

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 Mecânica 1

Dinâmica dos Corpos Rígidos

Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo



Conteúdo

Simbologia

Formulário

Teorema do Movimento do Baricentro (ou Teorema da Resultante) –TMB

Teorema da Variação da Energia Cinética (ou Teorema do Trabalho) – TEC

Teorema da Quantidade de Movimento Angular - TMA

Expressão da Energia Cinética para um Corpo Rígido

Expressão da Quantidade de Movimento Angular para um Corpo Rígido

Cálculo do Trabalho de algumas forças especiais

Momento de Inércia

Teorema do Transporte dos Momentos de Inércia

Produtos de Inércia

Teorema do Transporte dos Produtos de Inércia

Raio de Giração

Momento Polar de Inércia

Matriz de Inércia

Eixos Principais de Inércia e Matriz Principal de Inércia

Exercícios



Simbologia

t tempo

s distância percorrida, arco sobre a trajetória

v velocidade escalar

a aceleração escalar

$\vec{r} = (P - O)$ vetor posição

\vec{v} vetor velocidade

\vec{a} vetor aceleração

\vec{t} versor tangente

\vec{n} versor normal

\vec{b} versor binormal

\vec{a}_t vetor aceleração tangencial

\vec{a}_n vetor aceleração normal

ρ raio de curvatura da trajetória ($c = 1/\rho$ é a curvatura)

$1/\gamma$ raio de torção da trajetória (γ é a torção da trajetória)

$\vec{\tau}$ versor transversal (coordenadas polares ou cilíndricas)

\vec{u} versor radial (coordenadas polares ou cilíndricas)



Simbologia

\vec{F} Força

\vec{R} Resultante de um sistema de forças

I Invariante escalar de um sistema de forças

\vec{M}_O Momento de uma força (ou de um sistema de forças) em relação a um pólo O

M_u Momento de uma força (ou de um sistema de forças) em relação a um eixo $O\vec{u}$

G Baricentro



Simbologia

\vec{F} Força

\vec{M}_O Momento de uma força em relação ao pólo O

\vec{Q} Quantidade de Movimento

\vec{H}_O Quantidade de Movimento Angular em relação ao pólo O

T Energia Cinética

τ Trabalho de uma força durante um intervalo de tempo (também W)

\vec{I} Impulso de uma força durante um intervalo de tempo

J_r Momento de inércia em relação a um eixo r

J_{rs} Produto de Inércia em relação aos eixos r e s

J_O Momento Polar de Inércia em relação ao polo O

$[J]_{Oxyz}$ Matriz de Inércia em relação ao sistema de eixos $Oxyz$

μ Coeficiente de atrito seco de escorregamento

ρ Coeficiente de atrito de rolamento (vide também raio de curvatura)

\vec{F}_{at} Força de atrito (de escorregamento)

\vec{M}_{at} Momento de atrito de rolamento

\vec{N} Força normal (força de reação na direção normal às superfícies em contato)



Unidades no SI (Sistema Internacional de Unidades)

\vec{v}	velocidade	[m/s]	
\vec{a}	aceleração	[m/s ²]	
$\vec{\omega}$	vetor de rotação	[rad/s]	
$\vec{\dot{\omega}}$	vetor aceleração rotacional	[rad/s ²]	
x	coordenada de posição, distância ou deslocamento	[m]	
\vec{F}	força	[N]	N = kg.m/s ²
\vec{M}_O	momento de força em relação a um polo O	[N.m]	
\vec{Q}	quantidade de movimento	[kg.m/s]	kg.m/s = N.s
\vec{H}_O	quantidade de movimento angular em relação a um polo O	[kg.m ² /s]	
T	energia cinética	[J]	Joule = kg.m ² /s ² = N.m
τ	trabalho de uma força entre duas posições ou entre dois instantes	[J]	
\vec{I}	impulso de uma força entre dois instantes	[N.s]	
J_r e J_{rs}	momentos e produtos de inércia	[kg.m ²]	
ρ	coeficiente de atrito de rolamento	[m]	



Formulário

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$$

$$\Delta T = \tau^{ext} + \tau^{int}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_O^2 + m\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2}\{\vec{\omega}\}^T [J]_O \{\vec{\omega}\} \quad \text{p/ C. R.}$$

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge \vec{v}_O + [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] [J]_O \{\vec{\omega}\} \quad \text{p/ C. R.}$$

$$J_x = J_{x_G} + m(y_G^2 + z_G^2)$$

$$J_{xy} = J_{x_G y_G} + mx_G y_G$$

$$2J_O = J_x + J_y + J_z$$

$$\Delta T = \tau^{ext} \quad \text{p/ C. R.}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext} \quad \text{p/ O fixo}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext} \quad \text{p/ O} \equiv G$$

Força peso

$$\Delta V = mg\Delta z$$

Força de mola

$$\Delta V = \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)$$

Lei de Coulomb
Atrito seco de escorregamento

$$F_{at} \leq \mu N$$

Momento de
Atrito de Rolamento

$$M_{at} = \rho N$$



Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) (ou Teorema da Resultante)

"O baricentro de um sistema de pontos materiais se move como se nele estivesse concentrada toda a massa do sistema e nele agisse uma força cujo vetor representativo é a resultante das forças externas ao sistema".

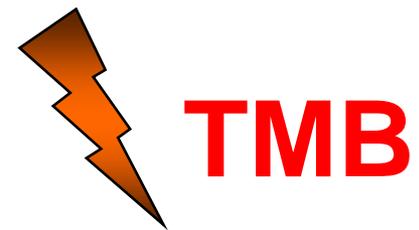
$$m(G - O) = \sum_i^N m_i (P_i - O)$$

$$m(\vec{v}_G - \vec{v}_O) = \sum_i^N m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O)$$

$$m\vec{v}_G - m\vec{v}_O = \sum_i^N m_i \vec{v}_i - \sum_i^N m_i \vec{v}_O$$

$$m\vec{v}_G = \sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

$$m\vec{a}_G = \sum_i^N m_i \vec{a}_i = \sum_i^N \vec{F}_i = \vec{R}^{ext}$$



TMB

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$$



Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) (ou Teorema da Resultante)

Corolário:

a) Teorema da **conservação** da quantidade de movimento de um sistema:

Quando: $\vec{R}^{ext} = \vec{0}$

o baricentro do sistema está em equilíbrio (parado ou em movimento retilíneo uniforme).

b) No caso em que a projeção da resultante numa dada direção for nula, então há a conservação da quantidade de movimento do baricentro do sistema nesta direção.

$$\vec{R} \cdot \vec{u} = 0$$
$$ma_{Gu} = 0 \rightarrow \begin{cases} v_{Gu} = cte \\ ou \\ v_{Gu} = 0 \end{cases}$$



Teorema da Energia Cinética (TEC)

“A variação da energia cinética de um sistema de pontos materiais é igual à soma do trabalho das forças externas e internas”.

“A variação da energia cinética de um corpo rígido é igual ao trabalho efetuado pelas forças externas”.

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i)$$

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N (m_i \vec{a}_i) \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{int} \cdot \vec{v}_i$$

$$\vec{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ij}^{int} \quad \vec{F}_{ij}^{int} = \lambda_{ij} (P_j - P_i)$$
$$\vec{F}_{ji}^{int} = -\lambda_{ij} (P_j - P_i)$$

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_i$$

$$\int_{T_0}^T dT = \int_0^t \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i dt + \int_0^t \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_i dt$$

$$T(t) - T(0) = \int_0^t \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i dt + \int_0^t \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_i dt$$



Teorema da Energia Cinética (TEC)

$$T(t) - T(0) = \sum_{i=1}^N \int_0^t \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i dt + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int_0^t \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_i dt$$

$$\Delta T = \tau^{ext} + \tau^{int}$$

Expressão válida para um sistema de pontos materiais.

Retomando, no duplo somatório, os trabalhos internos dos pares de forças de ação e reação:

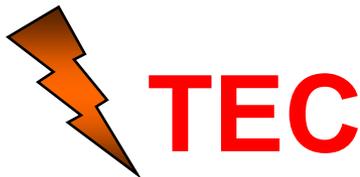
$$\vec{F}_{ij}^{int} \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_{ji}^{int} \cdot \vec{v}_j = \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_i - \lambda_{ij} (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_j$$

Todavia, da propriedade fundamental do corpo rígido: $(P_j - P_i) \cdot \vec{v}_i = (P_j - P_i) \cdot \vec{v}_j$

Anulando assim o trabalho das forças internas, resultando então para um corpo rígido:

$$\Delta T = \tau^{ext}$$

Expressão válida para um corpo rígido.





Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TMA)

"A taxa de variação da quantidade de movimento angular de um sistema material calculado em relação a um pólo fixo ou em relação ao seu baricentro é igual ao momento das forças externas calculado em relação ao mesmo pólo".

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge m_i \vec{a}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right) \wedge \vec{v}_O + \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \vec{F}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_O = m \vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}$$

Para o pólo fixo ou idêntico ao seu baricentro do sistema:

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext} \quad p/O \text{ fixo}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext} \quad p/O \equiv G$$





Teorema da Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Corolário:

Pode-se enunciar o teorema da **conservação** da quantidade de movimento angular:

"Caso o momento das forças externas que agem no sistema material, calculado em relação a um pólo fixo ou em relação ao seu baricentro, for nulo, a quantidade de movimento angular do sistema material calculado em relação ao mesmo pólo será constante."

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_O = \text{cte.}$$



Energia Cinética de um Corpo Rígido

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})$$

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_O^2 + 2\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) + [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] \cdot [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})]$$

$$v_i^2 = v_O^2 + 2\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) + \vec{\omega} \cdot (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})]$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} m_i v_O^2}_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})}_2 + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})]}_3$$



Energia Cinética de um Corpo Rígido

Resolvendo cada um dos três somatórios separadamente temos, para o primeiro deles:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} m_i v_o^2 = \frac{1}{2} m v_o^2$$

para o segundo termo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{v}_o \cdot \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) &= \vec{v}_o \cdot \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \\ &= \vec{v}_o \cdot \vec{\omega} \wedge m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \\ &= m \vec{v}_o \cdot \vec{\omega} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O}) \end{aligned}$$

Para o terceiro termo, considerando um sistema de coordenadas cartesiano Oxyz solidário ao corpo com origem em O:

$$(\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad \vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$



Energia Cinética de um Corpo Rígido

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m_i \left\{ \left[(y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \right] \vec{i} + \right. \\ &+ \left[-x_i y_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z \right] \vec{j} + \\ &+ \left. \left[-x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z \right] \vec{k} \right\} \end{aligned}$$

Podemos reconhecer aqui os momentos de segunda ordem do corpo rígido calculados em relação ao sistema de coordenadas solidário ao corpo com origem em O:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left\{ \left[\omega_x J_x - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{xz} \right] \vec{i} + \right. \\ &+ \left[-\omega_x J_{xy} + \omega_y J_y - \omega_z J_{yz} \right] \vec{j} + \\ &+ \left. \left[-\omega_x J_{xz} - \omega_y J_{yz} + \omega_z J_z \right] \vec{k} \right\} \end{aligned}$$



Energia Cinética de um Corpo Rígido

Utilizando notação matricial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] &= \frac{1}{2} \{\vec{\omega}\}^T [\mathbf{J}]_O \{\vec{\omega}\} \end{aligned}$$



Energia Cinética de um Corpo Rígido

Finalmente, substituindo os três termos desenvolvidos na expressão da energia cinética obtêm-se:



$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + m\vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2}\{\vec{\omega}\}^T [J]_O \{\vec{\omega}\}$$

Casos particulares:

a) Caso o corpo tenha um ponto com velocidade nula $\vec{v}_0 = \vec{0} \Rightarrow$

$$T = \frac{1}{2}\{\vec{\omega}\}^T [J]_O \{\vec{\omega}\}$$

b) Escolhendo $O \equiv G \Rightarrow (G - O) = \vec{0} \Rightarrow$

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\{\vec{\omega}\}^T [J]_G \{\vec{\omega}\}$$

c) Caso o corpo esteja em ato de movimento translatório $\vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow$

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_G^2$$



Quantidade de Movimento Angular de um Corpo Rígido (em relação a um pólo O pertencente ao corpo)

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge m_i \vec{v}_i$$

Sendo O pertencente ao corpo rígido, podemos utilizar a fórmula de Poisson:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})$$

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge m_i [\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})]$$

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge m_i \vec{v}_O + \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge m_i [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})]$$

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \vec{v}_O + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge [\vec{\omega} \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})]}_{\otimes}$$

O termo assinalado na equação já foi desenvolvido da dedução da expressão da energia cinética de um corpo rígido. O primeiro termo tem interpretação imediata. Resulta em:



$$\vec{H}_O = m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge \vec{v}_O + [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] [J]_O \{\vec{\omega}\}$$



Quantidade de Movimento Angular de um Corpo Rígido (em relação a um pólo O pertencente ao corpo)

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge \vec{v}_O + [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] [J]_O \{\vec{\omega}\}$$

Casos particulares:

a) Caso o corpo tenha um ponto O com velocidade nula $\vec{v}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_O = [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] [J]_O \{\vec{\omega}\}$

b) Escolhendo $O \equiv G \Rightarrow (G - O) = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_G = [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] [J]_G \{\vec{\omega}\}$

c) Caso o corpo esteja em ato de movimento translatório $\vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_O = m(G - O) \wedge \vec{v}_O$

d) Caso o corpo esteja em ato de movimento translatório e escolhendo $O \equiv G \Rightarrow \vec{H}_G = \vec{0}$

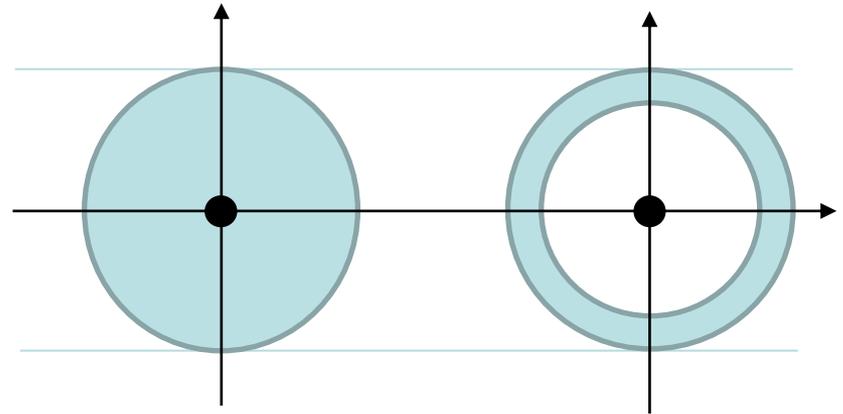
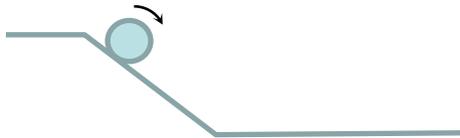


Momentos e Produtos de Inércia (ou momentos de segunda ordem)

Considere duas esferas, com:

- mesmo diâmetro externo;
- mesma massa;
- mesmo baricentro.

Entretanto uma é maciça e a outra é oca*.



Colocando-as para girar, a partir do repouso, do topo de um plano inclinado, observa-se que uma delas adquire velocidades maiores que a outra e chega na base do plano primeiro.

Apesar de todas as semelhanças observa-se experimentalmente que elas apresentam diferentes comportamentos dinâmicos quando submetidos às mesmas condições.

Motivo: elas têm diferentes distribuições espaciais da massa em torno do baricentro.

Os momentos e produtos de inércia quantificam a distribuição espacial da massa.

*Obviamente que para uma maciça e a outra oca mas com mesma massa e mesmo diâmetro externo, as massas específicas, ou seja, os materiais, seriam diferentes.

Para que não haja diferença de atrito com o plano inclinado imagine as duas revestidas externamente por um plástico.

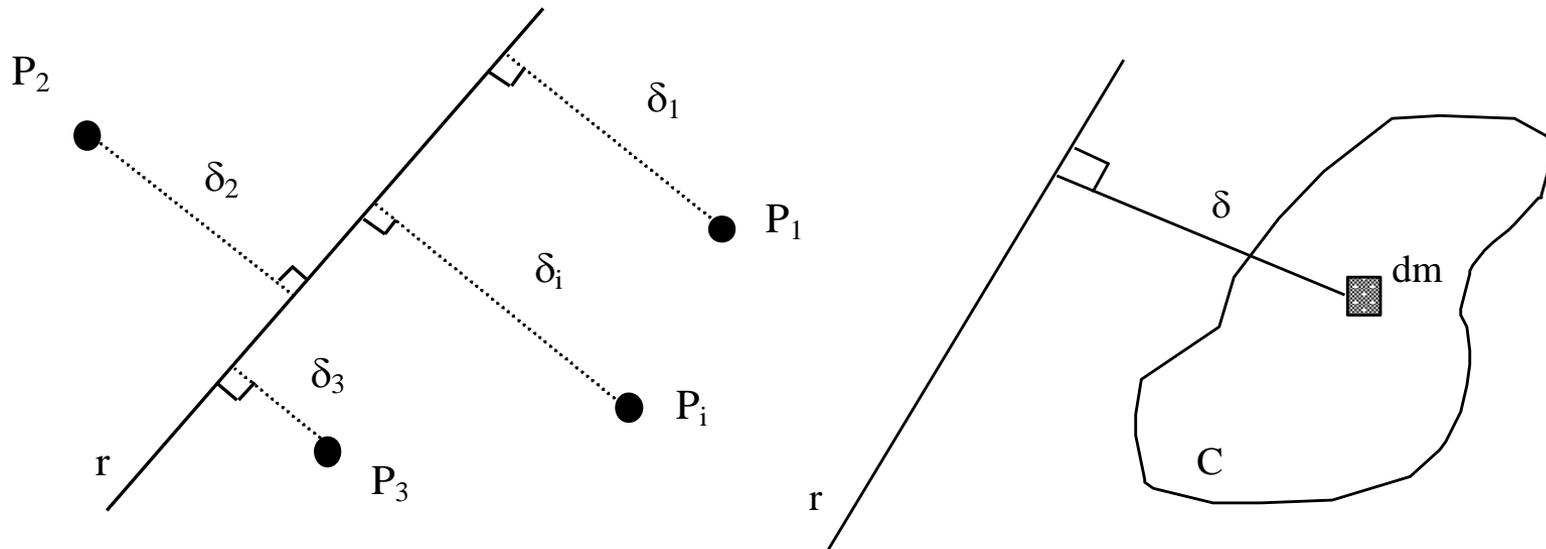


Momento de Inércia em relação a um eixo

Definição: momento de inércia de um sistema de N pontos materiais P_i de massas m_i , com relação a um eixo r :

$$J_r = \sum_{i=1}^N m_i \delta_i^2$$

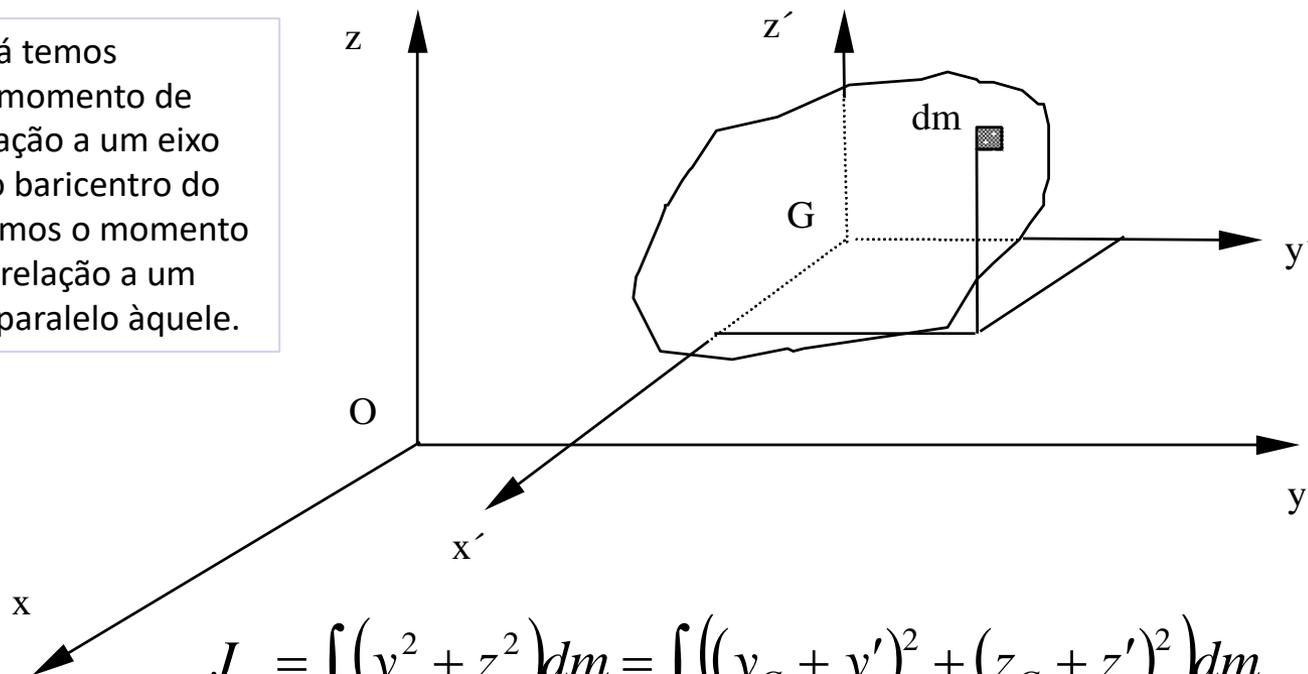
$$J_r = \int_C \delta^2 dm = \int_C \delta^2 \rho dC$$





Momentos de Inércia – Teorema do transporte p/ eixos paralelos (Teorema de Steiner)

Para quando já temos calculado um momento de inércia em relação a um eixo passando pelo baricentro do corpo e queremos o momento de inércia em relação a um segundo eixo paralelo àquele.



$$J_x = \int_C (y^2 + z^2) dm = \int_C ((y_G + y')^2 + (z_G + z')^2) dm$$

$$J_x = \int_C ((y_G^2 + 2y_G y' + y'^2) + (z_G^2 + 2z_G z' + z'^2)) dm$$

$$J_x = \int_C (y'^2 + z'^2) dm + (y_G^2 + z_G^2) \int_C dm + 2y_G \int_C y' dm + 2z_G \int_C z' dm$$



Momentos de Inércia – Teorema do transporte p/ eixos paralelos (Teorema de Steiner)

$$\int_C y' dm = y'_G = 0$$

$$\int_C z' dm = z'_G = 0$$

$$J_x = J_{x_G} + (y_G^2 + z_G^2)m$$

Por analogia:

$$J_y = J_{y_G} + (x_G^2 + z_G^2)m$$

$$J_z = J_{z_G} + (x_G^2 + y_G^2)m$$

Para quando já temos calculado um momento de inércia em relação a um eixo passando pelo baricentro do corpo e queremos o momento de inércia em relação a um segundo eixo paralelo àquele.

