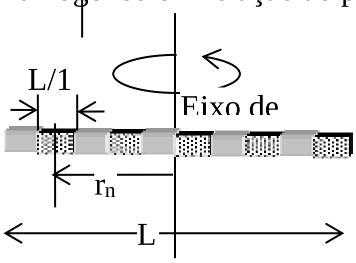
Problema 20, lista 2. Calcule o momento de inércia para:

a) Uma vareta homogênea de comprimento L e massa M; b) Um aro circular que gira em torno a um eixo perpendicular ao seu plano passando pelo próprio centro; c) Um disco homogêneo em relação a o eixo perpendicular ao seu plano e passando pelo próprio centro; d) Um cilindro homogêneo em relação ao próprio eixo; e) Uma casca esférica delgada em relação a um diâmetro; f) Uma esfera maciça em relação a um diâmetro.



a) Resolução na pagina 205 RHK 5ta ed ou 286 6ta ed. Supondo a vareta com um comprimento L, se a dividirmos em 10 porções, cada pedaço terá um comprimento igual L/10, e massa M/10. Se numerarmos os pedaços de esquerda a direita como 1,2, etc, cada um deles estará a uma distância r_n do eixo de rotação.

Se considerarmos que o centro de massa do primeiro pedaço à esquerda do eixo de rotação está a uma distância 0,5xL/10

$r_5=r_6$=0,5.0,1L=0,05L; $r_4=r_7=r_5$+L/10=0,05L+0,1L=0,15L;

$r_3=r_8=r_5$+2L/10=0,05L+0,2L=0,25L;

$r_2=r_9=r_5$+3L/10=0,05L+0,3L=0,35L; $r_1=r_{10}=r_5$+4L/10=0,05L+0,4L=0,45L.

Desenvolvendo a soma dos 10 pedaços:

$$I = {r_1}^2\delta m_1 + {r_2}^2\delta m_2 + \ldots + {r_{10}}^2\delta m_{10} =$$

$(0{,}1M)(0{,}45L)^2 + (0{,}1M)(0{,}35L)^2 + (0{,}1M)(0{,}25L)^2 + (0{,}1M)(0{,}15L)^2 + (0{,}1M)(0{,}05L)^2 + \ldots$,iguais termos para o lado direito, então: $I = 0{,}0825ML^2$. Este resultado pode ser re-feito dividindo a barra em 20, 30 ou n pedaços. Como já sabemos integrar, vamos imaginar que cada pedaço corresponde a um diferencial de massa dm.

Dessa maneira: $I = \lim_{\delta m_n \to 0} \sum r_n^2 \delta m_n = \int r^2 dm$ A integração é efetuada sobre todo o volume do objeto mas podemos efetuar algumas simplificações.

Sabendo que a densidade, $\rho = {}^{M}/_{V} \Rightarrow M = \rho . V$. Se a vareta gira em torno a um eixo perpendicular, como nosso caso, escolhendo um elemento de volume arbitrário de massa dm, posicionado a uma distância x do eixo, a massa desse elemento é igual a massa específica (massa por unidade de volume) ρ, multiplicada pelo elemento de volume dV, $dm = \rho . dV$.

O elemento de volume é igual a área multiplicada pela sua espessura d*x*:

$dV = Adx \Rightarrow dm = \rho dV = \rho A dx$.

O volume da vareta pode ser interpretado como o produto da área transversal pelo comprimento: *V* = *A*.*L* desta maneira a expressão anterior fica:

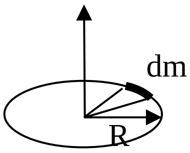
$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \int x^2 \frac{M}{AL} A dx = \frac{M}{L}\int x^2\, dx,$

Como *x* = 0 no meio da vareta, os limites de integração são de *x* = –*L*/2 a *x* = +*L*/2. Desta maneira a inércia rotacional é:

$$I = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{L}\frac{L^3}{8.3} - \left(-\frac{M}{L}\frac{L^3}{8.3}\right) = 2\frac{M}{L}\frac{L^3}{24} = \frac{M \quad L^2}{12}.$$

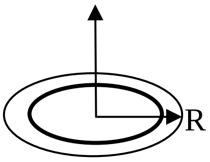
Qual será a Inércia rotacional para a extremidade da vareta?

b) Um aro circular que gira em torno a um eixo perpendicular ao seu plano passando pelo próprio centro.



Podemos dizer que cada elemento de massa do anel está a uma distância R do eixo de rotação, então:
$I = \int r^2 \ dm = R^2 \int dm = R^2 M.$

c) Um disco homogêneo em relação a o eixo perpendicular ao seu plano e passando pelo próprio centro.

