Equações de Primeira Ordem

Nesta aula consideraremos equações de primeira ordem e procuraremos condições para garantir a existência, unicidade e dependência contínua nos dados da solução do problema de Cauchy e procuraremos uma fórmula para expressar a solução.

O método das características: O caso linear e semilinear

A forma mais geral para uma EDP semilinear de primeira ordem em $\mathbb{R}^2$ é

$$a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) = F(x,y,u(x,y)). \tag{1}$$

Essa equação é linear se $F(x,y,u(x,y))$ é da forma $d(x,y) - c(x,y)u(x,y)$, mas veremos que isso influi muito pouco no que faremos, então lidaremos diretamente com caso semilinear.

Consideremos o problema de Cauchy de determinar a solução da equação (1) que tenha valor prescrito numa curva C

$$(2)\begin{cases} a(x,y)u_x(x,y)+b(x,y)u_y(x,y)=F(x,y,u(x,y)), \\ \\ u(x,y)=f(x,y), \quad (x,y)\in C. \end{cases}$$

Parametrizando a curva C como $C = \{(x, y) = \gamma(t) : t \in I\}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, o problema de Cauchy pode ser escrito na forma

$$(3)\begin{cases} a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) = F(x,y,u(x,y)), \\ \\ u(\sigma(t),\rho(t)) = f(\gamma(t)), \quad t \in I. \end{cases}$$

Vamos considerar as seguintes hipóteses:

(i) A curva inicial plana C é uma curva suave, ou seja, as funções são de classe C^1 em I e $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$ para todo $t \in I$.

(ii) a, b, F e f são funções de classe C^1 e a e b não se anulam simultamente em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo C.

(iii) O vetor (a, b) em C não é tangente à curva incial C, ou seja, para todo $t \in I$, o vetor tangente $(\sigma'(t), \rho'(t))$ não é paralelo ao vetor $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$, ou seja, são linearmente independentes.

Como a EDP em (3) prescreve como u varia na direção do vetor (a, b), podemos dividir o problema em duas partes.

Parte I.

Primeiro calculamos as linhas integrais do campo vetorial $(a(x,y), b(x,y))$ que saem dos pontos de C, isto é, para cada $t \in I$ fixado resolvemos o sistema de EDOs:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) = a(x(s,t), y(s,t))), \quad x(0,t) = \sigma(t), \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) = b(x(s,t), y(s,t))), \quad y(0,t) = \rho(t). \end{cases}$$

Chamaremos estas curvas de curvas características da EDP.

Observação 1. Como a e b são de classe C^1 (portanto localmente Lipschitzianas), sabemos da teoria das EDOs que por todo ponto $(\sigma(t), \rho(t)) \in C$ existe uma única solução de (4) para $s \in (-\epsilon(t), \epsilon(t))$ para algum $\epsilon(t) > 0$. Pela hipótese (iii), a curva obtida não será tangente a C e logo $(x(s,t), y(s,t)) \notin C$ para $s \in (-\epsilon(t), \epsilon(t)) \setminus \{0\}$. Além disso, como os coeficientes são de classe C^1, a solução de (4) depende de maneira C^1 de (s, t), isto é, o mapa

$$(s,t) \longmapsto (x(s,t), y(s,t))$$

é de classe C^1.

Observação 2. Como os vetores $(\sigma'(t), \rho'(t))$ e $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ são linearmente independentes,

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & \sigma'(t) \\ b(\sigma(t), \rho(t)) & \rho'(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_s(0, t) & x_t(0, t) \\ y_s(0, t) & y_t(0, t) \end{pmatrix}$$

logo, por continuidade,

$$\det \begin{pmatrix} x_s(0, t) & x_t(0, t) \\ y_s(0, t) & y_t(0, t) \end{pmatrix} \neq 0$$

em uma vizinha de C. Logo, pelo teorema da função inversa, o mapa

$$(s, t) \longmapsto (x(s, t), y(s, t))$$

é localmente invertível.

Parte II.

