ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 Mecânica 1
Cinemática do Ponto
Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo

Simbologia – Cinemática do ponto

$t \quad tempo$

$s \quad distância\ percorrida, arco\ sobre\ a\ trajetória$

$v \quad velocidade\ escalar$

$a \quad aceleração\ escalar$

$\vec{r} = (P - 0)\ vetor\ posição$

$\vec{v} \quad vetor\ velocidade$

$\vec{a} \quad vetor\ aceleração$

$\vec{t} \quad versor\ tangente$

$\vec{n} \quad versor\ normal$

$\vec{b} \quad versor\ binormal$

$\vec{a}_t \quad vetor\ aceleração\ tangencial$

$\vec{a}_n \quad vetor\ aceleração\ normal$

$\rho \quad raio\ de\ curvatura\ da\ trajetória \quad (c = {}^{1}/_{\rho}\ \text{é}\ a\ curvatura)$

${}^{1}/_{\gamma} \quad raio\ de\ torção\ da\ trajetória \quad (\gamma\ \text{é}\ a\ torção\ da\ trajetória)$

$\vec{\tau} \quad versor\ transversal\ (coordenadas\ polares\ ou\ cilíndricas)$

$\vec{u} \quad versor\ radial\ (coordenadas\ polares\ ou\ cilíndricas)$

Formulário

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = v\vec{t}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t = a_t\vec{t}$$

$$\vec{a}_n = a_n\vec{n}$$

$$\vec{a}_t = \dot{v}\vec{t}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{t}$$

$$a_n = \vec{a}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{n} = \rho\frac{d\vec{t}}{ds}$$

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}$$

$$\rho = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}$$

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\wedge\vec{a}|}$$

Para curva no plano xy

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$\vec{n} = \frac{(\vec{v}\wedge\vec{a})\wedge\vec{v}}{|(\vec{v}\wedge\vec{a})\wedge\vec{v}|}$$

$$\vec{b} = \vec{t}\wedge\vec{n}$$

$$\gamma = \left|\frac{d\vec{b}}{ds}\right|$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{v}\wedge\vec{a}}{|\vec{v}\wedge\vec{a}|}$$

Conteúdo

Cinemática do Ponto

Velocidade e aceleração escalares

Vetores velocidade e aceleração

em coordenadas cartesianas, polares e cilíndricas.

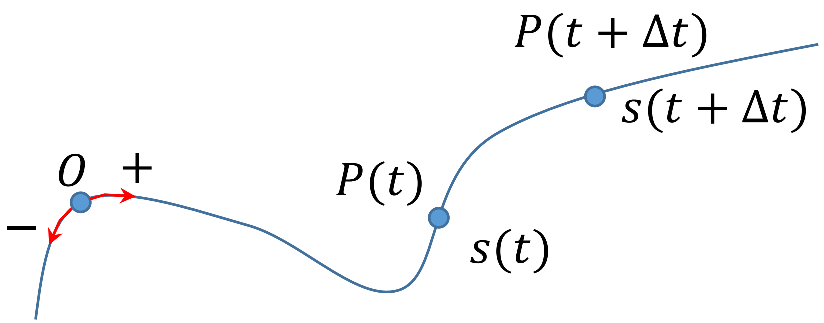
Noções de geometria diferencial.

Triedro de Frenet.

Componentes intrínsecas da velocidade e da aceleração.