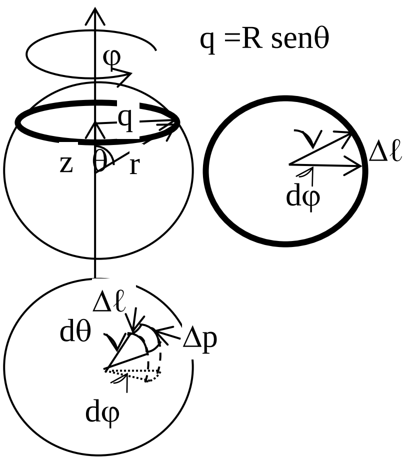


No caso de um disco homogêneo, toda a massa está distribuída entre r = 0 e r = R e não concentrada em r = R como no caso anterior. Cada elemento de massa dm é um anel infinitesimal de raio r e espessura dr. O momento de inércia desse elemento de massa é $r^2 dm$ e a área de cada elemento de massa é dA=2π r dr, definindo a densidade por unidade de superfície ρ = (massa por unidade de superfície) = M/A a massa do elemento M = ρA, mas A=πR^2 assim:
$dm = \rho dA = \frac{M}{A} dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr$, substituindo na fórmula:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho \ dA = \int_0^R r^2 \frac{M}{A} 2\pi r dr = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi \ R^2} 2\pi r dr =$$

$$= 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr = 2 \frac{M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{M}{R^2} \frac{R^4}{2} = \frac{1}{2} M R^2$$

d) Um cilindro homogêneo em relação ao próprio eixo.
Imaginemos que o cilindro seja constituído por discos de massa dm e momento de inércia $\frac{1}{2} R^2 \ dm$ deduzido no caso anterior.
O momento de inércia será a integral desse elemento:
$I = \int \frac{1}{2} dm R^2 = \frac{1}{2} R^2 \int dm = \frac{1}{2} M R^2.$



e) Uma casca esférica delgada em relação a um diâmetro.
Consideraremos um elemento de massa *dm*, que gira em relação a um eixo de rotação. Cada elemento de massa *dm* variará em *φ* de *φ = 0* até *φ = 2π*, formando um anel, e a distância *q* desse elemento de massa até o eixo de rotação variará de *q = R* até *q = 0*; mas
q = R sen θ (1) portanto a variável de integração passa a *ser θ* que varia de *0* a *π*.
Se densidade de massa por unidade de área é: $\rho = \frac{M}{A}$; sendo $A = 4\pi \ R^2$ a massa da casca esférica será: $M = \rho A$ e o diferencial de massa, $dm = \rho \ dA$ pode ser representada pela pequena área da fig. é $\rho dA = \rho dp \times d\ell$. Pela definição de ângulo em radianos $\theta = \frac{S}{R}$ de onde

$\Delta\theta = \frac{arco}{raio} = \frac{\Delta p}{R} \Rightarrow \Delta p = R\Delta\theta \Rightarrow dp = Rd\theta$. Por outro lado, $\varphi = \frac{S}{R}$ como S equivale a longitude da circunferência de raio q, quando φ fecha o círculo, podemos fazer de $S = \ell$ de maneira que $\Delta\varphi = \frac{\Delta\ell}{q} = \frac{\Delta\ell}{Rsen\theta} \Rightarrow \Delta\ell = Rsen\theta\Delta\varphi$ e $d\ell = Rsen\theta d\varphi$. Assim, $dm = \rho dA = \rho dp \times d\ell = \rho R\Delta\theta \times Rsen\theta\Delta\varphi = \rho R^2 sen\theta d\theta d\varphi$

Assim, como $I = \int q^2 dm = \int (R\ sen\ \theta)^2 dm$, substituindo pelas expressões acima fica:

$$I = \int (R\ sen\ \theta)^2 \rho\ dA = \int (R\ sen\ \theta)^2 \rho\ dp \times d\ell$$

Substituindo e rearranjando:

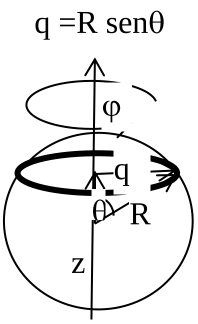
$I = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2\ sen^2\theta R^2 sen\theta d\theta = \rho 2\pi R^4 \int_0^{\pi} sen^2\theta d(-\cos\theta)$

chamando $x = \cos\theta \rightarrow dx = d(\cos\theta) = -$ sen $\theta d\theta$; por outro lado como:
$sen^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1 \rightarrow sen^2\ \theta = 1 - \cos^2\ \theta$.
Com a consequente mudança nos limites de integração já que -cos θ varia de -1 a 1. Devemos então mudar o sinal do coseno e trocar os limites de integração. Substituindo estas expressões na equação acima:

$$I = \rho 2\pi R^4 \int_{\pi}^{0} (1 - \cos^2\theta) d(\cos\theta) = \rho 2\pi R^4 \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx =$$

$$= \rho 2\pi R^4 \left[x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \rho 2\pi R^4 \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)}{3}\right)\right] =$$

$$= \rho 2\pi R^4 \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \rho 2\pi R^4 \frac{4}{3} = \frac{2\pi R^4 \frac{4}{3} M}{4\pi R^2} = \frac{2}{3} MR^2$$



