SME0121 Processos Estocásticos

Lista 1 – Revisão: Probabilidades

Thomas Peron

Data de publicação: 11/03/2024. Data da provinha: $\boxed{02/04/2024}$.

1. Sejam A e B conjuntos arbitrários, não necessariamente disjuntos. Utilize a lei da probabilidade total para verificar a seguinte equação:

$$\Pr\{A\} = \Pr\{A \cap B\} + \Pr\{A \cap B^c\}, \tag{1}$$

   onde B^c é o conjunto complementar de B (isto é, o evento B^c ocorre se, e somente se, B não ocorrer).

2. Sejam A e B conjuntos arbitrários, não necessariamente disjuntos. Derive a lei

$$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\}. \tag{2}$$

   Dica: Use o resultado do exercício anterior para calcular $\Pr\{A \cap B^c\} = \Pr\{A\} - \Pr\{A \cap B\}$. Em seguida, aplique a lei de adição aos eventos disjuntos $A \cap B$ e $A \cap B^c$, tendo em mente que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

3. Suponha que X é uma variável aleatória cuja densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} Rx^{R-1} & \text{para } 0 \le x \le 1; \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

   onde $R > 0$ é um parâmetro fixo.

   (a) Determine a distribuição acumulada $F_X(x)$.

   (b) Determine o valor esperado $E[X]$.

   (c) Determine a variância $\mathrm{Var}[X]$.

4. Dois jogadores, A e B, se alternam numa máquina de jogos até que um deles obtenha um sucesso; o primeiro a fazê-lo é considerado vencedor. A probabilidade de sucesso do jogador A é p, enquanto a de B é q. Considere que jogadas sucessivas são independentes.

   (a) Determine a probabilidade de que A vença o jogo dado que A jogue primeiro.
   (Resp.: $p/[1-(1-p)(1-q)]$.)

   (b) Considerando ainda que o jogador A jogue primeiro, determine o número médio de jogadas dada a informação de que A vence.
   (Resp.: $1 + 2\beta/(1-\beta)$, sendo $\beta = (1-p)(1-q)$)

5. São retiradas uma a uma, aleatoriamente, bolas de uma urna até que a primeira bola branca seja obtida. No entanto, a cada tentativa, dobra-se a quantidade de bolas azuis colocadas na urna. Sabendo que a urna contém 4 bolas azuis e 6 brancas, calcule a probabilidade de obter a primeira bola branca no máximo na terceira tentativa. Assuma que as retiradas são feitas com reposição.

   (Resp.: 0.83)

6. Um caça-níquel tem dois discos que funcionam independentemente um do outro. Cada disco tem 10 figuras: 4 maçãs, 3 bananas, 2 peras e 1 laranja. Uma pessoa paga R$ 80,00 e aciona a máquina. Se aparecem 2 maçãs, ganha R$ 40,00; se aparecem duas bananas, ganha R$ 80,00; ganha R$ 140,00 se aparecem duas peras; e ganha R$ 180,00 se aparecem duas laranjas. Qual é o lucro esperado em uma única jogada?

   (Resp.: prejuízo de R$ 59)

7. Uma moeda de dez centavos é lançada repetidamente até que uma cara apareça. Seja N o número de tentativas até que a primeira cara ocorra. Após isso, uma moeda de 5 centavos é lançada N vezes. Seja X o número de vezes que a moeda de cinco centavos sai como coroa. Determine $\Pr\{X = 0\}$ e $\Pr\{X = 1\}$.

   (Resp.: $\Pr\{X = 0\} = \frac{1}{3}$ e $\Pr\{X = 1\} = \frac{4}{9}$)

8. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros p e N. O parâmetro N, por sua vez, tem distribuição binomial com parâmetros q e M. Em outras palavras $X|N \sim B(p, N)$ e $N \sim B(q, M)$. Encontre a distribuição de probabilidade $\Pr\{X = k\}$.

   (Resp.: veja o capítulo 2 do livro texto e as notas de aula)

9. Em um jogo, dois dados são lançados e a soma de suas faces superiores é observada. Se a soma resulta nos valores 2, 3 ou 12, o jogador perde imediatamente. Se a soma é 7 ou 11, o jogador vence. Por outro lado, se a soma é 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, então outro lançamento é necessário. No caso da soma ser igual 4, por exemplo, o dado é lançado até que a soma igual a 4 reapareça ou até que a soma igual a 7 seja observada. Se a soma igual a 4 aparecer primeiro, o jogador vence. Se for igual a 7, ele perde. Considerando essa regra, qual é a probabilidade do jogador vencer?

   (Resp.: 0.492929)

   (*Dica*: veja a seção 2 do capítulo 2 do livro texto, Taylor & Karlin).

10. Considere uma sequência de processos de Bernoulli com probabilidade de sucesso p. Seja X_1 o número de falhas antes do primeiro sucesso e seja X_2 o número de falhas entre os dois primeiros sucessos. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de X_1 e X_2.

11. Suponha que uma variável aleatória X tem uma distribuição binomial com parâmetros p e n, onde n tem uma distribuição de Poisson com média λ. Determine a distribuição marginal de X.

    (*Dica*: ver seção 1 do capítulo 2 do livro texto (Taylor & Karlin)).

12. Quatro moedas de 5 centavos e seis moedas de 10 centavos são arremessadas e o número de caras, N, é observado. Se $N = 4$, qual é a probabilidade condicional de que exatamente duas moedas de 5 centavos saíram cara?

    (Resp: 3/7)

13. Para as distribuições abaixo, calcule o valor esperado e a variância:

    (a) Poisson com parâmetro λ.
    (b) Geométrica com probabilidade de sucesso p.
    (c) Exponencial com parâmetro λ.

14. Suponha que a pdf conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) seja dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

    Calcule:

    (a) $P(X > 1/2)$;
    (b) $P(Y < 1/2 | X = 1/2)$.

15. A pdf conjunta da variável aleatória (X, Y) é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{para } 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

    Calcule:

    (a) $P(X > 1|Y = 1)$ (Resp.: e^{-1});
    (b) $P(X < a)$ (Resp.: $1 - e^{-a}$);
    (c) $P(X < 2|Y = y)$ (Resp.: $1 - e^{-2}$);
    (d) $P(Y > 1|X = x)$
    (e) $P(X < 2|0 < Y < 3)$
    (f) $E(X)$ e $E(Y)$

16. Suponha que a probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6xy(2 - x - y), & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

    Calcule a esperança condicional de X dado que $Y = y$, onde $0 < y < 1$.

    (Resp.: $(5 - 4y)/(8 - 6y)$)

17. A probabilidade conjunta de X e Y é dada abaixo. Determine $E[e^{X/2}|Y=1]$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}ye^{-xy}, & 0<x<\infty, \quad 0<y<2\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

(Resp.: $E[e^{X/2}|Y=1]=2$)