2 Sistemas de eq. lineares (Cap. 5 Quarteroni)

→ Gilbert Strang, MIT, Linear algebra and learning from data

→ 3Blue1Brown

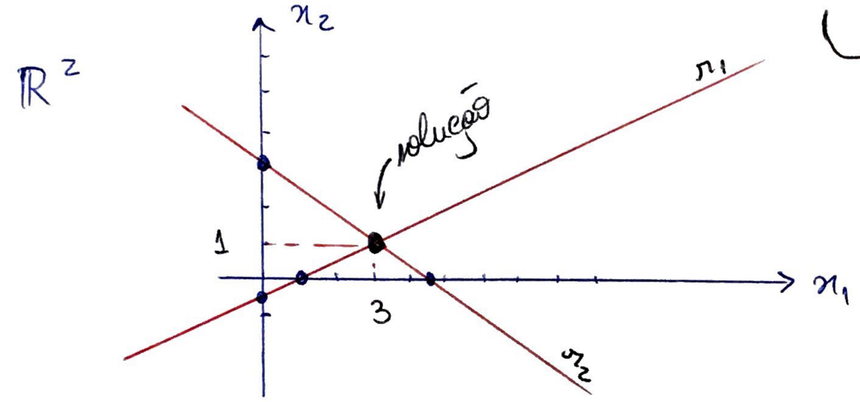
$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A_{m\times n},\ \vec{x}_{n\times 1},\ \vec{b}_{m\times 1}$$

2 interpretações:

1) por linha: $\begin{cases} m \text{ equações} \\ n \text{ incógnitas} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 & (r_1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 9 & (r_2) \end{cases}$$

↳ $(x_1, x_2) = (3, 1)$



• $m > n$: mais eq. que dimensão do espaço $\begin{cases} 1 \text{ solução} \\ \infty \text{ ''} \\ \text{nenhuma ''} \end{cases}$

ex) $\begin{cases} 3 \text{ retas em 2D} \\ 4 \text{ planos em 3D} \end{cases}$

• $m < n$: menos eq. que dimensão do espaço $\begin{cases} \infty \text{ soluções} \\ \text{nenhuma solução} \end{cases}$

ex) 2 planos em 3D.

• $m = n$: $\begin{cases} 1 \text{ solução} \\ \infty \text{ ''} \\ \text{nenhuma solução} \end{cases}$

* combinação linear: $\vec{y} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m$

$\vec{y}$ é C.L. de $\vec{x}_i$

* linearmente dependente: se $\vec{y}$ é C.L. de $\vec{x}_i$ então o conjunto de vetores $(\vec{y}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m)$ é L.D.

* linearmente independente: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ é L.I. se $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0}$ somente se $\alpha_i = 0 \ \forall i$.

$$\vec{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{v}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{v}_3 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}\vec{v}_m$$

* posto (A) = rank (A) = nº linhas L.I. (A) = nº colunas L.I. (A)

⇒ Caso particular: $m = n$, $A_{n\times n}$, $\vec{x}_{n\times 1}$, $\vec{b}_{n\times 1}$

$A\vec{x} = \vec{b}$ tem solução única $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ A^{-1} existe $\Leftrightarrow$ posto (A) $= n$

$$A^{-1} A \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$I \ \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1} \vec{b}}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & & \vec{a}_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

* Regra de Cramer: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, A_i : subs. $\vec{a}_i$ por $\vec{b}$

• expansão de Laplace no cálculo do determinante:

$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots$ $\qquad C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ (cofator)

$A_{ij} \rightarrow$ A sem linha i e coluna j

custo computacional $\approx 3(n+1)!$ operações de ponto flutuante (FLO) 3

FLOPS: floating-point operations per second (adição, multiplicação)

intel i5: $\sim$ 20 Gflops $\sim 20 \times 10^9$ flops
i7: $\sim$ 40 Gflops $\sim 40 \times 10^9$ flops
i9: $\sim$ 100 Gflops $\sim 100 \times 10^9$ flops

Cramer mais expansão de Laplace num processador i5:

$A_{n\times n}$

$n = 10$: $\dfrac{1{,}2 \times 10^8 \text{ FLO}}{20 \times 10^9 \text{ FLOPS}} \sim 0{,}006$ sec.

$n = 15$: $\dfrac{6{,}3 \times 10^{13} \text{ FLO}}{20 \times 10^9 \text{ FLOPS}} \sim 52$ min

$n = 20$: $\dfrac{1{,}5 \times 10^{20} \text{ FLO}}{20 \times 10^9 \text{ FLOPS}} \sim 243$ anos

---

Aula 4

$\Rightarrow$ Métodos diretos:

* substituição:

$$x - 2y = 1 \xrightarrow{1} x = 1 + 2y \xrightarrow{3} \boxed{x = 3}$$
$$2x + 3y = 9 \xrightarrow{2} 2(1+2y) + 3y = 9$$

(eliminamos o x da segunda eq.)

$$4y + 3y = 7$$
$$7y = 7$$
$$\boxed{y = 1}$$

* forma matricial: matriz aumentada $[A\ \vec{b}]$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{array}\right]_{2\times 3}$$

⇒ operações elementares: aplicadas na matriz aumentada, não altera a solução do sistema (cria um sistema equivalente)

- E_{pq}: troca as linhas p e q
- $E_p(c)$: multiplica a linha p pelo escalar $c \neq 0$
- $E_{pq}(c)$: soma à linha p a linha q vezes $c \neq 0$

ex) E_{12} : $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$E_2(-2)$: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ -2 & 4 & -2 \end{array}\right]$

$E_{21}(1)$: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow 7y = 7,\ \boxed{y = 1}$

$$2x + 3(1) = 9$$

$$2x = 6$$

$$\boxed{x = 3}$$

⇒ matrizes elementares: representação matricial das operações elementares

- construída aplicando a operação elementar em $I_{m\times m}$
- multiplica pela esquerda

ex) $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$E_{12}[A\vec{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

—— // ——

$$E_{21}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{\times(-2)} \oplus = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

coloca c na posição (21)

(com $p \neq q$, sempre é posição fora da diagonal de I, onde há zeros)

$$E_{21}(-2)[A\vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

—— // ——

obs: inversa da operação elementar: operação elementar que volta o sistema ao estágio anterior.

1) $E_{pq}^{-1} = E_{pq} \rightarrow$ troca as linhas novamente

2) $E_p(c)^{-1} = E_p\left(\frac{1}{c}\right) \rightarrow$ multiplica a linha p por $1/c$, $c \neq 0$.

3) $E_{pq}(c)^{-1} = E_{pq}(-c) \rightarrow$ soma à linha p, a linha q vezes $(-c)$, $c \neq 0$.

ex) $E_{12}\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{array}\right]$

—— // ——

$$E_{21}(2)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Método de Gauss: utiliza $E_{pq}(c)$ para transformar $[A\,\vec{b}]$ em triangular superior (zeros abaixo da diagonal principal) $\oplus$ subst. inversa.

ex anterior)

$$E_{pq}(-2) \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} 7y = 7, \quad y = 1 \\ 1x - 2y = 1, \quad 1x = 3 \end{array}$$

* algoritmo:

$$\begin{array}{c} L_1 \to \\ L_2 \to \\ \vdots \\ L_n \to \end{array} \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \vdots \\ b_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \vdots \\ \leftarrow L_n \end{array}$$

① zerar abaixo de a_{11}, usando a_{11} (pivô)

for $i = 2, n$:

$$L_i^{(1)} = L_i^{(0)} + c_{i1} L_1^{(0)}$$

$$c_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

$E_{21}(c_{21})\,[A\,\vec{b}]$

$$c_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$a_{21}^{(1)} = a_{21}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{11}^{(0)} = 0$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{12}^{(0)}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n}^{(1)} = a_{2n}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1n}^{(0)}$$

$$b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} b_1^{(0)}$$

- a_{i1}, $i = 2, n$ passa a ser zero
- altera toda a linha de $[A\,\vec{b}]$ usando o mesmo $E_{i1}(c_{i1})$

2 zerar abaixo de a_{22}, usando a_{22} (pivô)

for $i = 3, n$:

$$C_{i2} = -\frac{a_{i2}}{a_{22}}$$

$$L_i^{(2)} = L_i^{(1)} + C_{i2} L_2^{(1)}$$

de forma geral:

for $r = 1, (n-1)$ (iterações, zerar abaixo de a_{rr})

for $i = r+1, n$ (para cada linha abaixo de a_{rr})

$$C_{ir} = -\frac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}$$

for $j = r, n$ (para cada coluna na linha i, não precisa fazer nas que já foram zeradas)

$$a_{ij}^{(r)} = a_{ij}^{(r-1)} + C_{ir}\, a_{rj}^{(r-1)}$$

end for

$$b_i^{(r)} = b_i^{(r-1)} + C_{ir}\, b_r^{(r-1)}$$

end for

end for

substituição inversa:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1\,n}\, x_n}{a_{n-1\,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}} \qquad i = n:-1:1.$$

$\boxed{A_{m \times n}, \quad A\vec{x} = b:}$

obs: • posto (A) → nº linhas não-nulas de A após o método de Gauss.

• se $\begin{cases} \text{posto}(A) = n \rightarrow \text{solução única} \\ \text{posto}(A) < n \begin{cases} \text{posto}(A) = \text{posto}(A\vec{b}) \rightarrow \text{inf. sol.} \\ \text{posto}(A) > \text{posto}(A\vec{b}) \rightarrow \text{nenhuma solução.} \end{cases} \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

$\begin{cases} - a_{nn} = 0, \; b_n = 0 \\ \quad 0\, x_n = 0, \text{ qualquer } x_n \\ \quad (\text{inf. sol.}) \\ - a_{nn} = 0, \; b_n \neq 0 \\ \quad 0\, x_n = b_n, \text{ impossível} \\ \quad (\text{nenhuma sol.}) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Decomposição LU: método de Gauss na forma matricial

$A_{n\times n} \Rightarrow A = L\,U$ $\begin{cases} L \to \text{triang. inferior com diag. princ. } 1 \\ U \to \text{triang. Sup.} \end{cases}$

(não-singular)

$$A_{n\times n} = L_{n\times n}\, U_{n\times n}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U}$$

• método de Gauss: $[A\ \vec{b}\,] \Rightarrow [U\ \vec{d}\,]$

$$E_{pq}(c)\cdot[A\ \vec{b}\,]$$

ex) $A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

• $r = 1$: $E_{21}(-4)\,A^{(0)}$ (zerar abaixo de a_{11})

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{A^{(*)}}$$

$$E_{31}(-7)\,A^{(*)}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix}}^{A^{(1)}}$$

• $r = 2$: (zerar abaixo de a_{22})

$$E_{32}\left(-\frac{6}{7}\right) A^{(1)}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -41/7 \end{bmatrix}}_{A^{(2)} = U}$$

de forma resumida: $\underbrace{E_{32}\left(-\frac{6}{7}\right) E_{31}(-7)\, E_{21}(-4)}_{F} A = U$

(ordem importa!)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & -6/7 & 1 \end{bmatrix}$$

$FA = U$

$A = \underbrace{F^{-1}}\, U$

produto das inversas das operações elementares.

$$F^{-1} = E_{21}(4)\, E_{31}(7)\, E_{32}\left(\frac{6}{7}\right)$$

para reverter as operações: sequência inversa.

$F^{-1} . F = I \rightarrow$ testar

além disso: F^{-1} e F são triang. inferiores (L)

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 6/7 & 1 \end{bmatrix} = L \quad \text{e} \quad A = L.U.$$

cálculo numérico: Gauss: $A \rightarrow U$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ -c_{21} & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_{m1} & -c_{m2} \cdots & 1 \end{bmatrix}$

* Solução de sist. eq. lineares usando dec. L.U:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\underbrace{LU\vec{x}}_{\vec{d}} = \vec{b}$$

$$\begin{cases} L\vec{d} = \vec{b} \rightarrow \text{acha } \vec{d} \text{ por subst. direta} \\ U\vec{x} = \vec{d} \rightarrow \text{acha } \vec{x} \text{ por subst. inversa} \end{cases}$$

obs: $L\vec{d} = \vec{b} \rightarrow$ método de Gauss em $\vec{b}$

$$[A\vec{b}] \Rightarrow [U\vec{d}]$$

ex)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & -6/7 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -41/7 \end{bmatrix}}_{U}$$

obs.: o método LU é útil quando:

a) cálculo do determinante: $\det(A) = \det(L.U) =$

$$= \det(L).\det(U) =$$

$$= 1 \times \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

det de matriz triangular é o produto dos elementos da diag. principal.

b) quando A é fixo, soluções para vários $\vec{b}$'s:

$$\left.\begin{array}{l} A\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \\ A\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \\ \vdots \\ A\vec{x}_k = \vec{b}_k \end{array}\right\} \begin{array}{c} A = LU \\ (\text{Gauss } 1\times) \end{array} \left\{\begin{array}{l} LU\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \\ LU\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \quad \begin{cases} U\vec{x}_2 = \vec{d}_2 \\ L\vec{d}_2 = \vec{b}_2 \end{cases} \\ \vdots \\ LU\vec{x}_k = \vec{b}_k \quad \begin{cases} L\vec{d}_k = \vec{b}_k \\ U\vec{x}_k = \vec{d}_k \end{cases} \end{array}\right.$$

(2K. substituições)

c) Cálculo da matriz inversa:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \vec{b}_n \qquad \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_n$$

$$A A^{-1} = I = \begin{cases} A\vec{b}_1 = \vec{e}_1 \Rightarrow LU\vec{b}_1 = \vec{e}_1 \\ A\vec{b}_2 = \vec{e}_2 \Rightarrow LU\vec{b}_2 = \vec{e}_2 & \begin{cases} L\vec{d}_2 = \vec{e}_2 \\ U\vec{b}_2 = \vec{d}_2 \end{cases} \\ \vdots \\ A\vec{b}_n = \vec{e}_n \Rightarrow LU\vec{b}_n = \vec{e}_n & \begin{cases} L\vec{d}_n = \vec{e}_n \\ U\vec{b}_n = \vec{d}_n \end{cases} \end{cases}$$

$A = LU$

(Gauss 1x)

(2 x n subst.)

Aula 6 2024

* Pivoteamento:

- $a_{ii} \Rightarrow$ pivô $\Rightarrow c = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}$
- $a_{ii} \neq 0$
- $\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ com $|a_{ij}| < |a_{ii}|$ é mais estável numericamente
- escolher o maior valor absoluto da coluna (a partir de a_{ii}) $\Rightarrow E_{pq}$

pivô original

ex) $A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ $\qquad E_{13} A = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A_p^{(0)}}$

melhor pivô

• zerar abaixo de $a_{11} = 7$: $E_{21}\left(-\frac{4}{7}\right) A_p^{(0)}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 0 & -3{,}57 & 0{,}29 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A_p^{(1)}}$$

$E_{31}\left(-\frac{1}{7}\right) A_p^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 0 & -3{,}57 & 0{,}29 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 0 & -3{,}57 & 0{,}29 \\ 0 & 0{,}86 & 1{,}57 \end{bmatrix}}^{A_p^{(2)}}$$

melhor pivô

• zerar abaixo de $a_{22} = -3{,}57$: $E_{32}\left(\frac{0{,}86}{3{,}57}\right) A_p^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{0{,}86}{3{,}57} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 0 & -3{,}57 & 0{,}29 \\ 0 & 0{,}86 & 1{,}57 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 0 & -3{,}57 & 0{,}29 \\ 0 & 0 & 1{,}64 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & -\frac{0{,}86}{3{,}57} & 1 \end{bmatrix} \qquad A = L.U$$

---

* Decomposição LU com pivoteamento: $PA = LU$

$$P = \ldots E_{pq}^{(2)} E_{pq}^{(1)}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\underbrace{PA}\vec{x} = P\vec{b}$$

$$L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{d}} = P\vec{b} \quad \begin{cases} L\vec{d} = P\vec{b} \rightarrow \text{encontra } \vec{d} \\ U\vec{x} = \vec{d} \rightarrow \text{encontra } \vec{x} \end{cases}$$

P → matriz permutação → permutação aplicada em $I_{n\times n}$.

no exemplo anterior: $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

* algoritmo:
  - $P^{(0)} = I$, $L = \text{zeros}$
  - a cada r: (coluna r)
    - → escolhe pivô
    - → E_{pq} em $A^{(r-1)}$, $P^{(r-1)}$, $L^{(r-1)}$
    - → aplica Gauss em $A^{(r-1)}$ (calcula $A^{(r)}$)
    - → armazena $-c_{ir}$ em $L^{(r-1)} \rightarrow L^{(r)}$
  - coloca 1's na diagonal de L.

---

ex) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ pivô $\quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +1/3 & 0 & 0 \\ +2/3 & +1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}\left(-\frac{2}{3}\right)} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 2 & 11/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 11/3 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 11/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 11/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1/3 & 1 & 0 \\ +2/3 & +1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = LU$$

$$P\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$PA\vec{x} = P\vec{b}$$

$$L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{d}} = P\vec{b} \qquad \begin{cases} L\vec{d} = P\vec{b} & (1) \\ U\vec{x} = \vec{d} & (2) \end{cases}$$

(1) $L\vec{d} = P\vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1/3 & 1 & 0 \\ +2/3 & +1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$d_1 = 2$

$\frac{d_1}{3} + d_2 = 1, \; d_2 = 1/3$

$\frac{2d_1}{3} + \frac{d_2}{2} + d_3 = 1$

$d_3 = 1 - \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

(2) $U\vec{x} = \vec{d}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 11/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 1$

$2x_2 + 11/3 = 1/3, \; x_2 = -\frac{10}{6}$

$3x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 2$

$3x_1 = 2 - 10 + 10 = 2$

$x_1 = 2/3$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -10/6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

obs: no Matlab / Octave:
- $A\vec{x} = \vec{b} \longrightarrow \vec{x} = A \backslash \vec{b}$
- $[L, U] = lu(A), \quad [L, U, P] = lu(A)$