

Física 2 para Químicos

Sistema de várias partículas, Dinâmica de corpos rígidos, Fluidos,
Oscilações e Ondas

- **Física - Sears & Zemansky, Young & Freedman - capítulos 8, 9, 10, 13, 14 e 15**
 - Curso de Física Básica - H. Moysés Nussenzweig
 - Fundamentos de Física - Halliday-Resnick-Walker
 - Física - Tipler

*P2: será permitido consulta a materiais manuscritos (sem acesso a livros ou eletrônicos, somente escritos à mão: resumos/anotações). Prova individual.

**Nestes dias poderão ser entregues Lista 1 e Lista 2 (5 exercícios cada) a serem feitas na aula, entregues no final (da aula) e podem, no máximo, valer 0,5 ponto cada uma (totalizando 1 ponto a ser adicionado nas notas das provas, se forem feitas integralmente).

Revisão

Momento linear, impulso e colisões

Definição de termos:

- **momento linear**
 - **impulso**
 - **centro de massas**
 - **posição, velocidade e aceleração de CM**
- Colisões - tipos e exemplos

Movimento translacional x Movimento rotacional

$$x \leftrightarrow \theta$$

$$v \leftrightarrow \omega$$

$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$v = v_0 + at \leftrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \leftrightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \leftrightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$K = \frac{mv^2}{2} \leftrightarrow K = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$m \leftrightarrow I$$

$$F = ma \leftrightarrow \tau = I\alpha$$

$$F \leftrightarrow \tau$$

$$P = Fv \leftrightarrow P = \tau\omega$$

Rotação

Corpo rígido pode girar em torno de eixo fixo sem mudança em sua forma (deformação - situação ideal).

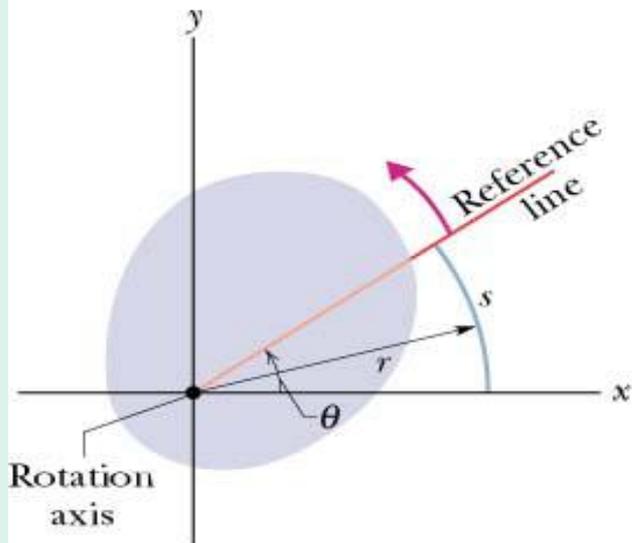
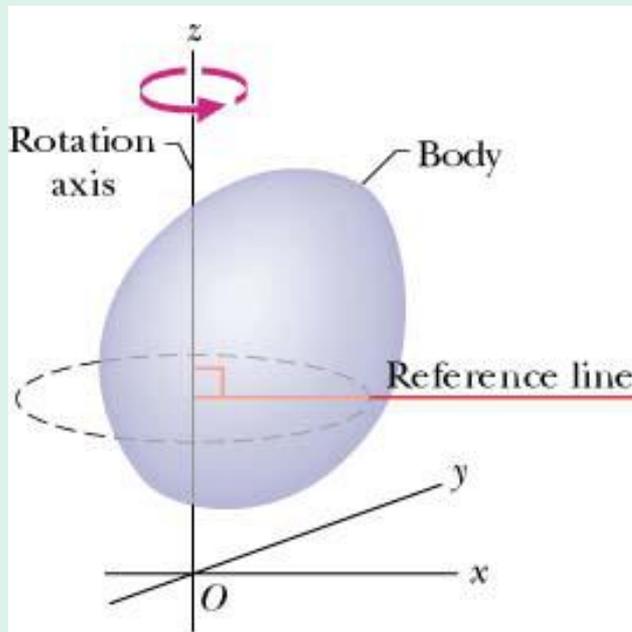
Posição angular de linha de referência perpendicular ao eixo fixo z em tempo t é dada por $\theta(t)$ que linha faz com reta fixa tomada como posição angular zero em $t = 0$.

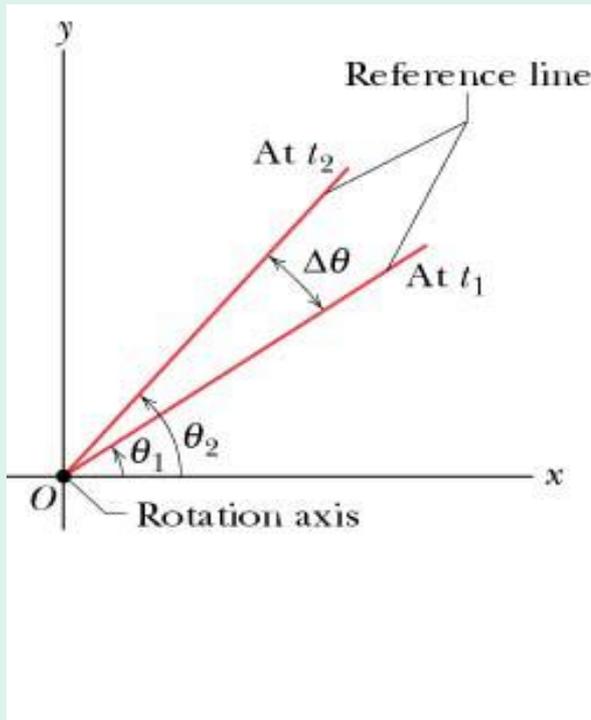
$\theta(t)$ (rad) define posição de ponto do corpo relacionado ao comprimento do arco s que ponto viaja à distância r do eixo z :

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$1 \text{ rpm} = 2\pi/60 \text{ rad}$$





Para posições θ_1 (em t_1) a $\theta_2(t_2)$, **deslocamento angular (rad)** para corpo rígido é:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

$$\omega_{avg} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocidade angular média (**rad/s**)

em intervalo t_1 a t_2 :

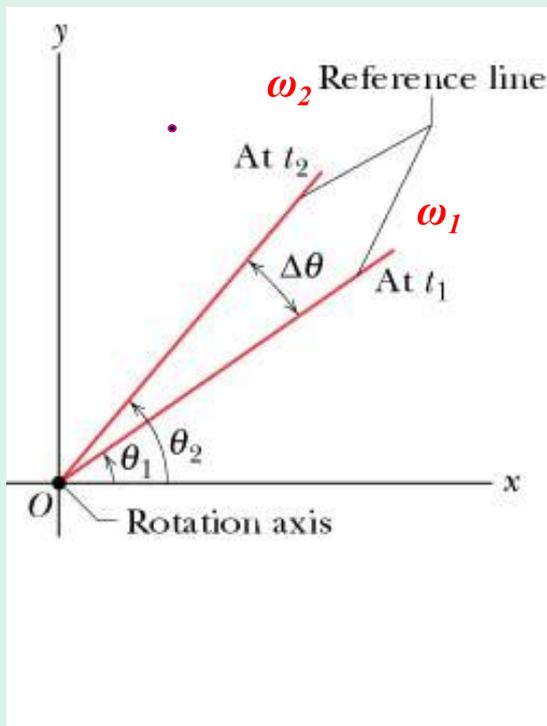
Velocidade angular instantânea:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Rotação no sentido **anti-horário** $\rightarrow \omega$ **positivo**

Rotação **horária** $\rightarrow \omega$ **negativo**.



Aceleração angular (rad/s^2)

taxa de variação da velocidade angular com o tempo. Em t_1 , têm-se (ω_1) e em t_2 (ω_2).

Aceleração angular média entre t_1 e t_2

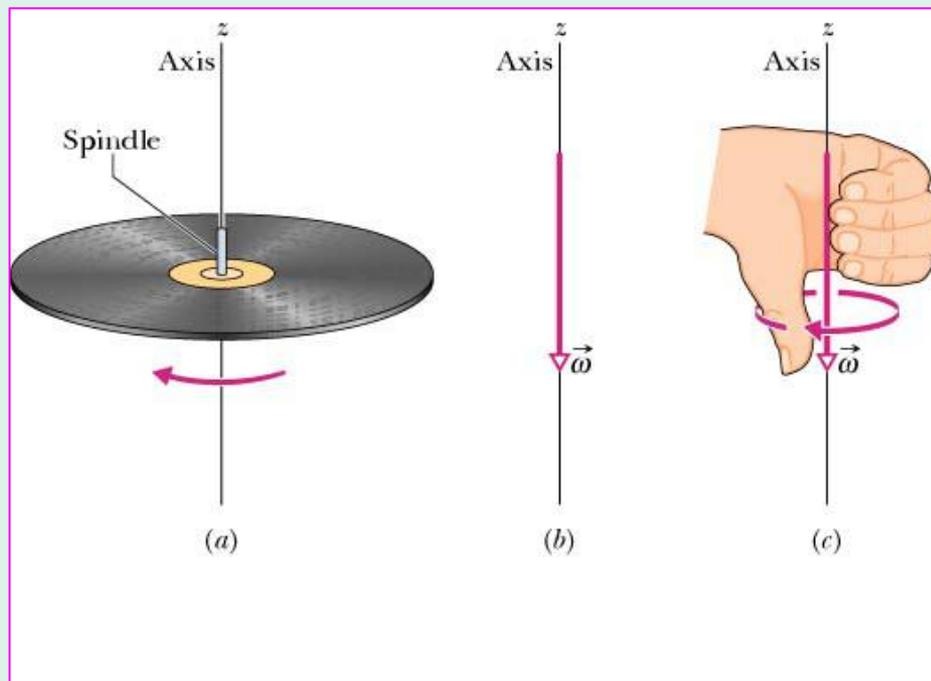
$$\alpha_{avg} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleração angular instantânea

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Grandezas angulares são vetores?



Para rotações de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, ω pode ser negativo (rotação horária) ou positivo (rotação anti-horária). O vetor $\vec{\omega}$ está sobre o eixo de rotação e seu sentido é dado pela regra da mão direita.

Atenção:

Deslocamentos angulares não podem ser tratados como vetores pois não obedecem a regra de soma vetorial (a ordem dos vetores seria irrelevante)!

Precisamos ser cautelosos ao associar um vetor a uma rotação, pois vetores devem **obedecer às regras da soma vetorial**, o que não acontece com as rotações.