Cinemática do Ponto

Velocidade e Aceleração Escalares



$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

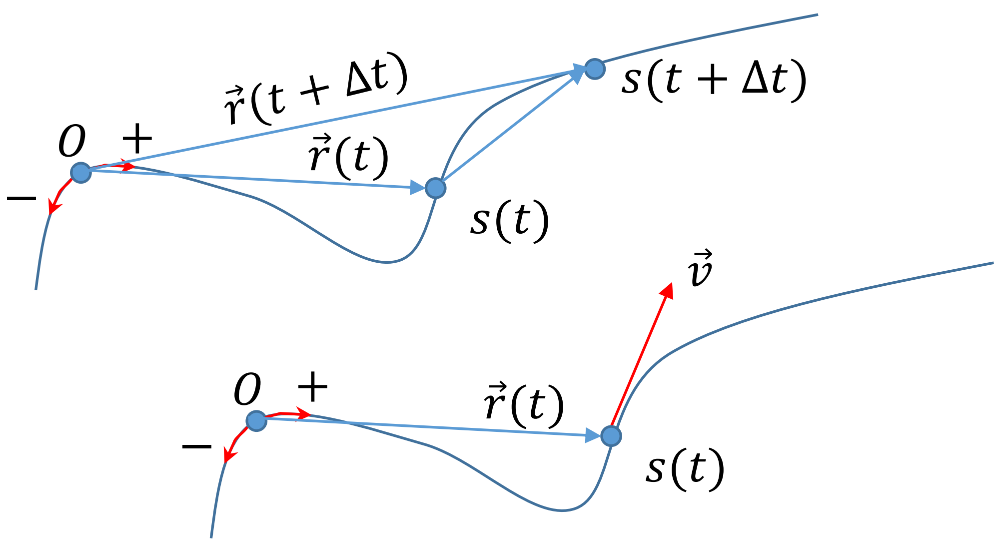
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}} \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt}} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt \qquad v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \qquad v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} a(s)ds$$

Velocidade Vetorial



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

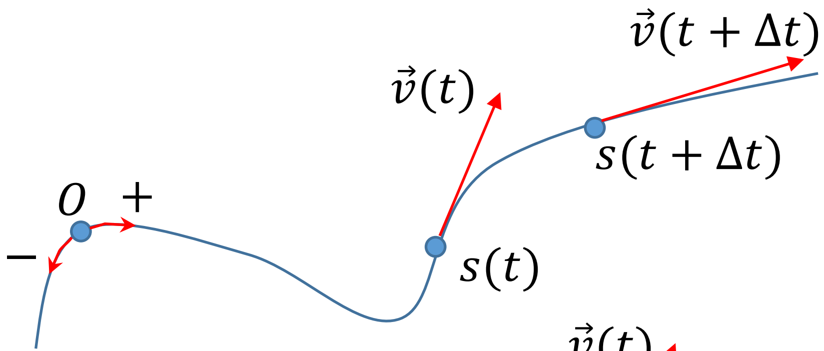
$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} = \frac{ds}{dt}\vec{t} = v\vec{t}$$

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{t}}$$

Quando o tempo tende a zero, o módulo da diferença do vetor posição entre os dois instantes iguala a diferença de comprimento de arco. A direção desta diferença entre os dois vetores posição consecutivos tende a igualar a direção tangente à trajetória.
Demonstra-se assim que o vetor velocidade é tangente à trajetória em cada instante.

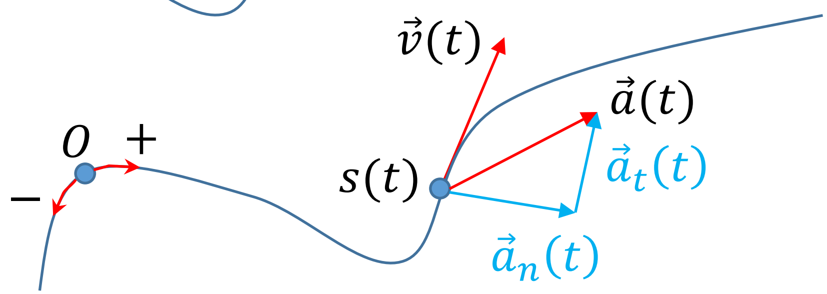
Cinemática do Ponto

Aceleração Vetorial



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{t})}{dt} = \dot{v}\vec{t} + v\dot{\vec{t}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\vec{t} + a_n\vec{n} \qquad \vec{a}_t = \dot{v}\vec{t} \qquad \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

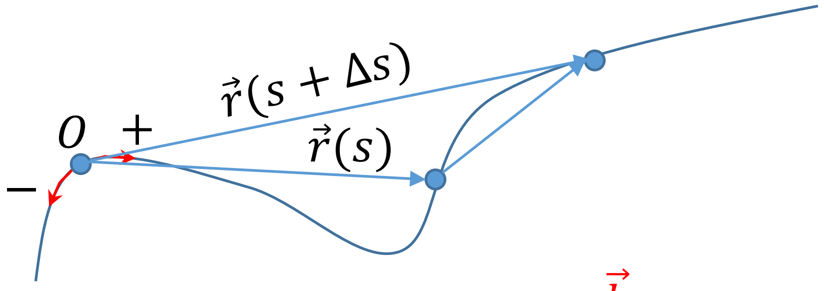
O vetor aceleração tem duas componentes intrínsecas, uma tangente à trajetória, a **aceleração tangencial**, e outra segundo a normal principal da mesma em cada instante, a **aceleração normal**.

a_t A aceleração tangencial pode assumir valores positivos ou negativos (velocidade escalar aumentando ou diminuindo).

a_n A aceleração normal só assume valores positivos.

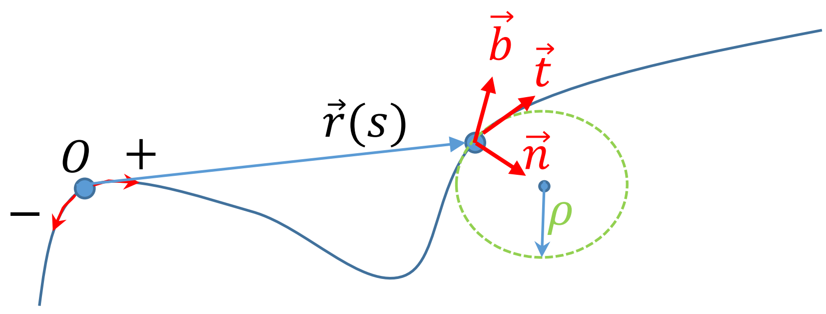
Cinemática do Ponto

Geometria de Curvas



$$\vec{t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}$$

$$\boxed{\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}}$$



$$\frac{d\vec{t}}{ds} = c\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n} \Rightarrow \boxed{\vec{n} = \rho\frac{d\vec{t}}{ds}}$$

$$\boxed{\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}}$$

Triedro de Frenet $\left(\vec{t}\ ,\vec{n}\ ,\vec{b}\right)$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \gamma\vec{n} \quad (*)$$

A derivada de um vetor de módulo constante é sempre nula ou ortogonal a ele. Sendo assim, $\vec{n} \perp \vec{t}$.

$\vec{t}$ é o versor tangente, $\vec{n}$ é o versor normal e $\vec{b}$ é o versor binormal.

ρ é o raio de curvatura do círculo osculador tangente à curva em cada posição. c é a curvatura.

γ é a torção da curva.

(*) é fácil demonstrar que ${}^{d\vec{b}}/_{ds}$ é paralelo a $\vec{n}$, sendo $\vec{b}.\vec{t} = 0$, resolva ${}^{d(\vec{b}.\vec{t})}/_{ds} = 0$.

Cinemática do Ponto

Geometria de Curvas

Versores do Triedro de Frenet

$$(\vec{t}\ ,\vec{n}\ ,\vec{b})$$

$$\boxed{\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}} \qquad \boxed{\vec{n} = \rho\frac{d\vec{t}}{ds}} \qquad \boxed{\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}}$$

Outras expressões auxiliares:

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}}$$

$$\vec{t} = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{ds} \Rightarrow \boxed{\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = v\vec{t} \wedge \left(\dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right) = \frac{v^3}{\rho}\vec{b} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}} \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Raio de curvatura de uma curva plana dada em coordenadas retangulares.

Não deduzido aqui. Vide W.A. Granville “Elementos de Cálculo Diferencial e Integral” §105.

$$\boxed{\vec{b} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}} \qquad \boxed{\vec{n} = \frac{(\vec{v} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{v}}{|(\vec{v} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{v}|}}$$

Cinemática do Ponto

Vetores posição, velocidade e aceleração em diferentes sistemas de coordenadas:

cartesiano

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

cilíndrico

$\vec{u}$ *direção radial*
$\vec{\tau}$ *direção transversal*

$$\vec{r} = r\vec{u} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u} + \dot{\varphi}\mathrm{r}\vec{\tau} + \dot{z}\vec{k}$$

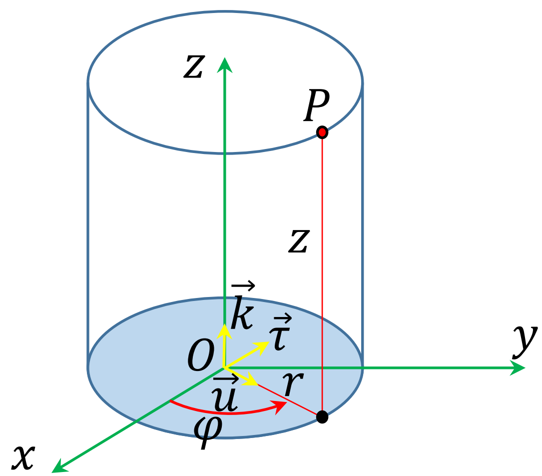
$$\vec{a} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)\vec{u} + (\ddot{\varphi}r + 2\dot{\varphi}\dot{r})\vec{\tau} + \ddot{z}\vec{k}$$

Componentes intrínsecas

$\vec{t}$ *direção tangente*
$\vec{n}$ *direção normal principal*
$\vec{b}$ *direção binormal*

$$\vec{v} = v\vec{t}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$



$$\vec{u} = cos\varphi\vec{i} + sen\varphi\vec{j}$$

$$\vec{\tau} = -sen\varphi\vec{i} + cos\varphi\vec{j}$$

$$\dot{\vec{u}} = -\dot{\varphi}sen\varphi\vec{i} + \dot{\varphi}cos\varphi\vec{j} \qquad \dot{\vec{u}} = \dot{\varphi}\vec{\tau}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = -\dot{\varphi}cos\varphi\vec{i} - \dot{\varphi}sen\varphi\vec{j} \qquad \dot{\vec{\tau}} = -\dot{\varphi}\vec{u}$$

Derivada de vetores de módulo constante

Seja: $\vec{a}$

Tal que: $|\vec{a}| = cte$

Pode-se dizer que: $\vec{a}.\vec{a} = \text{cte}$

Derivando em relação ao tempo: $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}.\vec{a}) = 0$

Assim: $2\dot{\vec{a}}.\vec{a} = 0$

Logo: $\boxed{\dot{\vec{a}} \perp \vec{a}}$ **ou** $\boxed{\dot{\vec{a}} = \vec{0}}$

Demonstrou-se que a derivada de um vetor de módulo constante é sempre nula ou ortogonal a ele.

Vai ser nula quando, além do módulo, também a direção for constante no tempo.

Exercício 1

Um canhão possui um sistema de amortecimento de recuo tal que sua aceleração é proporcional à velocidade, ou seja:

$$a = -kv$$

Sabendo-se que no instante do disparo sua posição é $x = 0$

e sua velocidade é v_0

Pede-se:

a) $v = v(t)$

b) $x = x(t)$

c) $v = v(x)$

d) $a = a(t)$

e) $a = a(x)$

Exercício 1 (solução)

Pede-se:

a) $v = v(t)$

b) $x = x(t)$

c) $v = v(x)$

d) $a = a(t)$

e) $a = a(x)$

$$a = -kv$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\frac{dv}{v} = -kdt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

$$\boxed{v = v_0 e^{-kt}}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

$$\int_0^x dx = \int_o^t v_0 e^{-kt} dt$$

$$\boxed{x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

$$a = -kv$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -k\frac{dx}{dt}$$

$$dv = -kdx$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -k \int_o^x dx$$

$$\boxed{v = v_0 - kx}$$

$$a = -kv$$

$$\boxed{a = -kv_0 e^{-kt}}$$

$$a = -kv$$

$$\boxed{a = k^2 x - kv_0}$$

Exercício 2

Um ponto move-se sobre o eixo Ox, partindo da posição $x = x_0$

com velocidade dada por $v = -kx$ sendo k constante.

Pede-se expressar:

a) $x = x(t)$

b) $a = a(x)$

c) $v = v(t)$

d) $a = a(t)$

$\boxed{x = x_0 e^{-kt}}$ $\boxed{a = k^2 x}$ $\boxed{v = -k x_0 e^{-kt}}$ $\boxed{a = k^2 x_0 e^{-kt}}$

Exercício 3

Dois pontos materiais A e B percorrem trajetórias retilíneas. Sendo s a posição e t o tempo, suas velocidades são dadas por $v_A(t) = 4 - t$ e $v_B(s) = 4 - s$.

No instante inicial $(t = 0)$, ambos os pontos estão na posição $s = 0$.

Pede-se expressar:

a) $a_A = a_A(t)$

b) $a_B = a_B(s)$

c) $s_A = s_A(t)$

d) $s_B = s_B(t)$

e) $v_B = v_B(t)$

f) $a_B = a_B(t)$

$\boxed{a_A(t) = -1}$ $\boxed{a_B(s) = s - 4}$ $\boxed{s_A(t) = 4t - \frac{t^2}{2}}$ $\boxed{s_B(t) = 4(1 - e^{-t})}$ $\boxed{v_B(t) = 4e^{-t}}$ $\boxed{a_B(t) = -4e^{-t}}$

Exercício 4

Dados os vetores, cujas componentes variam no tempo:

$$(P-O)=2t\vec{\imath}+4\vec{\jmath}-3t^2\vec{k}$$

$$(Q-O)=2(cos3t-t)\vec{\imath}+4\left(1-\frac{sen3t}{2}\right)\vec{\jmath}-3t^2\vec{k}$$

$$(R-O)=-4t\vec{\imath}-\vec{\jmath}-3\vec{k}$$

Pergunta-se:

a) A distância entre P e Q é constante?

b) Em que instante o ângulo $\widehat{POR}$ é reto?

c) Em que instante os vetores $(P-O)$ e $(R-O)$ ficam paralelos?

Não é constante.

$t=2$

Nunca ficam paralelos.

Exercício 5

Um ponto A move-se no espaço com coordenadas em função do tempo dadas por:

$$
\begin{aligned}
x &= 2t \\
y &= 4t^2 + 3t - 7 \\
z &= 2
\end{aligned}
$$

Pede-se:

a) Descrever a trajetória do ponto, ou seja, a curva descrita por ele;

b) expressar a velocidade escalar v do ponto em função do tempo.

$$
\boxed{\begin{cases} y = x^2 + \dfrac{3}{2}x - 7 \\ z = 2 \end{cases}}
$$

Parábola no plano $z = 2$

$$
\boxed{v = \sqrt{64t^2 + 48t + 13}}
$$

Exercício 6

Um ponto M percorre a curva descrita por

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ z = \theta \end{cases}$$

de acordo com a lei horária $\theta = \dfrac{t}{2}$

Pede-se determinar, no instante $t = \dfrac{\pi}{2}$

a) o vetor velocidade;

b) o vetor aceleração;

c) os versores do triedro de Frenet.

Exercício 7

As coordenadas cartesianas de um ponto P são dadas pelas equações:

$$x = 2 + cost$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + sent)$$

$$z = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + sent)$$

Pede-se:

a) As equações da trajetória;

b) o vetor velocidade e a velocidade escalar;

c) o vetor aceleração;

d) $s = s(t)$ com s medido sobre a curva e $s(0) = 0$;

e) o triedro de Frenet;

f) o raio de curvatura

g) as componentes intrínsecas da aceleração

Exercício 7 (solução)

$$cost = x - 2$$

$$sent = \sqrt{2}y - 2$$

$$\boxed{\begin{cases}(x-2)^2 + \left(\sqrt{2}y - 2\right)^2 = 1\\ y + z = 4\end{cases}}$$

$$\boxed{\vec{v} = -sent\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}cost\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{2}}{2}cost\vec{k}}$$

$$v^2 = sen^2t + \frac{1}{2}cos^2t + \frac{1}{2}cos^2t$$

$$\boxed{v = 1}$$

$$\boxed{\vec{a} = -cost\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{k}}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt = 1dt$$

$$\boxed{s = t}$$

$$\vec{t} = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\boxed{\vec{t} = -sent\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}cost\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{2}}{2}cost\vec{k}}$$

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} \qquad \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}\frac{d\vec{t}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = -cost\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{v}\frac{d\vec{t}}{dt} = -cost\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{n} = -cost\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{k}}$$

Exercício 7 (solução)

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

$$\vec{b} = \left(-sent\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}cost\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{2}}{2}cost\vec{k}\right) \wedge \left(-cost\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})}$$

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$$

$$\rho = \frac{1}{\left|\left(-sent\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}cost\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{2}}{2}cost\vec{k}\right) \wedge \left(-cost\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}sent\vec{k}\right)\right|}$$

$$\boxed{\rho = 1}$$

ou $\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = 1$

$$\boxed{a_t = \dot{v} = 0}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho} = 1}$$

Exercício 8

Um ponto material move-se em uma trajetória elíptica definida pelo vetor posição:

$$\vec{r}(t) = A cos(wt)\vec{i} + B sen(wt)\vec{j}$$

a) determine os vetores velocidade $\vec{v}(t)$ e aceleração $\vec{a}(t)$;

b) mostre que a aceleração aponta para a origem e é proporcional à distância da origem ao ponto material;

c) Determine os versores tangente e normal e o raio de curvatura para o caso em que $A = B = R$.

Exercício 9

Um ponto material P move-se em uma trajetória com velocidade dada pela expressão:

$$\vec{v}(P) = e^x\vec{\imath} + y^{1/2}\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Sabendo-se que o ponto parte no instante inicial da posição (0,0,1), pede-se:

a) o vetor posição;
b) as expressões da trajetória;
c) a aceleração $\vec{a} = \vec{a}(P)$
d) o raio de curvatura no ponto (0,0,0);
e) as componentes intrínsecas da aceleração no ponto (0,0,0).

Exercício 10

A trajetória de uma partícula P em movimento é definida pelas equações:

$$x = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$$

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$$

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$$

Sabendo-se que a velocidade escalar é $v = e^{-s}$ e que no instante inicial a partícula está na origem do comprimento de arco, isto é, $s(t=0) = 0$, pede-se:

a) o vetor posição em função do tempo;

b) o vetor velocidade em função do tempo;

c) as componentes intrínsecas da aceleração para $t = e - 1$;

d) o raio de curvatura em função do tempo.

Exercício 11

O ponto P, de coordenadas polares (r, θ) move-se no plano descrevendo a curva de equação

$r = \frac{\sqrt{2}}{2} b e^{\theta}$ com lei horária $\theta = \omega t$ (b e ω constantes positivas). Pede-se:

a) o vetor velocidade;

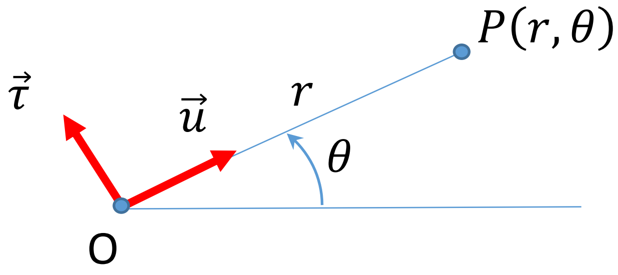
b) a velocidade escalar;

c) o comprimento de arco (admitir que $s(t = 0) = 0$);

d) o vetor aceleração;

e) o raio de curvatura;

f) as componentes intrínsecas da aceleração.



Exercício 12

Sabe-se que uma partícula *M* se move vinculada à curva descrita por $\vec{r} = \frac{r}{2}cos\theta\vec{i} + \frac{r}{2}sen\theta\vec{j} + rsen\frac{\theta}{2}\vec{k}$ de acordo com a lei horária $\theta = 2t$. Pede-se determinar, **para o instante $\boldsymbol{t = \pi}$ $[\boldsymbol{s}]$**:

a) A velocidade de *M*, descrita em coordenadas cartesianas;
b) O versor tangente à curva no ponto coincidente com a posição de M;
c) A velocidade de *M* expressa na forma intrínseca;
d) A aceleração de *M*, descrita em coordenadas cartesianas;
e) As componentes da aceleração de *M* expressas na forma intrínseca;
f) Os versores normal e binormal do triedro de Frenet para o ponto da curva coincidente com a posição de *M*.

$$\vec{r} = \frac{r}{2}cos\theta\vec{i} + \frac{r}{2}sen\theta\vec{j} + rsen\frac{\theta}{2}\vec{k}$$

$$\vec{r} = \frac{r}{2}cos2t\vec{i} + \frac{r}{2}sen2t\vec{j} + rsent\vec{k}$$

$$\vec{v} = -2\frac{r}{2}sen2t\vec{i} + 2\frac{r}{2}cos2t\vec{j} + rcost\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = -rsen2t\vec{i} + rcos2t\vec{j} + rcost\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{v}(t = \pi) = r\vec{j} - r\vec{k}}$$

$$|\vec{v}(t = \pi)| = \sqrt{2}r$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\boxed{\vec{t}(t = \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} - \vec{k})}$$

$$\boxed{\vec{v}(t = \pi) = \sqrt{2}r\vec{t}}$$

Exercício 12 (continuação)

$$\vec{v} = -rsen2t\vec{i} + rcos2t\vec{j} + rcost\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = -2rcos2t\vec{i} - 2rsen2t\vec{j} - rsent\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{a}(t=\pi) = -2r\vec{i}}$$

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{t}$$

$$a_t(t=\pi) = -2r\vec{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} - \vec{k}\right)$$

$$\boxed{a_t(t=\pi) = 0}$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$$

$$\vec{a}_n(t=\pi) = -2r\vec{i}$$

$$\boxed{a_n(t=\pi) = 2r}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_n}{|\vec{a}_n|}$$

$$\boxed{\vec{n}(t=\pi) = -\vec{i}}$$

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

$$\vec{b}(t=\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} - \vec{k}\right) \wedge \left(-\vec{i}\right)$$

$$\boxed{\vec{b}(t=\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} + \vec{k}\right)}$$

Duvidem
Pensem
Comuniquem
Perguntem
Cometam erros
Aprendam dos seus erros
... e mais importante,
Tenham alegria em aprender.

Estupidez:
Você pensa que sabe tudo, sem questionar.

Inteligência:
Você questiona tudo que você pensa que sabe.

Aproveite cada minuto,
porque o tempo não volta...
O que volta é a vontade de voltar no tempo.