OUTRA FORMA, integrando anéis.
$I_{aro} = R^2 M$,

$$I_{esf} = \int dI_{aro} = \int q^2 dm = \int R^2 sen^2\theta\ dm$$

$$q = Rsen\theta$$

$$\rho = \frac{M}{A} \Rightarrow M = \rho A \text{ e } dm = \rho dA$$

A área pode ser considerada como o comprimento do anel de raio q e espessura dq, então:

$$dm = \rho 2\pi q\ dq$$

Pela definição de ângulo em radianos, $\theta = \frac{arco}{Raio}$ e $\Delta\theta = \frac{\Delta q}{R} \Rightarrow \Delta q = R\Delta\theta \Rightarrow dq = Rd\theta$.

Então, a inércia rotacional da esfera fica:

$$I_{esf} = R^2 \int sen^2\theta \rho 2\pi R sen\theta dq = R^3 \rho 2\pi \int sen^2\theta R sen\theta dq = R^3 \rho 2\pi R \int_0^{\pi} sen^2\theta sen\theta d\theta =$$

$= R^4 \rho 2\pi \int_0^{\pi} sen^2\theta d(-\cos\ \theta)$chamando $\cos\theta = x \rightarrow d(\cos\theta) = dx$; por outro lado como $sen^2\ \theta + \cos^2\ \theta = 1 \rightarrow sen^2\ \theta = 1 - \cos^2\ \theta$. Com a consequente mudança nos limites de integração já que -cos θ varia de -1 a 1. Devemos então mudar o sinal do coseno e trocar os limites de integração. Substituindo estas expressões na equação acima:

$$I_{esf} = R^4\rho 2\pi\int_0^{\pi}(1-cos^2\,\theta)d(cos\,\theta) = R^4\frac{M}{4\pi R^2}2\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{MR^2}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{MR^2}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{(-1)}{3}\right)\right] = \frac{MR^2}{2}2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}MR^2$$

f) Uma esfera maciça em relação a um diâmetro.

$\rho = M/V \rightarrow M = \rho V$ área do disco = πq^2 } $dV = \pi q^2 dz$

$dm = \rho dV$ altura do disco = dz

volume total da esfera = $4/3\ \pi R^3$

substituindo, $dm = \rho\pi q^2 dz$

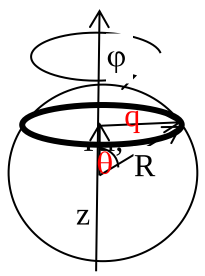
Se $I = \int r^2 dm$ vemos que a integral envolve duas variáveis, q e z.

Fazendo $I = \int V dI$ onde dI é a inércia rotacional do disco, considerando um disco com uma massa dm,

$I_{disco} = \frac{1}{2}M\ r^2 \Rightarrow dI =$ inércia rotacional de um disco de raio q $= \frac{1}{2}dm\ q^2$

Nos valendo da simetria dos dois hemisférios,

q =R senθ



$$I = 2\int_{hemisfério} dI \quad = 2\int_{hemisfério}\frac{1}{2}q^2 dm$$

$$= \int_{hemisfério} q^2\rho\pi\ q^2 dz = \rho\pi\int_{hemisfério}(q^2)^2\ dz$$

Nos valendo da igualdade: $q^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow q^2 = R^2 - z^2$,

substituindo na integral,

$$I = \rho\pi\int_0^R (q^2)^2 dz = \frac{3M\pi}{4\pi R^3}\int_0^R (R^2-z^2)^2 dz$$

$$= \rho\int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2z^2)dz =$$

$$= \rho\left(R^4 z + \frac{z^5}{5} - \frac{2R^2z^3}{3}\right)\Bigg|_o^R = \rho\left(R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2R^5}{3}\right)$$

$$= \rho\frac{(15R^5 + 3R^5 - 10R^5)}{15}$$

$$= \frac{3M}{4R^3}\frac{8R^5}{15} = \frac{2MR^2}{5}$$