Fixado $(\sigma(t), \rho(t)) \in C$ e calculdada a curva característica $(x(s,t), y(s,t))$, podemos calcular a solução u ao longo dela. De fato, se u for uma solução da EDP (1), então, pela regra da cadeia,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds} u(x(s,t), y(s,t)) \\
&= u_x(x(s,t), y(s,t)) \frac{\partial x}{\partial}(s,t) + u_y(x(s,t), y(s,t)) \frac{\partial y}{\partial s}(s,t) \\
&= a(x(s,t), y(s,t)) u_x(x(s,t), y(s,t)) + b(x(s,t), y(s,t)) u_y(x(s,t), y(\\
&= F(x(s,t), y(s,t), u(x(s,t), y(s,t))).
\end{aligned}
$$

Portanto, se a curva característica é conhecida, então a identidade acima é uma EDO e permite calcular u conhecendo a condição inicial $u(\sigma(t), \rho(t))$.

Em particular, definindo

$$v(s,t) = u(x(s,t), y(s,t))$$

podemos calcular v por meio da EDO

$$(5)\begin{cases} \dfrac{dv}{ds}(s,t) = F(x(s,t), y(s,t), v(s,t)), \\ \\ v(0,t) = f(\gamma(t)). \end{cases}$$

Essas considerações nos levam ao chamado método das características que consiste em encontrar uma vizinhança de C de forma que possamos cobrir esta vizinhança com as curvas $\{(x(s,t), y(s,t)) : t \in I\}$ e resolver (5) ao longo delas. Desse modo a solução do problema de Cauchy (1) pode ser encontrada resolvendo, para cada t, o sistema característico

$$
(6)\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) = a(x(s,t), y(s,t)), \quad x(0,t) = \sigma(t), \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) = b(x(s,t), y(s,t)), \quad y(0,t) = \rho(t), \\ \dfrac{dv}{ds}(s,t) = F(x(s,t), y(s,t), v(s,t)), \quad v(0,t) = f(\gamma(t)), \end{cases}
$$

obtendo a solução u ao longo das curvas características:

$$
u(x(s,t), y(s,y)) = v(s,t).
$$

A solução explicita $u(x,y)$ deverá enfim ser obtida calculando (s,t) em função de (x,y).

Exemplo 1. Resolva

$$\begin{cases} u_x + u_y = u \\ u(x,0) = 1. \end{cases}$$

Vamos começar paratrizando a curva inicial como

$$C = \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}.$$

O vetor tangente a C é $(1,0)$ e $(a(x,y), b(x,y)) = (1,1)$, os quais são linearmente independentes. O sistema característico é

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) = 1, & x(0,t) = t, \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) = 1, & y(0,t) = 0, \\ \dfrac{dv}{ds}(s,t) = v(s,t), & v(0,t) = 1. \end{cases}$$

Efetuando os cálculos, obtemos

$$\begin{cases} x(s,t) = s + t, \\ y(s,t) = s, \\ v(s,t) = e^s. \end{cases}$$

Eliminando os parâmetros obtemos $s = y$ e $t = x - y$, logo a solução é

$$u(x,y) = e^y.$$

Exemplo 2. Resolva

$$\begin{cases} u_x + u_y = u \\ u(x,-x) = 1. \end{cases}$$

Uma paratrização da curva inicial é

$$C = \{(t,-t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

O vetor tangente a C é $(1,-1)$ e $(a(x,y), b(x,y)) = (1,1)$, os quais são linearmente independentes. O sistema característico é

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) = 1, & x(0,t) = t, \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) = 1, & y(0,t) = -t, \\ \dfrac{dv}{ds}(s,t) = v(s,t), & v(0,t) = 1. \end{cases}$$

Efetuando os cálculos, obtemos

$$\begin{cases} x(s,t) = s + t, \\ y(s,t) = s - t, \\ v(s,t) = e^s. \end{cases}$$

Eliminando os parâmetros obtemos $s = (x+y)/2$ e $t = (x-y)/2$, logo a solução é

$$u(x,y) = e^{\frac{x+y}{2}}.$$

Exemplo 3. Resolva

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = 4xy \\ u(x,0) = f(x), \ x > 0. \end{cases}$$

