A TRANSFORMADA DE LAPLACE – RESUMO

1-) Conceito

Espaço t ***Espaço s***

$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & X(s) \arrow[d, "\textbf{\textit{operações algébricas}}"] \\ \text{Solução } x(t) & \text{Solução } X(s) \arrow[l, "\mathcal{L}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

2-) Definição

Seja $x(t)$ contínua por partes para t>=0.

$$X(s) = \mathcal{L}(x) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, x(t)\, dt$$

onde s é uma variável complexa $s = \sigma + i\omega$.

3-) Propriedades e Teoremas

P_1. Linearidade

$$\mathcal{L}\{ax(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{x(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

P_2. Derivadas

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

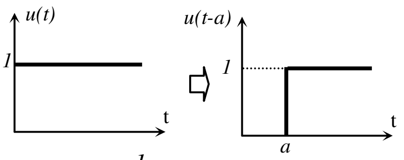
P_3. Integrais

$$\mathcal{L}\left\{\int x(t)\right\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0)}{s}$$

P_4. Atraso no Tempo

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = e^{-as} X(s)$$

exemplos:



$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[u(t-a)] = e^{-as}\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \qquad \mathcal{L}[t-a] = e^{-as}\frac{1}{s^2}$$

P_5. Defasagem em s

$$\mathcal{L}\{e^{-at} x(t)\} = X(s+a)$$

P_6. Teorema do Valor Final

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

P_7. Teorema do Valor Inicial

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

4-) A T.L. e a F.T.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{q_i(t)} \arrow[r] & \boxed{\begin{array}{c}\textbf{\textit{Sistema}}\\ \boldsymbol{H(s)}\end{array}} \arrow[r] & \boldsymbol{q_o(t)} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}}$$

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_0}$$

raízes de $D(s)$ => pólos do sistema
raízes de $N(s)$ => zeros do sistema

X(t)	X(s)
$\delta(t)$ *(impulso unitário)*	1
1 *(u(t) degrau unitário)*	$1/s$
t *(rampa unitária)*	$1/s^2$
e^{-at}	$1/(s+a)$
$sen\ at$	$a/(s^2+a^2)$
$cos\ at$	$s/(s^2+a^2)$
$(1-e^{-at})/a$	$1/s(s+a)$
$(e^{-at}+at-1)/a^2$	$1/s^2(s+a)$
$(e^{-at}-e^{-bt})/(b-a)$	$1/(s+a)(s+b)$

5-) Relações Entrada/Saída

No domínio de Laplace

$$Q_o(s) = H(s) Q_i(s)$$

No domínio da Freqüência

$$Q_o(\omega) = H(\omega) Q_i(\omega)$$

Resposta ao impulso unitário

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$