

1-) Para os modelos abaixo, detemine as F.T. indicadas (i - input, o - output).

 $2.5-1.$  O sistema mecânico mostrado abaixo possui duas entradas, o desdo abaixo possui duas entradas, o desdo  $\frac{1}{2}$ 2-) Determine as *constantes de mola equivalente* para cada um dos modelos abaixo. Estabeleça hipóteses que julgar necessárias.

square (or side *a*), and nonow circle (or mean diameter *a* and wan<br>betering a which of these cross sections leads to an economical design (b) FIGURE 1.69 When of these cross sections reads to an economical design  $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ , square (of side  $d$ ), and hollow circle (of mean diameter  $d$  and wall **1.13** A cantilever beam of length *L* and Young s modulus *E* is subjected to a bending force at its <sup>2</sup> spring constants of beams with cross sections in the form of a solid

**Section 1.7 Spring Elements**

**1.13** A cantilever beam of length *L* and Young s modulus *E* is subjected to a bending force at its

*k*<sup>1</sup> *k*<sup>1</sup> *k*<sup>1</sup> *k*<sup>1</sup> ent, weighing 200 lb, is supported on a rubber mounting whose forcep is given by  $F(x) = 800x + 40x^3$ , where the force (F) and the bunds and inches, respectively. Determine the following:  $\frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{2}$ ) ( $\frac{1}{$ 

iounting corresponding to the equivalent linear spring constant. pring constant of the mounting at its static equilibrium position.

ches, respectively. If the spring undergoes a steady deflection of 0.5 in.  $\blacksquare$  IS E is subjected to a bend experiment the equivalent linear spring constant of the vith cross sections in the form of  $x + 50x^2 + 10x^3$ , where the force (F) and deflection (x) are mea-Example the force  $(F)$  and deflection  $(x)$  are mea-<br>spring undergoes a steady deflection of 0.5 in.  $flection.$ of the engine, determine the equivalent linear spring constant of the vith cross sections in<br>Flection **FIGURE 1.733** elation of a steel helical spring used in an engine is found experimen-

urs—each of length a—are connected to a spring of stiffness k to form SS sections leads to an eco g a vertical load P, as shown in Figs. 1.72(a) and (b). Find the equiva-<br>The system  $k_{eq}$ , for each case, disregarding the masses of the bars and g a vertical load P, as shown in Figs. 1.72(a) and (b). Find the equiva-<br>it has vertical load P, as shown in Figs. 1.72(a) and (b). Find the equivats.



 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  com líquido side *d*) and hollow circle (of mean diameter *d* and wall thickness ). Determine which

ness k, find the equivalent spring stiffness of the tripod in the vertical From the space. The legs of the tripod are focaled symmetrically<br>axis, each leg making an angle  $\alpha$  with the vertical. If each leg has a  $\log_3 n$ ,  $\lim_{\alpha \to \infty} \log_2 \alpha$  equivalent spring surfaces **1.2** JB USed ICT Incuming an electronic instrument that finds the  $(T)$   $\vee$ rig.  $1\sqrt{e}$  is used the homining an executive instrument that finds the  $(1)$ <br>
b points in space. The legs of the tripod are located symmetrically Fig.  $1.72$  is used for mounting an Fig. 1.**12** is used for mounting an electronic instrument that finds the  $(f)$ 







 $\alpha$  n. **FIGURE 1.69** the ted to a spring of stiffness k to form and the sections leads to an economical design of stiffness k to form a de Exercícios # 1 - Sistemas Mecânicos Data: 12-03-2024<br>
Ans in the form of a solid<br>
and and are linear d are linear space and are linear spring whose fore constants.<br>
The constant of the foreconstant spring constant of



*P P P P***<b>***P P* que julgar necessárias. 3-) O modelo mecânico mostrado abaixo possui duas entradas, o deslocamento  $x_i(t)$  e a força  $f_i(t)$ , springs. aplicadas ao amortecedor  $B_1$  e à massa  $M_2$ , respectivamente. Estabeleça hipóteses simplificadoras que inlava nocessárias 3-) O modelo mecânico mostrado abaixo possui duas entradas, o deslocamento  $x_i(t)$  e a força  $f_i(t)$ ,



- $\mathcal{D}$  determine as  $\mathcal{D}$  as  $\mathcal{D}$  as  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{D}$  . The  $\mathcal{D}$ a) Deduza as equações diferenciais do modelo. Mostre seu trabalho !
- b) Determine as F.T.  $X_1(s)/X_i(s)$  e  $X_2(s)/X_i(s)$ .
- c) Considere que a força exercida pela mola na massa  $M_2$  seja  $f_0$ . Determine a F.T.  $F_0(s)/F_i(s)$ .