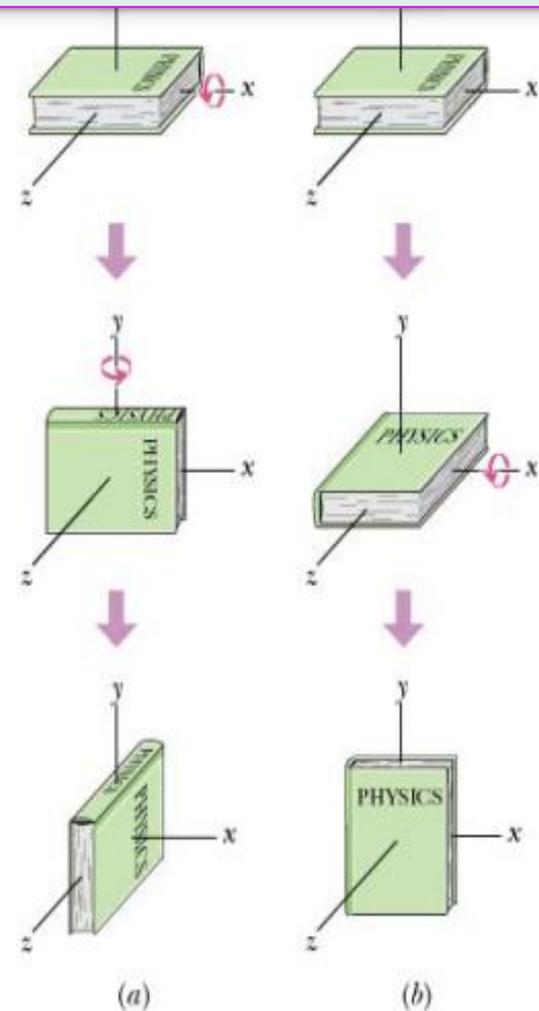
Por exemplo, a soma vetorial é **comutativa** ($\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$), mas **duas rotações sucessivas feitas em ordens diferentes dão resultados diferentes!**

O exemplo ao lado mostra duas rotações sucessivas de $\pi/2$ em torno dos eixos **x** e **y** nas duas ordens possíveis: **o resultado final depende da ordem!**

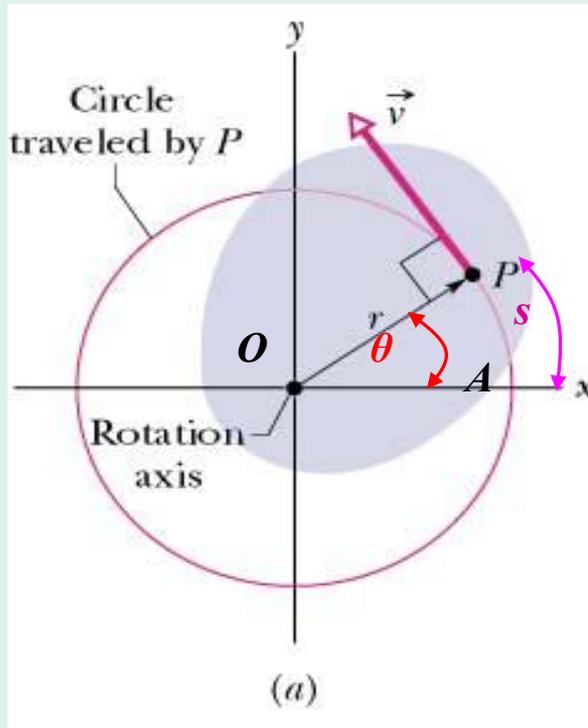
$$\Delta\theta_1 \hat{x} + \Delta\theta_2 \hat{y} \neq \Delta\theta_2 \hat{y} + \Delta\theta_1 \hat{x}$$

Então:

$\Delta\theta \hat{z}$ **não é um vetor!**



Grandezas lineares e angulares



Considere ponto P de corpo rígido localizado a r da origem e girando em torno de eixo fixo em z . No tempo t , P se move de θ ao longo do arco AP que corresponde à distância s .

$$s = r\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad \boxed{v = r\omega}$$

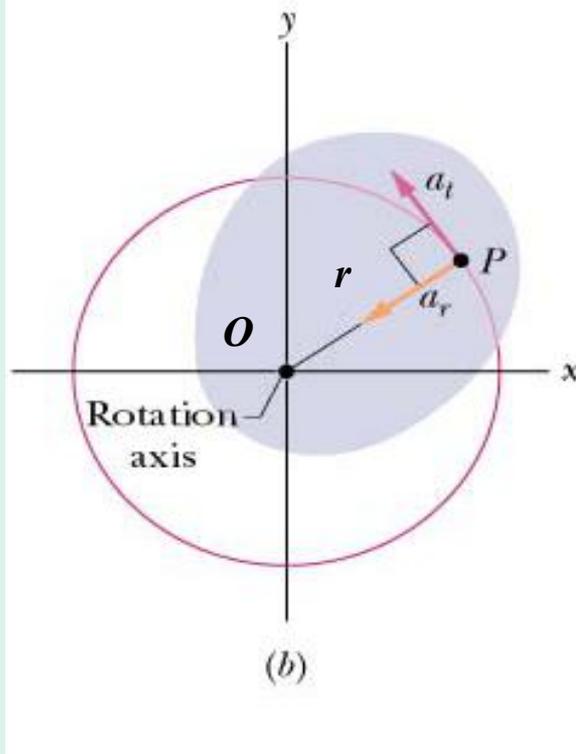
Período da revolução:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{f}}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$



Aceleração do ponto P é vetor com duas componentes - radial ao longo do raio e apontando para O e tangencial ao percurso de P

Aceleração radial
(centrípeta):

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Aceleração tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$a_t = r\alpha$$

A magnitude do vetor aceleração é: $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$

Rotação com aceleração angular constante

Movimento Translacional

Movimento Rotacional

$$x \leftrightarrow \theta$$

$$v \leftrightarrow \omega$$

$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$v = v_0 + at \leftrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t \quad (\text{eqs.1})$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \leftrightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (\text{eqs.2})$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \leftrightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (\text{eqs.3})$$

Energia Cinética de Rotação

Dividindo as partes do corpo em massas m_1 , m_2 , m_3 , etc, têm-se que a parte em P tem massa m_i

A $K_{\text{cinética}}$ total será a soma para todas as partes:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Substituindo acima a velocidade do elemento i, $v_i = \omega r_i \rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2$

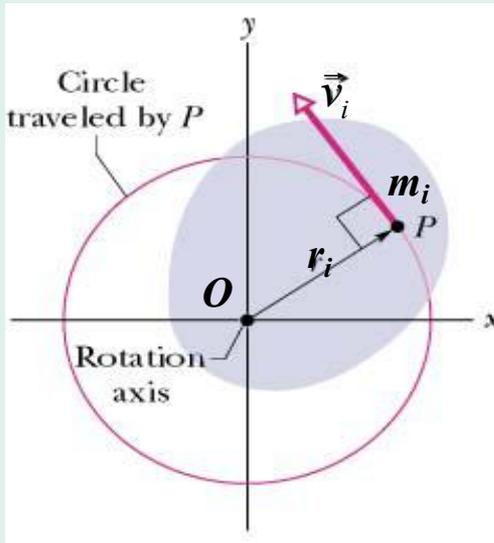
$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

O momento de inércia (I) descreve como a massa de um objeto se distribue em torno de um eixo de rotação.

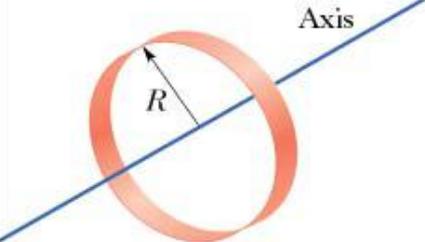
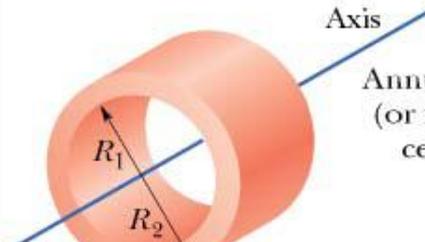
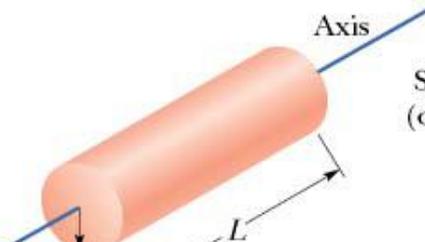
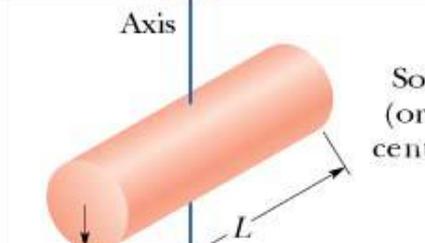
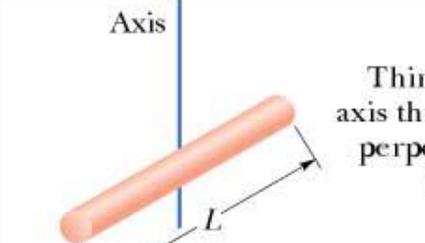
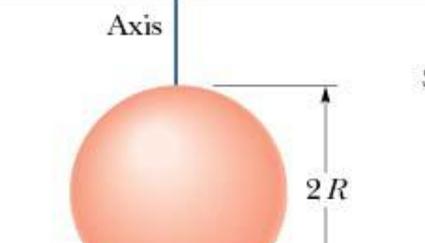
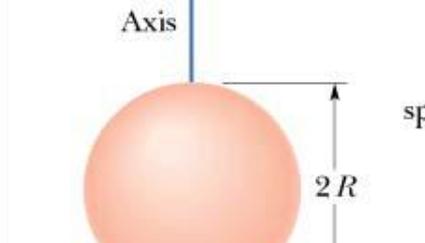
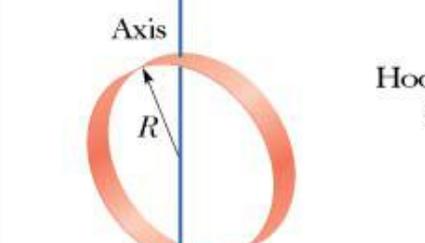
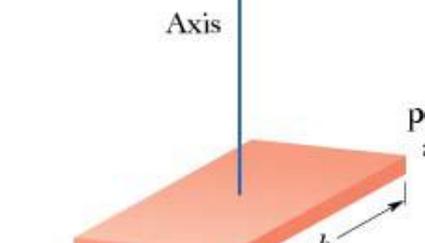
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$



Na tabela abaixo estão os momentos de inércia para alguns corpos rígidos

 <p>Hoop about central axis</p> <p>$I = MR^2$</p> <p>(a)</p>	 <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p>$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$</p> <p>(b)</p>	 <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(c)</p>
 <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p>$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(d)</p>	 <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p>$I = \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(e)</p>	 <p>Solid sphere about any diameter</p> <p>$I = \frac{2}{5}MR^2$</p> <p>(f)</p>
 <p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p>$I = \frac{2}{3}MR^2$</p> <p>(g)</p>	 <p>Hoop about any diameter</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(h)</p>	 <p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p>$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$</p> <p>(i)</p>

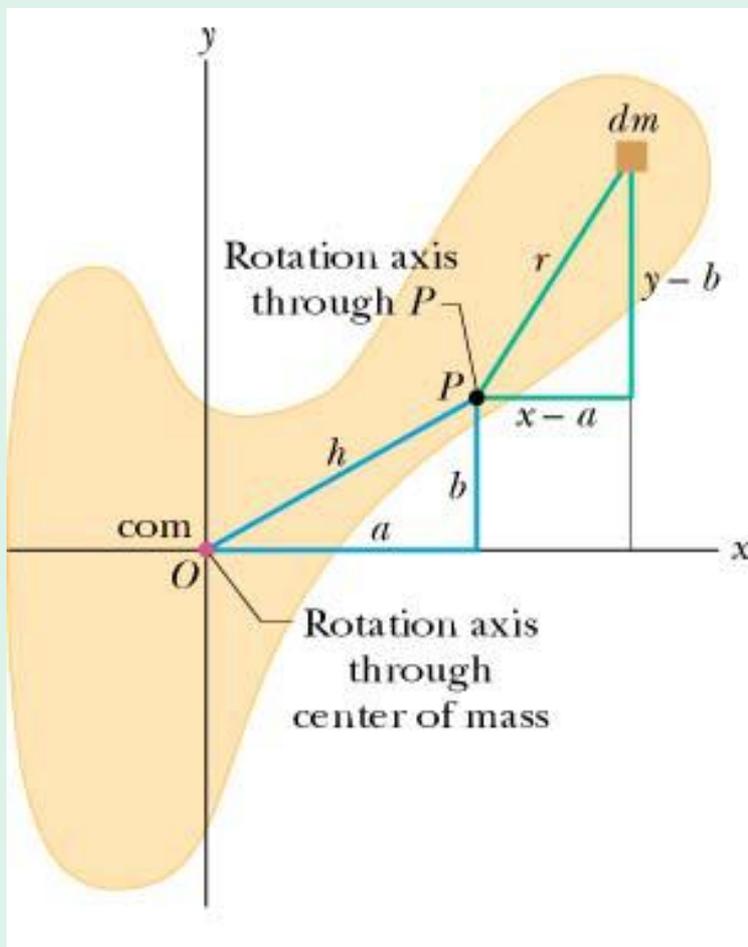
Cálculo do Momento de Inércia Rotacional, I

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Corpo rígido com distribuição discreta de massa

$$I = \int r^2 dm$$

Distribuição contínua de massa



Teorema do eixo paralelo

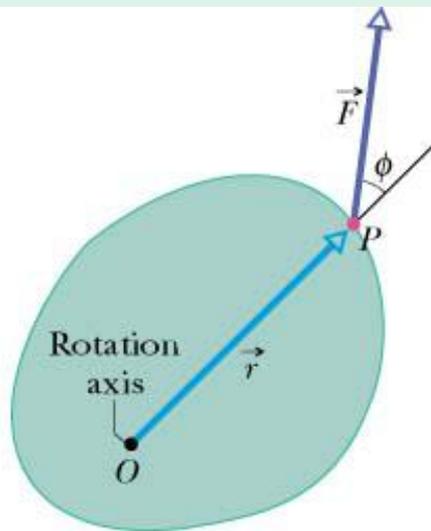
I depende da posição do eixo de rotação. Se o eixo muda, o momento I também muda. Para corpo rígido, com massa M, assume-se que eixo de rotação passa por CM do corpo I_{cm} perpendicular a página. Momento de inércia em relação a eixo que passa por P, distante de h do eixo em O, é:

$$I = I_{com} + Mh^2$$

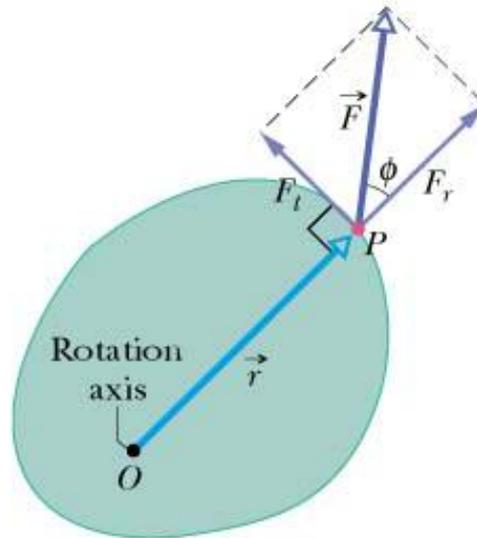
Torque

O corpo na figura (a) gira em torno de um eixo em O sob influência de uma força \vec{F} aplicada ao ponto P que dista de \vec{r} do eixo em O. Separando a força em duas componentes radial F_r e tangencial F_t (b), observa-se que a primeira não pode causar rotação por estar sobre a linha que conecta a O. A força tangencial $F_t = F \sin\phi$ causa rotação! O torque é $\tau = rF \sin\phi = rF_t$:

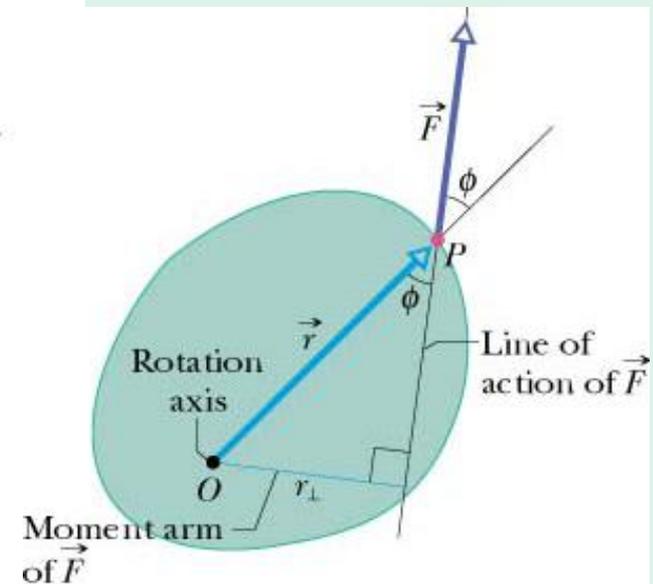
$$\tau = r_{\perp} F$$



(a)



(b)



(c)

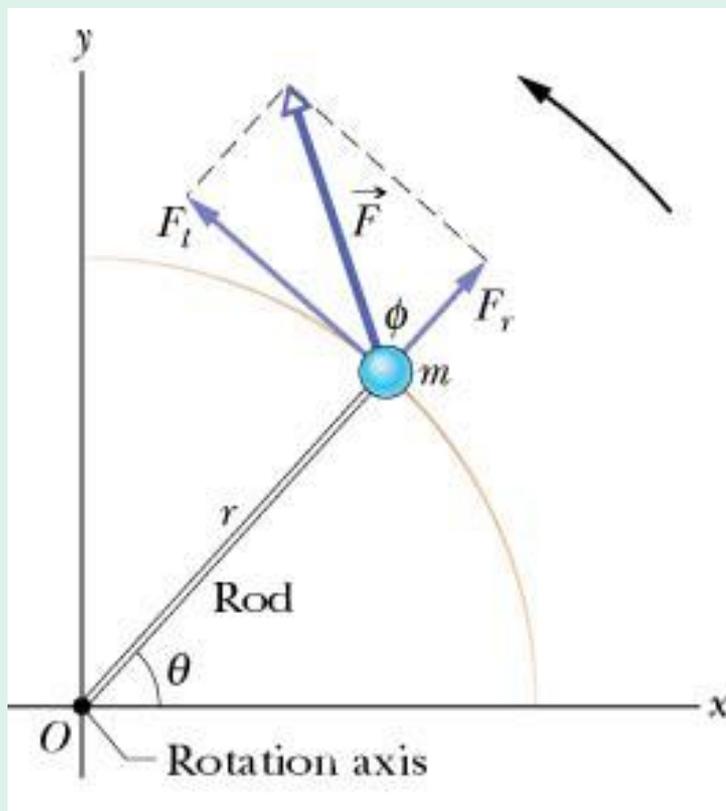
Segunda Lei de Newton para a Rotação

Movimento Translacional:

$$F = ma$$

Movimento Rotacional:

$$\tau = I\alpha$$



Para um corpo rígido com massa pontual m girando em torno de O :

$$F_t = ma_t$$

$$\tau = F_t r$$

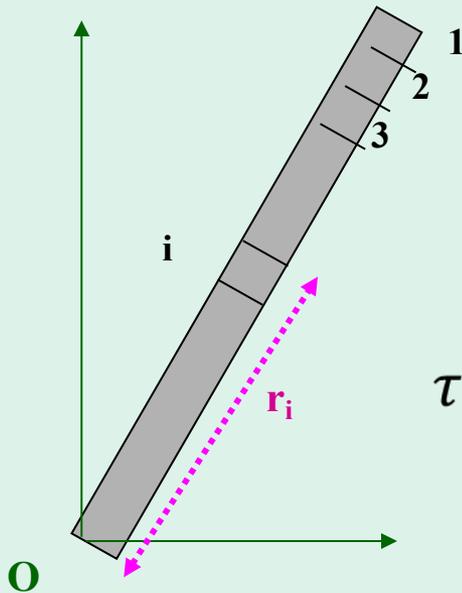
$$\tau = ma_t r = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha$$

$$\tau = I\alpha$$

Segunda Lei de Newton para a Rotação

Vamos agora derivar a mesma equação para um caso mais geral:

Considere-se a haste da figura que pode girar em torno de um eixo em O sob influência de um torque resultante τ_{res} . Dividindo o corpo em partes ou “elementos” com massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ localizadas nas distâncias $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ de O, aplicamos a 2a Lei de Newton para cada elemento:



$$\tau_1 = I_1\alpha, \quad \tau_2 = I_2\alpha, \quad \tau_3 = I_3\alpha, \quad \text{etc.}$$

Se adicionarmos todas essas equações:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n = I_1\alpha + I_2\alpha + I_3\alpha + \dots + I_n\alpha$$

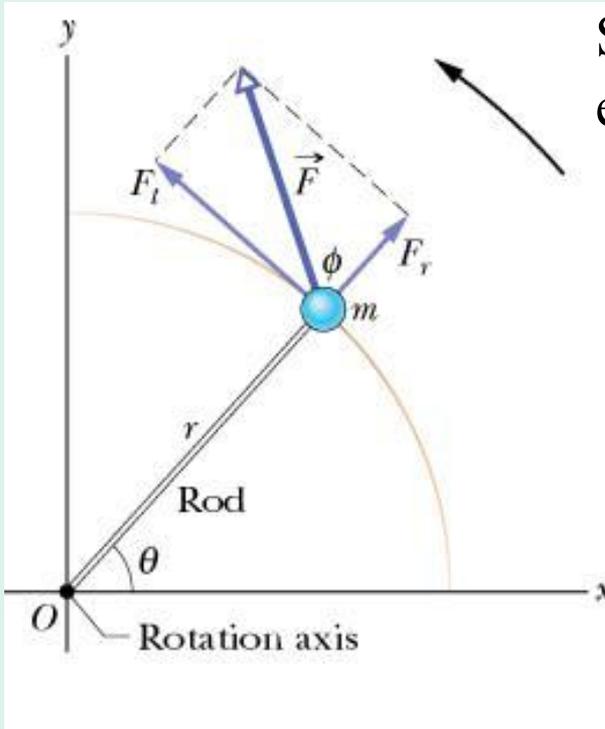
$$\tau_{res} = (I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n)\alpha$$

$$\tau_{res} = I\alpha$$

Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Se uma força exerce trabalho W^* sobre um objeto, isto resulta em uma mudança em sua energia cinética $\Delta K = W$. De maneira similar, quando um torque exerce W em um corpo rígido em rotação, temos que:

$$W = \Delta K$$



Sistema simples com massa m girando em torno de O e haste de massa desprezível e comprimento r :

$$dW = F_t r d\theta = \tau d\theta$$

$$W = \int F_t r d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta.$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$ds = r d\theta$$

$$\tau = F_t r$$

$$\Delta K = W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega_f^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega_i^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

*Trabalho realizado por uma força constante em translação: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

Potência:

Taxa na qual trabalho é feito por uma força (ou torque).

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau d\theta) = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega \quad (\text{Compare with } P = Fv)$$

Equações importantes do teorema trabalho-energia cinética rotacional

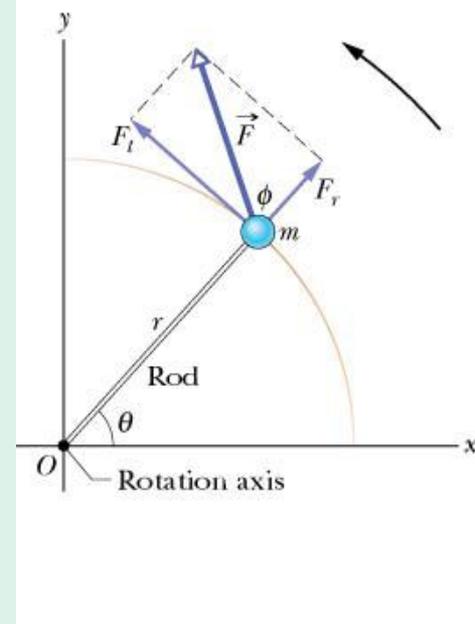
$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad \text{Para torque constante}$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

Teorema Trabalho-Energia Cinética de rotação

$$P = \tau\omega$$

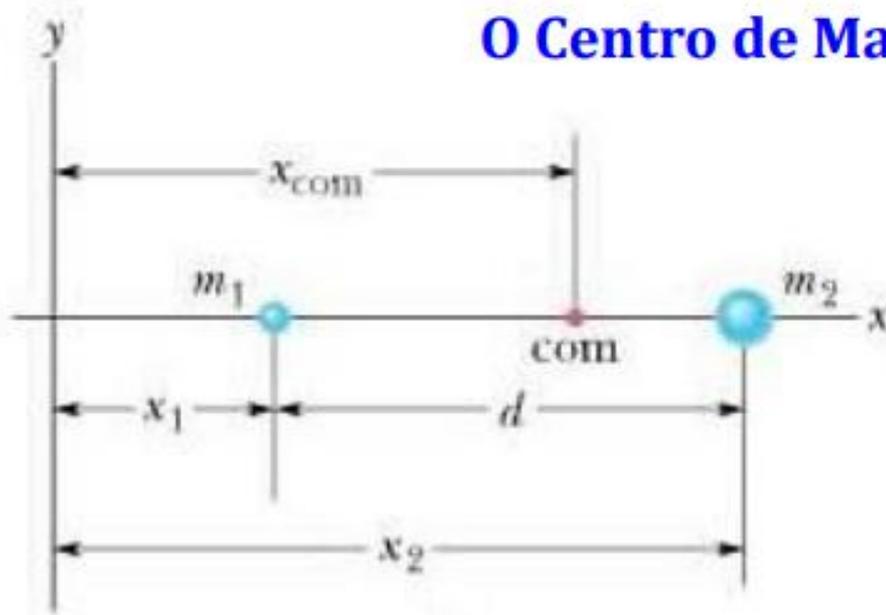


O movimento de qualquer corpo, ou sistema de partículas, qualquer que seja a sua complexidade, pode ser descrito em termos do centro de massa
+
movimento das partículas individuais do sistema em relação ao centro de massa.

“Média ponderada das posições de todas as partículas que compõem o sistema”

Centro de massa - “posição (ponto) que se move como se toda a massa estivesse concentrada nele e forças externas atuantes estivessem agindo exclusivamente sobre ele”

O Centro de Massa



$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Generalizando para um sistema com n partículas de massa m_i e posição x_i :

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

No espaço tridimensional, utiliza-se o vetor posição

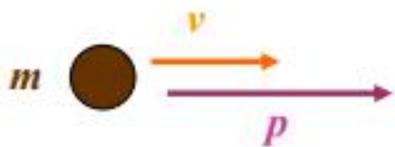
$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad ; \quad \vec{r}_{com} = x_{com} \hat{i} + y_{com} \hat{j} + z_{com} \hat{k}$$

$$x_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad z_{com} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$



O centro de massa de um sistema de partículas se move como se toda a massa do sistema estivesse ali concentrada e como se a soma vetorial de todas as forças externas fossem ali aplicadas. O centro de massa segue uma trajetória parabólica mas os outros pontos seguem uma trajetória bem mais complicada.



Momento Linear de uma partícula

O momento linear \vec{p} de uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} é definido como $\vec{p} = m\vec{v}$

A unidade SI para esta grandeza é kg.m/s

A segunda lei de Newton em termos de momento:

A taxa de variação com o tempo do momento de uma partícula é igual à força resultante que atua sobre a partícula e tem a mesma orientação que essa força.

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Em outras palavras, o momento da partícula somente irá sofrer alteração no caso de haver uma força externa atuante sobre ela.

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Momento Linear de um sistema de partículas

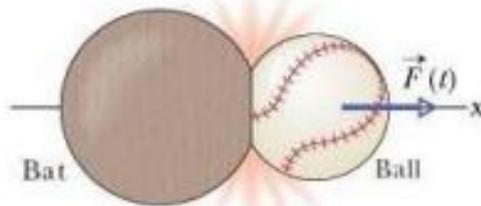
O momento linear \vec{P} de um sistema de partículas de massa M e velocidade \vec{v}_{cm} é definido como $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$

Este momento pode ser alterado por uma força externa dada por:

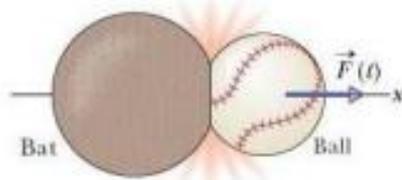
$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Colisão e Impulso

O momento de um objeto pode mudar se atuar sobre ele uma força externa resultante diferente de zero. Isto ocorre por exemplo em uma colisão em que a força atuante é grande e atua por breve período.

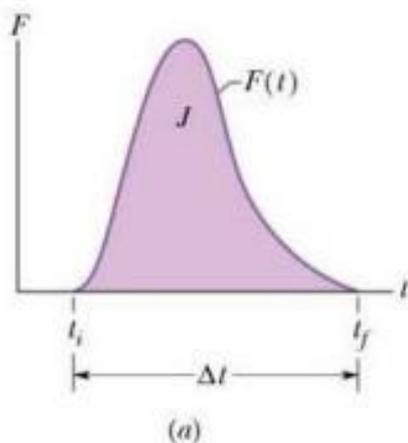


Colisão e Impulso



A colisão começa num tempo t_i quando por exemplo um taco de beisebol acerta a bola e termina em t_f quando os objetos se separam. A força é diferente de zero apenas no intervalo $t_i < t < t_f$

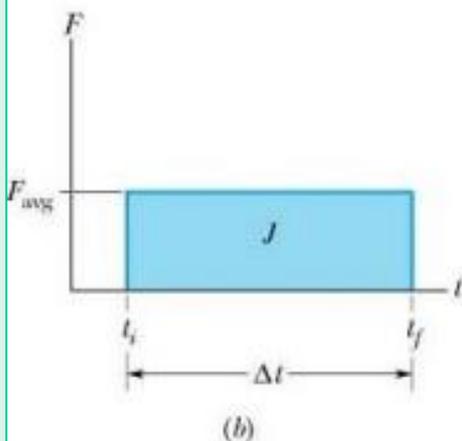
$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad d\vec{p} = \vec{F}(t)dt \rightarrow \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$



A variação do momento de um objeto é igual ao **impulso** exercido sobre o objeto

$$\Delta p = J$$

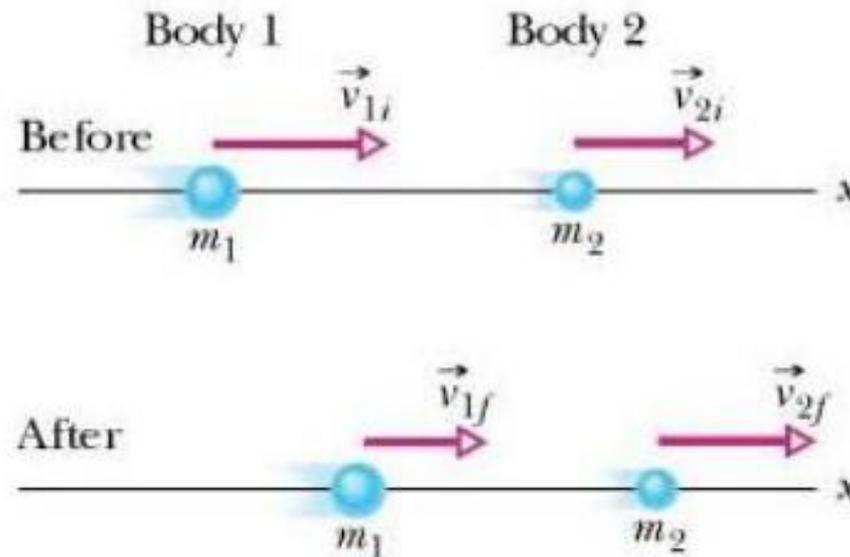
Em muitas situações não conhecemos como a força varia com o tempo mas conhecemos o módulo da F_{med} e a duração Δt da colisão. Neste caso, o impulso J pode ser escrito em termos da F_{med} . J experimentado pelo taco tem o mesmo módulo daquele experimentado pela bola só que em sentido oposto.



$$J = F_{med}\Delta t$$

Momento e Energia Cinética em Colisões

Considere-se 2 objetos de massa m_1 e m_2 com velocidades iniciais v_{i1} e v_{i2} e velocidades finais v_{f1} e v_{f2} após colidirem.



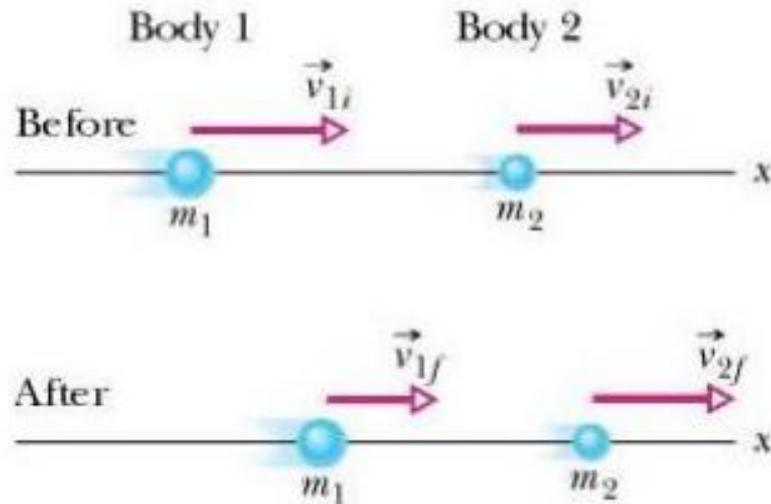
Se a força externa resultante é zero o momento linear do sistema das duas partículas é conservado, mas a energia pode, ou não, o ser. A colisão pode ser elástica $K_i = K_f$ ou inelástica $K_f < K_i$ sendo um caso especial de colisão inelástica aquele em que as duas partículas ficam aglutinadas passando a se mover juntas, caso este em que a perda de energia cinética é total.

Colisões unidimensionais inelásticas

Nestas colisões o momento linear dos objetos que colidem é conservado e parte da **energia cinética é perdida** na forma de outras energias (térmica, sonora, etc).

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

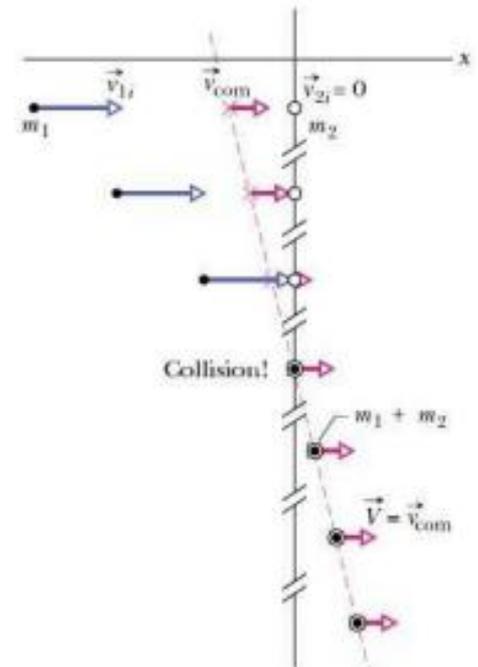
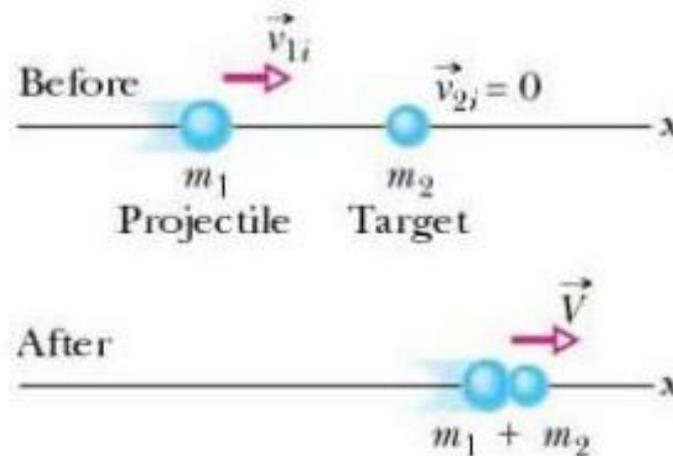


Colisões unidimensionais completamente inelásticas

Nestas colisões os dois objetos que colidem aglutinam-se e passam a se mover como um único corpo. Na figura, mostra-se um caso especial em que $v_{2i} = 0 \rightarrow m_1 v_{1i} = m_1 V + m_2 V \rightarrow V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$

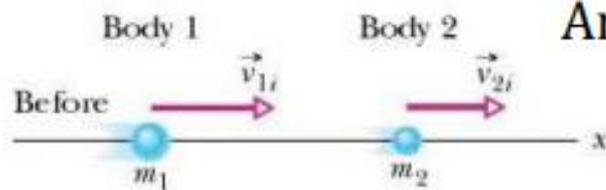
A velocidade V final nesta colisão será a velocidade do centro de massa v_{cm}

$$\vec{v}_{cm} = \frac{P}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m \vec{v}_{1i}}{m_1 + m_2}$$



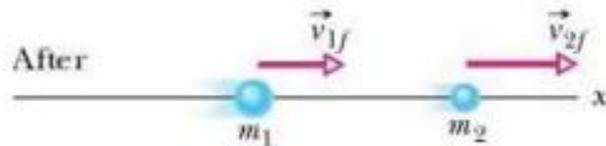
Colisões unidimensionais elásticas

Considere-se 2 objetos de massa m_1 e m_2 com velocidades iniciais v_{1i} e v_{2i} e velocidades finais v_{1f} e v_{2f} após colidirem.



Ambos, **momento e energia cinética são conservados.**

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (1)$$



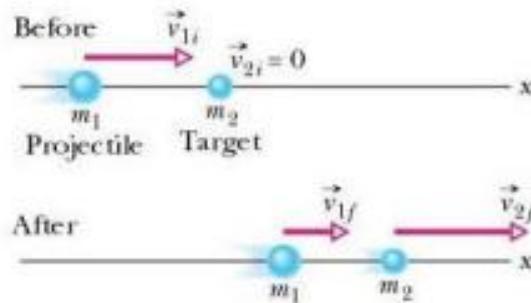
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (2)$$

Temos duas equações e duas incógnitas v_{1f} e v_{2f} . Se dividirmos a eq. (2) pela (1) e reagruparmos os termos teremos:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

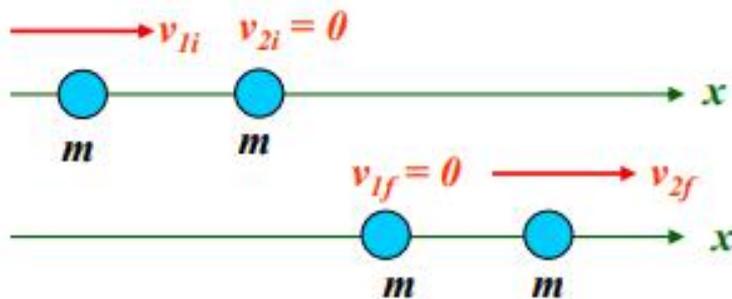
Caso especial de colisões elásticas com alvo estacionário ($v_{2i} = 0$)



$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \rightarrow v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \rightarrow v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Abaixo temos vários casos especiais para os quais conhecemos o resultado:



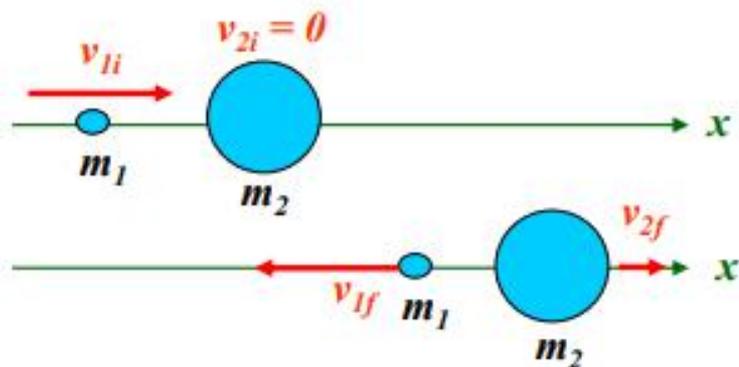
1. Massas iguais $m_1 = m_2 = m$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{m - m}{m + m} v_{1i} = 0$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2m}{m + m} v_{1i} = v_{1i}$$

Os objetos trocam de velocidade.

2. Um alvo massivo: $\frac{m_1}{m_2} < 1$ $m_2 = ?$



$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_{1i} \approx -v_{1i}$$

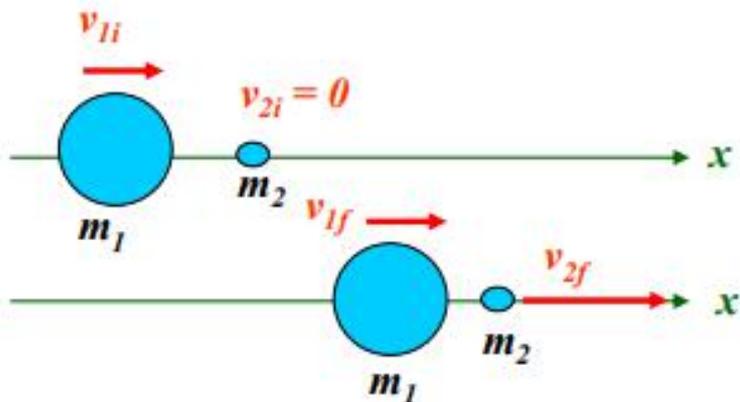
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_{1i} \approx 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right) v_{1i}$$

O corpo 1 (massa pequena) ricocheteia de volta ao longo do mesmo percurso com sua massa praticamente inalterada.

O corpo 2 (massa grande) move adiante com velocidade muito baixa pois

$$\frac{m_1}{m_2} < 1$$

2. Um projétil massivo: $\frac{m_2}{m_1} < 1$ $m_2 = ?$

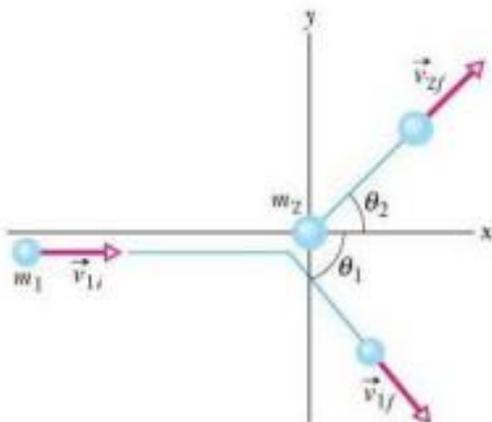


$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_{1i} \approx v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_{1i} \approx 2v_{1i}$$

O corpo 1 (massa grande) continua seu movimento ligeiramente freado.

O corpo 2 (massa pequena) é acelerado para frente com o dobro da velocidade inicial do corpo 1.



Colisões em duas dimensões

Assume-se agora que os dois objetos que colidem se movem no plano xy . O momento linear do sistema se conserva.

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$$

E se o sistema for elástico, a energia cinética também se conserva.

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

Assumimos que m_2 é estacionária e que após a colisão, as partículas 1 e 2 se movem em ângulos θ_1 e θ_2 com a direção inicial do movimento de m_1 . Neste caso, a conservação do momento e da energia cinética fica:

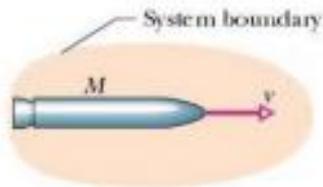
$$\text{Eixo x:} \quad m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \quad (\text{eq. 1})$$

$$\text{Eixo y:} \quad 0 = -m_1 v_{1f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \quad (\text{eq. 2})$$

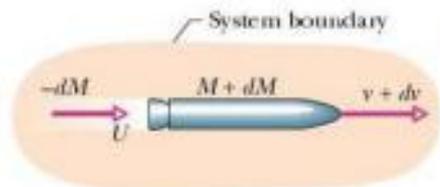
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{eq. 3})$$

3 equações e 7 variáveis, se conhecermos 4 desses podemos calcular as demais

Sistemas com massa variável: O foguete



(a)



(b)

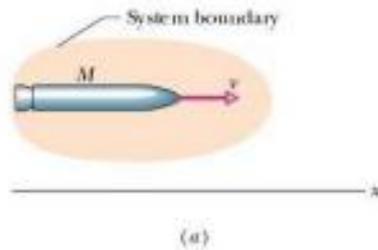
Um foguete com massa M e velocidade v ejeta massa a uma taxa constante dM/dt . O material é expelido a uma velocidade constante v_{rel} com relação ao foguete. Portanto, o foguete perde massa e acelera para frente.

Nas figuras (a) e (b) o foguete é mostrado em tempos t e $t+dt$. Se não há forças externas atuantes, p se conserva.

$$p(t) = p(t + dt) \rightarrow Mv = -UdM + (M + dM)(v + dv) \quad (\text{eqs.1})$$

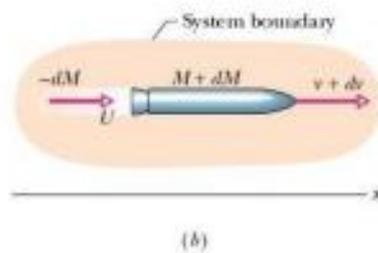
Aqui, dM é um número negativo (a massa do foguete decresce com t), U é a velocidade dos gases ejetados com relação ao referencial inercial no qual se mede a velocidade do foguete v . U pode ser expresso em termos de v_{rel} , medida com relação ao foguete. $U = v + dv - v_{rel}$

$$Mdv = -dMv_{rel}$$



Utilizando a conservação de momento linear, pode-se derivar a equação de movimento do foguete:

$$Mdv = -dMv_{rel} \quad (\text{eqs.2})$$



Assume-se que o material é ejetado a uma taxa constante e positiva denotada por R

$$\frac{dM}{dt} = -R \quad (\text{eqs.3})$$

Dividindo ambos os lados da eq. 2 por dt: $M \frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} v_{rel} = Rv_{rel} \rightarrow Ma = Rv_{rel}$ sendo a a aceleração do foguete. (1ª eq. do foguete)

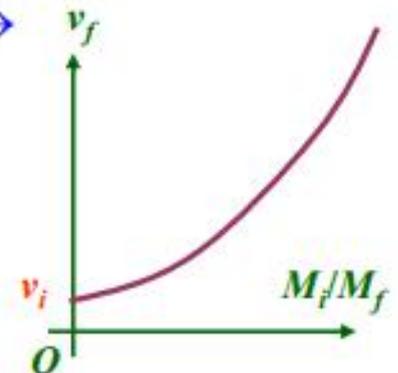
Utilizamos a eq. 2 para determinar a taxa de variação da velocidade do foguete:

$$dv = -v_{rel} \frac{dM}{M} \quad \text{Integrando ambos os lados: } \int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{rel} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \rightarrow$$

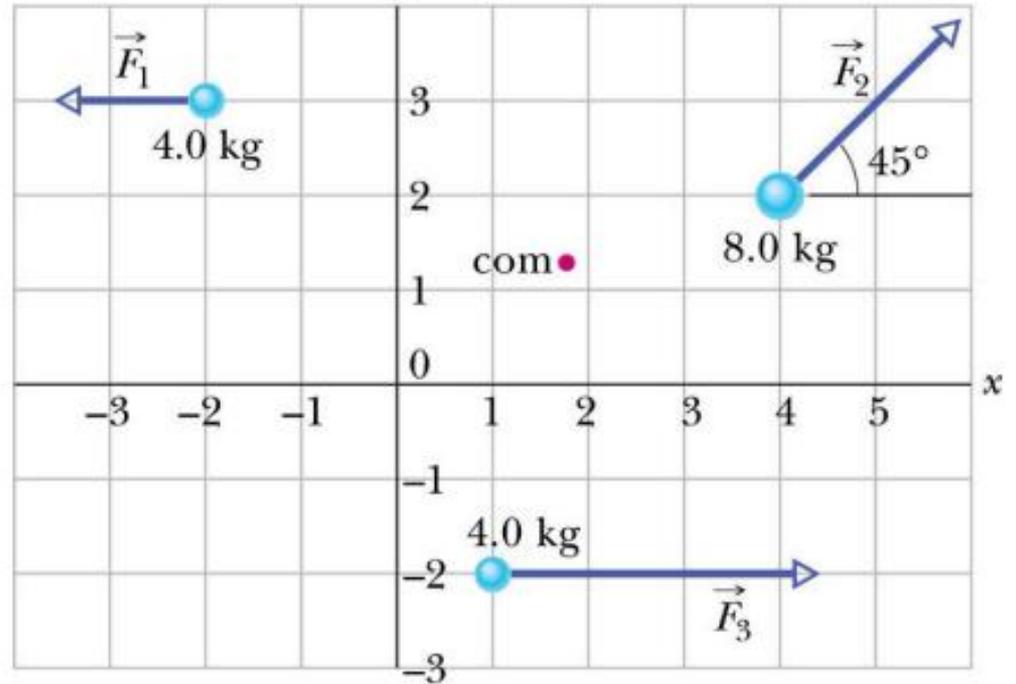
$$v_f - v_i = -v_{rel} [\ln M]_{M_i}^{M_f} = v_{rel} [\ln M]_{M_f}^{M_i} = v_{rel} \ln \frac{M_i}{M_f}$$

$$v_f - v_i = v_{rel} \ln \frac{M_i}{M_f}$$

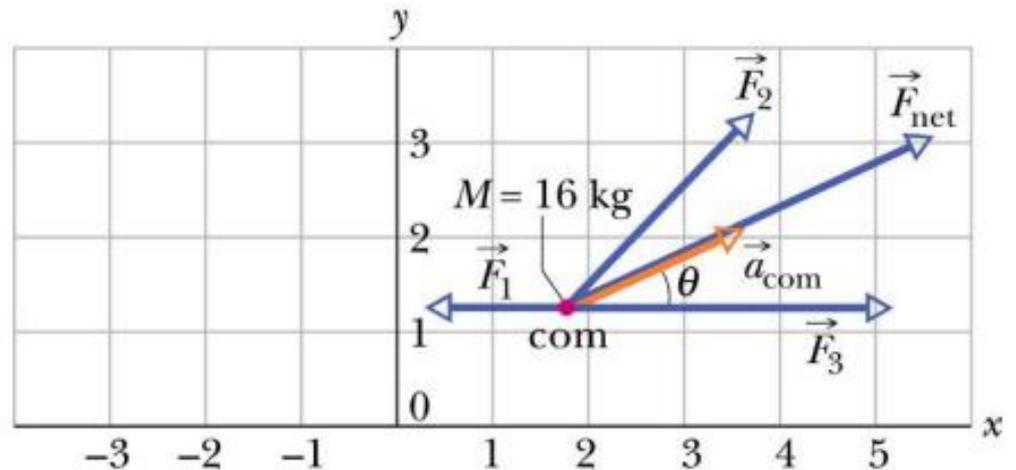
(2ª eq. do foguete)



Exemplo 9-3: As três partículas da figura estão inicialmente em repouso. Cada uma sofre a ação de uma força externa devido a agentes fora do sistema de partículas. As orientações destas forças estão indicadas e os módulos são $F_1 = 6,0\text{N}$, $F_2 = 12\text{N}$, $F_3 = 14\text{N}$. Qual é a aceleração do centro de massa e em que direção ele se move?



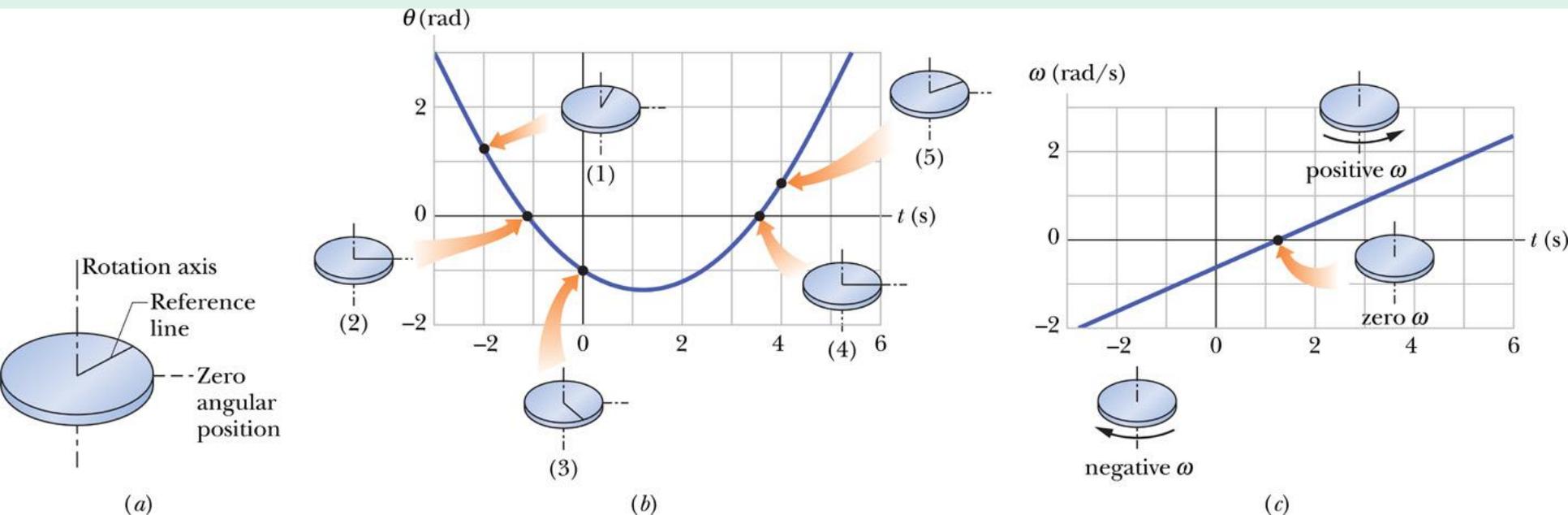
(a)



(b)

Exemplo 10-1

O disco está girando em torno do seu eixo central como um carrossel. A posição angular $\theta(t)$ de uma reta de referência do disco é dada por $\theta = -1,00 - 0,600t + 0,250t^2$ com t em segundos, θ em radianos e a posição angular zero indicada. (a) Faça um gráfico da posição angular do disco em função do tempo, de $t = -3,0$ s a $t = 5,4$ s. Desenhe o disco e sua reta de referência em $t = -2,0$ s, 0 s, $4,0$ s e os instantes em que o gráfico cruza o eixo t . (b) Em que instante t_{\min} o ângulo $\theta(t)$ passa pelo valor mínimo mostrado na fig. 10-5b? Qual é esse valor mínimo? (c) Plote a velocidade angular ω do disco em função do tempo de $t = -3,0$ s a $t = 6,0$ s. Desenhe o disco e indique o sentido de rotação e o sinal de ω em $t = -2,0$ s, $4,0$ s e t_{\min} .



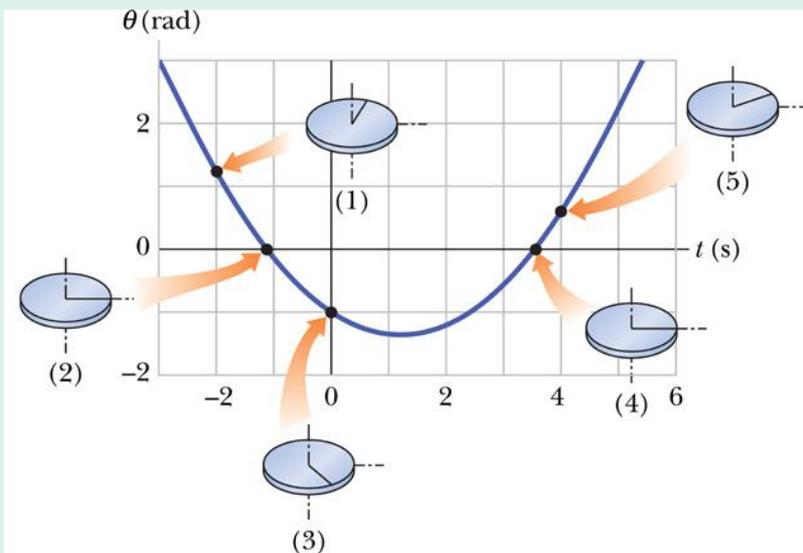
(a) Faça um gráfico da posição angular do disco em função do tempo, de $t = -3,0$ s a $t = 5,4$ s. Desenhe o disco e sua reta de referência em $t = -2,0$ s, 0 s, $4,0$ s e os instantes em que o gráfico cruza o eixo t .

Cálculos: Para desenhar o disco e sua reta de referência em um certo instante precisamos determinar o valor de θ nesse instante. Para isso substituímos t por seu valor na Eq. 10-9. Para $t = -2,0$ s, obtemos

$$\begin{aligned}\theta &= -1,00 - (0,600)(-2,0) + (0,250)(-2,0)^2 \\ &= 1,2 \text{ rad} = 1,2 \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 69^\circ.\end{aligned}$$

Isso significa que em $t = -2,0$ s a reta de referência está deslocada de $1,2 \text{ rad} = 69^\circ$ no sentido anti-horário (porque θ é positivo) em relação à posição zero. O desenho 1 da Fig.

Da mesma forma, para $t = 0$ encontramos $\theta = -1,00 \text{ rad} = -57^\circ$, o que significa que a reta de referência está deslocada de $1,0 \text{ rad} = 57^\circ$ no sentido horário em relação à posição angular zero, como mostra o desenho 3. Para $t = 4,0$ s encontramos $\theta = 0,60 \text{ rad} = 34^\circ$ (desenho 5). Fazer desenhos para os instantes em que a curva cruza o eixo t é fácil, pois nesse caso $\theta = 0$ e a reta de referência está momentaneamente alinhada com a posição angular zero (desenhos 2 e 4).



(b) Em que instante t_{\min} o ângulo $\theta(t)$ passa pelo valor mínimo mostrado na fig. 10-5b? Qual é esse valor mínimo?

$$\frac{d\theta}{dt} = -0,600 + 0,500t. \quad (10-10)$$

Igualando esse resultado a zero e explicitando t , determinamos o instante em que $\theta(t)$ é mínimo:

$$t_{\min} = 1,20 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Para obter o valor mínimo de θ , substituímos t_{\min} na Eq. 10-9, o que nos dá

$$\theta = -1,36 \text{ rad} \approx -77,9^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

(c) Plote a velocidade angular ω do disco em função do tempo de $t = -3,0 \text{ s}$ a $t = 6,0 \text{ s}$. Desenhe o disco e indique o sentido de rotação e o sinal de ω em $t = -2,0 \text{ s}$, $4,0 \text{ s}$ e t_{\min} .

IDÉIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 10-6, a velocidade angular ω é igual a $d\theta/dt$, dada pela Eq. 10-10. Temos, portanto,

$$\omega = -0,600 + 0,500t. \quad (10-11)$$

O gráfico da função $\omega(t)$ aparece na Fig. 10-5c.

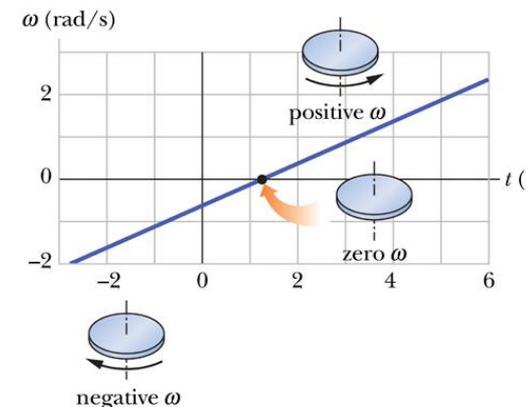
Cálculos: Para desenhar o disco em $t = -2,0 \text{ s}$ substituímos este valor de t na Eq. 10-11, obtendo

$$\omega = -1,6 \text{ rad/s.} \quad (\text{Resposta})$$

O sinal negativo mostra que em $t = -2,0 \text{ s}$ o disco está girando no sentido horário (desenho mais baixo da Fig. 10-5c).

Fazendo $t = 4,0 \text{ s}$ na Eq. 10-11, obtemos

$$\omega = 1,4 \text{ rad/s.} \quad (\text{Resposta})$$



Para t_{\min} , $\omega=0!$

(c)

Exemplo 10-2

Um pião gira com aceleração angular $\alpha = 5t^3 - 4t$, onde t está em segundos e α em radianos por segundo ao quadrado. Em $t=0$ a velocidade angular do pião é 5 rad/s e uma reta de referência traçada no pião está na posição angular $\theta = 2$ rad. (a) Obtenha uma expressão para a velocidade angular do pião, $\omega(t)$; (b) Obtenha uma expressão para a posição angular do pião $\theta(t)$.

Cálculos: De acordo com a Eq. 10-8,

$$d\omega = \alpha dt,$$

e portanto
$$\int d\omega = \int \alpha dt.$$

Assim, temos:

$$\omega = \int (5t^3 - 4t) dt = \frac{5}{4}t^4 - \frac{4}{2}t^2 + C.$$

Para calcular o valor da constante de integração C observamos que $\omega = 5$ rad/s em $t = 0$. Substituindo esses valores na expressão de ω , obtemos:

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

E, portanto, $C = 5$ rad/s. Nesse caso,

$$\omega = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \quad (\text{Resposta})$$

Cálculos: Como, de acordo com a Eq. 10-6,

$$d\theta = \omega dt,$$

podemos escrever

$$\theta = \int \omega dt = \int \left(\frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5 \right) dt$$

$$= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + C'$$

$$= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2,$$

(Resposta)

onde C' foi calculado para que $\theta = 2$ rad em $t = 0$.

Exemplo 10-3: Uma pedra de amolar gira com aceleração angular constante $\alpha = 0,35 \text{ rad/s}^2$. No instante $t = 0$, ela tem uma velocidade angular $\omega_0 = -4,6 \text{ rad/s}$ e uma reta de referência está na horizontal na posição $\theta_0 = 0$. (a) Em que instante após $t = 0$ a reta está na posição $\theta = 5,0 \text{ rev}$? (b) Descreva a rotação da pedra entre $t = 0$ e $t = 32 \text{ s}$. (c) Em qual instante t a pedra de amolar para momentaneamente?

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2,$$

porque a única variável desconhecida é o tempo t .

Cálculos: Substituindo valores conhecidos e fazendo $\theta_0 = 0$ e $\theta = 5,0 \text{ rev} = 10\pi \text{ rad}$, obtemos

$$10\pi \text{ rad} = (-4,6 \text{ rad/s})t + \frac{1}{2}(0,35 \text{ rad/s}^2)t^2.$$

(Convertemos 5,0 rev para 10π para manter a coerência entre as unidades). Resolvendo esta equação do segundo grau em t , obtemos

$$t = 32 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

angular $\omega_0 = -4,6 \text{ rad/s}$, mas a aceleração angular α é positiva (no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio). Esta oposição inicial entre os sinais da velocidade angular inicial e da aceleração angular significa que a roda gira cada vez mais devagar no sentido negativo, pára momentaneamente e, em seguida, passa a girar no sentido positivo. Depois que a reta de referência passa de volta pela posição inicial $\theta = 0$, a pedra de amolar dá mais 5 voltas completas até o instante $t = 32 \text{ s}$.

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4,6 \text{ rad/s})}{0,35 \text{ rad/s}^2} = 13 \text{ s.} \quad (\text{Resposta})$$

Exemplo 10-4: Você está operando um rotor (um brinquedo de parque de diversões com um cilindro giratório), percebe que um ocupante está ficando zozinho e reduz a velocidade do cilindro de 3,40 rad/s para 2,0 rad/s em 20 rev, com aceleração angular constante. (a) Qual é essa aceleração durante a redução da velocidade angular? (b) Em quanto tempo?

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$v = v_0 + at \quad \leftrightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

que substituímos na Eq. 10-13 para escrever

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \right)^2.$$

Explicitando α , substituindo os valores conhecidos e convertendo 20 rev para 125,7 rad, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2,00 \text{ rad/s})^2 - (3,40 \text{ rad/s})^2}{2(125,7 \text{ rad})} \\ &= -0,0301 \text{ rad/s}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

(b) Em quanto tempo ocorre a redução de velocidade?

Cálculo: Agora que conhecemos α , podemos usar a Eq. 10-12 para obter t :

$$\begin{aligned} t &= \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2,00 \text{ rad/s} - 3,40 \text{ rad/s}}{-0,0301 \text{ rad/s}^2} \\ &= 46,5 \text{ s}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Exemplo 10-6

A Fig. 10-13a mostra um corpo rígido composto por duas partículas de massa m ligadas por uma barra de comprimento L e massa desprezível.

(a) Qual é o momento de inércia I_{CM} em relação a um eixo passando pelo centro de massa e perpendicular à barra, como mostra a figura?

IDÉIA-CHAVE

Como temos apenas duas partículas com massa, podemos calcular o momento de inércia I_{CM} do corpo usando a Eq. 10-33.

Cálculos: Para as duas partículas, ambas a uma distância perpendicular $L/2$ do eixo de rotação, temos:

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + (m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2. \quad (\text{Resposta})$$

(b) Qual é o momento de inércia I do corpo em relação a um eixo passando pela extremidade esquerda da barra e paralelo ao primeiro eixo (Fig. 10-13b)?

IDÉIAS-CHAVE

Esta situação é tão simples que podemos determinar I usando duas técnicas. A primeira é semelhante à que foi usada no item (a). A outra, mais geral, consiste em aplicar o teorema dos eixos paralelos.

Primeira técnica: Calculamos I como no item (a), exceto pelo fato de que agora a distância perpendicular r_i é zero

(1) (2) (3) (4)

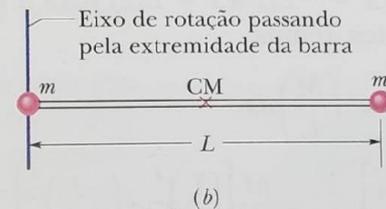
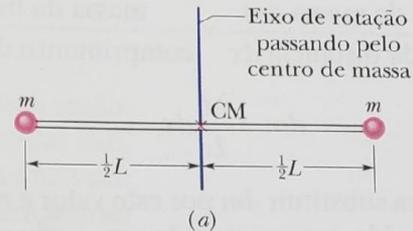


FIG. 10-13 Um corpo rígido composto por duas partículas de massa m unidas por uma barra de massa desprezível.

para a partícula da esquerda e L para a partícula da direita. De acordo com a Eq. 10-33,

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2. \quad (\text{Resposta})$$

Segunda técnica: Como já conhecemos I_{CM} , o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, e como o eixo especificado é paralelo a esse “eixo CM”, podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). Temos:

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \frac{1}{2}L^2 + (2m)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = mL^2. \quad (\text{Resposta})$$

Exemplo 10-7

A Fig. 10-14 mostra uma barra fina, uniforme, de massa M e comprimento L , sobre um eixo x cuja origem está no centro da barra.

(a) Qual é o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo seu centro?

IDÉIAS-CHAVE (a) Como a barra é uniforme, seu centro de massa está no centro geométrico. Assim, o momento de inércia pedido é I_{CM} . (2) Como a barra é um objeto contínuo, devemos usar a integral da Eq. 10-35,

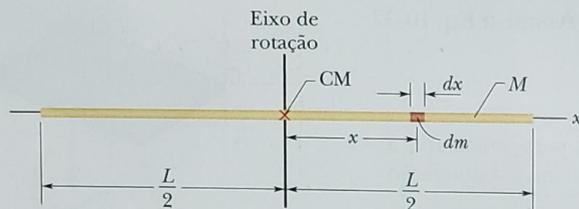


FIG. 10-14 Uma barra uniforme de comprimento L e massa M . Um elemento de massa dm e comprimento dx está representado na figura.

$$\frac{\text{elemento de massa } dm}{\text{elemento de distância } dx} = \frac{\text{massa da barra } M}{\text{comprimento da barra } L}$$

ou
$$dm = \frac{M}{L} dx.$$

Podemos agora substituir dm por este valor e r por x na Eq. 10-38. Em seguida, integramos de uma extremidade a outra da barra (de $x = -L/2$ a $x = L/2$) para levar em conta todos os elementos. Temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-L/2}^{x=L/2} x^2 \left(\frac{M}{L} \right) dx \\ &= \frac{M}{3L} \left[x^3 \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L} \left[\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{12} ML^2. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

$$I = \int r^2 dm, \quad (10-38)$$

para determinar o momento de inércia.

Cálculos: Como queremos integrar em relação à coordenada x e não em relação à massa m , como na integral da Eq. 10-38, devemos relacionar a massa dm de um elemento da barra a um elemento de distância dx ao longo da barra. (Um desses elementos é mostrado na Fig. 10-14.) Como a barra é uniforme, a razão entre massa e comprimento é a mesma para todos os elementos e para a barra como um todo, de modo que podemos escrever

Este resultado está de acordo com o que aparece na Tabela 10-2e.

(b) Qual é o momento de inércia I da barra em relação a um novo eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda?

IDÉIAS-CHAVE Poderíamos calcular I mudando a origem do eixo x para a extremidade esquerda da barra e integrando de $x = 0$ a $x = L$. Entretanto, vamos usar uma técnica mais geral (e mais simples), que envolve o uso do teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36).

Cálculos: Se colocamos o eixo na extremidade esquerda da barra, mantendo-o paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa, podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). De acordo com o item (a), $I_{CM} = ML^2/12$. Como mostra a Fig. 10-14, a distância perpendicular h entre o novo eixo de rotação e o centro de massa é $L/2$. Substituindo esses valores na Eq. 10-36, temos:

$$\begin{aligned} I &= I_{CM} + Mh^2 = \frac{1}{12} ML^2 + (M)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} ML^2. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Na verdade, o mesmo resultado é obtido para qualquer eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda ou direita, seja ou não paralelo ao eixo da Fig. 10-14.

A Fig. 10-18a mostra um disco uniforme, de massa $M = 2,5$ kg e raio $R = 20$ cm, montado em um eixo horizontal fixo. Um bloco de massa $m = 1,2$ kg está pendurado por uma corda de massa desprezível que está enrolada na borda do disco. Determine a aceleração do bloco em queda, a aceleração angular do disco e a tensão na corda. A corda não escorrega e não existe atrito no eixo.

IDÉIAS-CHAVE

- (1) Considerando o bloco como um sistema, podemos relacionar sua aceleração a às forças que agem sobre ele através da segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$).
- (2) Considerando o disco como um sistema, podemos relacionar sua aceleração angular α ao torque que age sobre ele através da segunda lei de Newton para rotações ($\tau_{res} = I\alpha$).
- (3) Para combinar os movimentos do bloco e do disco, usamos o fato de que a aceleração linear a do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t da borda do disco são iguais.

Forças que agem sobre o bloco: Essas forças estão representadas no diagrama de corpo livre do bloco (Fig. 10-18b): A força da corda é \vec{T} e a força gravitacional é \vec{F}_g , de módulo mg . Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo de um eixo vertical y ($F_{res,y} = ma_y$) como

$$T - mg = ma. \tag{10-46}$$

Entretanto, não podemos obter o valor de a usando apenas essa equação, porque ela também contém a incógnita T .

Torque exercido sobre o disco: Anteriormente, quando esgotávamos as possibilidades com o eixo y passávamos para o eixo x aqui passamos para a rotação do disco. Para

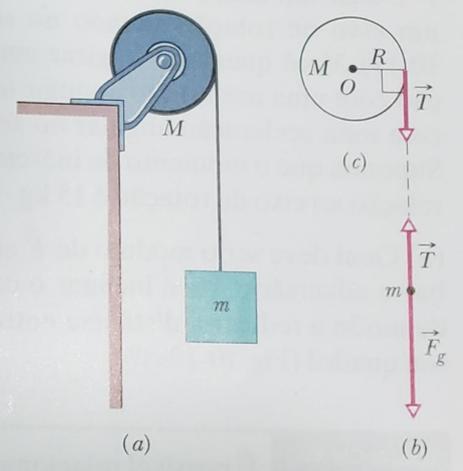


FIG. 10-18 (a) O corpo em queda faz o disco girar. (b) Diagrama de corpo livre do bloco. (c) Diagrama de corpo livre incompleto do disco.

calcular os torques e o momento de inércia I usamos o fato de que o eixo de rotação é perpendicular ao disco e passa pelo seu centro, o ponto O da Fig. 10-18c.

Nesse caso, os torques são dados pela Eq. 10-40 ($\tau = rF_t$). A força gravitacional e a força do eixo agem sobre o centro do disco e, portanto, a uma distância $r = 0$, de modo que o torque produzido por essas forças é nulo. A força \vec{T} exercida pela corda sobre o disco age a uma distância $r = R$ do eixo e é tangente à borda do disco. Assim, a força produz um torque $-RT$, negativo porque o torque tende a fazer o disco girar no sentido horário. De acordo com a Tabela 10-2c, o momento de inércia I do disco é $MR^2/2$. Assim, podemos escrever a equação $\tau_{res} = I\alpha$ na forma

$$-RT = \frac{1}{2} MR^2 \alpha. \tag{10-47}$$

Esta equação pode parecer inútil porque tem duas incógnitas, α e T , nenhuma das quais é a incógnita a cujo valor queremos determinar. Entretanto, com a persistência

que é a marca registrada dos físicos, conseguimos torná-la útil quando nos lembramos de um fato: como a corda não escorrega, a aceleração linear a do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t de um ponto na borda do disco são iguais. Nesse caso, de acordo com a Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$), vemos que $\alpha = a/R$. Substituindo este valor na Eq. 10-47, obtemos:

$$T = -\frac{1}{2} Ma. \quad (10-48)$$

Combinação dos resultados: Combinando as Eqs. 10-46 e 10-48, temos:

$$\begin{aligned} a &= -g \frac{2m}{M+2m} = -(9,8 \text{ m/s}^2) \frac{(2)(1,2 \text{ kg})}{2,5 \text{ kg} + (2)(1,2 \text{ kg})} \\ &= -4,8 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Podemos usar a Eq. 10-48 para calcular T :

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2} Ma = -\frac{1}{2}(2,5 \text{ kg})(-4,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 6,0 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Como seria de se esperar, a aceleração a do bloco que cai é menor que g e a tensão T da corda ($= 6,0 \text{ N}$) é menor que a força gravitacional que age sobre o bloco ($= mg = 11,8 \text{ N}$). Vemos também que a e T dependem da massa do disco, mas não do seu raio. A título de verificação, notamos que as expressões obtidas se reduzem $a = -g$ e $T = 0$ para o caso de um disco de massa desprezível ($M = 0$). Isso é razoável; nesse caso, o bloco simplesmente cai em queda livre. De acordo com a Eq. 10-22, a aceleração angular do disco é

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4,8 \text{ m/s}^2}{0,20 \text{ m}} = -24 \text{ rad/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

Exemplo 10-11

Suponha que o disco do Exemplo 10-9 e da Fig. 10-18 parte do repouso no instante $t = 0$. Qual é a energia cinética de rotação K no instante $t = 2,5$ s?

IDÉIA-CHAVE

Podemos calcular K usando a Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2} I \omega^2$). Já sabemos que $K = \frac{1}{2} MR^2$, mas ainda não conhecemos o valor de ω no instante $t = 2,5$ s. Como, porém, a aceleração angular α tem o valor constante de -24 rad/s^2 , podemos aplicar as equações para aceleração angular constante na Tabela 10-1.

Cálculos: Como estamos interessados em determinar ω e conhecemos α e $\omega_0 (= 0)$, usamos a Eq. 10-12:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Fazendo $\omega = \alpha t$ e $I = \frac{1}{2} MR^2$ na Eq. 10-34, obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) (\alpha t)^2 = \frac{1}{4} M(R\alpha t)^2 \\ &= \frac{1}{4} (2,5 \text{ kg}) [(0,20 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2,5 \text{ s})]^2 \\ &= 90 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

IDÉIA-CHAVE

Também podemos obter essa resposta calculando a energia cinética do disco a partir do trabalho realizado sobre o disco.

Cálculos: Primeiro, relacionamos a *variação* da energia cinética do disco ao trabalho total W realizado sobre o disco, usando o teorema do trabalho e energia cinética ($K_f - K_i = W$). Substituindo K_f por K e K_i por 0, obtemos

$$K = K_i + W = 0 + W = W. \quad (10-60)$$

Em seguida, precisamos calcular o trabalho W . Podemos relacionar W aos torques que atuam sobre o disco usando a Eq. 10-53 ou a 10-54. O único torque que produz aceleração angular e realiza trabalho é o torque devido à força \vec{T} da corda sobre o disco. De acordo com o Exemplo 10-9, este torque é igual a $-TR$. Como α é constante, este torque também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 10-54 para escrever

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i). \quad (10-61)$$

Como α é constante, podemos usar a Eq. 10-13 para calcular $\theta_f - \theta_i$. Com $\omega_i = 0$, temos:

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

Podemos substituir este valor na Eq. 10-61 e substituir o resultado na Eq. 10-60. Com $T = 6,0 \text{ N}$ e $\alpha = -24 \text{ rad/s}^2$ (de acordo com o Exemplo 10-9), temos:

$$\begin{aligned} K &= W = -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR\left(\frac{1}{2} \alpha t^2\right) = -\frac{1}{2} TR \alpha t^2 \\ &= \frac{1}{2} (6,0 \text{ N})(0,20 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2,5 \text{ s})^2 \\ &= 90 \text{ J.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Exemplo 10-12

Uma chaminé cilíndrica começa a tombar quando sua base é danificada. Trate a chaminé como uma barra fina de comprimento $L = 55,0$ m (Fig. 10-20a). Qual é sua velocidade angular ω no instante em que faz um ângulo $\theta = 35,0^\circ$ com a vertical?

IDÉIAS-CHAVE (1) Durante a rotação, a energia mecânica (soma da energia cinética de rotação K com a energia po-

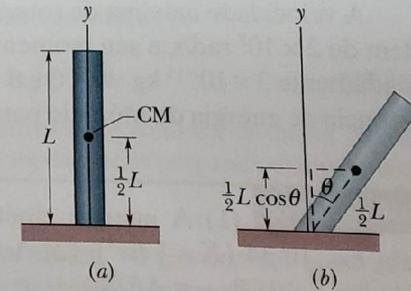


FIG. 10-20 (a) Uma chaminé cilíndrica. (b) A altura do centro de massa é determinada com o auxílio de um triângulo retângulo.

282 Capítulo 10 | Rotação

tencial gravitacional U) não varia. (2) A energia cinética de rotação é dada pela Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2} I \omega^2$).

Conservação da energia mecânica: Na queda da chaminé, a energia potencial gravitacional U é progressivamente convertida em energia cinética de rotação K , mas a energia total não varia. Podemos expressar este fato através da equação

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad (10-62)$$

Energia cinética de rotação: A energia cinética de rotação K é inicialmente zero, mas seu valor em instantes posteriores ($= \frac{1}{2} I \omega^2$) depende do momento de inércia I . De acordo com a Tabela 2, no caso de uma barra fina girando em torno do centro de massa (ou seja, em torno do centro), $I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} mL^2$, onde m é a massa da barra e L é o comprimento da barra. No nosso caso, a chaminé gira em torno de uma das extremidades, que fica a uma distância $L/2$ do centro de massa. De acordo com o teorema dos eixos paralelos, temos:

$$I = \frac{1}{12} mL + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} mL^2 \quad (10-63)$$

Substituindo este valor na equação $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, obtemos

$$K_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \omega^2 \quad (10-64)$$

Energia potencial: A energia potencial $U (= mgy)$ depende da altura de cada segmento da chaminé. Entretanto, podemos calcular U supondo que toda a massa está concentrada no centro de massa da chaminé, que se encontra inicialmente na altura $L/2$. Assim, a energia potencial inicial é

$$U_i = \frac{1}{2} mgL \quad (10-65)$$

Quando a chaminé tomba de um ângulo θ , a Fig. 10-20b mostra que o centro de massa está a uma altura igual a $\frac{1}{2}L$. A energia potencial nesse instante é

$$U_f = \frac{1}{2} mgL \cos \theta \quad (10-66)$$

Velocidade angular: Substituindo as Eqs. 10-66, 10-65 e 10-64 na Eq. 10-62, fazendo $K_i = 0$ e explicitando ω , obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)} = \sqrt{\frac{3(9,8 \text{ m/s}^2)}{55,0 \text{ m}} (1 - \cos 35,0^\circ)} \\ &= 0,311 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Comentários: Como a parte de baixo da chaminé tende a girar mais depressa que a parte de cima, é provável que a chaminé se quebre em duas partes durante a queda, com a parte de cima ficando para trás em relação à parte de baixo. ~~✗~~