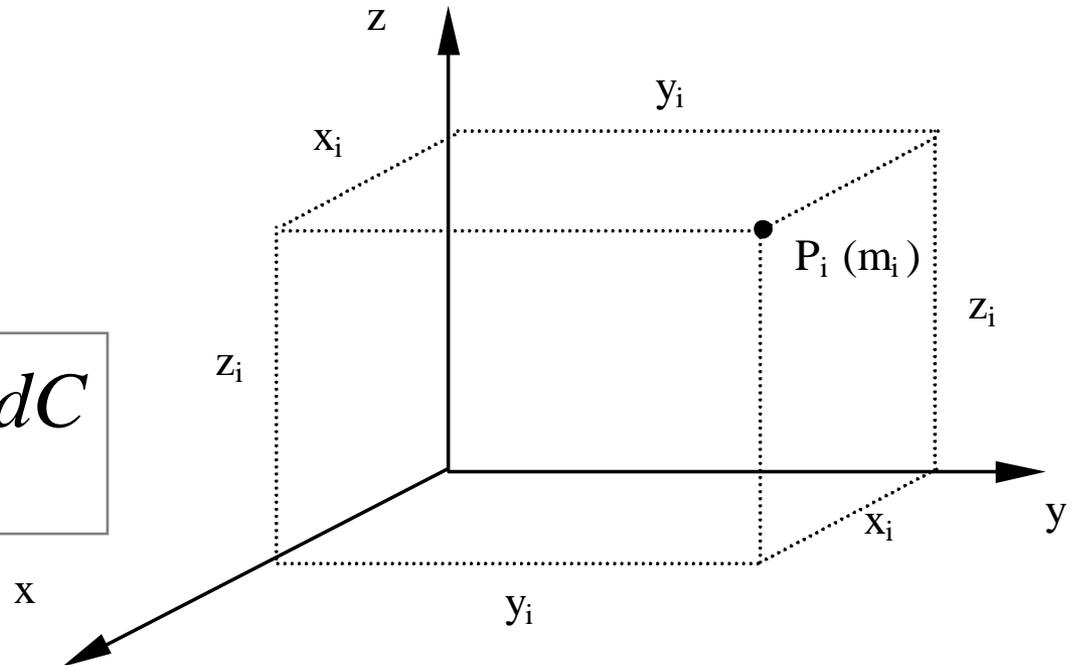
Observe que, conforme a dedução, **o teorema do transporte é sempre a partir de um eixo que passe pelo baricentro!**



Produtos de Inércia

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^N x_i y_i m_i$$

$$J_{xy} = \int_C xy dm = \int_C xy \rho dC$$

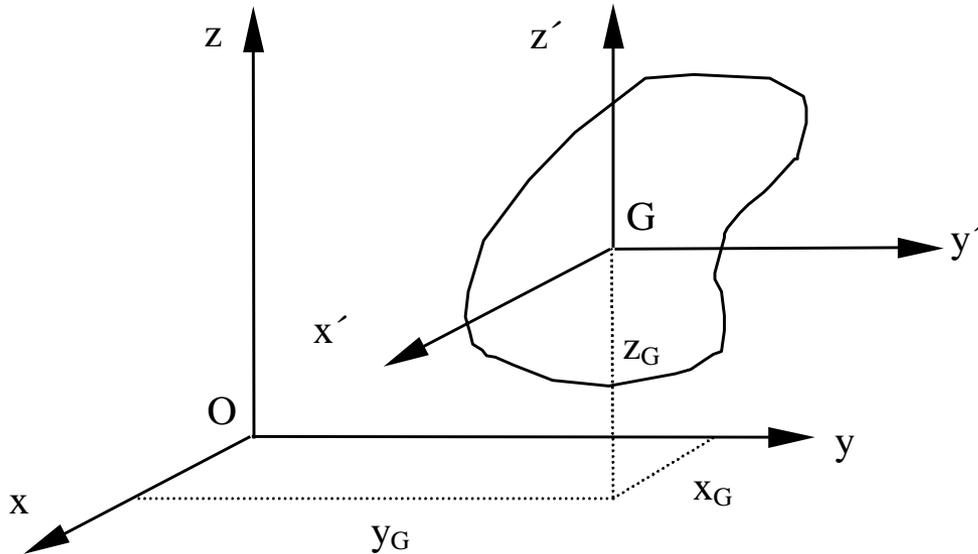


$$J_{xz} = \int_C xz dm$$

$$J_{yz} = \int_C yz dm$$



Produtos de Inércia – Teorema do transporte p/ eixos paralelos



Para quando já temos calculado um produto de inércia em relação a eixos passando pelo baricentro do corpo e queremos o produto de inércia em relação a outros dois eixos paralelos àqueles.

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_C xy \, dm = \int_C (x_G + x')(y_G + y') \, dm = \\ &= \int_C (x_G y_G + x_G y' + y_G x' + x' y') \, dm = \\ &= \int_C x' y' \, dm + x_G y_G \int_C dm \end{aligned}$$



Produtos de Inércia – Teorema do transporte p/ eixos paralelos

já que

$$\int_C x' y_G dm = y_G \int_C x' dm = 0$$

$$\int_C x_G y' dm = x_G \int_C y' dm = 0$$

Resulta em

$$J_{xy} = J_{x_G y_G} + m x_G y_G$$

Por analogia

$$J_{yz} = J_{y_G z_G} + m y_G z_G$$

$$J_{xz} = J_{x_G z_G} + m x_G z_G$$

Para quando já temos calculado um produto de inércia em relação a eixos passando pelo baricentro do corpo e queremos o produto de inércia em relação a outros dois eixos paralelos àqueles.

Observe que, conforme a dedução, **o teorema do transporte é sempre a partir de eixos que passem pelo baricentro!**



Raio de Giração

Seja J_u o momento de inércia do corpo em relação a um eixo u .

Admitindo uma massa concentrada igual à massa do corpo que tivesse este mesmo momento de inércia em relação àquele eixo u :

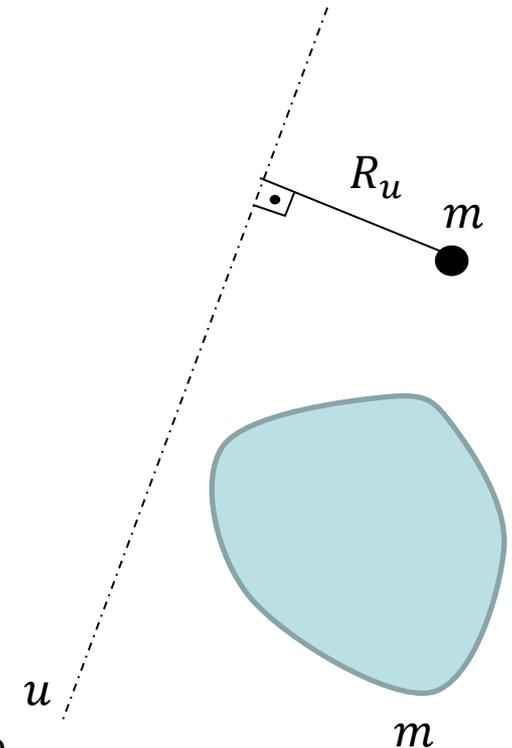
$$J_u = mR_u^2$$

Ao escalar R_u dá-se o nome de raio de giração do corpo em relação a um eixo u .

$$R_u = \sqrt{\frac{J_u}{m}}$$

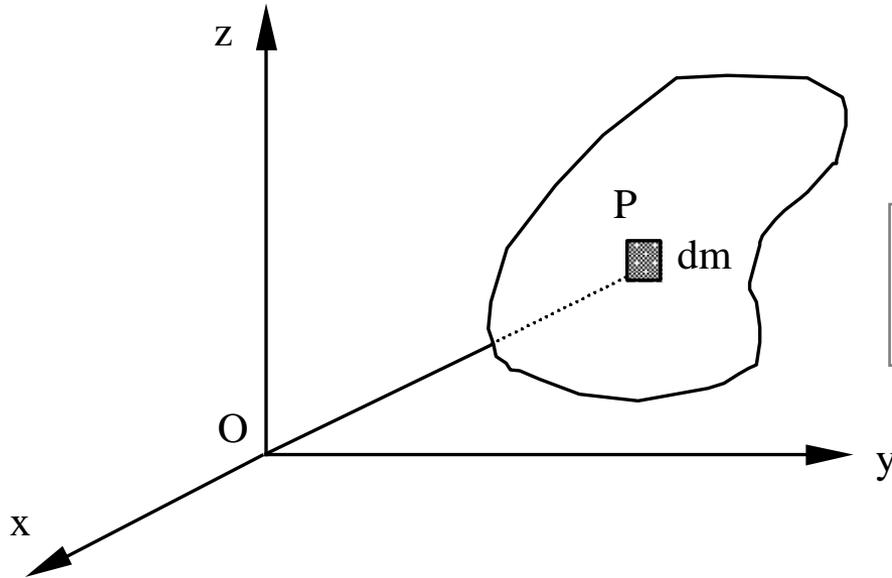
A interpretação do raio de giração é que ele seria a distância R_u ao eixo que um ponto de mesma massa concentrada que a do corpo teria para resultar no mesmo momento de inércia do corpo em relação a este mesmo eixo.

O raio de giração não aparece explicitamente nas definições seja de energia cinética seja de quantidade de movimento angular. Ele é apenas forma alternativa indireta de se informar o momento de inércia.





Momento Polar de Inércia



$$J_O = \sum_{i=1}^N |P_i - O|^2 m_i$$

$$J_O = \int_C |P_i - O|^2 dm = \int_C |P_i - O|^2 \rho dC$$

$$J_O = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$2J_O = J_x + J_y + J_z$$

No caso particular de ter-se uma figura plana contida no plano Oxy, por exemplo, conclui-se que:

$$J_O = J_z$$

$$J_O = J_x + J_y$$



Matriz de Inércia e Matriz Principal de Inércia

Define-se a matriz de inércia do corpo em relação a um sistema de eixos $Oxyz$ pela matriz quadrada 3×3 simétrica que tem na diagonal principal os momentos de inércia e fora da diagonal principal os produtos de inércia com sinal invertido:

$$[J]_{Oxyz} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}$$

Da Álgebra Linear pode-se demonstrar que sempre existe uma orientação espacial particular do sistema de eixos em relação ao qual os produtos de inércia se anulam.

Têm-se aí os chamados “eixos principais de inércia” do corpo e a correspondente matriz “principal” de inércia.

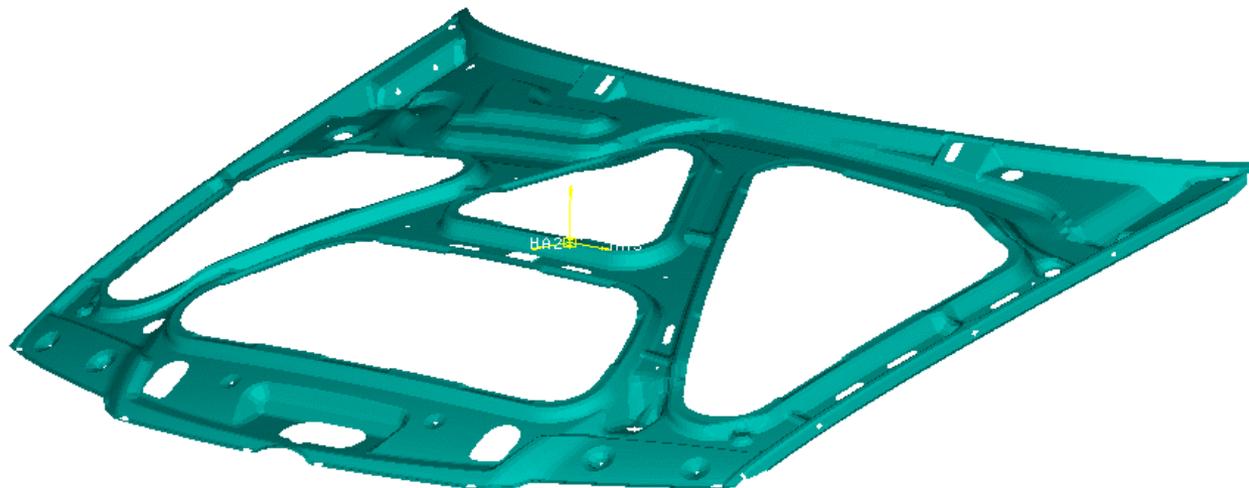
Eixos de simetria espacial do corpo anulam os produtos de inércia, todavia mesmo que o corpo não possua nenhum elemento de simetria mesmo assim ele sempre terá eixos principais de inércia.

Procura-se trabalhar com eixos principais de inércia com o objetivo de simplificar as equações já que os produtos de inércia resultam zerados.

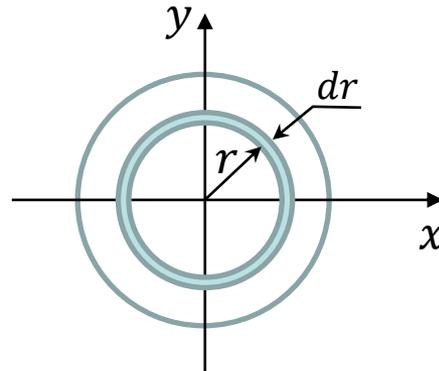
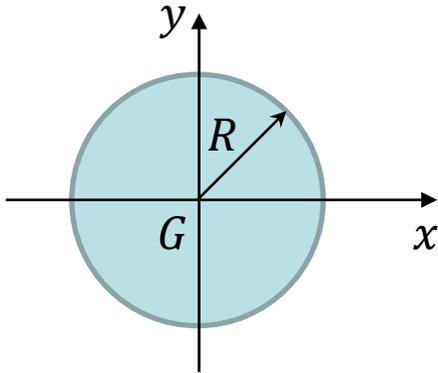
$$[J]_{Ox'y'z'} = \begin{bmatrix} J_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z'} \end{bmatrix}$$



Matriz de Inércia – Exemplo de Cálculo por um programa de CAE ou CAD



Analyze Inertia			
Analysis (mass, center of gravity, moments of inertia)			
File	= /user2/macedo/calc/eng_carr/vw22x_capa/377823155b_300499.iges.ansa.bif		
Text	= Momentos de segunda ordem - Leandro		
Date	= 06/11/00		
Volume	= 8.79974E+05	Mass	= 6.86371E-03
Center of gravity	-204.14	21.819	608.54
Static moments	-1.4012	0.14976	4.1768
Moments of inertia	3730.2	-8.5858	-751.29
referring to	-	3458.7	95.879
System of origin	-	-	2062.9
Steiner share	2545.0	2827.8	289.30
Moments of inertia	1185.1	21.987	101.37
referring to	-	630.85	4.7440
system of gravity	-	-	1773.6

**Exercício 01: Determinação da matriz de inércia de um disco delgado**

$$2J_G = J_x + J_y + J_z$$

$$J_G = J_z$$

$$J_x = J_y$$

$$2J_z = J_x + J_x + J_z$$

$$J_z = 2J_x = 2J_y$$

$$J_G = J_z = \int r^2 dm$$

$$dm = \rho 2\pi r dr$$

$$J_z = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr$$

$$J_z = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr$$

$$J_z = 2\pi\rho \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi\rho R^4}{2}$$

$$J_z = \frac{mR^2}{2}$$

$$m = \rho\pi R^2$$

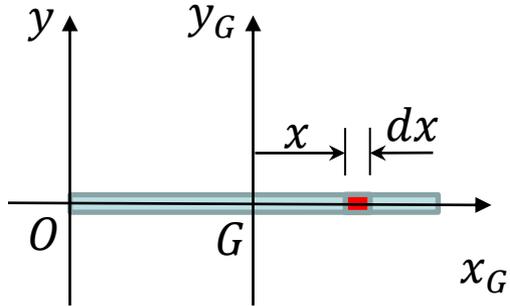
$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{4}$$

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$$[J]_{Gxyz} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$$



Exercício 02: Determinação da matriz inércia de uma barra delgada



$$J_{y_G} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm$$

$$dm = \rho A dx$$

$$J_{y_G} = \rho A \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

$$J_{y_G} = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\rho A L^3}{12}$$

$$m = \rho A L \Rightarrow J_{y_G} = \frac{mL^2}{12}$$

$$J_{z_G} = J_{y_G}$$

$$J_{z_G} = \frac{mL^2}{12}$$

Podemos generalizar o resultado do disco delgado para um cilindro:

$$J_{x_G} = \frac{mR^2}{2}$$

Pela simetria:

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$$[J]_{Gxyz} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$$

Para barra delgada, por exemplo com $\frac{L}{R} = 100$:

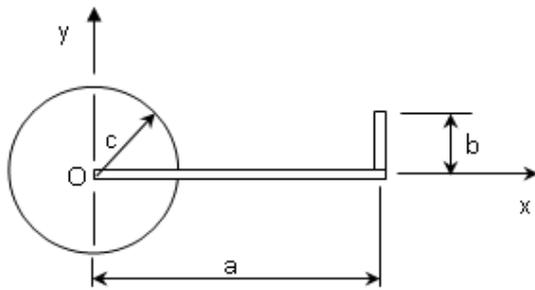
$$\frac{\frac{mR^2}{2}}{\frac{mL^2}{12}} = \frac{3}{20000}$$

$\Rightarrow J_{x_G}$ seria 0,015% de J_{z_G} ou J_{y_G} e poderia ser então desprezado.

Para o sistema de eixos $Oxyz$, usando o teorema do Transporte (Steiner):

$$J_{y_O} = J_{y_G} + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

$$[J]_{Oxyz} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}$$

**Exercício 03: Determinar matriz de inércia da figura plana ilustrada**

Disco de raio c e massa m_1

Barra de comprimento a e massa m_2

Barra de comprimento b e massa m_3

$$J_x = \frac{m_1 c^2}{4} + \frac{m_3 b^2}{3}$$

$$J_y = \frac{m_1 c^2}{4} + \frac{m_2 a^2}{3} + m_3 a^2$$

$$J_z = \frac{m_1 c^2}{2} + \frac{m_2 a^2}{3} + \left(\frac{m_3 b^2}{12} + m_3 \left(a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \right)$$

$$J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$$J_{xy} = m_3 (a) \left(\frac{b}{2} \right)$$



Exemplos de cálculo do trabalho para algumas forças especiais

Força Conservativa Peso – Energia Potencial da Força Peso

Seja um sistema de pontos materiais P_i de massas m_i submetidos a um campo gravitacional. As forças peso em cada ponto são:

$$\vec{F}_i = -m_i g \vec{k}$$

O diferencial do vetor posição é dado por:

$$dP_i = dx_i \vec{i} + dy_i \vec{j} + dz_i \vec{k}$$

A diferencial do trabalho é dada por:

$$d\tau_i = \vec{F}_i \cdot dP_i = -m_i g dz_i$$

Integrando, resulta no trabalho do peso de P_i sobre ele, dado por:

$$\tau_i = m_i g [z_i(t_0) - z_i(t)]$$

Fazendo o somatório para todos os pontos do sistema:

$$\tau = \sum_{i=1}^N \tau_i = g \sum_{i=1}^N m_i [z_i(t_0) - z_i(t)]$$

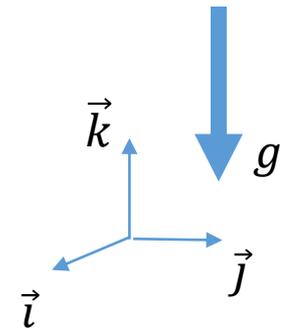
Resulta no trabalho da força peso sobre o sistema...

$$\tau = -mg\Delta z_G$$



e na expressão da variação da energia potencial da força peso:

$$\Delta V = mg\Delta z_G$$





Exemplos de cálculo do trabalho para algumas forças especiais

Força Conservativa de Mola – Energia Potencial da Força de Mola

Trabalho de uma força elástica de mola entre duas posições deformadas da mola, sendo L_0 o comprimento livre da mola:

Seja a força de mola elástica dada por:

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

A diferencial do vetor posição é dada por:

$$dP = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

A diferencial do trabalho é dada por:

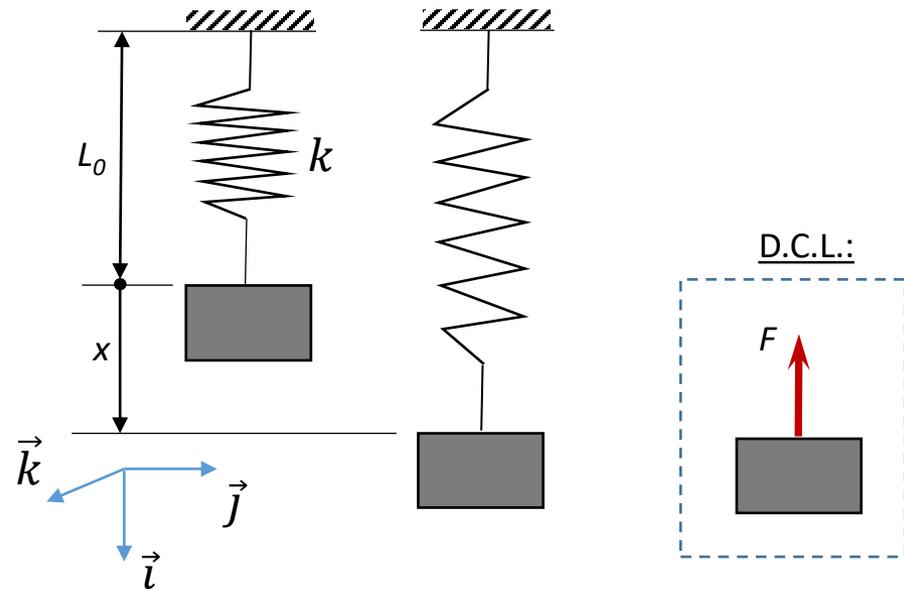
$$d\tau = \vec{F} \cdot dP = -kxdx$$

Integrando:

$$\int d\tau = \int_{x_0}^x -kxdx$$

Trabalho da força de mola:

$$\tau = -\frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)$$



Expressão da variação da energia potencial da força de mola:

$$\Delta V = \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)$$

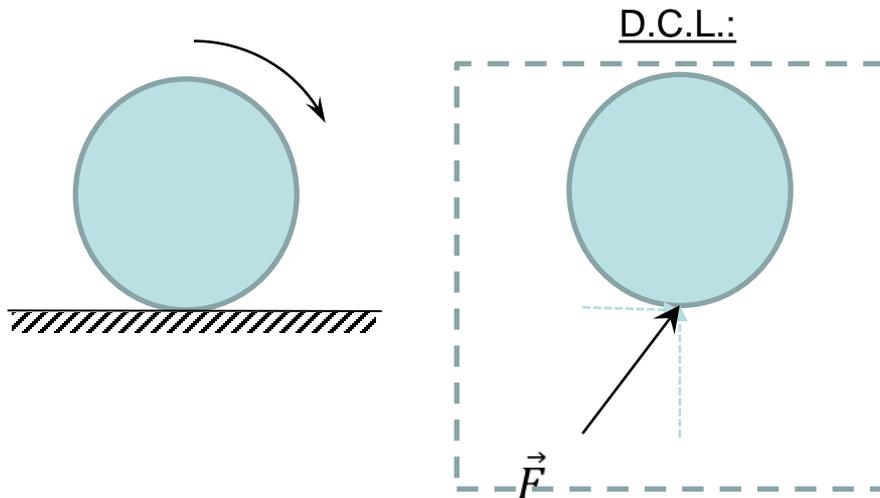


Exemplos de cálculo do trabalho para algumas forças especiais

Trabalho das forças de contato no rolamento puro sobre superfície fixa

No rolamento puro, isto é, rolamento sem escorregamento, sobre uma superfície fixa, o ponto de contato tem velocidade instantaneamente nula.

Resulta que o trabalho da resultante das forças de reação aplicadas no ponto de contato é nulo!



$$d\tau = \vec{F} \cdot dP = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$d\tau = 0 \Rightarrow \boxed{\tau = 0}$$



Exemplos de cálculo do trabalho para algumas forças especiais

Outras forças que não realizam trabalho:

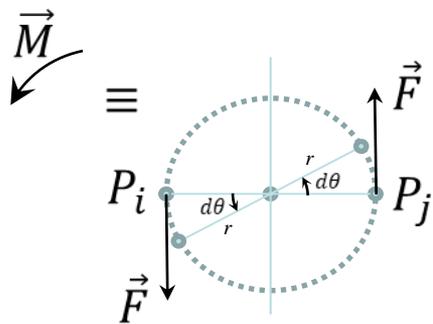
- forças aplicadas em pontos fixos (não há deslocamento do ponto, portanto não há trabalho sendo realizado);
- força de reação numa superfície lisa sem atrito quando um corpo desliza sobre ela (neste caso a força é normal ao deslocamento do ponto, portanto não realiza trabalho);
- força peso de um corpo quando seu baricentro se desloca apenas na horizontal.



Exemplos de cálculo do trabalho para algumas forças especiais

Trabalho realizado por um momento de força (trabalho de um binário)

Sendo um binário equivalente a um par de forças opostas seu momento pode ser dado por $(2rF)$. O trabalho elementar será dado por:



$$d\tau = F|dP_i| + F|dP_j|$$

$$|dP_i| = |dP_j| = rd\theta$$

$$d\tau = 2Frd\theta = M d\theta$$

$$d\theta = \omega dt \Rightarrow d\tau = M\omega dt$$

$$\tau(\theta_0, \theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta$$

ou

$$\tau(t_0, t) = \int_{t_0}^t M \omega dt$$

Generalizando, para quando as direções do momento externo aplicado e do vetor de rotação são quaisquer e independentes entre si:

$$\tau(t_0, t) = \int_{t_0}^t \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt$$



Exercícios

Na disciplina **PME3100 Mecânica 1** nos restringiremos a exercícios de dinâmica dos corpos rígidos no plano. Problemas no espaço tridimensional são abordados na disciplina PME3200 Mecânica 2.

Vejamos as expressões da Energia Cinética e da Quantidade de Movimento Angular simplificadas para problemas planos.

Admitindo por exemplo problema plano no plano xy , assim $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$.

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + m \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O) + \frac{1}{2} J_{z_O} \omega_z^2$$

Para O fixo:

$$T = \frac{1}{2} J_{z_O} \omega_z^2$$

Para O idêntico a G :

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{z_G} \omega_z^2$$

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge \vec{v}_O - J_{xz} \omega_z \vec{i} - J_{yz} \omega_z \vec{j} + J_{z_O} \omega_z \vec{k}$$

Para figura plana e/ou sendo o plano xy plano de simetria da figura e O fixo ou O idêntico a G :

$$\vec{H}_O = J_{z_O} \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{H}_G = J_{z_G} \omega_z \vec{k}$$



Exercícios - Procedimento



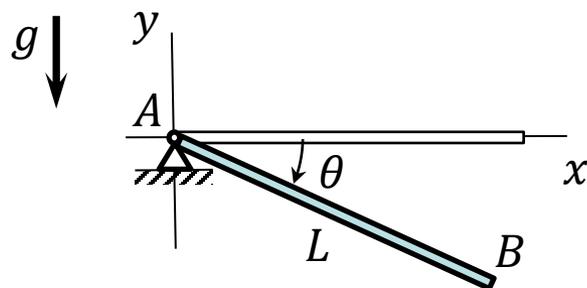
- DCL é fundamental!
- Fazer análise dimensional das respostas literais.
- Analisar e interpretar as respostas obtidas.



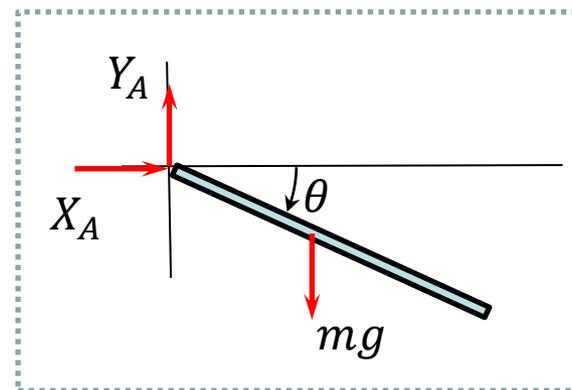
Exercício 01

A barra mostrada é liberada a partir do repouso da posição horizontal.

Pede-se determinar as suas velocidade e aceleração angulares e as reações na articulação para uma posição genérica da mesma:



D.C.L.



Pelo TEC:

$$\Delta T = \tau^{ext}$$

$$\frac{1}{2} J_{zA} \omega^2 - 0 = mg \frac{L}{2} (\text{sen}\theta - \text{sen}\theta_0)$$

$$\frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \omega^2 = mg \frac{L}{2} \text{sen}\theta$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} \text{sen}\theta$$

Derivando em relação ao tempo:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{3g}{L} \cos\theta\dot{\theta}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$\omega = -\dot{\theta}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3g}{2L} \cos\theta$$

$$\dot{\vec{\omega}} = -\frac{3g}{2L} \cos\theta\vec{k}$$

Análise:

$$p/ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\omega} \text{ horário}$$

$$p/ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \dot{\omega} \text{ anti-horário}$$

⇒ OK!!



Exercício 01 (continuação)

Aplicando o TMB:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$$

$$m\vec{a}_G = X_A\vec{i} + (Y_A - mg)\vec{j}$$

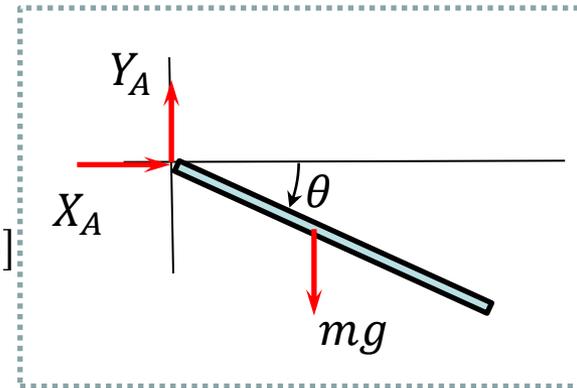
$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)] = \vec{a}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) + \omega^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge (G - A)]$$

$$\vec{a}_G = \vec{0} - \frac{3g}{2L} \cos\theta \vec{k} \wedge \frac{L}{2} (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) + \frac{3g}{L} \sin\theta \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \frac{L}{2} (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) \right]$$

$$\vec{a}_G = -\frac{3g}{4} \cos\theta \sin\theta \vec{i} - \frac{3g}{4} \cos^2\theta \vec{j} - \frac{3g}{2} \sin\theta \cos\theta \vec{i} + \frac{3g}{2} \sin^2\theta \vec{j}$$

$$\vec{a}_G = -\frac{9g}{4} \cos\theta \sin\theta \vec{i} - \frac{3g}{4} (\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) \vec{j}$$

D.C.L.



Análise:

$$p/0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

\vec{a}_G na diagonal descendente para a esquerda

⇒ OK!!

$$\begin{cases} -\frac{9mg}{4} \cos\theta \sin\theta = X_A \\ -\frac{3mg}{4} (\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) = Y_A - mg \end{cases} \Rightarrow$$

$$X_A = -\frac{9mg}{4} \cos\theta \sin\theta$$

$$Y_A = mg - \frac{3mg}{4} (\cos^2\theta - 2\sin^2\theta)$$

Análise:

$$p/0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow X_A \text{ para a esquerda}$$

$$p/\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow X_A \text{ para a direita}$$

⇒ OK!!



Exercício 01 (continuação) solução alternativa pelo TMA

Alternativamente pelo TMA:

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{ext}$$

$$\vec{H}_A = J_{z_A} \omega \vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_A = J_{z_A} \dot{\omega} \vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{ext} = -mg \frac{L}{2} \cos\theta \vec{k}$$

$$\Rightarrow J_{z_A} \dot{\omega} \vec{k} = -mg \frac{L}{2} \cos\theta \vec{k}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{J_{z_A}} mg \frac{L}{2} \cos\theta$$

$$J_{z_A} = \frac{mL^2}{3}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3g}{2L} \cos\theta$$

$$\dot{\vec{\omega}} = -\frac{3g}{2L} \cos\theta \vec{k}$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3g}{2L} \cos\theta$$

Mas $\omega = -\dot{\theta}$

Então $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = -\omega$

Resulta $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = -\omega \frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{3g}{2L} \cos\theta$

$$\omega d\omega = \frac{3g}{2L} \cos\theta d\theta$$

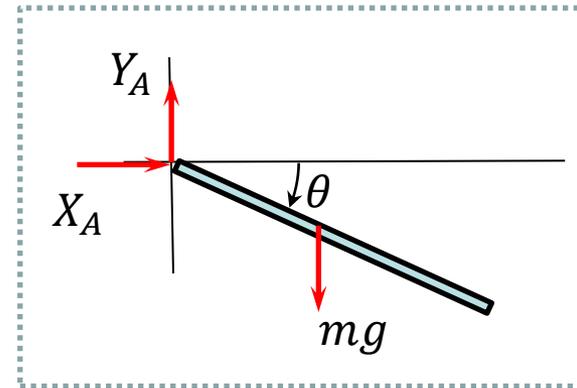
Integrando: $\int_0^\omega \omega d\omega = \frac{3g}{2L} \int_0^\theta \cos\theta d\theta$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{3g}{2L} \text{sen}\theta$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} \text{sen}\theta$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{3g}{L} \text{sen}\theta}$$

D.C.L.





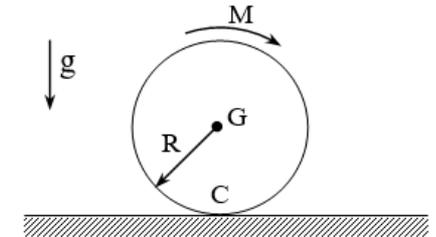
Exercício 02

Um binário de momento M é aplicado a um cilindro de massa m e raio R . O coeficiente de atrito entre o cilindro e a superfície é μ e aceleração da gravidade é g . Considerando que o cilindro parte do repouso, determine a aceleração angular $\dot{\omega}$ do cilindro e a força de atrito F_{at} no contato para os seguintes casos:

- a) o cilindro rola e escorrega;
- b) o cilindro rola sem escorregar.

Dado o momento de inércia do cilindro com relação a um eixo de direção normal

ao plano da figura e que passa por pelo seu baricentro G : $J_G = \frac{mR^2}{2}$.



$$m a_G \vec{i} = F_{at} \vec{i} + (N - mg) \vec{j}$$

$$\begin{cases} m a_G = F_{at} \\ N = mg \end{cases}$$

a) rola e escorrega

$$F_{at} = \mu N \Rightarrow \boxed{F_{at} = \mu mg}$$

$$\text{TMA: } \dot{H}_G = \vec{M}_G \Rightarrow -\frac{mR^2}{2} \dot{\omega} \vec{k} = (F_{at} \cdot R - M) \vec{k} \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \frac{2M}{mR^2} - \frac{2\mu g}{R}}$$

b) rola sem escorregar $v_G = \omega R$

$$a_G = \dot{\omega} R \Rightarrow F_{at} = m \dot{\omega} R$$

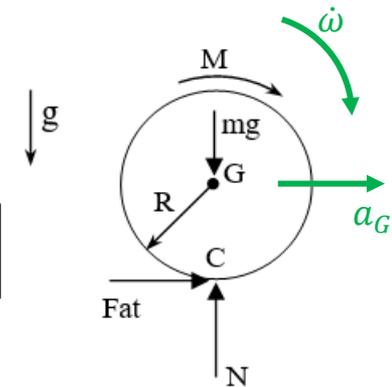
$$\text{TMA: } \dot{H}_G = \vec{M}_G \Rightarrow -\frac{mR^2}{2} \dot{\omega} \vec{k} = (F_{at} \cdot R - M) \vec{k} \Rightarrow -\frac{mR^2}{2} \dot{\omega} = (mR^2 \dot{\omega} - M)$$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2M}{3mR^2}}$$

$$\boxed{F_{at} = \frac{2M}{3R}}$$

Se $\frac{2M}{3R} < \mu mg \rightarrow$ situação b), rola sem escorregar

Se $\frac{2M}{3R} > \mu mg \rightarrow$ situação a), rola e escorrega

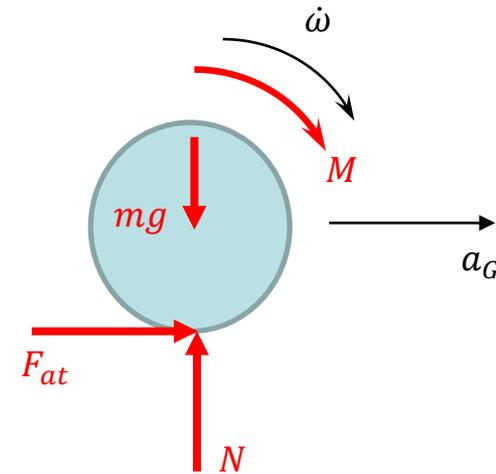




Exercício 02 (continuação)

Raciocínio para o sentido da força de atrito:

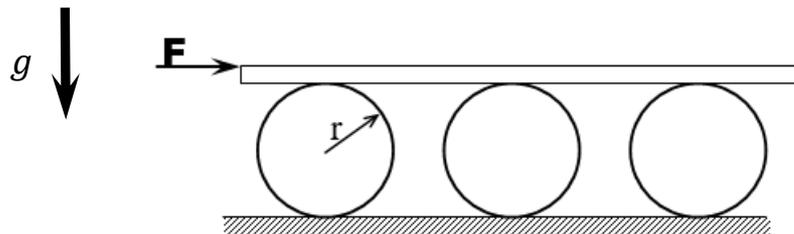
Nesta situação o cilindro vai sair do repouso deslocando-se para a direita.
Então deve haver uma resultante de força horizontal para a direita.
A única força horizontal é a força de atrito, então o sentido dela deve ser para a direita.
Ela é a responsável pela aceleração do baricentro do cilindro para a direita.





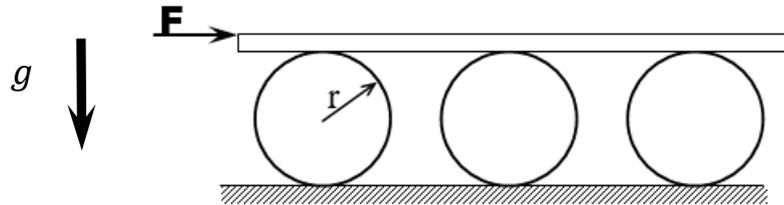
Exercício 03

Uma barra de massa M apoia-se nos três cilindros de raio r e massa m . Uma força horizontal F atua na barra colocando o sistema em movimento. Não ocorre escorregamento em nenhum contato. Pede-se determinar a aceleração da barra supondo que os cilindros sejam homogêneos com $J_G = mr^2/2$ (momento de inércia de um cilindro com relação ao eixo perpendicular ao plano do problema que passa pelo seu baricentro G).





**Exercício 03
(continuação)**



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A - \omega \vec{k} \wedge (B - A)$$

$$\vec{v}_B = \vec{0} - \omega \vec{k} \wedge (2R\vec{j})$$

$$\vec{v}_B = 2\omega R\vec{i}$$

$$v_{Barra} = 2\omega r$$

$$a_{Barra} = 2\dot{\omega} r$$

Pelo TEC:

$$\Delta T = \tau^{ext} + \tau^{int}$$

Mesmo o sistema não sendo um corpo rígido, como não há escorregamento nos contatos dos cilindros com a barra, os trabalhos das forças internas nestes contatos se anulam.

$$\Delta T = \frac{1}{2} M(v_B)^2 + \frac{1}{2} m(v_G)^2 + \frac{1}{2} J_{zG} \omega^2 - T_0$$

$$\frac{1}{2} M(2\omega r)^2 + 3 \left(\frac{1}{2} m(\omega r)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mr^2}{2} \right) \omega^2 \right) - T_0 = F(x - x_0)$$

$$\left(\frac{8M + 9m}{4} \right) r^2 \omega^2 - T_0 = F(x - x_0)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\left(\frac{8M + 9m}{2} \right) r^2 \omega \dot{\omega} = F \dot{x} = F 2\omega r \Rightarrow$$

$$\dot{\omega} = \frac{4F}{(8M + 9m)r} \Rightarrow$$

$$a_{Barra} = \frac{8F}{(8M + 9m)}$$

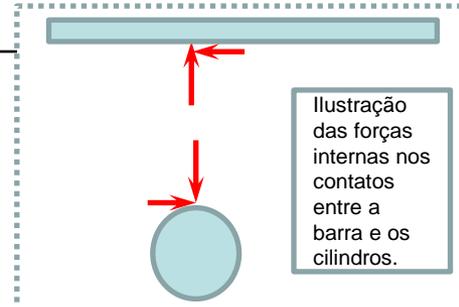
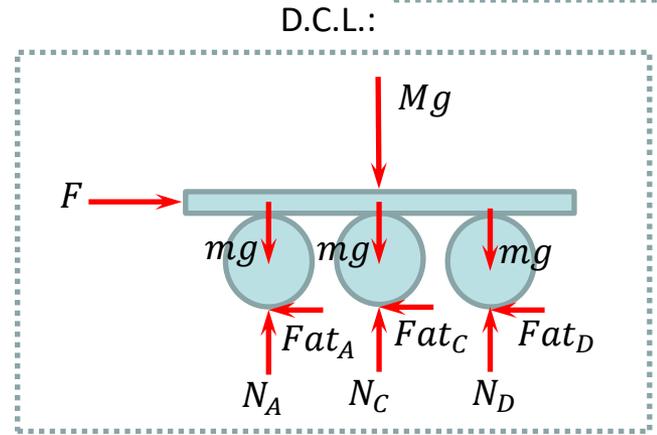


Ilustração das forças internas nos contatos entre a barra e os cilindros.



D.C.L.:



Exercício 03 (continuação)

Raciocínio para os sentidos das forças de atrito:

Segundo o enunciado não há escorregamento entre a barra e os cilindros.

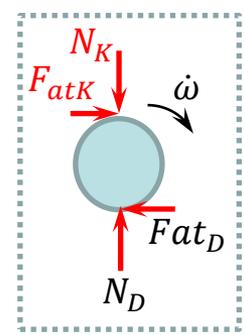
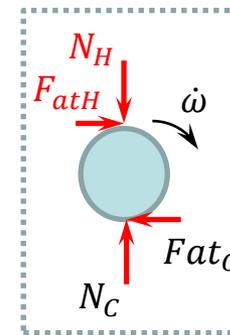
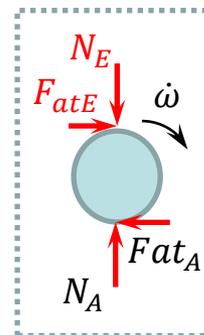
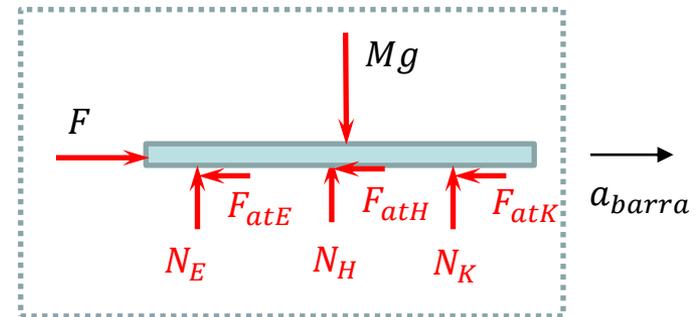
Também não há escorregamento entre os cilindros e o solo.

Nesta situação os cilindros deverão começar a rotacionar em sentido horário, deslocando-se para a direita.

As forças de atrito entre a barra e os cilindros empurram os cilindros para a direita e oferecem alguma resistência ao movimento da barra. Assim sobre a barra são para a esquerda e sobre os discos para a direita.

Caso não houvesse atrito com o solo os pontos de contato dos discos com o solo escorregariam para a direita. As forças de atrito nestes contatos se opõe a este escorregamento relativo. Elas são então para a esquerda.

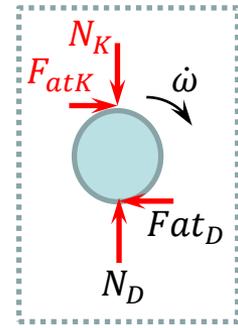
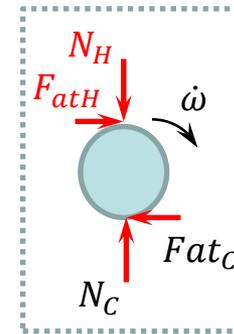
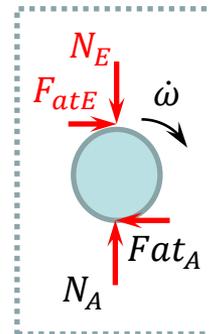
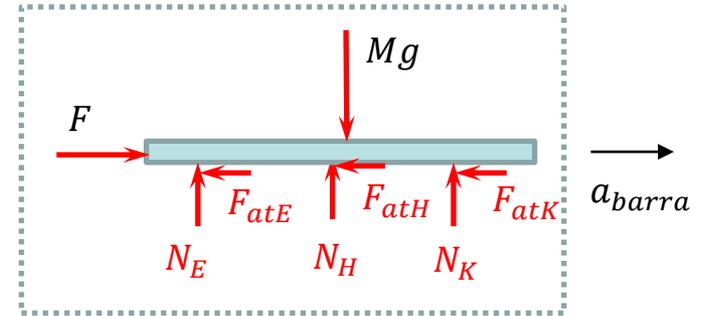
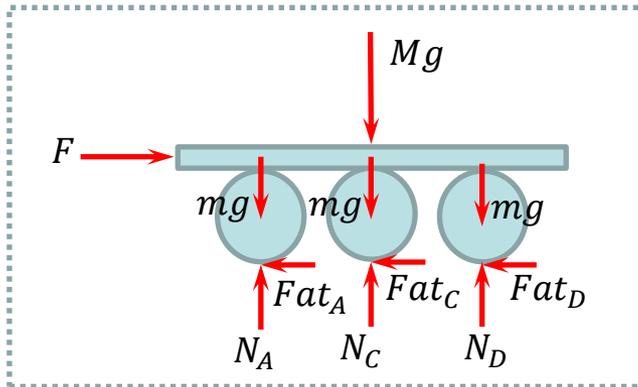
Ambas as forças de atrito nos discos, nos contatos com a barra e nos contatos com o solo, contribuem então para a aceleração angular, ambas fazem a velocidade angular aumentar.





Exercício 03 (continuação)

Sugestão: Tentar solução alternativa pelo TMA

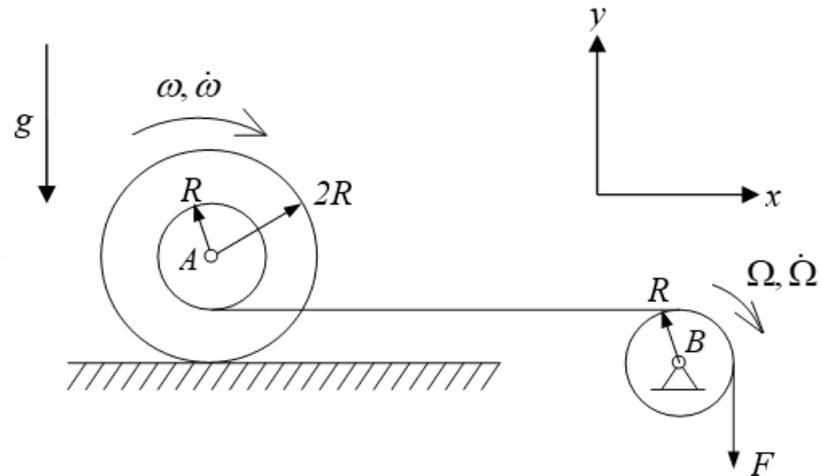




Exercício 04

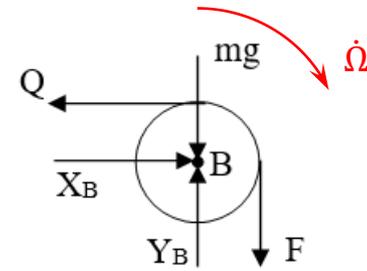
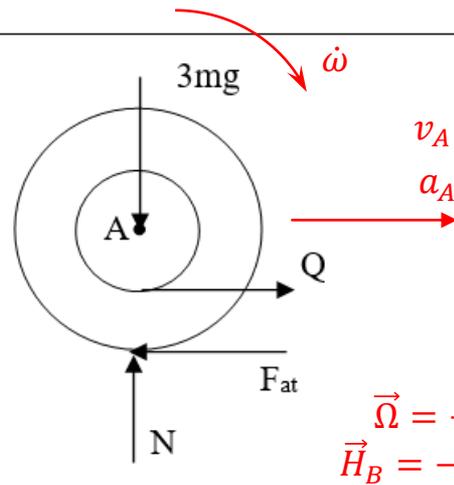
O sistema esquematizado na figura é composto por dois corpos rígidos e um fio ideal que se encontram em um plano vertical. O primeiro corpo é formado por duas polias solidárias, de centro A , massa $3m$ e momento de inércia $J_{A_z} = 3mR^2$. O segundo corpo é uma polia de centro B , massa m e momento de inércia $J_{B_z} = \frac{1}{2}mR^2$. Sabendo que uma força F constante é aplicada ao fio e que não há escorregamento entre o fio e as polias e nem entre a polia de centro A e o plano horizontal, pedem-se:

- os diagramas de corpo livre dos dois corpos;
- a força de tração Q no fio, entre as polias, supondo conhecida a aceleração angular $\dot{\Omega}$ da polia de centro B ;
- a relação entre as acelerações angulares $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$ dos dois corpos;
- a aceleração do ponto A , supondo conhecida a aceleração angular $\dot{\Omega}$ da polia de centro B ;
- as acelerações angulares $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$ e as componentes normal e tangencial da reação do solo sobre o corpo de centro A .





**Exercício 04
(continuação)**



TMB na polia de centro B:

$$a_B = 0$$

$$X_B = Q$$

$$Y_B = F + mg$$

TMA na polia de centro B: $\dot{\vec{H}}_B = \vec{M}_B^{ext} \Rightarrow -J_{Bz}\dot{\Omega}\vec{k} = (Q - F)R\vec{k} \Rightarrow Q = F - \frac{mR\dot{\Omega}}{2}$

Não havendo escorregamento entre o fio e as polias e entre a polia de centro A e o plano e sendo o fio ideal, da cinemática:

$$\vec{v}_{fio} = \omega R \vec{i} = \Omega R \vec{i} \Rightarrow \omega = \Omega \Rightarrow \dot{\omega} = \dot{\Omega} \quad (1)$$

Aceleração do ponto A supondo conhecida a aceleração angular $\dot{\Omega}$: $\vec{a}_A = 2\dot{\omega}R \vec{i} = 2\dot{\Omega}R \vec{i}$

TMA na polia de centro A: $\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{ext} \Rightarrow -J_{Az}\dot{\omega}\vec{k} = (Q - 2F_{at})R\vec{k} \Rightarrow -3mR\dot{\omega} = Q - 2F_{at} \quad (2)$

TMB na polia de centro A:

$$3m(2\dot{\omega}R)\vec{i} = (Q - F_{at})\vec{i} + (N - 3mg)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} 6mR\dot{\omega} = Q - F_{at} \\ N = 3mg \end{cases} \quad (3)$$

$$Q = F - \frac{F}{31} = \frac{30F}{31}$$

Resolvendo: $\dot{\omega} = \dot{\Omega} = \frac{2F}{31mR}$ $F_{at} = \frac{18F}{31}$ $N = 3mg$

$$Q = \frac{30F}{31}$$



Exercício 04 (continuação) solução alternativa pelo TEC

Aplicando o TEC ao sistema:

$$\Delta T = \tau^{ext} + \tau^{int}$$

Mesmo o sistema não sendo um corpo rígido, o trabalho das forças Q, que são forças internas par ação-reação, se anula pois o fio é ideal e não há escorregamento entre ele e as polias.

$$\frac{1}{2} 3m(2\omega R)^2 + \frac{1}{2} (3mR^2)\omega^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mR^2}{2} \right) \Omega^2 - T_0 = |F \cdot \Delta y|$$

$$\frac{15}{2} mR^2 \omega^2 + \frac{1}{4} mR^2 \Omega^2 - T_0 = |F \cdot \Delta y|$$

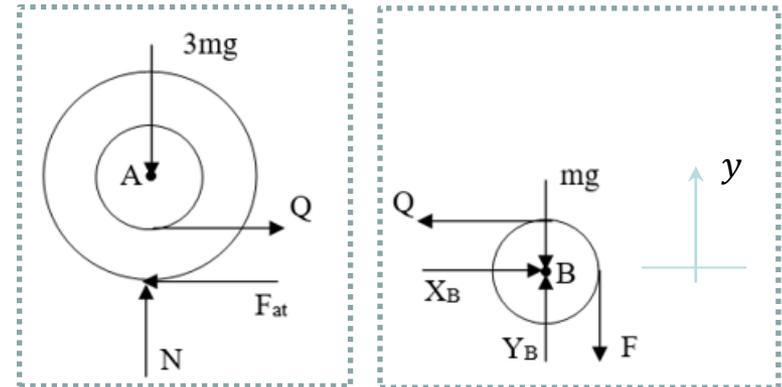
mas $\vec{v}_{fio} = \omega R \vec{i} = \Omega R \vec{i}$ assim $\omega = \Omega$

$$\frac{31}{4} mR^2 \omega^2 - T_0 = |F \cdot \Delta y|$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{31}{2} mR^2 \omega \dot{\omega} = F \omega R \quad \left(\frac{d\Delta y}{dt} = v_{fio} = \omega R \right)$$

$$\dot{\omega} = \frac{2F}{31mR} = \dot{\Omega}$$





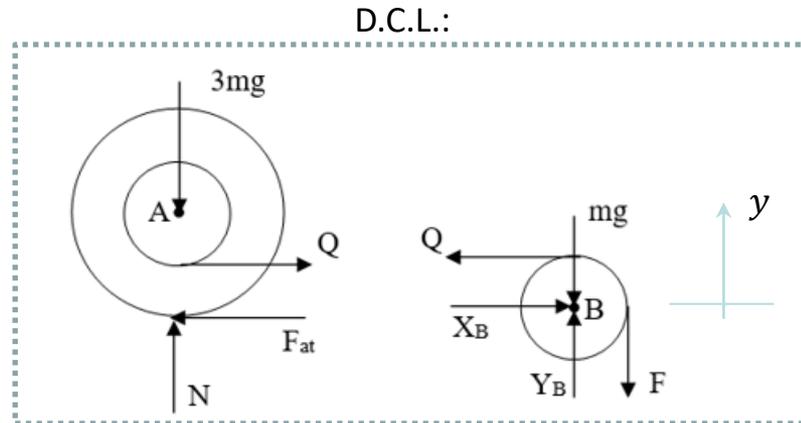
Exercício 04 (continuação) calculando todas as forças:

Aplicando o TMB à polia de centro fixo em B:

$$m\vec{a}_B = (X_B - Q)\vec{i} + (Y_A - mg - F)\vec{j}$$

$$\begin{cases} 0 = X_B - Q & (1) \\ 0 = Y_A - mg - F \end{cases}$$

$$Y_A = F + mg$$



Aplicando o TMB à polia de centro em A:

$$3m\vec{a}_A = (Q - F_{at})\vec{i} + (N - 3mg)\vec{j}$$

$$\vec{v}_A = 2\omega R\vec{i} \Rightarrow \vec{a}_A = 2\dot{\omega}R\vec{i}$$

$$\begin{cases} \frac{12F}{31} = Q - F_{at} & (2) \\ 0 = N - 3mg \end{cases}$$

$$N = 3mg$$

Do TMA na polia de centro em A:

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{ext}$$

$$-3mR^2\dot{\omega}\vec{k} = (Q - 2F_{at})R\vec{k}$$

$$Q - 2F_{at} = -3mR\dot{\omega} \Rightarrow Q - 2F_{at} = -\frac{6F}{31} \quad (3)$$

Fazendo (2) - (3) :

$$F_{at} = \frac{18F}{31}$$

Em (2) :

$$Q = \frac{30F}{31}$$

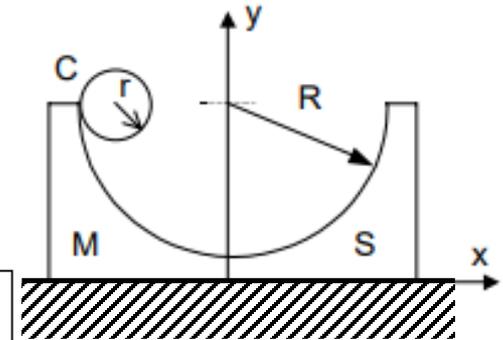
Em (1) :

$$X_B = \frac{30F}{31}$$



Exercício 05

O disco de raio r e massa m , rola sem escorregar sobre o bloco S . O bloco S tem massa M e superfície com raio R , se apóia sem atrito sobre o plano horizontal. O disco parte do repouso da posição C . Determinar o máximo valor do deslocamento $|x|$ do bloco S .



Aplicando o TMB na direção horizontal:

$$ma_{Gx} = F_x$$

Como não existem forças agindo nesta direção:

$$F_x = 0 \Rightarrow a_{Gx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_{Gx} = C_1 \\ x_G = C_1 t + C_2 \end{cases} \text{ e, no instante } t_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_{Gx} = 0 \\ x_G = C_2 \text{ (constante)} \end{cases}$$

Calculando a posição horizontal x_G do baricentro, no instante inicial t_0 :

$$x_G = \frac{M \cdot 0 + m(-R - r)}{M + m} = \frac{-m(R - r)}{M + m}$$

No instante t em que o disco de raio r se encontrar na posição D :

$$x'_G = \frac{-Mx + m(R - r - x)}{m + M}$$

Como $x_G = x'_G$:

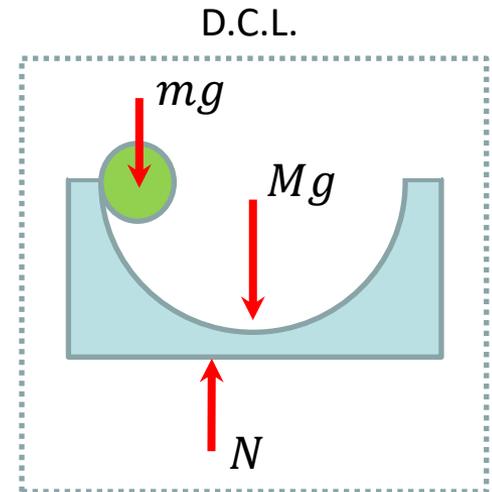
$$\frac{-m(R - r)}{m + M} = \frac{-Mx + m(R - r - x)}{m + M}$$

$$-m(R - r) = -Mx + m(R - r - x) \Rightarrow -2m(R - r) = -(M + m)x$$

$$|x| = \frac{2m(R - r)}{M + m}$$

Portanto o bloco S terá um valor máximo de deslocamento:

$$|x| = \frac{2m(R - r)}{m + M}$$



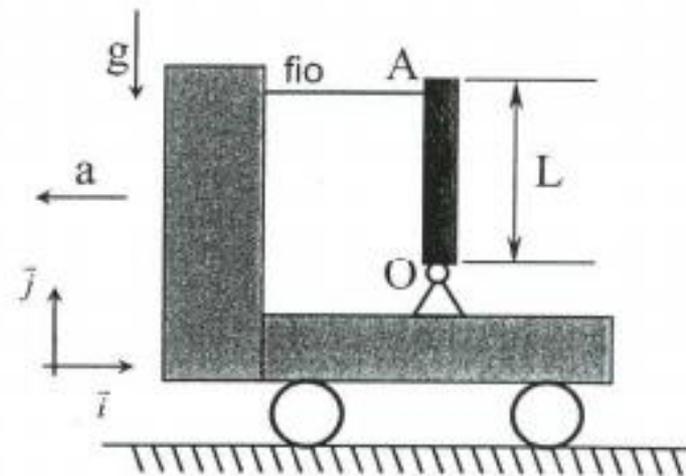
**Exercício 06**

No dispositivo da figura, o carrinho se movimenta para a esquerda com aceleração constante a , carregando uma barra de massa m , comprimento L , articulada em O e mantida na vertical através de um fio de massa desprezível. Sabe-se que o momento de inércia da barra em relação ao seu baricentro é dado por

$$J_{Gz} = \frac{mL^2}{12}$$

Subitamente, o fio se rompe. Pede-se, para este instante, em função de a , m , g e L :

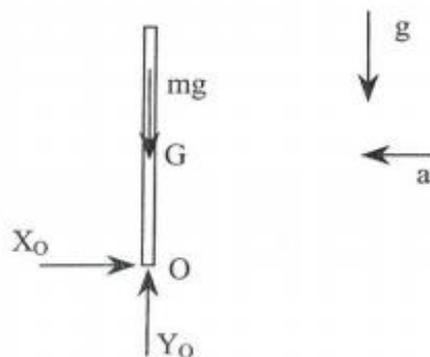
- A aceleração angular da barra OA
- As reações no ponto O da barra OA





Exercício 06 (continuação)

Diagrama de corpo livre da barra:



TMB: $m\vec{a}_G = X_o\vec{i} + (Y_o - mg)\vec{j}$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (G - O) + \omega^2\vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge (G - O)]$$

sendo que no instante em que o fio se rompe $\omega = 0$, portanto $\vec{a}_G = -\left(a + \frac{\dot{\omega}L}{2}\right)\vec{i}$.

Substituindo no TMB:
$$\begin{cases} -m\left(a + \frac{\dot{\omega}L}{2}\right) = X_o \\ 0 = Y_o - mg \end{cases} ; \quad \text{logo } \boxed{Y_o = mg}$$

TMA com pólo em G: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G \Rightarrow J_{G,O}\dot{\omega}\vec{k} = X_o \frac{L}{2}\vec{k} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{6X_o}{mL}$

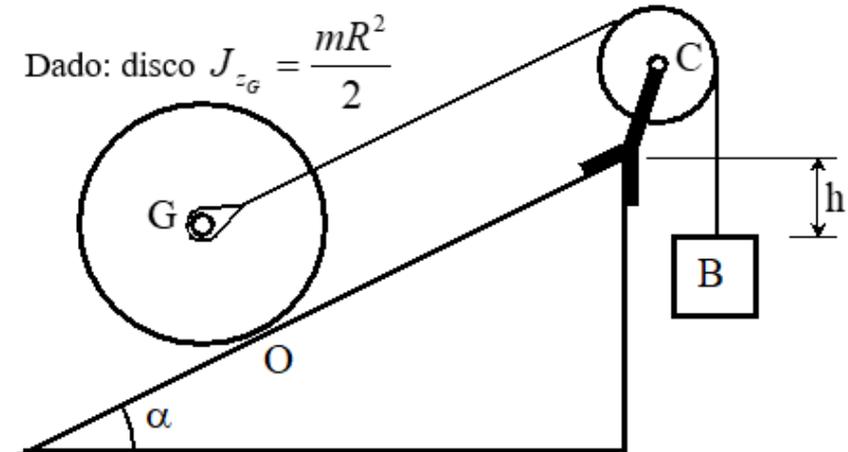
Substituindo no TMB obtêm-se: $\boxed{X_o = -\frac{ma}{4}}$ e $\boxed{\dot{\omega} = -\frac{3a}{2L}}$



Exercício 07

Um disco de massa m , raio R e centro G rola sem escorregar em um plano inclinado, como indicado na figura. O disco é tracionado por um fio inextensível, de massa desprezível, que está conectado a um corpo B de massa m . No instante inicial, o sistema está em repouso e $h = 0$. Sabendo que a polia com centro C tem massa desprezível, pedem-se:

- a energia cinética do sistema;
- a velocidade v_B e a aceleração a_B do bloco em função de h ;
- a tração T no fio e as componentes normal e tangencial da força de contato no disco.





Exercício 07 (continuação)

$W \rightarrow$ trabalho
 $E_{cin} \rightarrow$ energia cinética

Sendo o fio inextensível, a velocidade do baricentro do disco é a mesma velocidade do bloco ($v_G = v_B$).

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \left(\frac{v_B}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow E_{cin} = \frac{5}{4} m v_B^2$$

TEC no sistema: $\Delta E_{cin} = W \quad \frac{5}{4} m v_B^2 = mgh - mgh \sin \alpha \Rightarrow v_B^2 = \frac{4gh}{5} (1 - \sin \alpha)$

derivando em relação ao tempo: $2v_B a_B = \frac{4g v_B}{5} (1 - \sin \alpha) \Rightarrow a_B = \frac{2g}{5} (1 - \sin \alpha)$

TMB no disco: $m \frac{2g}{5} (1 - \sin \alpha) \vec{i} = (T - F_{at} - mg \sin \alpha) \vec{i} + (N - mg \cos \alpha) \vec{j}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = F_{at} + \frac{mg}{5} (2 + 3 \sin \alpha) \\ N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

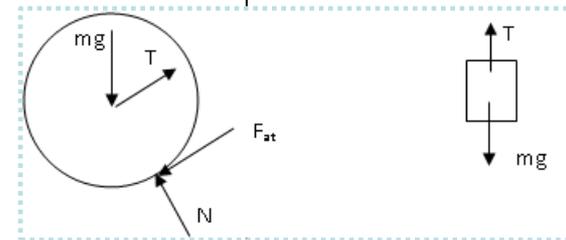
$$\vec{\omega} = -\omega \vec{k} \quad \vec{H}_G = -J_{zG} \omega \vec{k}$$

TMA no disco: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G \quad -\frac{mR^2}{2} \dot{\omega} \vec{k} = -F_{at} R \vec{k} \quad \text{sendo que } \omega = \frac{v_B}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a_B}{R} = \frac{2g}{5R} (1 - \sin \alpha)$

Resolvendo: $F_{at} = \frac{mg}{5} (1 - \sin \alpha) \quad T = \frac{mg}{5} (3 + 2 \sin \alpha) \quad N = mg \cos \alpha$

Ou TMB no Bloco: $ma_B = mg - T$

DCLs



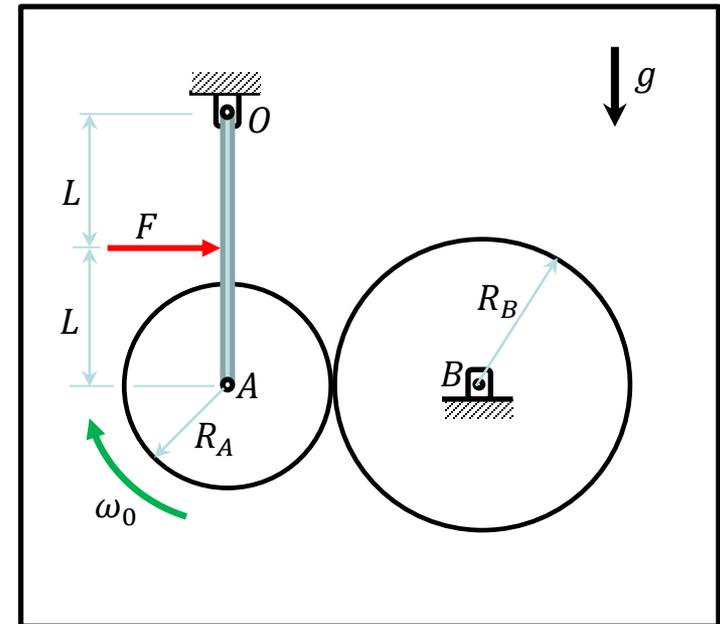


Exercício 08

Os discos de fricção são colocados em contato pela ação da força F mostrada. O disco A tem uma velocidade angular inicial ω_0 , no sentido horário, como indicado. O disco B está inicialmente em repouso. É conhecido o coeficiente de atrito de escorregamento μ entre os discos. Desprezar outros atritos.

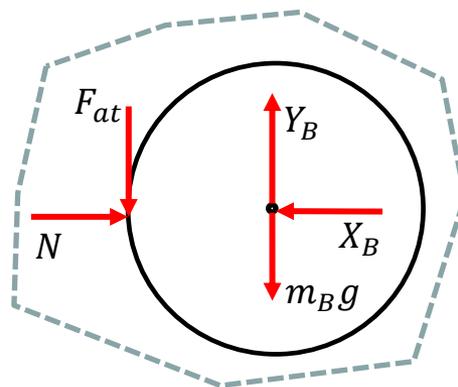
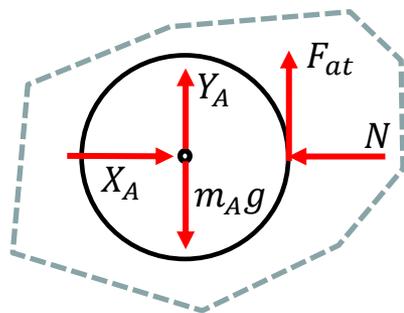
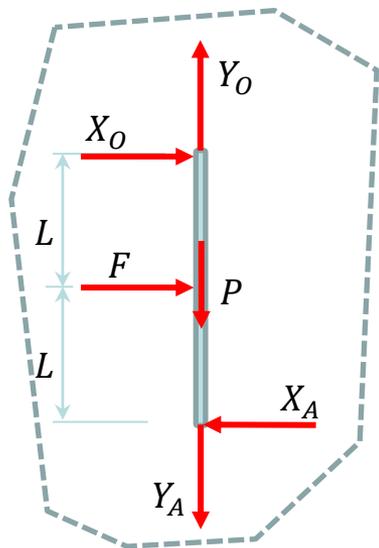
Pede-se:

- A força horizontal que a barra aplica no disco A;
- A reação normal no contato entre os discos;
- A força de atrito entre os discos;
- A aceleração angular do disco A $\dot{\omega}_A$;
- A aceleração angular do disco B $\dot{\omega}_B$;
- O instante de tempo em que o sistema entre em regime;
- A velocidade angular final do disco A ω_A ;
- A velocidade angular final do disco B ω_B .





Exercício 08 (continuação)



TMA na barra:

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext}$$

A barra não tem movimento $\dot{\vec{H}}_O = \vec{0}$



Logo $\vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$

$$\vec{M}_O^{ext} = (F \cdot L - X_A \cdot 2L) \vec{k} = \vec{0}$$

$$X_A = \frac{F}{2}$$

TMB no disco de centro A:

$$m \vec{a}_A = \vec{R}^{ext}$$

$$m \vec{0} = (X_A - N) \vec{i} + (Y_A + F_{at} - m_A g) \vec{j}$$

Logo $N = X_A$ $N = \frac{F}{2}$

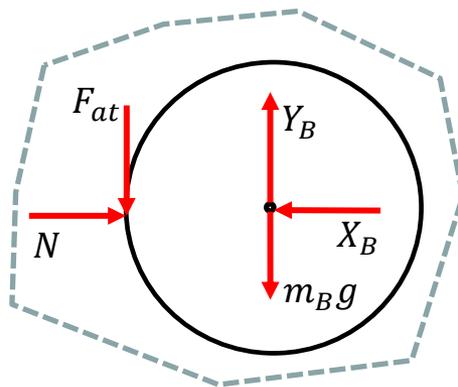
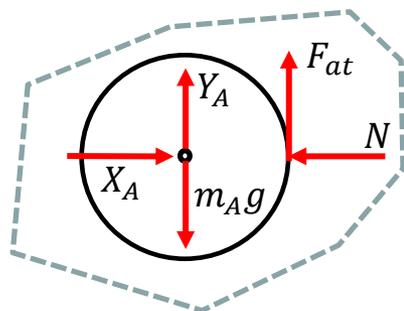
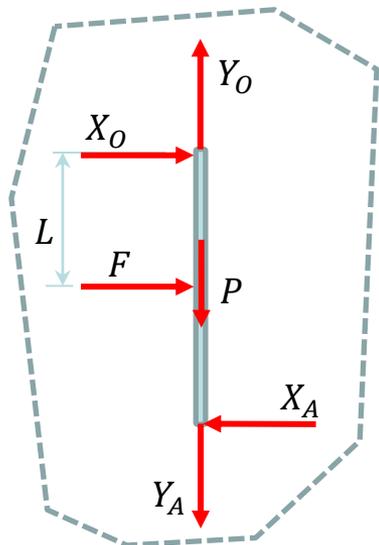
No início há escorregamento entre os discos, sendo assim a força de atrito está no seu valor máximo dado pela Lei de Coulomb:

$$F_{at} = \mu N$$

$$F_{at} = \frac{\mu F}{2}$$



Exercício 08 (continuação)



TMA no disco de centro A:

$$\vec{\omega}_A = -\omega_A \vec{k} \quad \dot{\vec{\omega}}_A = -\dot{\omega}_A \vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{ext}$$

$$-J_{ZA} \dot{\omega}_A \vec{k} = F_{at} \cdot R_A \vec{k}$$

$$\dot{\omega}_A = -F_{at} \cdot \frac{R_A}{J_{ZA}}$$

$$\dot{\omega}_A = -\frac{\mu F R_A}{2J_{ZA}}$$

Sentido anti-horário → OK

$$\dot{\vec{\omega}}_A = \frac{\mu F R_A}{2J_{ZA}} \vec{k}$$

TMA no disco de centro B:

$$\vec{\omega}_B = \omega_B \vec{k} \quad \dot{\vec{\omega}}_B = \dot{\omega}_B \vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_B = \vec{M}_B^{ext}$$

$$J_{zB} \dot{\omega}_B \vec{k} = F_{at} \cdot R_B \vec{k}$$

$$\dot{\omega}_B = F_{at} \cdot \frac{R_B}{J_{zB}}$$

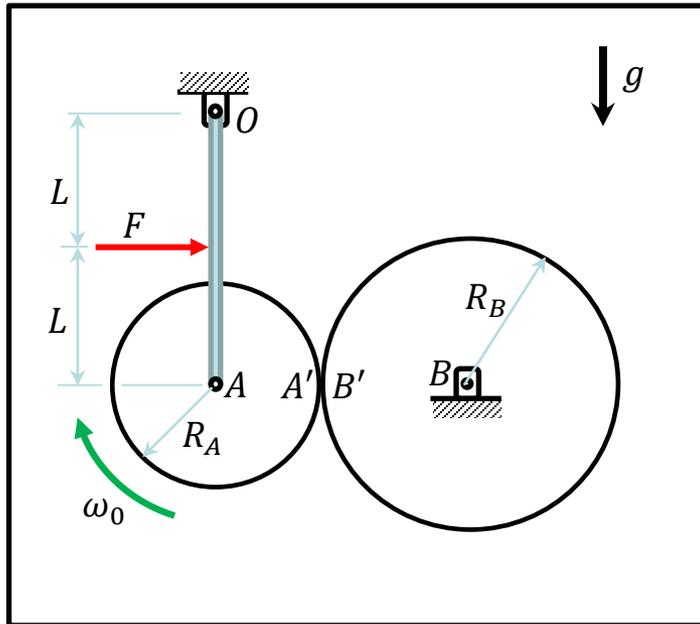
$$\dot{\omega}_B = \frac{\mu F R_B}{2J_{zB}}$$

Sentido anti-horário → OK

$$\dot{\vec{\omega}}_B = \frac{\mu F R_B}{2J_{zB}} \vec{k}$$



Exercício 08 (continuação)



Nesta situação ilustrada o sistema vai entrar em regime quando as velocidades dos pontos em contato entre os discos igualarem. Neste instante cessa o escorregamento. Cessando o escorregamento não há mais trabalho sendo realizado. Quem estava realizando trabalho eram as forças de atrito nos dois discos. Energia cinética deve permanecer constante a partir daí. A partir daí os discos passam a girar com velocidades angulares constantes.

$$v_{A'} = \omega_A R_A \quad v_{B'} = \omega_B R_B$$

$$\dot{\omega}_A = -\frac{\mu F R_A}{2J_{zA}}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_A} d\omega_A = -\int_0^t \frac{\mu F R_A}{2J_{zA}} dt$$

$$\omega_A = \omega_0 - \frac{\mu F R_A}{2J_{zA}} t$$

$$\dot{\omega}_B = \frac{\mu F R_B}{2J_{zB}}$$

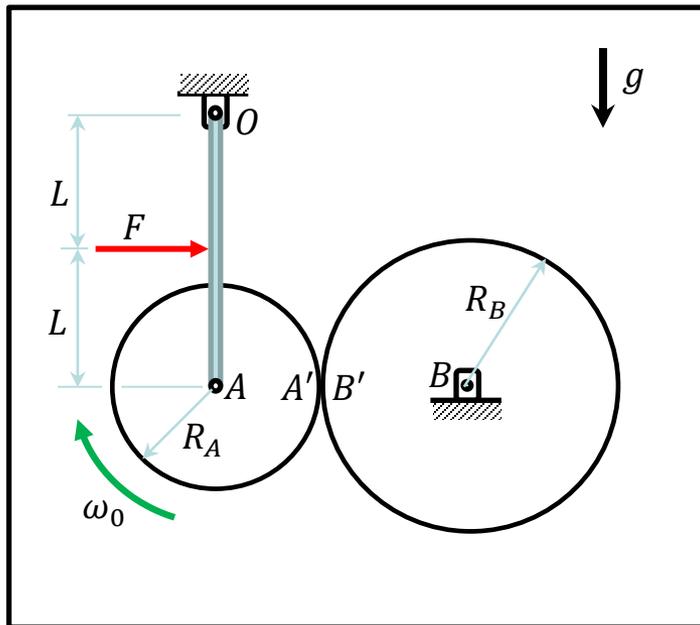
$$\int_0^{\omega_B} d\omega_B = \int_0^t \frac{\mu F R_B}{2J_{zB}} dt$$

$$\omega_B = \frac{\mu F R_B}{2J_{zB}} t$$

Observação: É fácil demonstrar que, nesta situação ilustrada, a partir da entrada em regime, as forças de atrito entre os dois discos são nulas, pois pelo TMA, não havendo mais aceleração angular, as forças de atrito precisam estar zeradas.



Exercício 08 (continuação)



Denominando t^* o instante em que as velocidades se igualam:

$$\left(\omega_0 - \frac{\mu F R_A}{2J_{zA}} t^* \right) R_A = \left(\frac{\mu F R_B}{2J_{zB}} t^* \right) R_B$$

$$t^* = \frac{\omega_0 R_A}{\frac{\mu F R_A}{2J_{zA}} + \frac{\mu F R_B}{2J_{zB}}}$$

$$\omega_A = \omega_0 - \frac{\mu F R_A}{2J_{zA}} t^*$$

$$\omega_B = \frac{\mu F R_B}{2J_{zB}} t^*$$

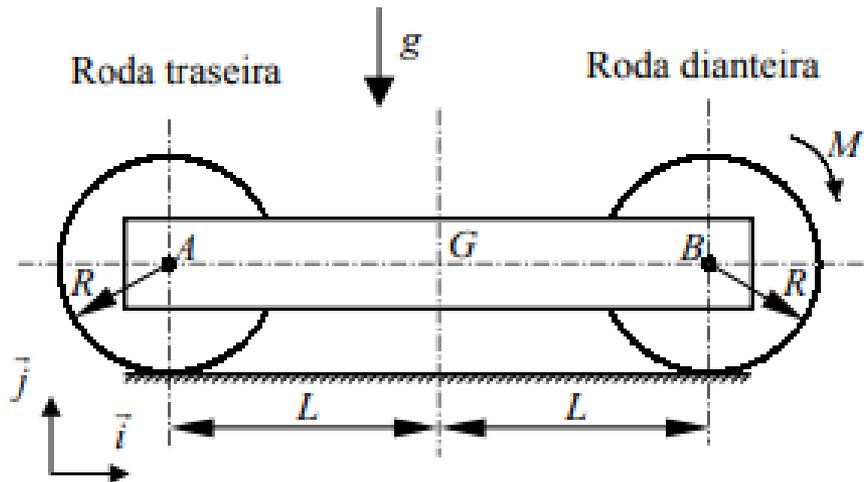


Exercício 09

Considere o modelo simplificado de carro composto por duas rodas (discos homogêneos de raio R , cada um com massa m e momento de inércia $J_z = \frac{mR^2}{2}$) e uma placa retangular (homogênea, de massa $2m$), conforme mostra a figura. Cada roda é articulada pelo seu centro na placa. Na roda dianteira é aplicado um torque M_t (momento torsor) constante. Desprezar atritos de rolamento.

Pede-se:

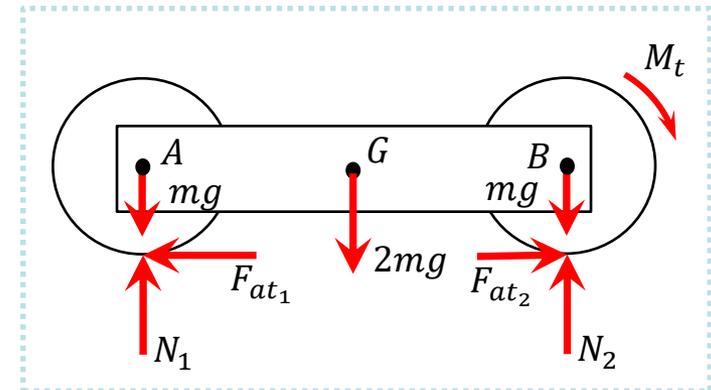
- a aceleração angular das rodas;
- a aceleração do carro;
- as forças de contato das rodas com o solo;
- as forças nos vínculos das rodas com a placa.



Observação: No mundo real há atritos de rolamento não só entre as rodas e o solo como também nas articulações das rodas na placa, que seriam os mancais dos eixos dianteiro e traseiro. Numa primeira abordagem eles podem ser desprezados. Considerar que o efeito do atrito de rolamento normalmente é reduzido quando comparado ao atrito de deslizamento.

D.C.L. do conjunto

Vide eqs. (10), (11) e (12)





Exercício 09 (continuação)

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = -\omega \vec{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_A = \dot{\vec{\omega}}_B = -\dot{\omega} \vec{k}$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A = \vec{v}_B = v \vec{i} = \omega R \vec{i}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A = \vec{a}_B = a \vec{i} = \dot{\omega} R \vec{i} \Rightarrow a = \dot{\omega} R \quad \boxed{9}$$

$$m \vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$$

$$m a \vec{i} = (X_A - F_{at_1}) \vec{i} + (N_1 - Y_A - mg) \vec{j}$$

$$\begin{cases} m \dot{\omega} R = X_A - F_{at_1} & \boxed{1} \\ 0 = N_1 - Y_A - mg & \boxed{2} \end{cases}$$

$$m a \vec{i} = (F_{at_2} - X_B) \vec{i} + (N_2 - Y_B - mg) \vec{j}$$

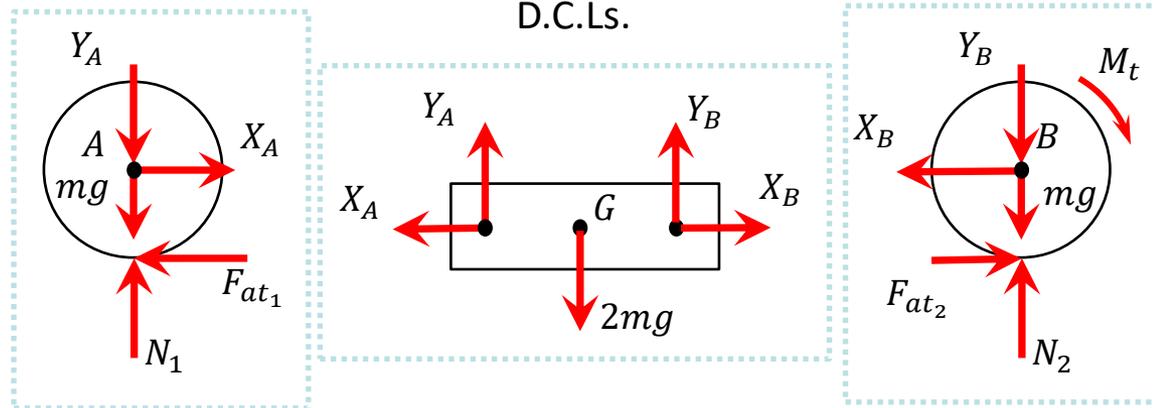
$$\begin{cases} m \dot{\omega} R = F_{at_2} - X_B & \boxed{3} \\ 0 = N_2 - Y_B - mg & \boxed{4} \end{cases}$$

$$2m a \vec{i} = (X_B - X_A) \vec{i} + (Y_A + Y_B - 2mg) \vec{j}$$

$$\begin{cases} 2m \dot{\omega} R = X_B - X_A & \boxed{5} \\ 0 = Y_A + Y_B - 2mg & \boxed{6} \end{cases}$$

$$4m a \vec{i} = (F_{at_2} - F_{at_1}) \vec{i} + (N_1 + N_2 - 4mg) \vec{j}$$

$$\begin{cases} 4m \dot{\omega} R = F_{at_2} - F_{at_1} & \boxed{10} \\ 0 = N_1 + N_2 - 4mg & \boxed{11} \end{cases}$$



$$J_{z_A} = J_{z_B} = J_z$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_A = -J_z \omega \vec{k} &\Rightarrow \dot{\vec{H}}_A = -J_z \dot{\omega} \vec{k} & \vec{M}_A^{ext} = -F_{at_1} \cdot R \vec{k} \\ &\Rightarrow -J_z \dot{\omega} = -F_{at_1} \cdot R & \boxed{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_B = -J_z \omega \vec{k} &\Rightarrow \dot{\vec{H}}_B = -J_z \dot{\omega} \vec{k} & \vec{M}_B^{ext} = (F_{at_2} \cdot R - M_t) \vec{k} \\ &\Rightarrow -J_z \dot{\omega} = F_{at_2} \cdot R - M_t & \boxed{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_G = \vec{0} &\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \vec{0} & \vec{M}_G^{ext} = (Y_B - Y_A) L \vec{k} \\ &\Rightarrow 0 = Y_B - Y_A & \boxed{12} \end{aligned}$$

10 incógnitas: F_{at_1} , F_{at_2} , N_1 , N_2 , X_A , X_B , Y_A , Y_B , $\dot{\omega}$ e a
12 equações: algumas são L.D.



Exercício 09 (continuação)

10 incógnitas: F_{at_1} , F_{at_2} , N_1 , N_2 , X_A , X_B , Y_A , Y_B , $\dot{\omega}$ e a

De (7):
$$F_{at_1} = \frac{mR}{2} \dot{\omega}$$

De (8):
$$F_{at_2} = M_t - \frac{mR}{2} \dot{\omega}$$

Substituindo em (10):

$$4m\dot{\omega}R = M_t - \frac{mR}{2} \dot{\omega} - \frac{mR}{2} \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{M_t}{5mR^2}$$

Substituindo em (9):
$$a = \frac{M_t}{5mR}$$

Substituindo $\dot{\omega}$ acima:

$$F_{at_1} = \frac{M_t}{10R} \quad F_{at_2} = \frac{9M_t}{10R}$$

Substituindo em (1) e (3):

$$X_A = \frac{3M_t}{10R} \quad X_B = \frac{7M_t}{10R}$$

De (12): $Y_A = Y_B$

Substituindo em (6): $Y_A = Y_B = mg$

Substituindo em (2) e (4): $N_1 = N_2 = 2mg$

Análise: utilizei 10 equações:
(7), (8), (10), (9), (1), (3), (12), (6), (2) e (4) → OK!

Análise: A força de atrito na roda dianteira é a responsável por acelerar o veículo. Ela é proporcional ao torque aplicado pelo motor.

A força de atrito na roda traseira resiste ao movimento. Ela causa a aceleração angular da roda traseira, compatível com o movimento do veículo e compatível com o rolamento sem escorregamento.

Análise: Para garantir que o veículo não esteja “cantando pneu” precisamos verificar a Lei de Coulomb. Isto irá limitar o torque máximo que podemos aplicar às rodas sem “cantar pneu”:

$$F_{at_2} \leq \mu N_2 \Rightarrow \frac{9M_t}{10R} \leq 2\mu mg \Rightarrow M_t \leq \frac{20}{9} \mu mgR$$



Exercício 09 (continuação)

Proposta:

Resolva o problema aplicando o TMA às rodas com um pólo que não é mais coincidente com os centros de gravidade das rodas mas sim coincidente com os seus respectivos pontos de contato com o solo.

Observe que os pólos agora não são coincidentes com pontos fixos dos corpos nem são idênticos aos centros de gravidade dos mesmos.

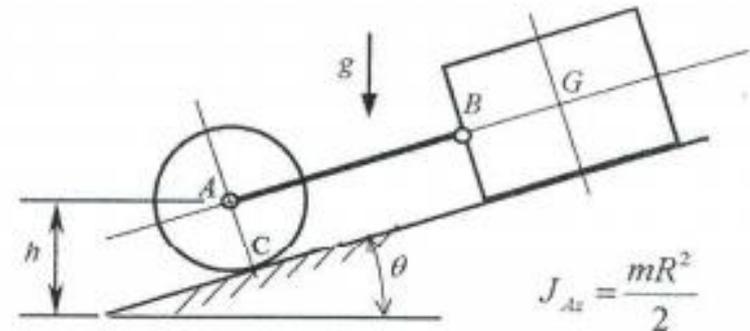
Tome cuidado redobrado então ao aplicar as expressões da Quantidade de Movimento Angular e do TMA.

Verifique que a expressão do TMA se simplifica pelo fato da aceleração do ponto do corpo coincidente com o pólo ser paralela ao vetor que o liga até o baricentro do corpo (a aceleração do ponto de contato do disco com o solo é normal ao plano de contato, na mesma direção então do vetor que o liga ao baricentro).



Exercício 10

O sistema da figura é formado por um disco homogêneo de centro A , raio R e massa m , unido ao bloco de massa M e baricentro G por meio da barra AB rígida, de massa desprezível e biarticulada. O disco rola sem escorregar. Não há atrito entre o bloco e o plano inclinado. Sabendo que o sistema parte do repouso, quando a cota do ponto A é h_0 , determine:



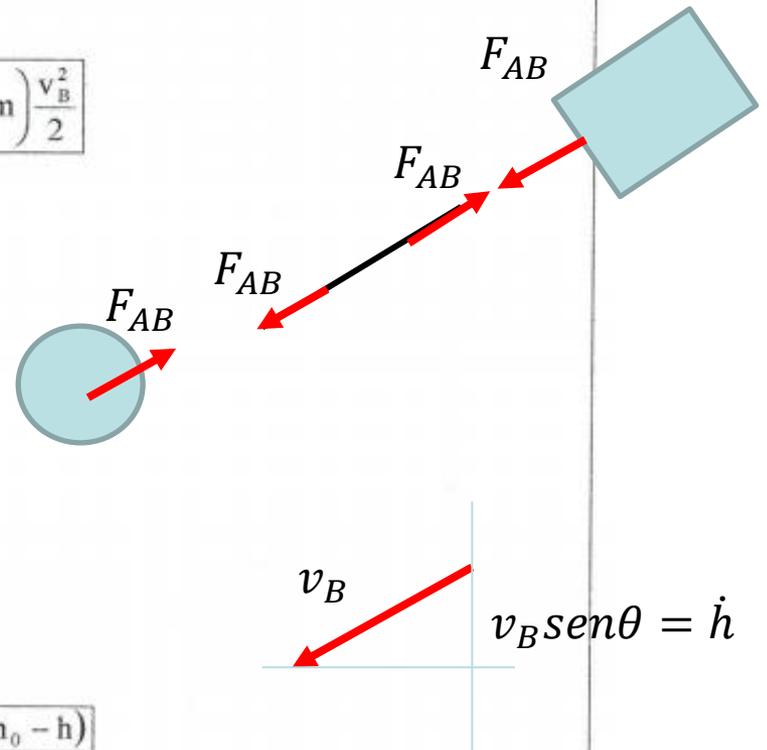
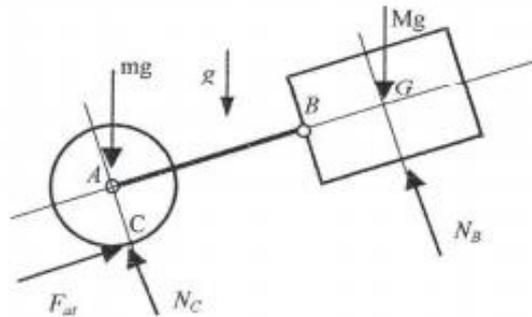
- A energia cinética do sistema em função da velocidade v_B do bloco B .
- O trabalho realizado pelos esforços externos atuantes no sistema, em função da cota h .
- A velocidade do bloco B em função de h .
- A aceleração do bloco B em função de h .



Exercício 10 (continuação)

O disco rola sem escorregar, portanto $\omega = \frac{v_B}{R}$.

$$E = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m R^2}{2} \right) \left(\frac{v_B}{R} \right)^2 \Rightarrow E = \left(M + \frac{3}{2} m \right) \frac{v_B^2}{2}$$



$$W^{ext} = (M + m)g(h_0 - h)$$

TEC: $W^{ext} = \Delta E \quad (W^{int} = 0)$

$$\left(M + \frac{3}{2} m \right) \frac{v_B^2}{2} = (M + m)g(h_0 - h) \Rightarrow v_B^2 = \frac{4(M + m)g(h_0 - h)}{(2M + 3m)}$$

Derivando em relação ao tempo e sendo $\dot{h} = -v_B \text{ sen } \theta$

$$2v_B a_B = \frac{4(M + m)g(v_B \text{ sen } \theta)}{(2M + 3m)} \Rightarrow a_B = \frac{2(M + m)g \text{ sen } \theta}{(2M + 3m)}$$



Exercício 10 (continuação)

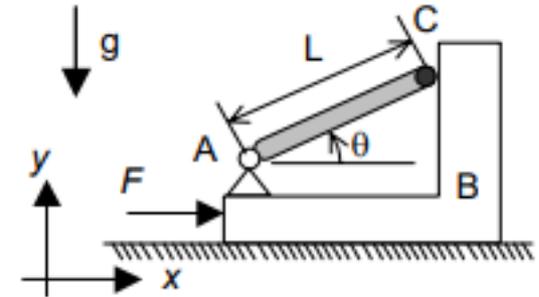
Proposta: Calcule as forças:

- Força na barra AB
- Normais em B e C
- Força de atrito em C



Exercício 11

O mecanismo da figura repousa numa superfície horizontal sem atrito e está submetido a uma força F . O bloco **B** tem massa $4m$. O corpo articulado em **A** é composto pela barra **AC** com massa m e comprimento L e uma massa m fixada na extremidade **C**. O corpo encosta-se ao bloco **B** no ponto **C**, sem atrito, formando um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a horizontal. Pede-se:



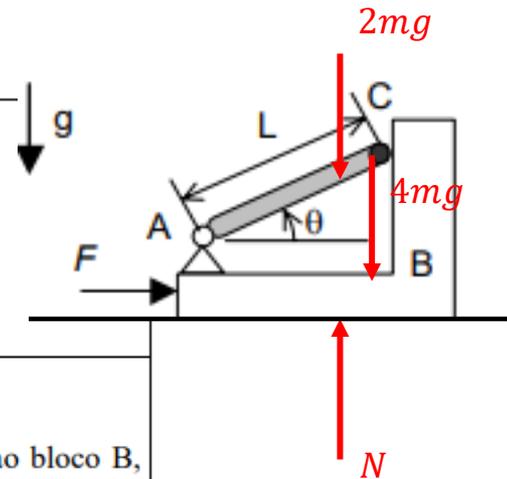
- o baricentro do corpo composto da barra **AC** e a massa concentrada em **C**;
 - a aceleração do ponto **A**;
 - a máxima força F para que não haja descolamento do corpo em relação ao bloco no ponto **C**.
- Dado: momento de inércia da barra **AC** $\rightarrow J_{zG} = (mL^2)/12$



Exercício 11 (continuação)

a) $|G - A| = \frac{\left(m\frac{L}{2} + mL\right)}{2m} \Rightarrow |G - A| = \frac{3L}{4} \quad (G - A) = \frac{3L}{4}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$

Como $\theta = 30^\circ \Rightarrow (G - A) = \frac{3\sqrt{3}L}{8}\vec{i} + \frac{3L}{8}\vec{j}$



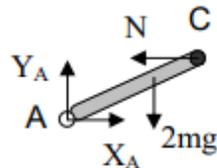
b) Aplicando o TMB no sistema, na direção do eixo x:

$$6ma_{G_{\text{sistema}}} = F$$

considerando que o ponto A é solidário ao bloco B, e que AB não se move em relação ao bloco B, então: $a_{Ax} = a_{G_{\text{sistema}}}$

$$6ma_{Ax} = F \Rightarrow a_{Ax} = \frac{F}{6m}, \text{ como } a_{Ay} = 0, \text{ então: } \vec{a}_A = \frac{F}{6m}\vec{i}$$

c) Diagrama de corpo livre do corpo (barra AC e massa concentrada em C):



Aplicando o TMB (como há apenas translação, $\vec{a}_A = \vec{a}_{G_{\text{Corpo}}}$):

$$2ma_{Ax} = X_A - N \Rightarrow 2m\frac{F}{6m} = X_A - N \Rightarrow X_A - N = \frac{F}{3}$$

$$2ma_{Ay} = Y_A - 2mg \Rightarrow Y_A - 2mg = 0 \Rightarrow Y_A = 2mg$$

Aplicando o TMA no corpo:

$$J_{z_{Gc}}\dot{\omega} = N\frac{L}{4}\sin 30^\circ + X_A\frac{3L}{4}\sin 30^\circ - Y_A\frac{3L}{4}\cos 30^\circ = 0$$

Quando o corpo está na iminência de se descolar do bloco B no ponto C, $N=0$:

$$X_A\frac{3L}{4}\sin 30^\circ - Y_A\frac{3L}{4}\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow X_A\frac{3L}{8} - 2mg\frac{3L\sqrt{3}}{8} = 0 \Rightarrow X_A = 2mg\sqrt{3}$$

$$X_A = \frac{F}{3} \Rightarrow F = 3X_A \Rightarrow F = 6mg\sqrt{3}$$

Portanto, o valor máximo de F para que não haja descolamento em C é: $F = 6mg\sqrt{3}$

Observação: A barra permanece encostada, ela não deve girar, assim a aceleração angular $\dot{\omega}$ deve ser nula.

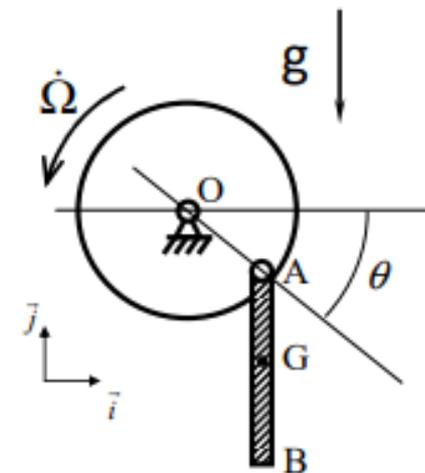


Exercício 12

No sistema mostrado na figura, a barra AB , de massa m e comprimento L , está articulada no ponto A ao disco de massa m e raio R . O sistema parte do repouso, com a barra AB vertical e com a reta que passa por O e A inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Em um dado instante inicial, o disco passa a ter uma aceleração angular conhecida $\ddot{\Omega} = \dot{\Omega} \vec{k}$. Para este instante inicial, pede-se:

- o diagrama de corpo livre do disco e o diagrama de corpo livre da barra;
- a aceleração do ponto A ;
- o vetor aceleração angular $\ddot{\omega}$ da barra;
- a aceleração do baricentro da barra;
- a força que o disco aplica na barra pela articulação do ponto A .

Dado: Para o disco $J_{z_o} = \frac{mR^2}{2}$, para a barra $J_{z_g} = \frac{mL^2}{12}$





Exercício 12 (continuação)

Sendo O ponto fixo e considerando que no instante inicial o sistema parte do repouso, têm-se:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (A-O) + \Omega^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge (A-O)]$$

$$\vec{a}_A = \vec{0} + \dot{\vec{\Omega}} \vec{k} \wedge R(\cos \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j}) + \vec{0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_A = \dot{\Omega} R(\text{sen} \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})}$$

Para a aceleração do baricentro da barra podemos escrever:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (G-A) + \omega^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge (G-A)]$$

Considerando que no instante inicial o sistema parte do repouso:

$$\vec{a}_G = \dot{\Omega} R(\text{sen} \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) + \dot{\omega} \vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2} \vec{j}\right) + \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \left(\dot{\Omega} R \text{sen} \theta + \dot{\omega} \frac{L}{2}\right) \vec{i} + \dot{\Omega} R \cos \theta \vec{j}$$

TMA na barra, polo em G: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

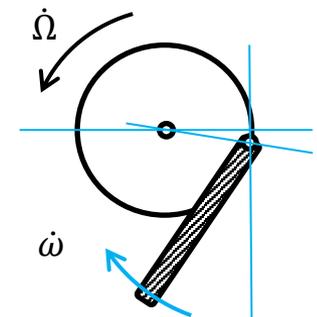
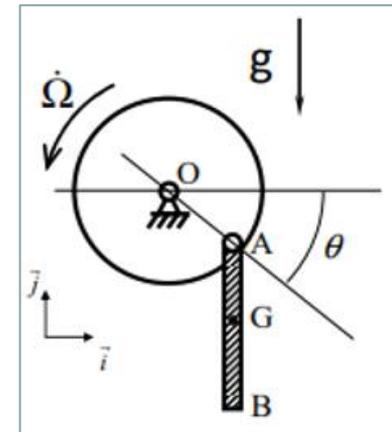
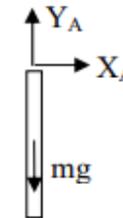
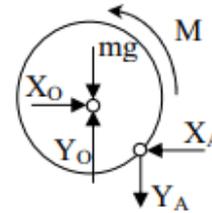
$$\vec{H}_G = J_G \dot{\omega} \vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = J_G \dot{\omega} \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{M}_G = -X_A \frac{L}{2} \vec{k}, \quad \text{assim:} \quad \frac{mL^2}{12} \dot{\omega} \vec{k} = -X_A \frac{L}{2} \vec{k} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{6X_A}{mL} \quad (1)$$

TMB na barra:

$$m\vec{a}_G = X_A \vec{i} + (Y_A - mg) \vec{j} \Rightarrow m \left(\dot{\Omega} R \text{sen} \theta + \dot{\omega} \frac{L}{2} \right) \vec{i} + m \dot{\Omega} R \cos \theta \vec{j} = X_A \vec{i} + (Y_A - mg) \vec{j}$$

$$\begin{cases} X_A = m \dot{\Omega} R \text{sen} \theta + m \dot{\omega} \frac{L}{2} & (2) \\ Y_A - mg = m \dot{\Omega} R \cos \theta & (3) \end{cases}$$

Resolvendo (1) e (2): $X_A = \frac{m \dot{\Omega} R \text{sen} \theta}{4}$ e $\dot{\omega} = -\frac{3 \dot{\Omega} R \text{sen} \theta}{2L}$ De (3): $Y_A = m \dot{\Omega} R \cos \theta + mg$



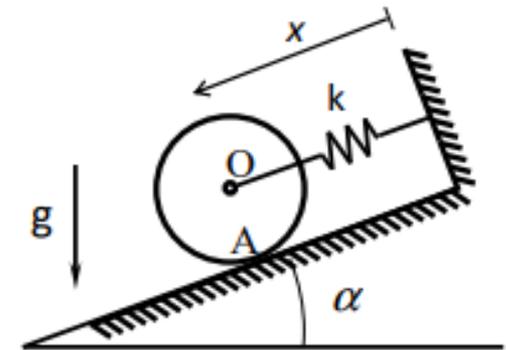
Barra irá começar a girar no sentido horário. Veja sinal da aceleração angular da barra.



Exercício 13

A figura mostra um disco de centro O , massa m e raio R , que parte do repouso e rola sem escorregar em relação ao plano inclinado, sob ação da gravidade. O disco está conectado a uma parede por meio de uma mola de rigidez k . No instante inicial, $x = x_0$ e a mola não está deformada. Considerando instantes $t > t_0$, em que $x > x_0$ e a mola ainda não atingiu a sua deflexão máxima:

- Esboçar o diagrama de corpo livre do disco;
- determinar a energia cinética do disco em função da velocidade \dot{x} ;
- determinar o trabalho realizado pelos esforços aplicados ao disco em função de x ;
- determinar a aceleração angular $\ddot{\omega}$ do disco, em função de x .





Exercício 13 (continuação)

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J_{zO}\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\omega^2$$

Como o disco rola sem escorregar: $\vec{v}_0 = \dot{x}\vec{i} = \omega R\vec{i}$ $\omega = \frac{\dot{x}}{R}$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \quad T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

$$\tau^{ext} = mg(x - x_0)\text{sen}\alpha - \frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

Aplicando o TEC no disco: $\Delta T = \tau^{ext}$

$$\Delta T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - T_0$$

$$\frac{3}{4}m\dot{x}^2 - T_0 = mg(x - x_0)\text{sen}\alpha - \frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

Derivando em relação ao tempo:

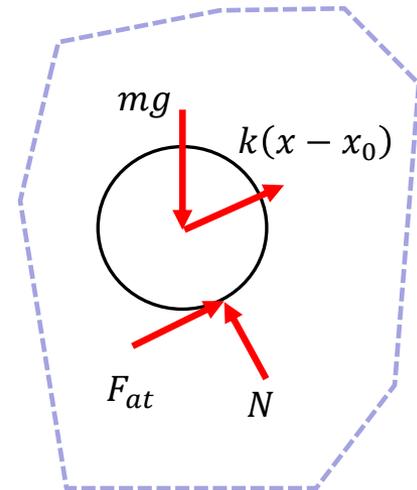
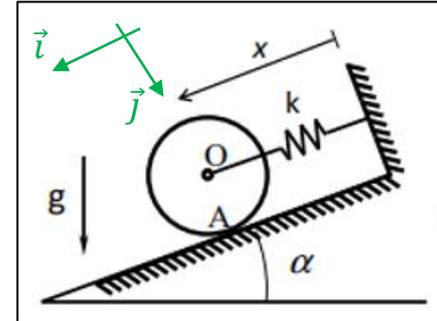
$$\frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} = mg\dot{x}\text{sen}\alpha - k(x - x_0)\dot{x}$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R} \quad \dot{\omega} = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}\left(g\text{sen}\alpha - \frac{k}{m}(x - x_0)\right)$$

Assim: $\dot{\omega} = \frac{2}{3R}\left(g\text{sen}\alpha - \frac{k}{m}(x - x_0)\right)$

$$\vec{\dot{\omega}} = \frac{2}{3R}\left(g\text{sen}\alpha - \frac{k}{m}(x - x_0)\right)\vec{k}$$



Proposta:

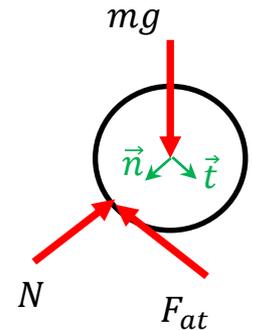
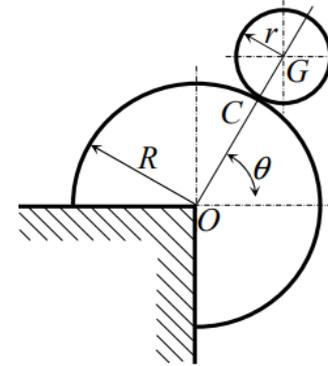
Encontre a aceleração angular utilizando TMB e TMA. Determine também Fat e N.



Exercício 14

8) Um cilindro homogêneo de raio r e peso mg rola sem escorregar sobre uma superfície cilíndrica fixa de raio R . No instante $t = 0$ o cilindro é abandonado do repouso na posição definida pelo ângulo θ_0 . Pede-se:

- A velocidade angular do cilindro em função de θ .
- A componente normal da reação sobre o cilindro em função de θ .
- O valor de θ para o qual o cilindro abandona a superfície fixa.



$$\Delta T = \tau^{ext} \quad \vec{v}_G = \omega r \vec{t}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{zG} \omega^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 + \frac{1}{2} \frac{m r^2}{2} \omega^2$$

$$T = \frac{3mr^2}{4} \omega^2$$

$$\tau^{ext} = mg(R+r)(\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta)$$

$$\frac{3mr^2}{4} \omega^2 = mg(R+r)(\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta)$$

$$\omega^2 = \frac{4g(R+r)}{3r^2} (\text{sen}\theta_0 - \text{sen}\theta)$$

$$m \vec{a}_G = (mg \cos \theta - F_{at}) \vec{t} + (mg \sin \theta - N) \vec{n}$$

$$\vec{a}_G = \dot{v}_G \vec{t} + \frac{v_G^2}{R+r} \vec{n}$$

$$m \frac{v_G^2}{R+r} = mg \sin \theta - N$$

$$N = mg \sin \theta - \frac{m \omega^2 r^2}{R+r}$$

$$p/N = 0$$

$$N = \frac{mg}{3} (7 \text{sen}\theta - 4 \text{sen}\theta_0)$$

$$\theta^* = \arcsen \left(\frac{4}{7} \text{sen}\theta_0 \right)$$

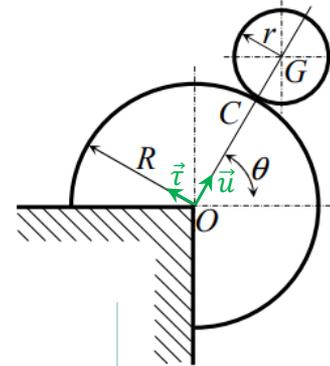


Exercício 14 (solução alternativa)

Sugestão: alternativamente escrever a aceleração do baricentro em coordenadas polares.

8) Um cilindro homogêneo de raio r e peso mg rola sem escorregar sobre uma superfície cilíndrica fixa de raio R . No instante $t = 0$ o cilindro é abandonado do repouso na posição definida pelo ângulo θ_0 . Pedem-se:

- A velocidade angular do cilindro em função de θ .
- A componente normal da reação sobre o cilindro em função de θ .
- O valor de θ para o qual o cilindro abandona a superfície fixa.



$$(G - O) = (R + r)\vec{u}$$

$$\vec{v}_G = (R + r)\dot{\vec{u}} = (R + r)\dot{\theta}\vec{\tau}$$

$$\dot{\vec{u}} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{u} = \dot{\theta}\vec{\tau}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{\tau} = -\dot{\theta}\vec{u}$$

$$\vec{a}_G = (R + r)\ddot{\theta}\vec{\tau} - (R + r)\dot{\theta}^2\vec{u}$$

$$\vec{v}_G = -\omega r\vec{\tau} \quad \vec{v}_G = \dot{\theta}(R + r)\vec{\tau}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\omega r}{(R + r)} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\omega^2 r^2}{(R + r)^2}$$

$$\vec{a}_G = (R + r)\ddot{\theta}\vec{\tau} - \frac{\omega^2 r^2}{(R + r)}\vec{u}$$

$$\vec{a}_G = (R + r)\ddot{\theta}\vec{\tau} - \frac{\omega^2 r^2}{(R + r)}\vec{u}$$

TMB projetado na direção radial:

$$-m \frac{\omega^2 r^2}{R + r} = -mg \sin\theta + N$$

$$N = \frac{mg}{3} (7 \sin\theta - 4 \sin\theta_0)$$

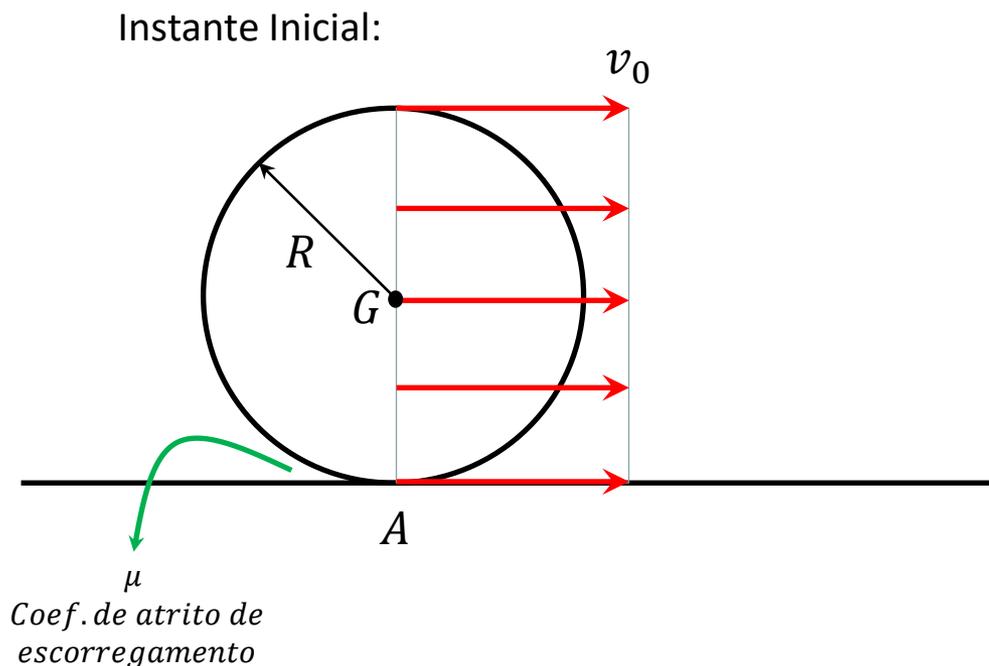


Atrito de Rolamento



Exercício - Apresentação do Atrito de Rolamento

Uma bola de boliche é lançada na pista com ato de movimento inicial de translação com velocidade inicial v_0 . Imediatamente começa a atuar o atrito de escorregamento e a bola começa a rolar e escorregar sobre a pista. Num determinado momento a bola entra em rolamento puro. Analise o movimento em todas as suas fases. Mostre a necessidade da consideração de um modelo de **atrito de rolamento** para explicar perda de energia cinética após a bola entrar em rolamento puro. Dado o momento de inércia de uma esfera maciça: $J_{z_G} = \frac{2mR^2}{5}$.





Exercício (continuação)

Aplicando o TMB:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$$

$$m\vec{a}_G = -F_{at}\vec{i} + (N - mg)\vec{j}$$

Como está escorregando: $F_{at} = \mu N$

$$\begin{cases} ma_G = -F_{at} = -\mu N \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = mg$$

$$\Rightarrow a_G = -\mu g \quad \vec{a}_G = -\mu g\vec{i}$$

Integrando no tempo a aceleração do baricentro:

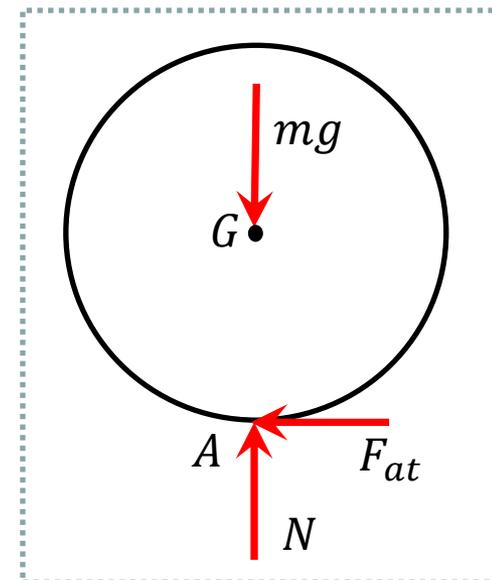
$$a_G = \frac{dv_G}{dt} = -\mu g \Rightarrow dv_G = -\mu g dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_G} dv_G = -\int_0^t \mu g dt \Rightarrow v_G = v_0 - \mu g t$$

Análise: para a direita, diminui com o tempo → OK!

Integrando no tempo a velocidade do baricentro:

$$v_G = \frac{dx_G}{dt} = v_0 - \mu g t \Rightarrow dx_G = (v_0 - \mu g t) dt \Rightarrow \int_0^{x_G} dx_G = \int_0^t (v_0 - \mu g t) dt \Rightarrow x_G = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2$$

D.C.L.





Exercício (continuação)

Aplicando o TMA:

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext}$$

$$\vec{H}_G = J_{z_G} \omega \vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = J_{z_G} \dot{\omega} \vec{k}$$

$$\vec{M}_G^{ext} = -F_{at} \cdot R \vec{k} = -\mu mg R \vec{k}$$

$$\Rightarrow J_{z_A} \dot{\omega} \vec{k} = -\mu mg R \vec{k}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{J_{z_A}} \mu mg R$$

$$J_{z_G} = \frac{2mR^2}{5}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{5\mu g}{2R}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = -\frac{5\mu g}{2R} \vec{k}$$

Análise: sentido horário → OK!

Integrando no tempo a aceleração angular:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{5\mu g}{2R} \Rightarrow d\omega = -\frac{5\mu g}{2R} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\omega d\omega = -\frac{5\mu g}{2R} \int_0^t dt \Rightarrow \omega = -\frac{5\mu g}{2R} t$$

Análise: sentido horário → OK!

Pela fórmula de Poisson:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (A - G) = (v_0 - \mu g t) \vec{i} - \frac{5\mu g}{2R} t \vec{k} \wedge (-R \vec{j})$$

$$\vec{v}_A = \left(v_0 - \frac{7}{2} \mu g t \right) \vec{i}$$

Análise: para a direita, diminui com o tempo → OK!

Instante de tempo em que entra em rolamento puro:

$$t^* \quad p/v_A = 0: \quad 0 = v_0 - \frac{7}{2} \mu g t^* \Rightarrow t^* = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

Deslocamento e velocidade angular no instante em que entra em rolamento puro:

$$x_G^* = \frac{12v_0^2}{49\mu g}$$

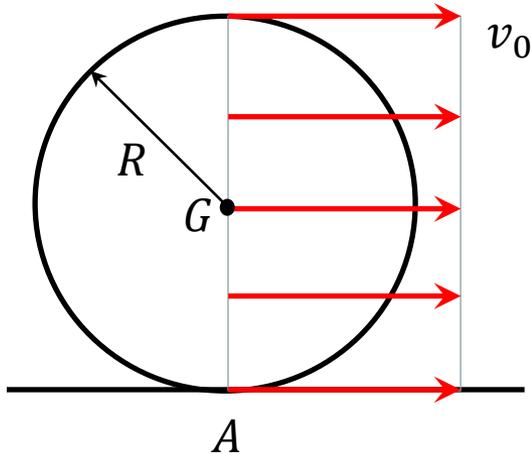
$$v_G^* = \frac{5v_0}{7}$$

$$\omega^* = -\frac{5v_0}{7R}$$

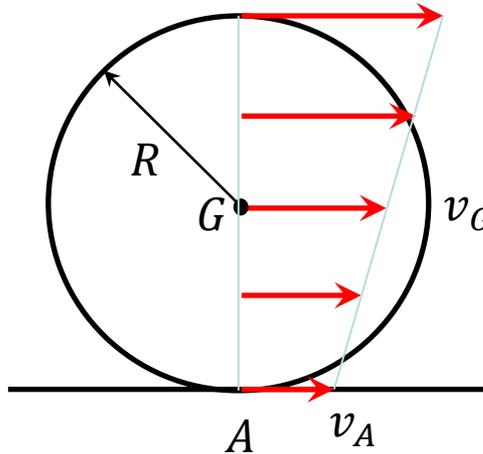


Exercício (continuação)

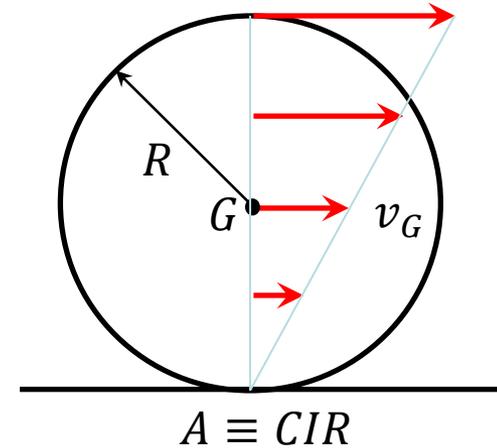
Instante Inicial:
Ato de movimento de translação



Rolando e
escorregando:



Depois de entrar em
rolamento puro:



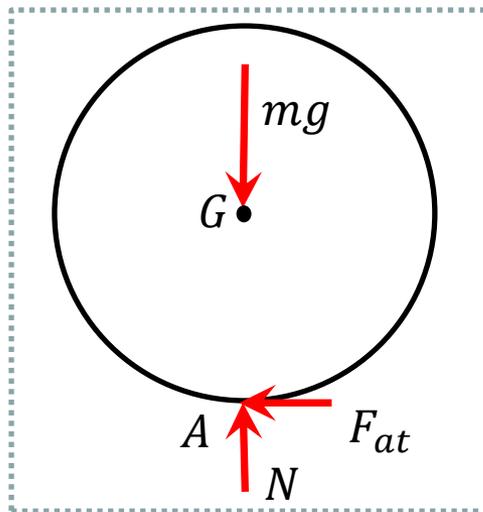
$$v_A = 0$$

Após entrar em rolamento puro a força de atrito não realiza mais trabalho. Assim não há mais forças realizando trabalho e então não pode haver variação da energia cinética.

Então, com esta modelagem de D.C.L., a roda permaneceria em movimento indefinidamente e precisaríamos dizer que $F_{at} = 0$.

Precisamos então de outra modelagem para explicar a desaceleração da roda após a mesma entrar em rolamento puro.

D.C.L.





Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Apresentamos então a modelagem do **atrito de rolamento**.

No rolamento entre um corpo e uma superfície surge um **momento de atrito de rolamento** que é proporcional à força normal entre as duas superfícies e que se opõe ao sentido do rolamento relativo entre elas.

O coeficiente de proporcionalidade é chamado de **coeficiente de atrito de rolamento** e é função da natureza das superfícies em contato. Quanto mais rígidas (indeformáveis) forem as superfícies menor será este coeficiente.

Em geral o efeito do atrito de rolamento é bem menor do que o do atrito de escorregamento, o que explica ser muito mais fácil deslocar um corpo rolando-o do que escorregando-o.

O coeficiente de atrito de rolamento não é adimensional como o coeficiente de atrito de escorregamento.

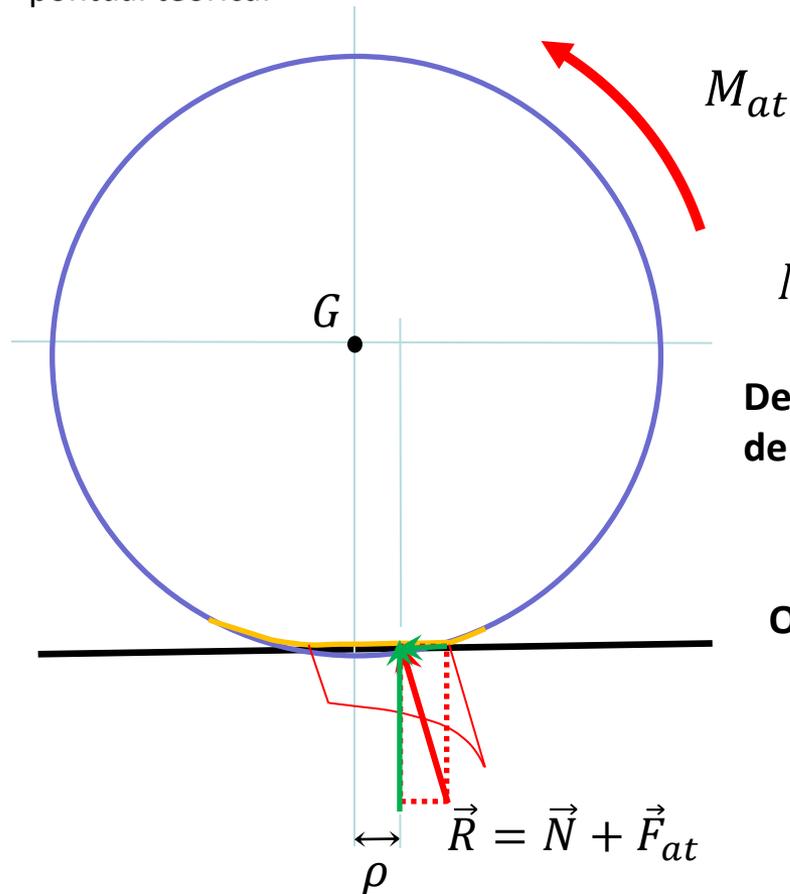
Ele **tem dimensão de comprimento**.



Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Fisicamente este efeito pode ser explicado pela deformação local das superfícies em contato que faz a força de contato entre elas se deslocar um pouco avante ao que seria a posição de contato pontual teórica.

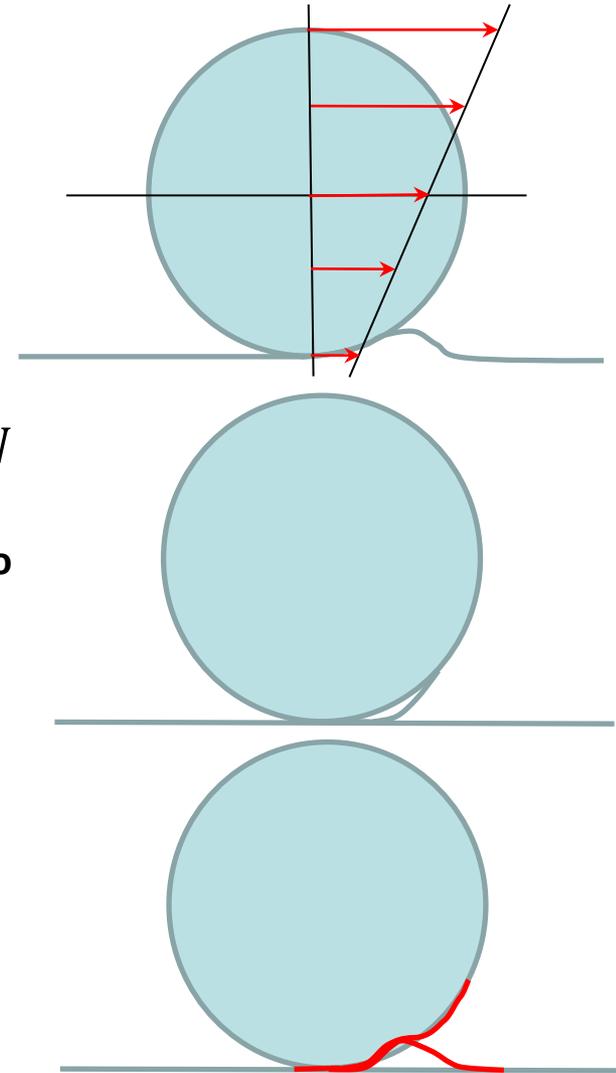


$$M_{z_G} = -F_{at} \cdot R + \rho N$$

Define-se assim o momento de atrito de rolamento:

$$M_{at} = \rho N$$

Onde ρ é o coeficiente de atrito de rolamento.





Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Refazendo então na nova modelagem:

Nada muda no equacionamento do TMB entre o instante inicial e o instante em que o rolamento puro vai se iniciar:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$$

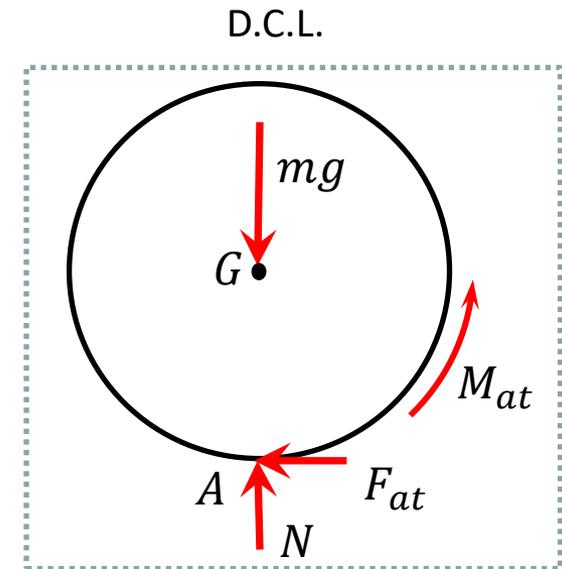
$$m\vec{a}_G = -F_{at}\vec{i} + (N - mg)\vec{j}$$

Como está escorregando: $F_{at} = \mu N$

$$\begin{cases} ma_G = -F_{at} = -\mu N \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = mg$$

$$\Rightarrow a_G = -\mu g \quad \vec{a}_G = -\mu g\vec{i}$$



Integrando no tempo a aceleração do baricentro:

$$a_G = \frac{dv_G}{dt} = -\mu g \Rightarrow dv_G = -\mu g dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v_G} dv_G = - \int_0^t \mu g dt \Rightarrow v_G = v_0 - \mu g t$$

Integrando no tempo a velocidade do baricentro:

$$v_G = \frac{dx_G}{dt} = v_0 - \mu g t \Rightarrow dx_G = (v_0 - \mu g t) dt \Rightarrow \int_0^{x_G} dx_G = \int_0^t (v_0 - \mu g t) dt \Rightarrow x_G = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2$$



Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Alterações começam a acontecer no equacionamento do TMA, pois agora há o momento de atrito de rolamento:

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext}$$

$$\vec{H}_G = J_{z_G} \omega \vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = J_{z_G} \dot{\omega} \vec{k}$$

$$\vec{M}_G^{ext} = (-F_{at} \cdot R + M_{at}) \vec{k} = (-\mu mgR + \rho mg) \vec{k}$$

$$\Rightarrow J_{z_A} \dot{\omega} \vec{k} = (-\mu mgR + \rho mg) \vec{k}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{mg}{J_{z_A}} (\mu R - \rho)$$

$$J_{z_G} = \frac{2mR^2}{5}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{5g}{2R} \left(\mu - \frac{\rho}{R} \right)$$

$$\dot{\vec{\omega}} = -\frac{5g}{2R} \left(\mu - \frac{\rho}{R} \right) \vec{k}$$

Integrando no tempo a aceleração angular:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{5g}{2R} \left(\mu - \frac{\rho}{R} \right) \Rightarrow d\omega = -\frac{5g}{2R} \left(\mu - \frac{\rho}{R} \right) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\omega} d\omega = -\frac{5g}{2R} \left(\mu - \frac{\rho}{R} \right) \int_0^t dt \Rightarrow \omega = -\frac{5g}{2R} \left(\mu - \frac{\rho}{R} \right) t$$

Pela fórmula de Poisson:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (A - G) = (v_0 - \mu gt) \vec{i} - \frac{5g}{2R} \left(\mu - \frac{\rho}{R} \right) t \vec{k} \wedge (-R \vec{j})$$

$$\vec{v}_A = \left(v_0 - \left(\frac{7}{2} \mu - \frac{5\rho}{2R} \right) gt \right) \vec{i}$$

Instante de tempo em que entra em rolamento puro:

$$t^* \quad p/v_A = 0: \quad 0 = v_0 - \left(\frac{7}{2} \mu - \frac{5\rho}{2R} \right) gt^*$$

$$t^* = \frac{2}{\left(7\mu - \frac{5\rho}{R} \right)} \frac{v_0}{g}$$

⇒ *Análise: aumentando o coeficiente de atrito de rolamento, aumenta t^* , isto é leva mais tempo para entrar em rolamento puro → OK!*



Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Sendo então instante de tempo em que entra em rolamento puro:

$$t^* = \frac{2}{\left(7\mu - \frac{5\rho}{R}\right)} \frac{v_0}{g}$$

Obtêm-se a velocidade angular no instante em que entra em rolamento puro:

$$\omega = -\frac{5g}{2R} \left(\mu - \frac{\rho}{R}\right) t$$

Válido enquanto rola e escorrega, isto é, entre o tempo inicial e t^* .

$$\omega^* = -\frac{5v_0}{R} \left(\frac{\mu - \frac{\rho}{R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}}\right)$$

E também o deslocamento do baricentro no instante em que entra em rolamento puro:

$$x_G = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2$$

Válido enquanto rola e escorrega, isto é, entre o tempo inicial e t^* .

$$x_G^* = \frac{2v_0^2}{g} \left[\frac{6\mu - \frac{5\rho}{R}}{\left(7\mu - \frac{5\rho}{R}\right)^2} \right]$$



Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Após entrar em rolamento puro o equacionamento é outro pois não há mais escorregamento e assim a força de atrito a partir de então é $< \mu N$!

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext} \quad m\vec{a}_G = -F_{at}\vec{i} + (N - mg)\vec{j}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} \quad \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k} \quad \vec{v}_G = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \wedge R\vec{j} = -\omega R\vec{i}$$

Análise: observe que o sinal de ω é negativo e assim \vec{v}_G é para a direita \rightarrow OK!

$$\begin{cases} -m\dot{\omega}R = -F_{at} \\ 0 = N - mg \end{cases} \quad \dot{\omega} = \frac{F_{at}}{mR} \quad N = mg$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext}$$

$$\vec{H}_G = J_{z_G}\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = J_{z_G}\dot{\omega}\vec{k}$$

$$\vec{M}_G^{ext} = (-F_{at} \cdot R + M_{at})\vec{k} = (-m\dot{\omega}R^2 + \rho mg)\vec{k}$$

$$\Rightarrow J_{z_A}\dot{\omega}\vec{k} = (-m\dot{\omega}R^2 + \rho mg)\vec{k}$$

$$\left(\frac{7R^2}{2}\right)\dot{\omega} = \rho g \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{2\rho g}{7R^2} \quad \dot{\vec{\omega}} = \frac{2\rho g}{7R^2}\vec{k}$$

Análise: anti-horário \rightarrow OK!

Integrando no tempo a aceleração angular:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\rho g}{7R^2} \Rightarrow d\omega = \frac{2\rho g}{7R^2} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\omega^*}^{\omega} d\omega = \frac{2\rho g}{7R^2} \int_{t^*}^t dt \Rightarrow \omega - \omega^* = \frac{2\rho g}{7R^2} (t - t^*)$$

$$\Rightarrow \omega = \omega^* + \frac{2\rho g}{7R^2} (t - t^*)$$

$$\omega = -\frac{5v_0}{R} \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right) + \frac{2\rho g}{7R^2} t$$



Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Instante de tempo em que entra em repouso:

$$t^{**} \quad p/\omega = 0:$$

$$0 = -\frac{5v_0}{R} \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right) + \frac{2\rho g}{7R^2} t^{**}$$

$$t^{**} = \frac{35v_0 R}{2\rho g} \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right)$$

*Análise: para coeficiente de atrito de rolamento nulo $t^{**} \rightarrow \infty \rightarrow OK!$*

Velocidade do Baricentro:

$$\vec{v}_G = -\omega R \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_G = \left[5v_0 \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right) - \frac{2\rho g}{7R^2} t \right] \vec{i}$$

Válido durante o rolamento puro, isto é, entre o tempo t^ em que entrou em rolamento puro até chegar ao repouso.*

Distância total percorrida pelo baricentro até entrar em repouso:

Integrando no tempo a velocidade do baricentro:

$$v_G = \frac{dx_G}{dt} = 5v_0 \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right) - \frac{2\rho g}{7R^2} t$$

$$dx_G = \left[5v_0 \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right) - \frac{2\rho g}{7R^2} t \right] dt$$

$$\int_{x_G^*}^{x_G^{**}} dx_G = \int_{t^*}^{t^{**}} \left[5v_0 \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right) - \frac{2\rho g}{7R^2} t \right] dt$$

$$x_G^{**} = x_G^* + \left[5v_0 \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right) t - \frac{\rho g}{7R^2} t^2 \right] \Bigg|_{t^*}^{t^{**}}$$

*Por favor façam as substituições...
Obrigado!*



Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Desconsiderando atrito de rolamento:

Instante em que entra em rolamento puro:

$$t^* = \frac{2v_0}{7\mu g}$$

Velocidade angular no instante em que entra em rolamento puro:

$$\omega^* = -\frac{5v_0}{7R}$$

Distância percorrida até entrar em rolamento puro:

$$x_G^* = \frac{12v_0^2}{49\mu g}$$

Instante em que entra em repouso:

$$t^{**} = \infty$$

$$v_G^{**} = \frac{5v_0}{7}$$

Em MRU após t^* .

$$x_G^{**} \rightarrow \infty$$

Considerando atrito de rolamento:

$$t^* = \frac{2}{\left(7\mu - \frac{5\rho}{R}\right)} \frac{v_0}{g}$$

$$\omega^* = -\frac{5v_0}{R} \left(\frac{\mu - \frac{\rho}{R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right)$$

$$x_G^* = \frac{2v_0^2}{g} \left[\frac{6\mu - \frac{5\rho}{R}}{\left(7\mu - \frac{5\rho}{R}\right)^2} \right]$$

$$t^{**} = \frac{35v_0R}{2\rho g} \left(\frac{\mu - \frac{31\rho}{35R}}{7\mu - \frac{5\rho}{R}} \right)$$

$$v_G^{**} = \vec{0}$$



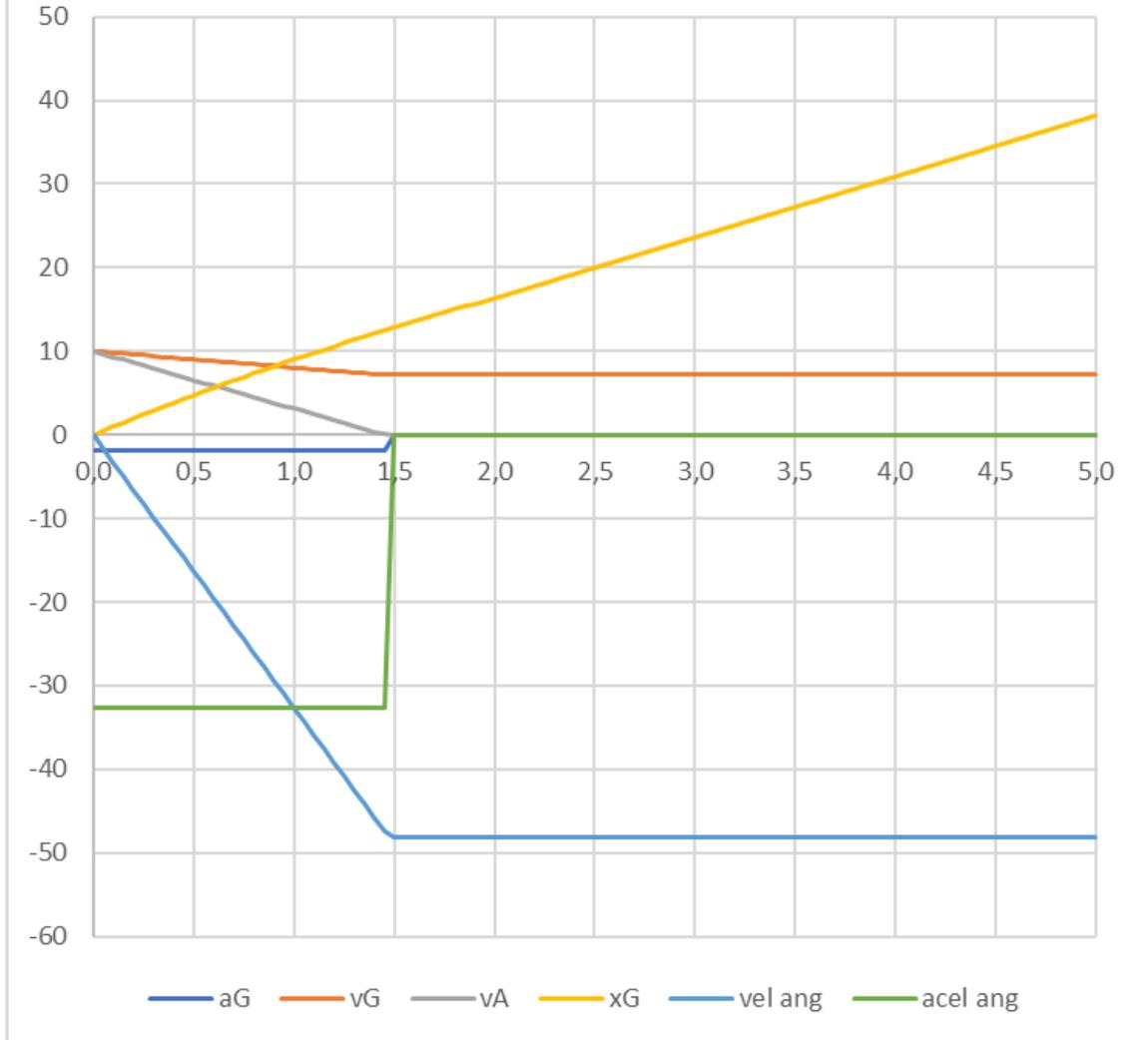
Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Desconsiderando atrito de rolamento:

$$\rho = 0m$$

pista de boliche:		17 metros
m	1,5	[kg]
R	0,15	[m]
μ	0,2	
ρ	0	[m]
v0	10	[m/s]
g	9,81	[m/s ²]
t*	1,46	[s]
vg*	7,14	[m/s]
xg*	12,48	[m]





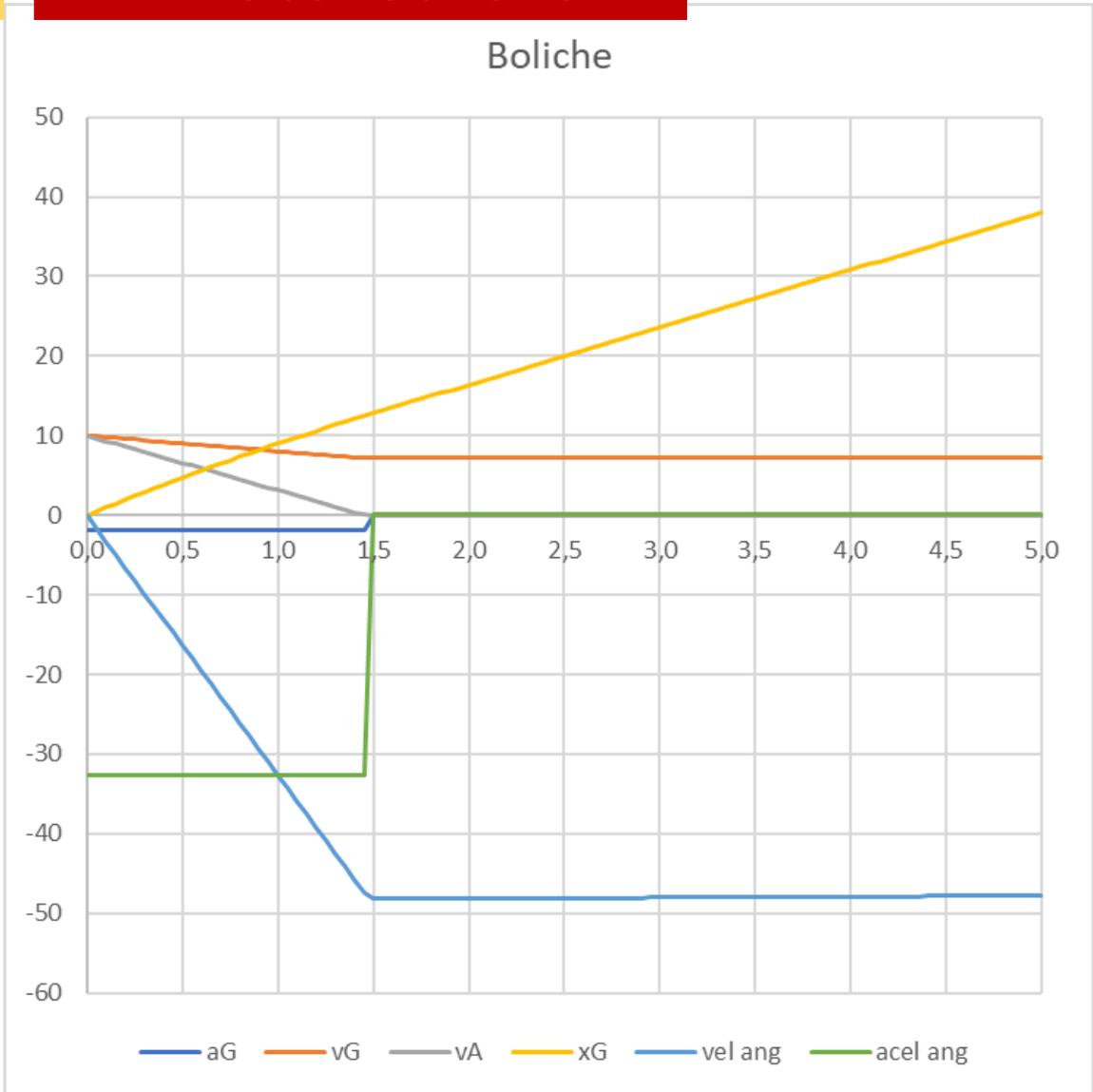
Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Considerando atrito de rolamento:

$$\rho = 0,001m = 1mm$$

pista de boliche:	17 metros	
m	1,5	[kg]
R	0,15	[m]
μ	0,2	
ρ	0,001	[m]
v0	10	[m/s]
g	9,81	[m/s ²]





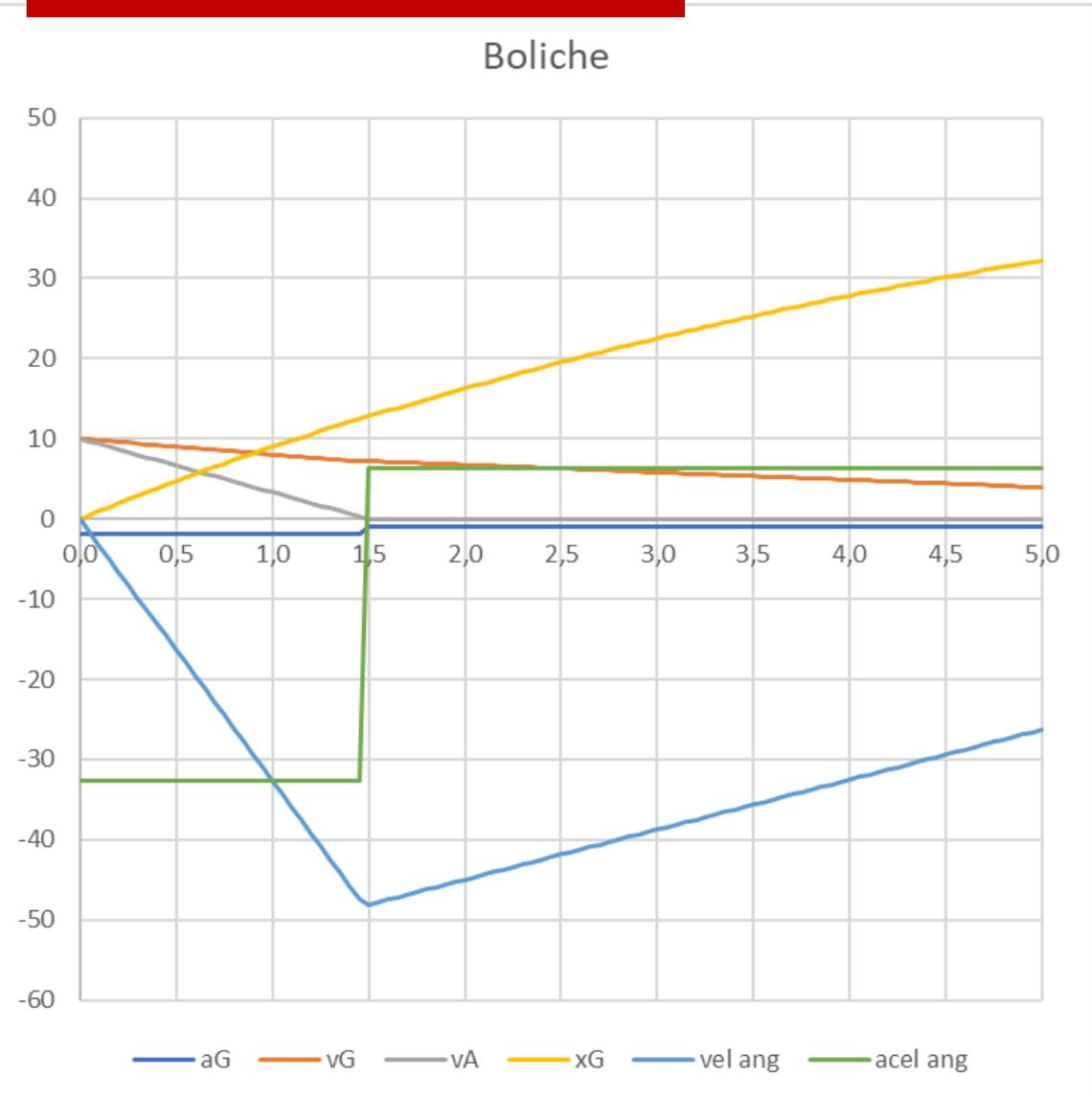
Exercício (continuação)

Atrito de Rolamento

Considerando atrito de rolamento:

$$\rho = 0,05m = 50mm$$

pista de boliche:	17 metros	
m	1,5	[kg]
R	0,15	[m]
μ	0,2	
ρ	0,05	[m]
v0	10	[m/s]
g	9,81	[m/s ²]





Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores

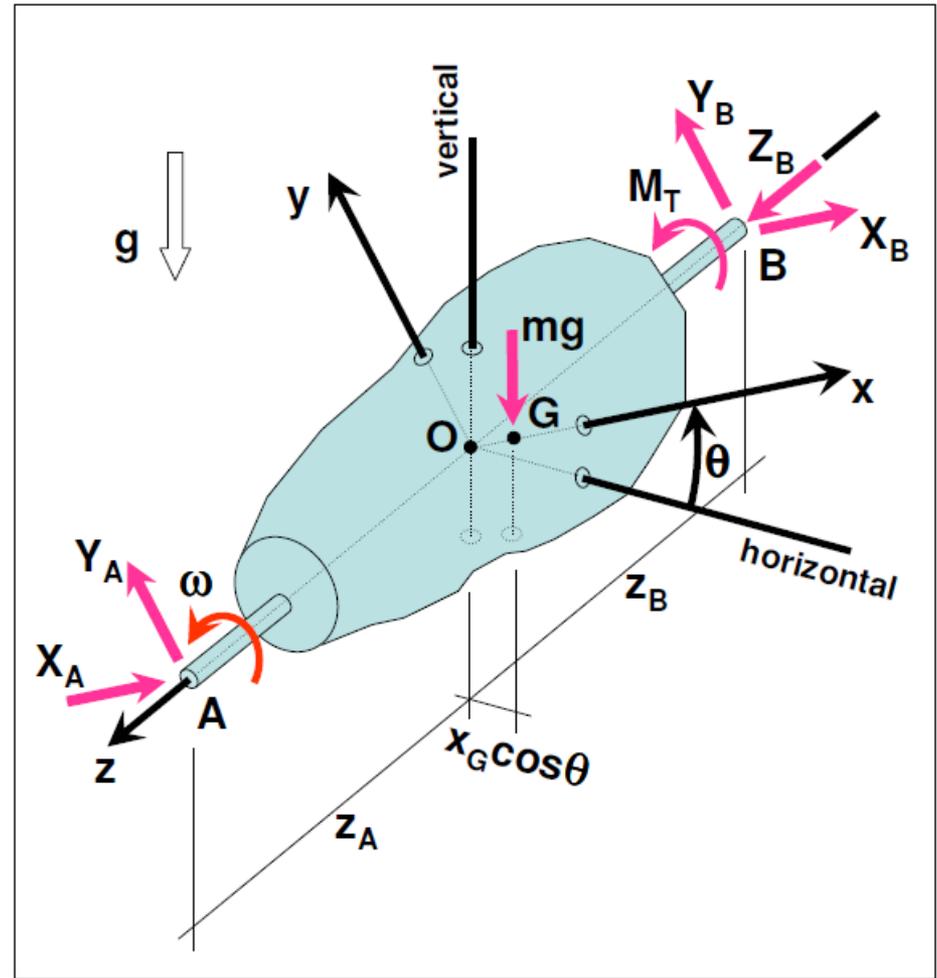


Exercício

Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores

Seja um rotor rígido que gira em torno do eixo fixo determinado por AB, vinculado por um anel em A e uma articulação em B e submetido ao momento (torque) M_T .
Pede-se determinar as reações em A e B.

OBS: no equacionamento a seguir z_A , z_B e x_G foram considerados como distâncias e não coordenadas (isto é, z_B não deve ser considerado um valor negativo e sim em módulo).



**Exercício
(continuação)****Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores**T.M.B:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{\text{ext}}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = -\omega^2 x_G \vec{i} + \dot{\omega} x_G a \vec{j}$$

$$\vec{R}^{\text{ext}} = (X_A + X_B - mg \sin \theta) \vec{i} + (Y_A + Y_B - mg \cos \theta) \vec{j} + Z_B \vec{k}$$

$$m(-\omega^2 x_G \vec{i} + \dot{\omega} x_G a \vec{j}) = (X_A + X_B - mg \sin \theta) \vec{i} + (Y_A + Y_B - mg \cos \theta) \vec{j} + Z_B \vec{k}$$

$$\begin{cases} X_A + X_B = mg \sin \theta - m\omega^2 x_G \\ Y_A + Y_B = mg \cos \theta + m\dot{\omega} x_G a \\ Z_B = 0 \end{cases}$$



Exercício (continuação)

Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores

T.M.A:

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O$$

$$\vec{H}_O = [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] [J]_{Oxyz} \{\vec{\omega}\}$$

$$\vec{H}_O = [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}] \begin{bmatrix} J_{x_o} & -J_{x_o y_o} & -J_{x_o z_o} \\ -J_{x_o y_o} & J_{y_o} & -J_{y_o z_o} \\ -J_{x_o z_o} & -J_{y_o z_o} & J_{z_o} \end{bmatrix}_{Oxyz} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}$$

$$\vec{H}_O = -J_{x_o z_o} \omega \vec{i} - J_{y_o z_o} \omega \vec{j} + J_{z_o} \omega \vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = (-J_{x_o z_o} \dot{\omega} + J_{y_o z_o} \omega^2) \vec{i} + (-J_{y_o z_o} \dot{\omega} - J_{x_o z_o} \omega^2) \vec{j} + J_{z_o} \dot{\omega} \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = (Y_B Z_B - Y_A Z_A) \vec{i} + (X_A Z_A - X_B Z_B) \vec{j} + (M_T - mgx_G \cos \theta) \vec{k}$$

$$\begin{cases} Y_B Z_B - Y_A Z_A = -J_{x_o z_o} \dot{\omega} + J_{y_o z_o} \omega^2 \\ X_A Z_A - X_B Z_B = -J_{y_o z_o} \dot{\omega} - J_{x_o z_o} \omega^2 \\ M_T - mgx_G \cos \theta = J_{z_o} \dot{\omega} \end{cases}$$

**Exercício
(continuação)****Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores**

Reescrevendo o sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + X_B = mg \sin \theta - m \omega^2 x_G \\ Y_A + Y_A = mg \cos \theta + m \dot{\omega} x_G a \\ Z_B = 0 \\ Y_B Z_B - Y_A Z_A = -J_{x_o z_o} \dot{\omega} + J_{y_o z_o} \omega^2 \\ X_A Z_A - X_B Z_B = -J_{y_o z_o} \dot{\omega} - J_{x_o z_o} \omega^2 \\ M_T - mg x_G \cos \theta = J_{z_o} \dot{\omega} \end{array} \right.$$

Resolvendo a 6ª equação:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J_{z_o}} (M_T - mg x_G \cos \theta)$$

Integrando no tempo:

$$\omega = 2 \left[\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{2mgx_G}{J_{z_o}} (\sin \theta - \sin \theta_0) + \frac{1}{J_{z_o}} \int_{\theta_0}^{\theta} M_T d\theta \right]$$

**Exercício
(continuação)****Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores**

Supondo agora então conhecidos ω e $\dot{\omega}$ e resolvendo o sistema de equações:

$$X_A = \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} \left[mg \sin \theta - m\omega^2 x_G - \frac{1}{Z_A} (J_{x_0z_0} \omega^2 + J_{y_0z_0} \dot{\omega}) \right]$$

$$X_B = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B} \left[mg \sin \theta - m\omega^2 x_G + \frac{1}{Z_A} (J_{x_0z_0} \omega^2 + J_{y_0z_0} \dot{\omega}) \right]$$

$$Y_A = \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} \left[mg \cos \theta + m\dot{\omega} x_G - \frac{1}{Z_A} (J_{y_0z_0} \omega^2 - J_{x_0z_0} \dot{\omega}) \right]$$

$$Y_B = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B} \left[mg \cos \theta + m\dot{\omega} x_G + \frac{1}{Z_A} (J_{y_0z_0} \omega^2 - J_{x_0z_0} \dot{\omega}) \right]$$

Definem-se:

Reação estática: a parcela da reação que depende do peso.

Reação dinâmica: a parcela da reação que independe do peso, sendo função da velocidade e aceleração angulares e da distribuição de massa.

**Exercício
(continuação)****Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores**

Obtendo agora as componentes verticais e horizontais das reações:

$$H_A = X_A \cos \theta - Y_A \sin \theta$$

$$V_A = X_A \sin \theta + Y_A \cos \theta$$

$$H_B = X_B \cos \theta - Y_B \sin \theta$$

$$V_B = X_B \sin \theta + Y_B \cos \theta$$

$$H_A = \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} \left[-m\omega^2 X_G \cos \theta - m\dot{\omega} X_G \sin \theta + \frac{\sin \theta}{Z_A} (J_{y_0 z_0} \omega^2 + J_{x_0 z_0} \dot{\omega}) - \frac{\cos \theta}{Z_A} (J_{x_0 z_0} \omega^2 + J_{y_0 z_0} \dot{\omega}) \right]$$

$$H_B = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B} \left[-m\omega^2 X_G \cos \theta - m\dot{\omega} X_G \sin \theta - \frac{\sin \theta}{Z_A} (J_{y_0 z_0} \omega^2 + J_{x_0 z_0} \dot{\omega}) + \frac{\cos \theta}{Z_A} (J_{x_0 z_0} \omega^2 + J_{y_0 z_0} \dot{\omega}) \right]$$

$$V_A = \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} \left[mg - m\omega^2 X_G \sin \theta - m\dot{\omega} X_G \cos \theta - \frac{\cos \theta}{Z_A} (J_{y_0 z_0} \omega^2 - J_{x_0 z_0} \dot{\omega}) - \frac{\sin \theta}{Z_A} (J_{x_0 z_0} \omega^2 + J_{y_0 z_0} \dot{\omega}) \right]$$

$$V_B = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B} \left[mg - m\omega^2 X_G \sin \theta - m\dot{\omega} X_G \cos \theta + \frac{\cos \theta}{Z_A} (J_{y_0 z_0} \omega^2 - J_{x_0 z_0} \dot{\omega}) + \frac{\sin \theta}{Z_A} (J_{x_0 z_0} \omega^2 + J_{y_0 z_0} \dot{\omega}) \right]$$



Exercício (continuação)

Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores

Sendo que se o rotor estivesse balanceado, isto é:

Balanceamento estático: baricentro sobre o eixo de rotação

Balanceamento dinâmico: produtos de inércia nulos

Resultaria em:

$$H_A = 0$$

$$H_B = 0$$

$$V_A = \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} [mg]$$

$$V_B = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B} [mg]$$

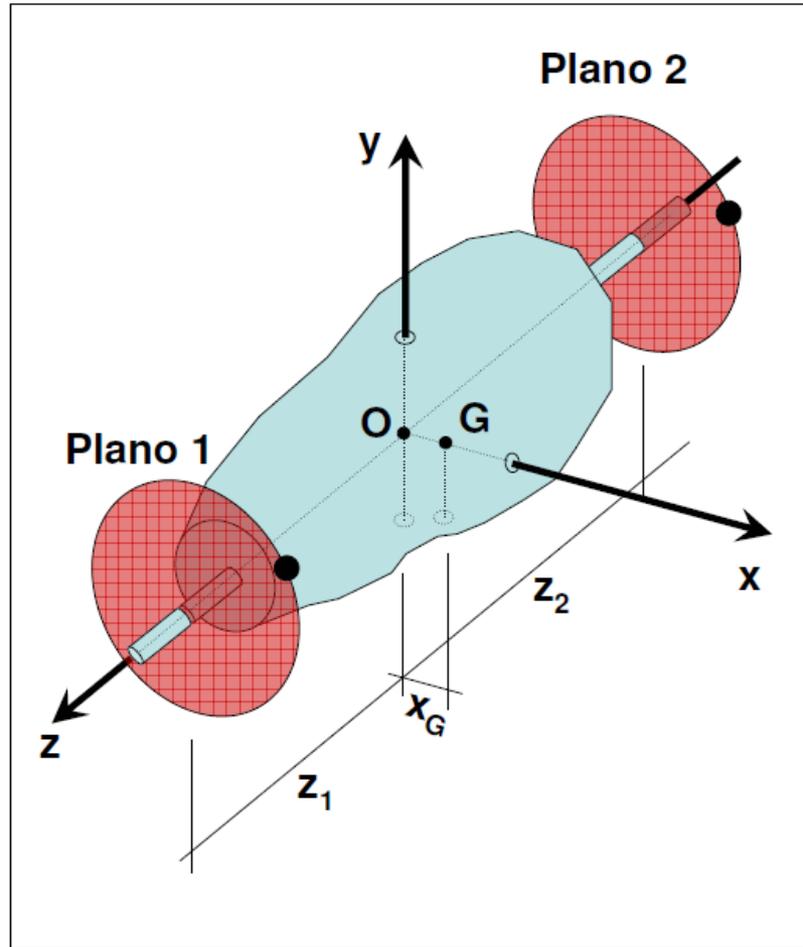
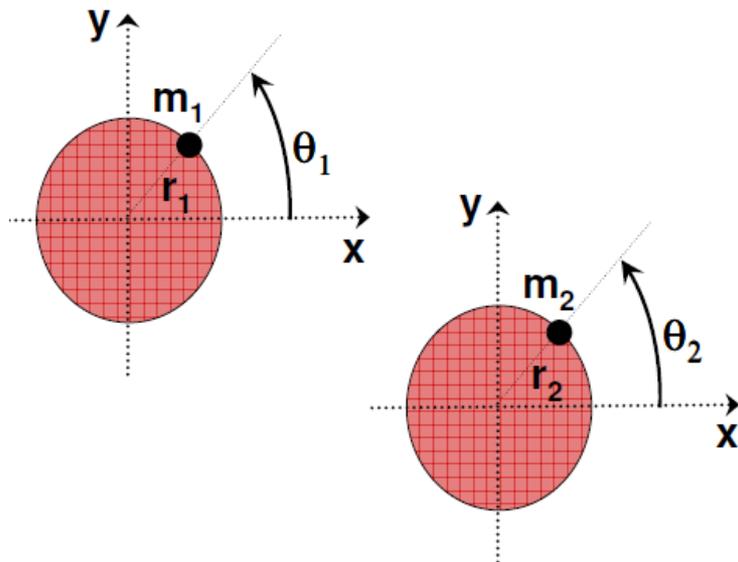
Ou seja, as reações se resumem às reações estáticas, as reações dinâmicas resultam zeradas quando o rotor está balanceado.



Exercício (continuação)

Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores

É possível demonstrar que, no caso mais geral, basta a adição de duas massas em dois planos distintos perpendiculares ao eixo de rotação para balancear estática e dinamicamente um rotor rígido. Sem perder a generalidade vamos fazer o eixo x coincidir com o segmento OG :





Exercício (continuação)

Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores

Temos 8 variáveis:

- 2 planos z_1 e z_2 ;
- 2 massas m_1 e m_2 ;
- 2 distâncias das massas de balanceamento até o eixo de rotação r_1 e r_2 ;
- 2 posições angulares para as massas θ_1 e θ_2 .

Temos duas condições a serem satisfeitas que resultarão em quatro equações escalares:

- Baricentro deve ficar sobre o eixo de rotação;
- Os produtos de inércia nos quais um dos eixos considerados é o eixo de rotação devem ser nulos.

Sendo assim, das 8 variáveis acima, podemos arbitrar 4 delas e as demais ficam então determinadas.

Por exemplo, arbitramos os dois planos de balanceamento e as duas distâncias até o eixo de rotação e ficando a determinar então as massas e as correspondentes posições angulares.



**Exercício
(continuação)**

Rotação em torno de eixo fixo – Balanceamento de Rotores

$$\begin{aligned} \bar{x}_G = 0 & \quad \therefore \quad mx_G + m_1r_1 \cos \theta_1 + m_2r_2 \cos \theta_2 = 0 \\ \bar{y}_G = 0 & \quad \therefore \quad m_1r_1 \text{sen} \theta_1 + m_2r_2 \text{sen} \theta_2 = 0 \\ \bar{J}_{x_0z_0} = 0 & \quad \therefore \quad J_{x_0z_0} + m_1r_1z_1 \cos \theta_1 - m_2r_2z_2 \cos \theta_2 = 0 \\ \bar{J}_{y_0z_0} = 0 & \quad \therefore \quad J_{y_0z_0} + m_1r_1z_1 \text{sen} \theta_1 - m_2r_2z_2 \text{sen} \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

Observação:

8 variáveis.
Arbitrar 4 delas e
resolver para as
demais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z_1 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1r_1 \cos \theta_1 \\ m_1r_1 \text{sen} \theta_1 \\ m_2r_2 \cos \theta_2 \\ m_2r_2 \text{sen} \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx_G \\ 0 \\ -J_{x_0z_0} \\ -J_{y_0z_0} \end{bmatrix}$$

Para que o sistema tenha solução possível, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser não nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z_1 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow z_1(z_1 - z_2) + z_2(z_2 - z_1) \neq 0$$

$$\Rightarrow z_1 \neq z_2$$

Demonstra-se assim a necessidade e suficiência de dois planos de balanceamento distintos entre si.