4-) A figura abaixo mostra o conhecido modelo mecânico de 02 graus de liberdade (02-GDL), muito empregado em estudos iniciais da dinâmica e vibrações de sistemas discretos. O modelo possui duas entradas, dadas pelas forças  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , aplicadas às massas  $M_1$  e  $M_2$ . As saídas do modelo são os deslocamentos absolutos  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ .



a) Deduza as equações diferenciais do modelo para as entradas e saídas mencionadas. Uma vez obtidas tais equa¸c˜oes, coloque-as na forma matricial, devendo vocˆe encontrar uma equa¸c˜ao do tipo

$$
[M]{\n{ii} + [B]{\n{ii} + [K]}{u} = {p(t)}
$$
\n(1)

**matrizes no problema em questão e faça uma análise detalhada de suas características principais,** escrevendo-as para fixação de conceitos.  $\overline{a}$  $\} = \{u(t)\}\in\{p(t)\}\$ são c onde [M], [B] e [K] são as conhecidas matrizes de massa, amortecimento e rigidez do modelo, respectivamente e,  ${u} = {u(t)} e (p(t))$  são os vetores contendo as saídas e entradas. Identifique tais

**1.21** Figure 1.782 shows a U-tube manometer open at an at both ends and containing a contai cando suas principais semelhanças e diferencas. *Everyous deduzidas no fiem anten* todas as condições iniciais do problema: (i)  $U_1(s)/F_1(s)$ ; (ii)  $U_2(s)/F_1(s)$ ; (iii)  $U_2(s)/F_1(s)$ ; (iv) b) Usando as equações deduzidas no ítem anterior, obtenha as seguintes F.T. considerando-se nulas  $U_2(s)/F_2(s)$ . Uma vez obtida as F.T. indicadas, faça uma análise comparativa entre elas, desta-

c) A resposta do sistema no domínio da Variável de Laplace s pode ser escrita da seguinte forma:

<span id="page-2-0"></span>
$$
\{U(s)\} = [H(s)]\{F(s)\}\tag{2}
$$

*x* como os vetores de entrada  $\{F(s)\}\$ e saída  $\{U(s)\}.$ seu trabalho aqui é identificar para o problema em questão a matriz de F.T.  $[H(s)]$  do modelo bem

d) Suponha agora que  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  e que a entrada no modelo seja dado por um *deslocamento*  $horizontal\ e\ absolute\ x(t)$  aplicado na fronteira do sistema (terminais esquerdos de  $k_1$  e  $B_1)$ . Repita o ´ıtem (a) identificando as matrizes do problema bem como os vetores envolvidos. Dica: ap´os deduzir novamente as equações de movimento, você deverá encontrar uma equação matricial do tipo

$$
[\bar{M}]\{\ddot{u}\} + [\bar{B}]\{\dot{u}\} + [\bar{K}]\{u\} = \{a\}x(t) + \{b\}\dot{x}
$$
\n(3)

novamente, faça uma análise das grandezas encontradas e compare-as àquelas obtidas no ítem (b).

e) Usando a Transformada de Laplace, considerando nulas as condições iniciais do problema, obtenha as F.T.: (i)  $U_1(s)/X(s)$ ; (ii)  $U_2(s)/X(s)$ . E, agora, similarmente ao que foi feito no ítem (c) escreva as equações no domínio de Laplace na forma

<span id="page-3-0"></span>
$$
\{U(s)\} = [\bar{H}(s)]\{X(s)\}\tag{4}
$$

e discuta as principais diferenças entre os modelos de resposta dados pelas Equações [2](#page-2-0) e [4.](#page-3-0)

5-) A figura abaixo mostra um modelo dinâmico onde tem-se duas massas  $M_1$  e  $M_2$ . A primeira apoia-se sobre uma superfície horizontal e plana e a segunda apoia-se sobre a primeira. Entre o solo e  $M_1$  existe uma fina camada de óleo lubrificante cuja constante viscosa equivalente é  $B_3$ . O mesmo de observa entre as superfícies superior de  $M_1$  e inferior de  $M_2$  ( $B_2$ ). A entrada do modelo é uma força horizontal  $f(t)$  aplicada à massa  $M_2$ . As variáveis  $x(t)$  e  $z(t)$  são o deslocamento absoluto de  $M_1$  e o *deslocamento relativo* entre  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente.



*l l as* variaveis. a) Deduza as equações diferenciais de movimento para o modelo considerando como variáveis de saída as variáveis  $x(t)$  e  $z(t)$ .

de  $M_2$ . Compare os resultados dos dois ítens, analisando suas semelhanças e diferenças. Sugestão: **b**) Repita o ítem (a) agora considerando como saída  $x(t)$  e o deslocamento absoluto horizontal  $y(t)$ embora não solicitado, esta análise comparativa pode ser efetuada escrevendo-se as equações em ambos os casos na forma matricial !

*O* 6-) Para o modelo mostrado abaixo  $x_1$  e  $x_2$  denotam as elongações das molas  $k_1$  e  $k_2$ , respectiva- $\overline{f}$  Determine os valores de x springs.  $m_{\alpha}$  ments  $m_{\alpha} = m_{\alpha} = 0$  today as males execution as equivalent mente. Quando  $x_1 = x_2 = 0$  todas as molas encontram-se em seus comprimentos naturais (nem as saídas  $x_1$  e  $x_2$  mostradas; *(ii)* Determine os valores de  $x_1$  e de  $x_2$  que correspondem à posição alongadas ou comprimidas. (i) Obtenha as equações diferenciais de movimento para o modelo para

**F**<br>**F** de equilíbrio estático (quando  $f_i(t) = 0$ ) e as massas não  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **EXC**<br> **n**  $\det$  $\overline{\phantom{a}}$ 

*k*



8-) Considere os modelos dinâmicos mostrados abaixo. (i) Para ambos, obtenha suas equações diferenciais no domínio do tempo e as compare. Sugestão: para esta comparação procure escrever os termos inerciais em função da velocidade das massas e não de suas acelerações. (ii) Para o modelo (b) discuta o papela da polia quanto à suas propriedades de inércia. Estabeleça hipóteses simplificadoras que julgar necessárias. Considere que nas configurações mostradas  $u_1 = 0$  e  $u_2 = 0$ correspondem as condições onde as molas se encontram em seus comprimentos naturais.



9-) Para o modelo físico abaixo, as forças de mola são nulas quando  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ . Considere, inicialmente a base estacionária tal que  $u_3 = 0$ . Obtenha as equações de movimento para a entrada mostrada. Agora, repita o problema quando a base de massa  $M_3$  é liberada a se mover sobre o plano.



elásticas torsionais respectivamente iguais a  $k_1$  e  $k_2$ . Os dois discos, de momentos de inércia  $J_1$  e deslocamentos angulares mostrados; (ii) Obtenha em seguida as F.T. relacionando essas variáveis elementos viscosos  $B_1$  e  $B_2$ . (i) Obtenha as equações diferenciais para os discos em termos dos 10-) No modelo geom´etrico mostrado abaixo, os dois eixos s˜ao considerados flex´ıveis, com constantes  $J_2$  são apoiados em mancais cujo atrito com os eixos pode ser desprezado comparativamente aos de saída à entrada torque  $T_i(t)$ .



(engrenagem menor) - coroa (engrenagem maior). Em ambos os casos considere que a entrada no *x x x x x x x**x**x***<b>***x x*  $s$ istema pinhão (engrenagem reta de raio  $R$ ) e cremalheira ("engrenagem"linear); (b) sistema pinhão 11-) A figura abaixo mostra dois modelos geom´etricos muito usados em projeto de m´aquinas: (a) o deslocamento horizontal x(t) da cremalheira, que se move numa guia horizontal, existindo uma fina camada viscosa de constante equivalente c entre a superfície inferior da cremalheira e o plano. Para o modelo (b) obenta a F.T. relacionando o deslocamento angular  $\theta_3$  da inércia  $I_2$  em relação ao torque de entrada  $T_1$ . Estabeleça as hipóteses simplificadoras que julgar necessárias.



massa  $M$ ,  $x(t)$  com a força tangencial  $f_a(t)$  aplicada ao volante de momento de inércia J. Estabeleça *k* hipóteses que julgar necessárias.  $135$  Bara a modele meetrede abeive determine a  $ET$  relaxionande a  $\epsilon$ 12-) Para o modelo mostrado abaixo determine a F.T. relacionando o deslocamento absoluto da