Como $a = -y$ e $b = x$ se anulam simultaneamente em $(0,0)$, vamos considerar a EDP em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Uma parametrização da curva inicial é

$$C = \{(t,0) : t > 0\}.$$

O vetor tangente a C é $(1,0)$ e $(a(x,y), b(x,y)) = (-y, x)$, os quais são linearmente dependentes somente de $x = 0$, mas os pontos da forma $(0,y)$ não pertencem a curva C. O sistema característico é

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) = -y, & x(0,t) = t, \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) = x, & y(0,t) = 0, \\ \dfrac{dv}{ds}(s,t) = 4xy, & v(0,t) = f(x(0,t)). \end{cases}$$

Usando as duas primeiras EDOs, obtemos a EDO linear de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(s,t) + x(s,t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$x(s,t) = A\cos s + B\sin s,$$

onde $A = A(t)$, $B = B(t)$ são arbitrárias. Como $x(0,t) = t$, temos $A = t$, logo

$$x(s,t) = t\cos s + B\sin s.$$

Subsituindo a expressão de x na segunda EDO e efetuando os cálculos, obtemos que $B = 0$ e

$$y(s,t) = t\sin s.$$

Substituindo x e y na terceira EDO e efetuando os cálculos, temos

$$v(s,t) = 2t^2\sin^2 s + f(t).$$

Sendo
$$x = t\cos s, \quad y = t\sin s, \quad t > 0,$$
temos
$$t = \sqrt{x^2 + y^2},$$
logo
$$u(x,y) = v(s,t) = 2t^2\sin^2 s + f(t) = 2y^2 + f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Exercício 1. Use o método das características para resolver o problema de Cauchy
$$\begin{cases} 2yu_x + u_y = (2y^2 + x)\sin(2xy), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, e^{-2x}) = \cos^2(xe^{-2x}), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O método das características: O caso quaselinear

Considere o problema de Cauchy para EDP quasilinear

$$(7)\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = F(x,y,u), & (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y) = f(x,y), & (x,y)\in C, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto e C é uma curva suave. Sob as mesmas hipóteses (i)–(iii), podemos resolver esse problema de Cauchy usando o mesmo método das características. A diferença é que neste caso o sistema característico é acoplado porque os coeficientes a e b dependem também da solução u:

$$(8)\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) = a(x(s,t),y(s,t),v(s,t)), & x(0,t) = \sigma(t), \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) = b(x(s,t),y(s,t),v(s,t)), & y(0,t) = \rho(t), \\ \dfrac{dv}{ds}(s,t) = F(x(s,t),y(s,t),v(s,t)), & v(0,t) = f(\gamma(t)). \end{cases}$$

Em consequência, o sistema precisar ser resolvido de uma vez só, não sendo mais possível determinar $x(s,t)$ e $y(s,t)$ e depois calcular $v(s,t)$. Outra diferença é que no caso semilinear e linear, $x(s,t)$ e $y(s,t)$ independem do dado inicial $u(x,y) = f(x,y)$ em C; já para o caso quasilinear as curvas características podem ser diferentes para diferentes soluções da mesma equação ao modificar f e/ou C, ou seja, as curvas características não são mais uma propriedade da equação.

Exemplo 4. Considere o problema

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1 \\ u(x,x) = 0. \end{cases}$$

Uma paratrização da curva inicial é

$$C = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

O vetor tangente a C é $(1,1)$ e $(a,b) = (u,1) = (0,1)$ em C por causa da condição inicial. Logo os esses vetores são linearmente independentes. O sistema característico é

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) = v(s,t), \quad x(0,t) = t, \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) = 1, \quad y(0,t) = t, \\ \dfrac{dv}{ds}(s,t) = 1, \quad v(0,t) = 0. \end{cases}$$

Logo

$$v(s,t) = s, \quad y(s,t) = s + t, \quad x(s,t) = \frac{s^2}{2} + t$$

Eliminando os parâmetros,

$$x - y = \frac{s^2}{2} - s.$$

Logo $s = 1 \pm \sqrt{1 + 2x - 2y}$. Portanto,

$$u(x,y) = v(s,t) = 1 \pm \sqrt{1 + 2x - 2y}.$$

Usando a condição condição inicial $u(x,y) = 0$, obtemos

$$u(x,y) = v(s,t) = 1 - \sqrt{1 + 2x - 2y}.$$

Observamos que as curvas características são parábolas de equação $x - t = (y - t)^2/2$, para cada $t \in \mathbb{R}$, as quais não se cruzam para valores pequenos de s (perto da reta $y = x$), mas todas são tangentes à reta $y = x + 1/2$ para o valor do parâmetro $s = 1$. A partir deste ponto a solução construída pelas características deixa se fazer sentido porque $u(x, y)$ não é derivável sobre esta reta. Sendo assim temos a existência da solução em uma vizinhança da curva inicial (reta $y = x$) e a solução pode ser estendida apenas até a reta $y = x + 1/2$ (exclusive).

Solução Geral

Vamos estudar a EDP linear de primeira ordem

$$(9) \qquad a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$$

em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, supondo a, b, c, $d \in C^1(\Omega)$.

A ideia do método que utilizaremos é simples: para resolver essa EDP, procuraremos uma mudança de variáveis (se existir)

$$s = s(x,y),$$
$$t = t(x,y),$$

de modo que em relação as novas variáveis a EDP (9) possa ser escrita como uma derivada total de uma função que envolve a solução u. Caso seja possível, isto permitirá obter a solução geral da EDO obtida (em termos de s ou t) e depois retornamos às variáveis originais (x e y) utilizando as funções inversas relacionadas com a mudança de variáveis.

Exemplo 1. Encontre a solução geral da equação

$$xu_x + u = x^2, \quad (x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \tag{10}$$

Observe que esta equação já está na forma desejada. Note que para cada y fixo,

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu) = xu_x + u.$$

Portanto a EDP dada é a EDO

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu) = x^2.$$

Integrando com relação a x, obtemos

$$xu = \frac{x^3}{3} + f(y). \tag{11}$$

Logo a solução geral da EDP (10) no semiplano $x > 0$ é

$$u(x, y) = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} f(y), \tag{12}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária.

Observação. Notemos que no Exemplo 1, mostramos que toda função $u : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é solução da EDP (10), e que pertence a $C^1((0, \infty) \times \mathbb{R})$, deverá ser da forma (12) para alguma $f \in C^1(\mathbb{R})$. Reciprocamente, para cada $f \in C^1(\mathbb{R})$, a função $u : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por (12), será uma solução da EDP (10) e que pertence a $C^1((0, \infty) \times \mathbb{R})$.

Exemplo 2. Encontrar a solução geral da equação

$$-2yu_x + u_y = ye^x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{13}$$

Podemos utilizar as curvas características associadas à EDP e escolher uma curva auxiliar que intersecta transversalmente essas características para introduzir a mudança de variáveis $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$. As características para a equação (13) são dadas por

$$\begin{cases} x'(s) = -2y(s) \\ y'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(s) = -s^2 - 2c_1 s + c_2 \\ y(s) = s + c_1 \end{cases}$$

Assim,

$$x = -s^2 - 2c_1 s + c_2 = -(s + c_1)^2 + c_1^2 + c_2 = -y^2 + k,$$

onde k é uma constante arbitrária, ou seja, as curvas características associadas à EDP (13) são, no plano xy, as parábolas $x + y^2 = k$, onde k é uma constante arbitrária.

Consideraremos, como curva auxiliar, o eixo dos x, que é ortogonal (logo transversal) a todas as curvas características obtidas (ou seja, as parábolas $x = -y^2 + k$).

Uma parametrização do eixo dos x pode ser dada por

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto (t, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Baseado nisto, podemos tentar obter uma mudança de variáveis, como sendo:

$$(s, t) \longmapsto (x(s, t), y(s, t))$$

dada por

$$\begin{cases} x_s(s) = -2y(s), & x(0, t) = t \\ y_s(s, t) = 1, & y(0, t) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(s, t) = -s^2 + t \\ y(s) = s \end{cases}$$

Logo

$$s(x, y) = y, \quad t(x, y) = x + y^2. \tag{14}$$

Observemos que a função $t = t(x, y)$ é constante ao longo das curvas características $(x + y^2 = k)$. Além disso, a função $s = s(x, y)$ é constante ao longo da curva auxiliar (o eixo dos x, isto é, $y = 0$).

Fazendo a mudança de variáveis (14) e definindo $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t)),$$

temos

$$v_s(s, t) = \frac{d}{ds} u(x(s, t), y(s, t)) = y(s, t)e^{x(s,t)} = se^{-s^2+t}$$

cuja solução geral é

$$v(s, t) = -\frac{1}{2} e^{-s^2+t} + f(t).$$

Portanto a solução geral da EDP (13) é

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} e^x + f(x + y^2),$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária.

Exemplo 3. Encontrar a solução geral da EDP

$$(15) \qquad au_x(x,y) + bu_y(x,y) + cu(x,y) = d, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde a, b, c, d são constantes reais fixadas satisfazendo $a^2 + b^2 \neq 0$.

Começamos encontrando as curvas características associadas a EDP (15):

$$\begin{cases} x'(s) = a \\ y'(s) = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(s) = as + c_1 \\ y(s) = bs + c_2 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por a, e subtraindo da primeira equação multiplicada b, obtemos

$$ay - bx = k_1$$

onde k_1 é uma constante arbitrária. Logo as curvas características associadas EDP (15) são retas paralelas à reta $ay - bx = 0$.

As retas ortogonais as curvas características são as retas $by + ax = k_2$, k_2 constante arbitrária.

Escolhendo t constante das características e s constante ao longo das retas ortogonais, obtemos

$$s(x,y) = by + ax, \quad t(x,y) = ay - bx. \tag{16}$$

A aplicação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (s,t)$ é um operador linear, cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

a qual tem determinante $a^2 + b^2 \neq 0$. Logo T é invertível com inversa também um operador linear. Portanto (16) define uma mudança de variáveis de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Considere $v(s,t) = u(x(s,t), y(s,t))$. Pela regra da cadeia,

$$u_x(x,y) = v_s s_x + v_t t_x = av_s - bv_t$$
$$u_y(x,y) = v_s s_y + v_t t_y = bv_s + av_t$$

Substituindo essas expressões na EDP (15), obtemos

$$\begin{aligned} d &= au_x(x,y) + bu_y(x,y) + cu(x,y) \\ &= a(av_s - bv_t) + b(bv_s + av_t) + cv(s,t) \\ &= a^2 v_s - abv_t + b^2 v_s + abv_t + cv(s,t) \\ &= (a^2 + b^2)v_s + cv(s,t), \end{aligned}$$

ou seja, para cada t fixado, a função $v = v(s,t)$ satisfaz a EDO:

$$(a^2 + b^2)v_s(s,t) + cv(s,t) = d, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

Como $a^2 + b^2 \neq 0$, esta EDO é equivalente a

$$v_s(s,t) + \frac{c}{a^2+b^2} v(s,t) = \frac{d}{a^2+b^2}, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Se $c = 0$, a EDO é

$$v_s(s,t) = \frac{d}{a^2+b^2}, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

cuja solução geral é

$$v(s,t) = \frac{d}{a^2+b^2} s + f(t), \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

e $f \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Logo

$$
\begin{aligned}
u(x, y) = v(s, t) &= \frac{d}{a^2 + b^2} s + f(t) \\
&= \frac{d}{a^2 + b^2}(ax + by) + f(ay - bx)
\end{aligned}
$$

. Assim, quando $c = 0$, a solução geral de EDP (15) é dada por

$$
u(x, y) = \frac{d}{a^2 + b^2}(ax + by) + f(ay - bx), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,
$$

Se $c \neq 0$, multiplicando a EDO (16) pelo fator integrante

$$e^{cs/(a^2+b^2)}$$

e integrando, obtemos

$$v(s,t) = \frac{d}{c} + e^{-cs/(a^2+b^2)} f(t).$$

Logo

$$u(x,y) = v(s,t) = \frac{d}{c} + e^{-c(ax+by)/(a^2+b^2)} f(ay - bx)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

A ideia utilizada no Exemplo 3 pode ser aplicada em casos em que a EDP não tenha coeficientes constantes,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{17}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, a, b, c, $d \in C^1(\Omega)$ e

$$a^2(x,y) + b^2(x,y) \neq 0, \quad \text{para } (x,y) \in \Omega.$$

As curvas características da equação (17) satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x'(s) = a(x(s), y(s)) \\ y'(s) = b(x(s), y(s)). \end{cases} \tag{18}$$

Se as as soluções da EDO (18) forem da forma $t(x, y) = k$, onde k é uma constante arbitrária, será natural escolher t como uma das novas variáveis.

Existe uma certa liberdade para a escolha da variável $S = s(x, y)$. Basta garantir que a transformação

$$s = s(x, y), \quad t = t(x, y)$$

seja uma mudança de variáveis de classe $C^1(\Omega')$, onde Ω' é um subconjunto aberto contido em Ω. Para isto basta que o jacobiano

$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} s_x(x, y) & s_y(x, y) \\ t_x(x, y) & t_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ para todo } (x, y) \in \Omega.$$

Observe que se $t_y(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$ (respectivamente, $t_x(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$) podemos escolher $s(x, y) = x$ para $(x, y) \in \Omega$ (respectivamente, $s(x, y) = y$). De fato, pois neste caso

$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t_x & t_y \end{vmatrix} = t_y \neq 0.$$

Analogamente para o caso $t_x \neq 0$.

Exemplo 4. Encontre a solução geral de

$$x^2 u_x - xyu_y + yu = xy^2, \tag{19}$$

no semiplano $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}$.

Neste caso,

$$a(x,y) = x^2, b(x,y) = -xy, c(x,y) = y, d(x,y) = xy^2$$

são todas funções de classe C^1 no semiplano $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}$. Além disso,

$$a^2(x,y) + b^2(x,y) = x^2(1 + y^4) \neq 0 \quad \forall\, (x,y) \in (-\infty, 0) \times \mathbb{R}.$$

As curvas características da equação (19) satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x'(s) = x^2 \\ y'(s) = -xy. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(s) = \dfrac{-1}{s + c_1} \\ y(s) = c_2(s + c_1) \end{cases}$$

Assim $xy = -c_2$. Logo, podemos escolher $t(x,y) = xy$. Como $t_y = x \neq 0$, podemos escolher $s(x,y) = x$.

Obtemos a mudança de variáveis

$$s(x, y) = x, \quad t(x, y) = xy.$$

Notemos que a transformação inversa é dada por

$$x(s, t) = s, \quad y(s, t) = \frac{t}{s}.$$

Definindo $v(s, t) = u(x(s, t), y(s, t))$, pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} v_s &= u_x x_s + u_y y_s \\ &= u_x - \frac{t}{s^2} u_y \\ &= u_x - \frac{t}{s}\frac{1}{s} u_y \\ &= u_x - y\frac{1}{x} u_y \\ &= u_x - \frac{y}{x} u_y \end{aligned}$$

Assim, usando que $s = x$,

$$\begin{aligned} s^2 v_s &= s^2 \left(u_x - \frac{y}{x} u_y \right) \\ &= x^2 \left(u_x - \frac{y}{x} u_y \right) \\ &= x^2 u_x - xy u_y \\ &= xy^2 - yu \quad \text{(pois } u \text{ é solução da EDP dada)} \\ &= s \left(\frac{t}{s} \right)^2 - \frac{t}{s} v \\ &= \frac{t^2}{s} - \frac{t}{s} v \end{aligned}$$

ou seja, v satisfaz a EDO

$$s^2 v_s + \frac{t}{s} v = \frac{t^2}{s}$$

que tem fator integrante $\exp(-t/(2s^2))$.

Multiplicando a EDO pelo fator integrante e integrando, obtemos

$$v(s,t) = t + f(t)\exp\left(\frac{t}{2s^2}\right).$$

Voltando às variáveis x e y, a solução geral da EDP é

$$u(x,y) = xy + f(xy)exp\left(\frac{y}{2x}\right), \quad x < 0,$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária.