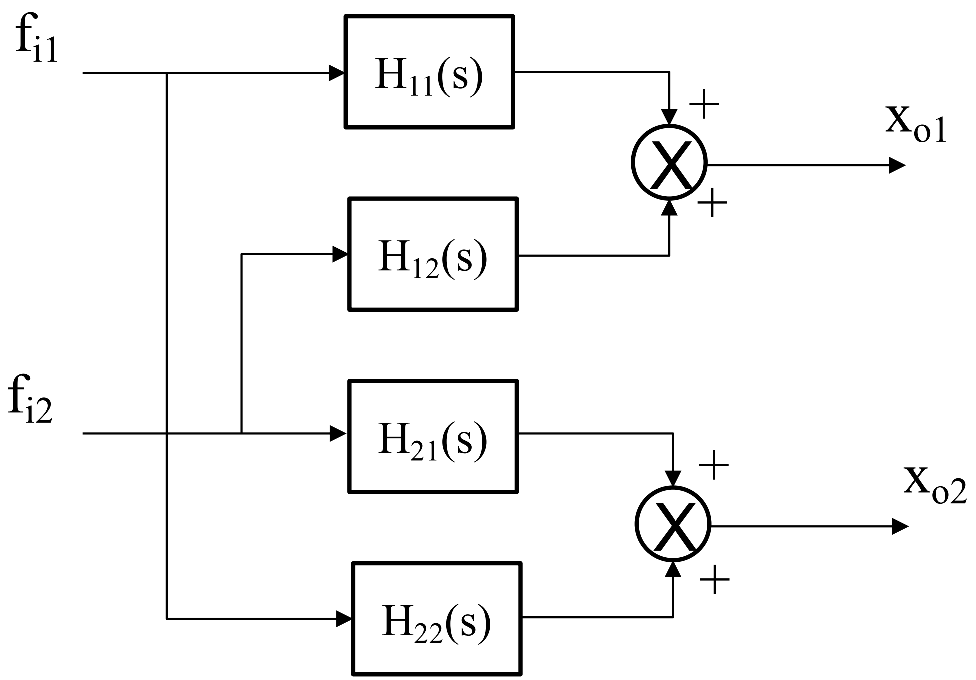
$$H_{21}(s) = \frac{B_2 s + K_2}{\Delta(s)} \qquad H_{22}(s) = \frac{M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)}{\Delta(s)}$$

Cont. ...

Representação em diagrama de blocos:

$$U_{o1}(s) = H_{11}(s)F_{i1}(s) + H_{12}F_{i2}(s)$$

$$U_{o2}(s) = H_{21}(s)F_{i1}(s) + H_{22}F_{i2}(s)$$



Sumarizando:

Lembrando que a solução para os deslocamentos de M_1 e M_2 veio da solução de

$$[A(s)]\{U_o(s)\} = \{F_i(s)\}$$

$$\Downarrow$$

$$[A(s)]^{-1}$$

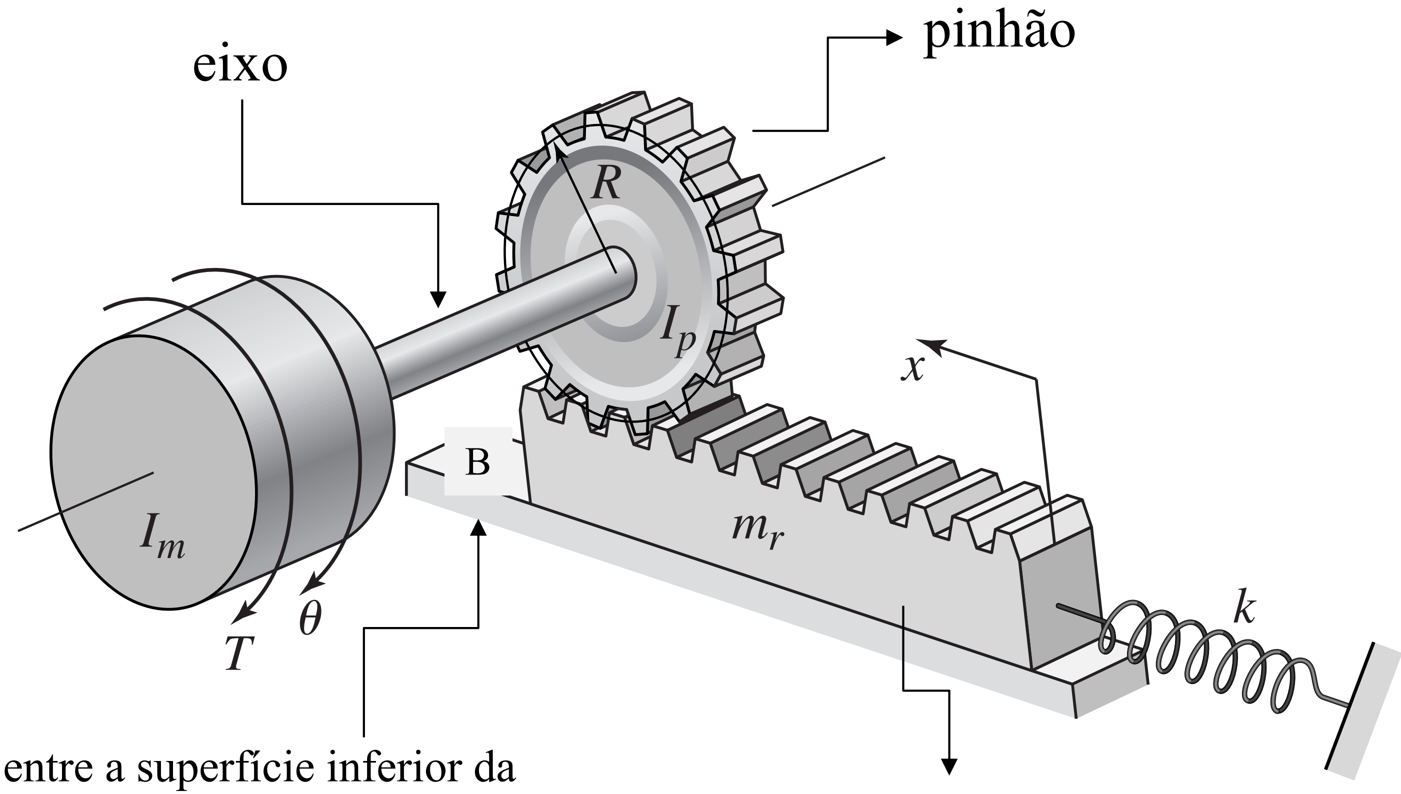
$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} U_{o1}(s) \\ U_{o2}(s) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} F_{i1}(s) \\ F_{i2}(s) \end{array} \right\}$$

RESPOSTA DO SISTEMA = PROPRIEDADES DO SISTEMA X ENTRADAS DO SISTEMA

Exemplo # 2

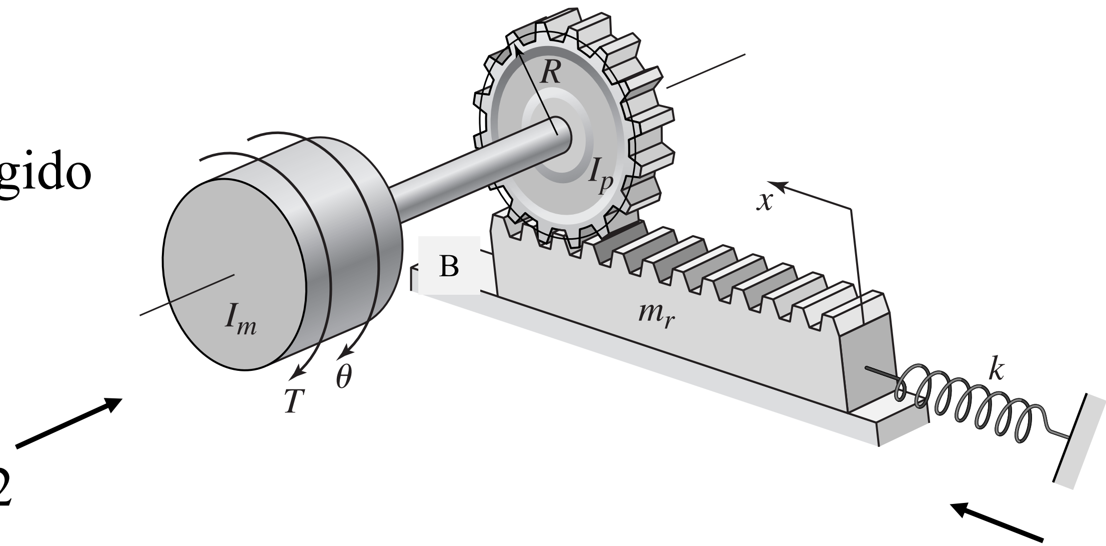
A figura mostra o conhecido mecanismo pinhão cremalheira e que possui várias aplicações práticas. Uma entrada torque $T(t)$ é aplicada ao cilindro de momento de inércia I_m, e o movimento é então transmitido para o pinhão, causando então o deslocamento linear x da cremalheira. Determine a F.T. X(s)/T(s). E.H.S.



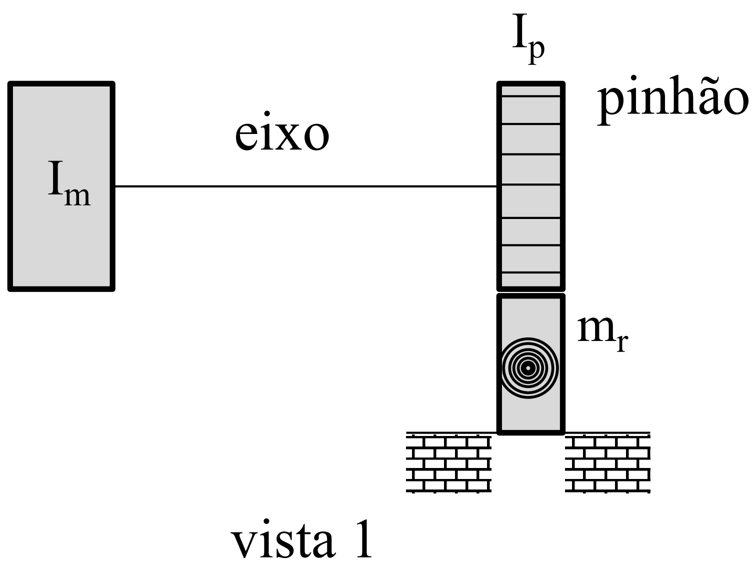
atrito entre a superfície inferior da cremalheira e a base modelado como viscoso de constante igual a B

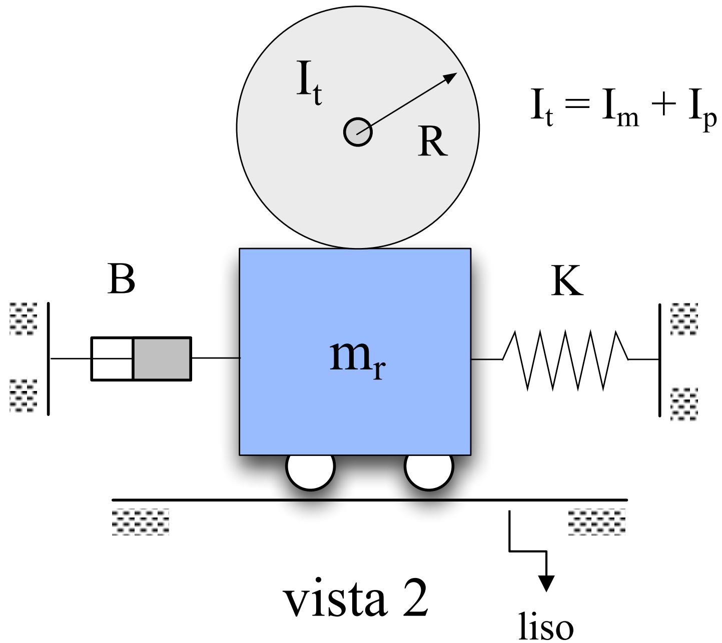
Hipóteses Simplificadoras

1. Elementos I_m, I_p e m_r rígidos
2. Eixo com massa desprezível e rígido
3. Atrito entre m_r e o plano viscoso
4. Contato ideal entre I_p e m_r
5. Elementos puros e ideais

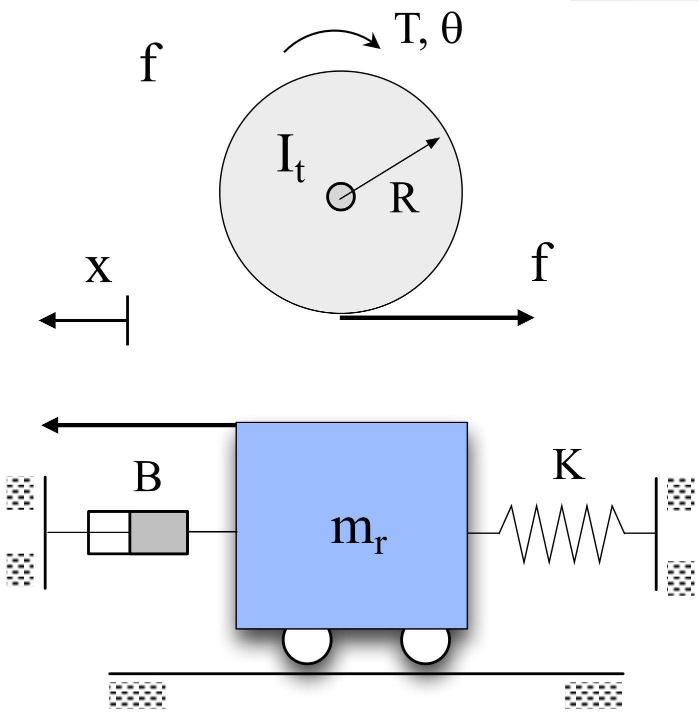


Modelo físico:





Equações Diferenciais do Modelo



f – força de contato entre o pinhão e a cremalheira

Pela H_4, contato ideal significa contato de rolamento puro, ou seja, não ocorre escorregamento entre o pinhão e a cremalheira. Neste caso, vale a seguinte relação de compatibilidade cinemática entre o pinhão e a cremalheira:

$$\boxed{x = R\theta}$$

$$\circlearrowleft + \sum_{i=1}^{N} \vec{T} = J\ddot{\vec{\theta}} \Rightarrow T - fR = I_t\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{I_t\ddot{\theta} + fR = T}$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \sum_{i=1}^{N} \vec{f} = m_r\ddot{\vec{x}} \Rightarrow f - B\dot{x} - Kx = m_r\ddot{x} \Rightarrow \boxed{m_r\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Determinação da F.T.

Aplicando a T. L. às três equações temos (CIs = 0)

$$X(s) = R\Theta(s)$$

$$I_t s^2 \Theta(s) + F(s)R = T(s)$$

$$\left(m_r s^2 + Bs + K\right) X(s) = F(s)$$

Combinando estas três últimas equações algébricas reduzimos à seguinte expressão

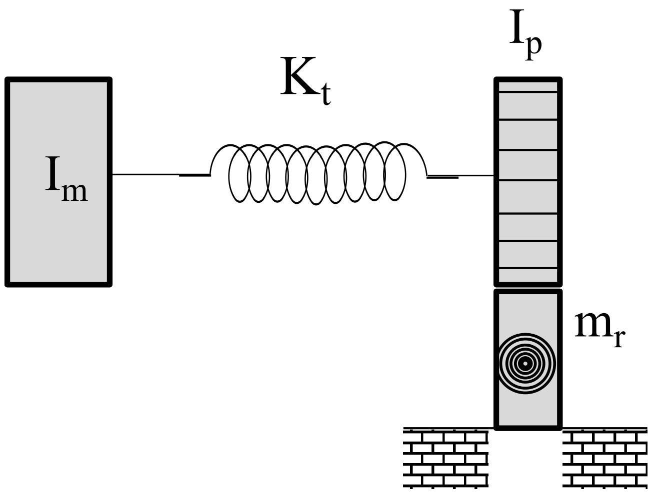
$$\left[\left(m_r + \frac{I_t}{R^2}\right) s^2 + Bs + K\right] X(s) = \frac{1}{R} T(s)$$

Da qual obtemos a F.T. desejada na F.P.

$$\boxed{\frac{X(s)}{T(s)} = \frac{\frac{1}{KR}}{\frac{1}{K}\left(m_r + \frac{I_t}{R^2}\right) s^2 + \frac{B}{K} s + 1}}$$ (Resp.)

Considerações adicionais

Adicionalmente, poderíamos aumentar o grau de complexidade do modelo, considerando, por exemplo que o eixo que conecta as duas inércias em rotação não seja rígido, possuindo, por exemplo uma constante elástica torsional igual a K_t:



Exercício: Escrevam as equações do novo modelo físico com eixo flexível e obtenham a mesma F.T. anteriormente solicitada.

FIM

Bom Estudo !

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves