

Método de Nyquist

1

- **MOTIVAÇÃO**
- **FUNÇÕES COMPLEXAS**
 - definições
 - propriedades (Teorema de Cauchy)
- **CAMINHO DE NYQUIST**
- **DIAGRAMAS DE NYQUIST**
- **CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE NYQUIST**
 - estabilidade Relativa
 - Margem de Ganho
 - Margem de Fase
- **SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS**

Motivação

2

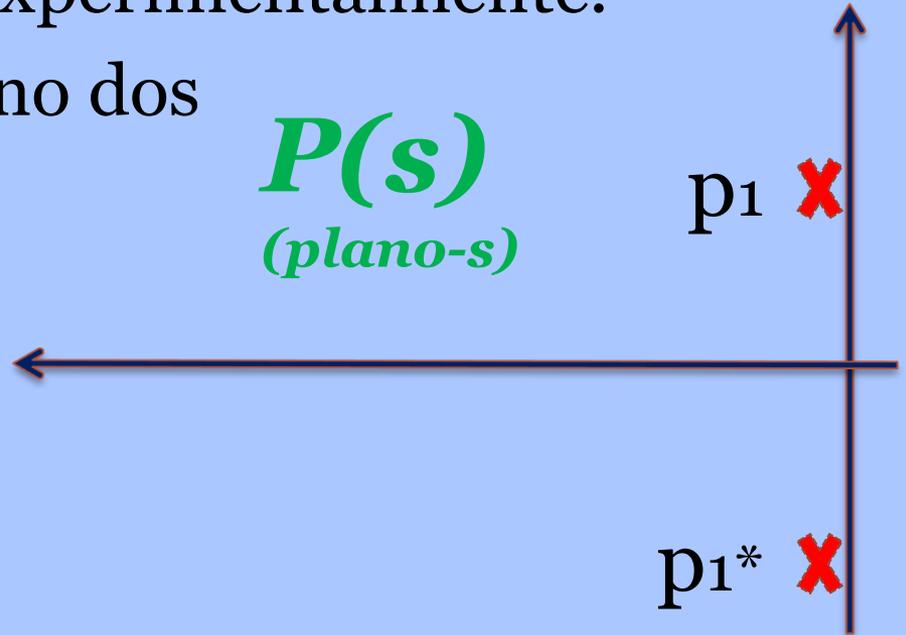
- Determinação e medida da estabilidade absoluta e relativa, que outros métodos não conseguem fazer.
- Aplicável a funções de transferências transcendentais ou determinadas experimentalmente.
- Obs.: plano- s ($P(s)$) \rightarrow plano dos polos e zeros!!!

$$e^{-\tau s}$$

$P(s)$
(plano- s)

p_1 X

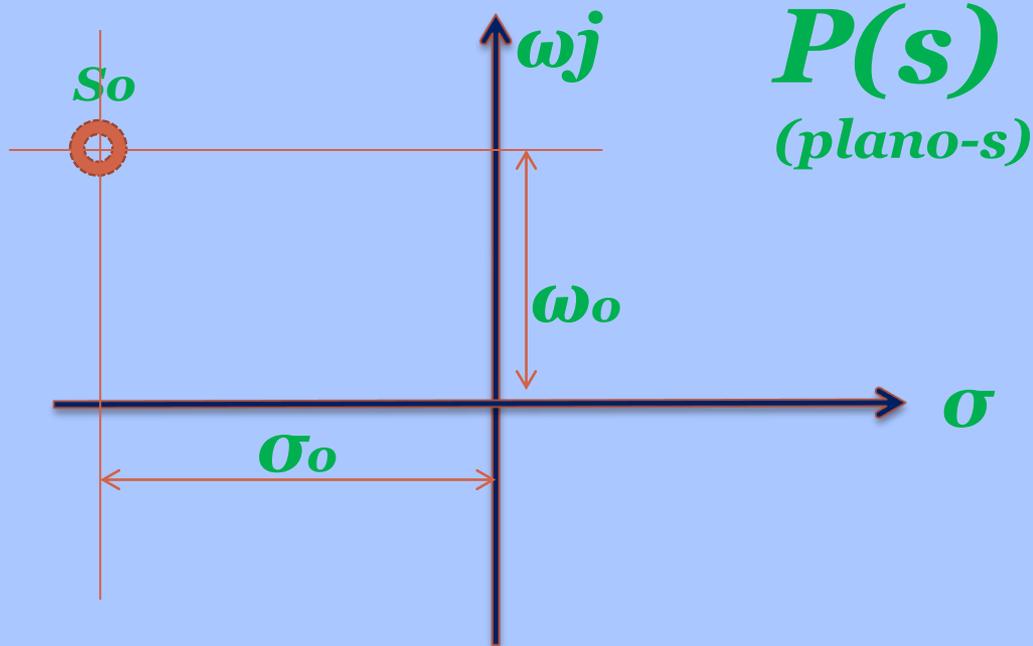
p_1^* X



Funções Complexas

3

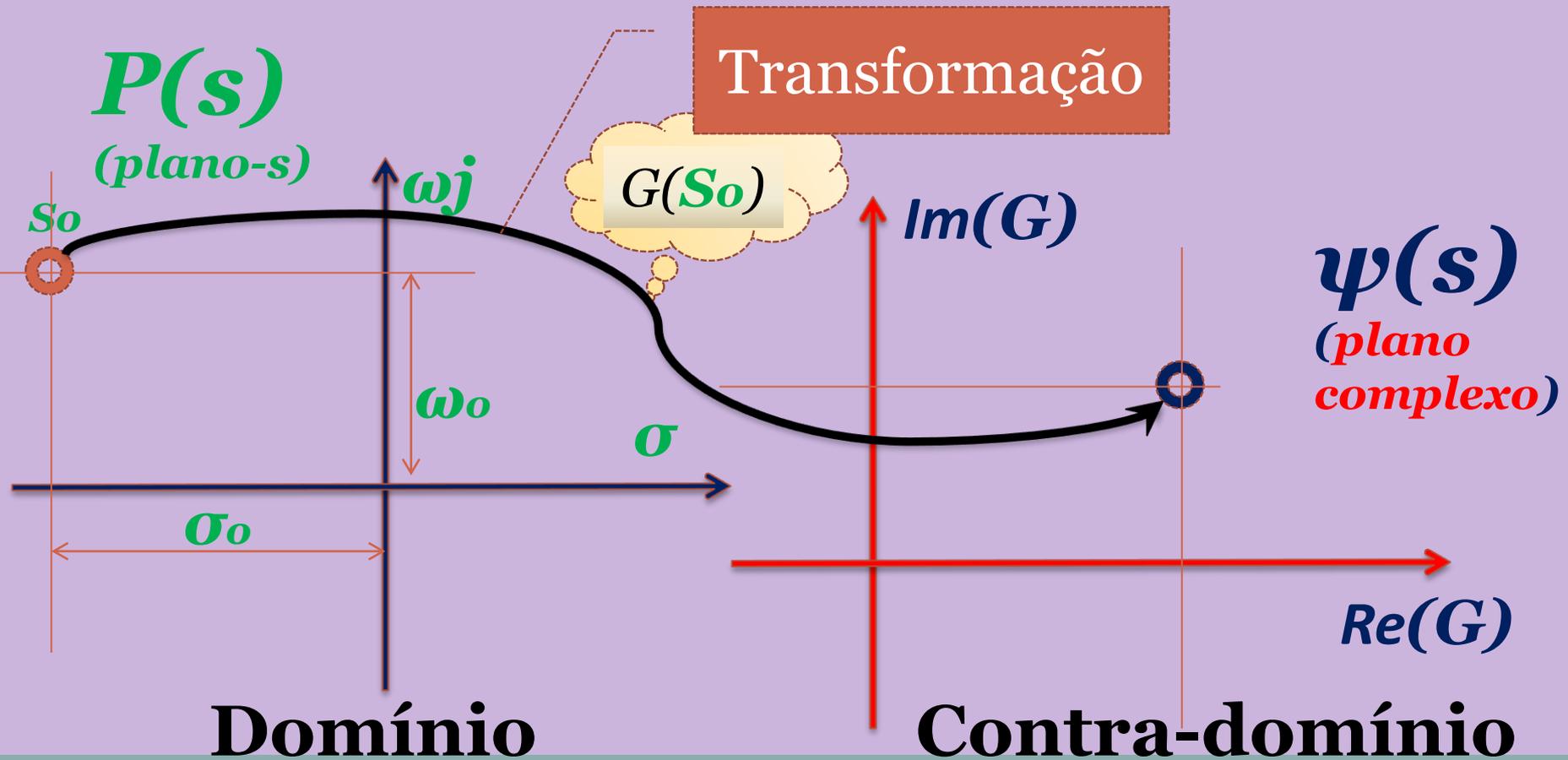
- A variável independente (frequência) s de Laplace é dada por: $s = \sigma + \omega j$



Funções Complexas

4

- Como $s = \sigma + \omega j$, para representar $G(s)$ são necessários dois planos:



Definições

5

a) A derivada de $G(s)$ no ponto s_0 é dada por:

$$\left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{G(s) - G(s_0)}{s - s_0}.$$

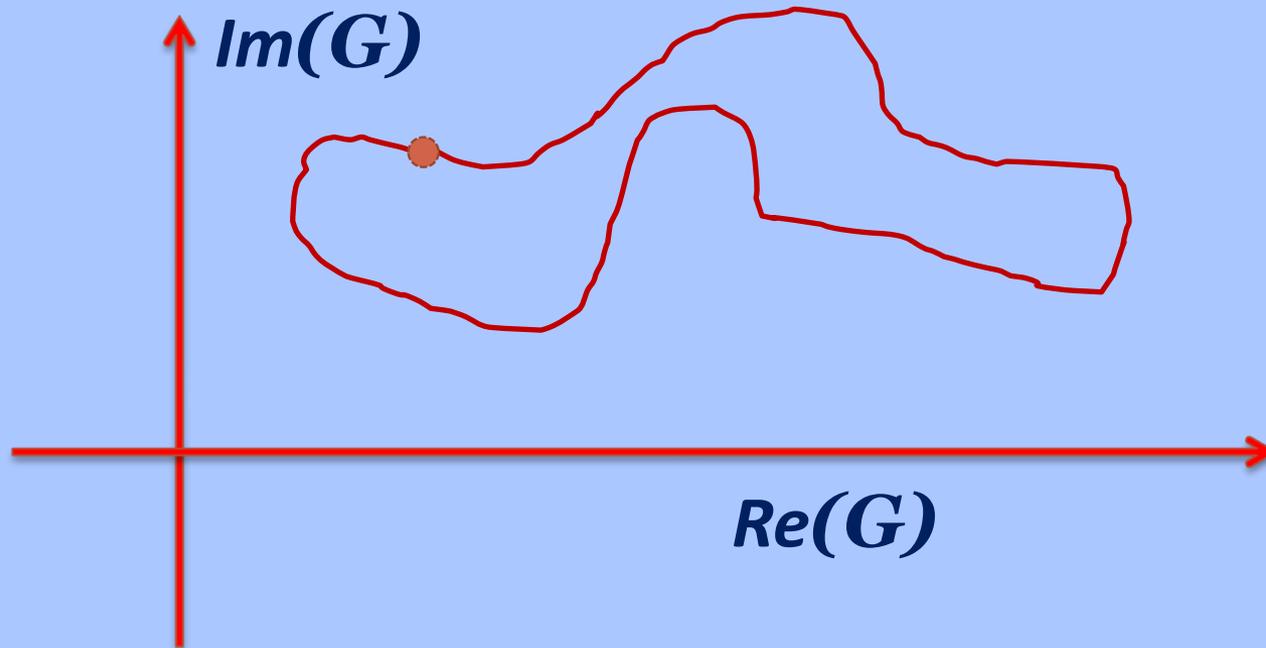
b) Se a derivada existe no interior de uma região do plano complexo, onde os extremos são finitos e definidos, $G(s)$ é dita *analítica* nesta região.

c) Pontos de $G(s)$ que não são analíticos, são chamados *pontos singulares* ou *singularidades* de $G(s)$. Todo polo de $G(s)$ é uma singularidade.

Definições

6

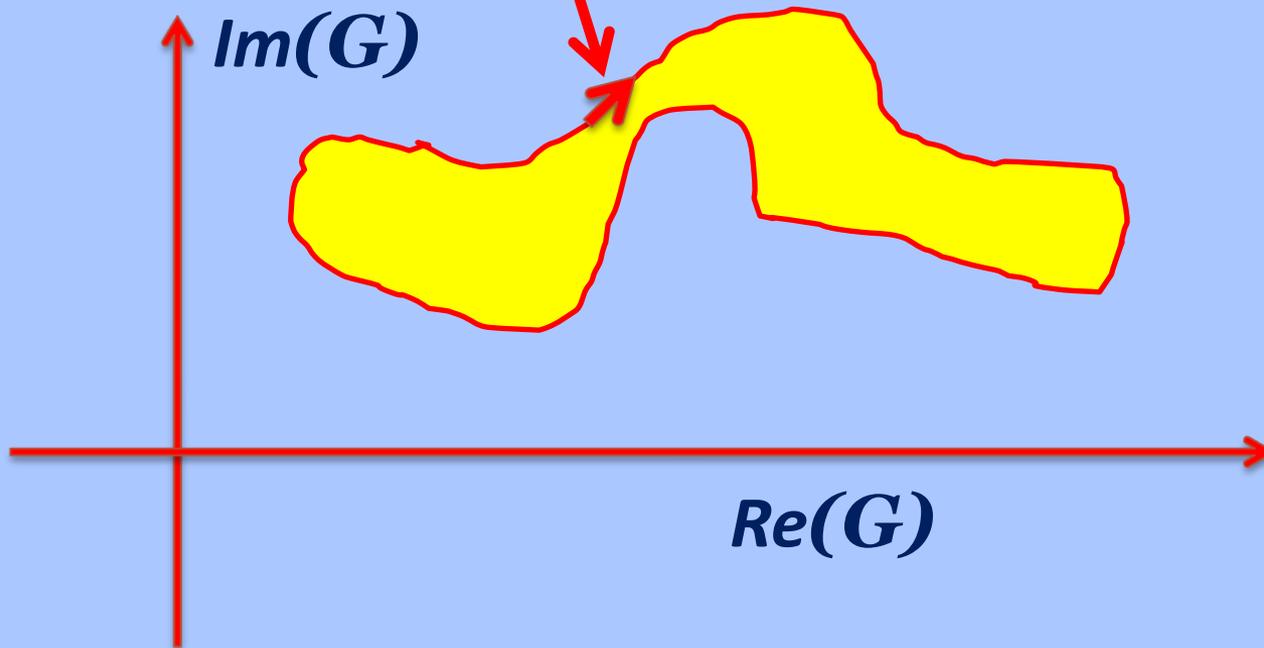
- d) Um curva fechada num **plano complexo** é uma curva contínua que começa e termina num mesmo ponto. Ex.: curva fechada no $\Psi(s)$



Definições

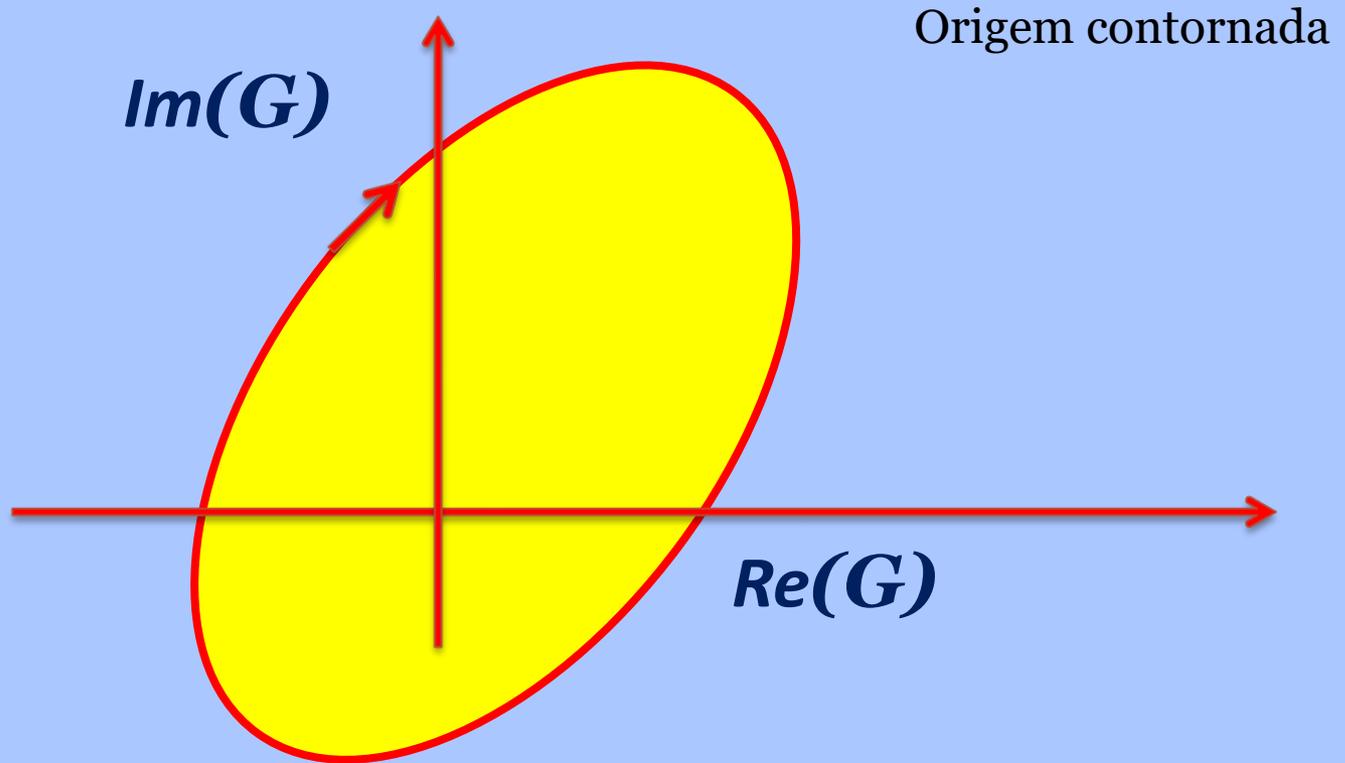
7

- e) Todos os pontos que ficam à ***direita*** de uma curva quando se anda no **sentido pré-estabelecido** são ditos ***contornados*** pela curva (pontos em amarelo).



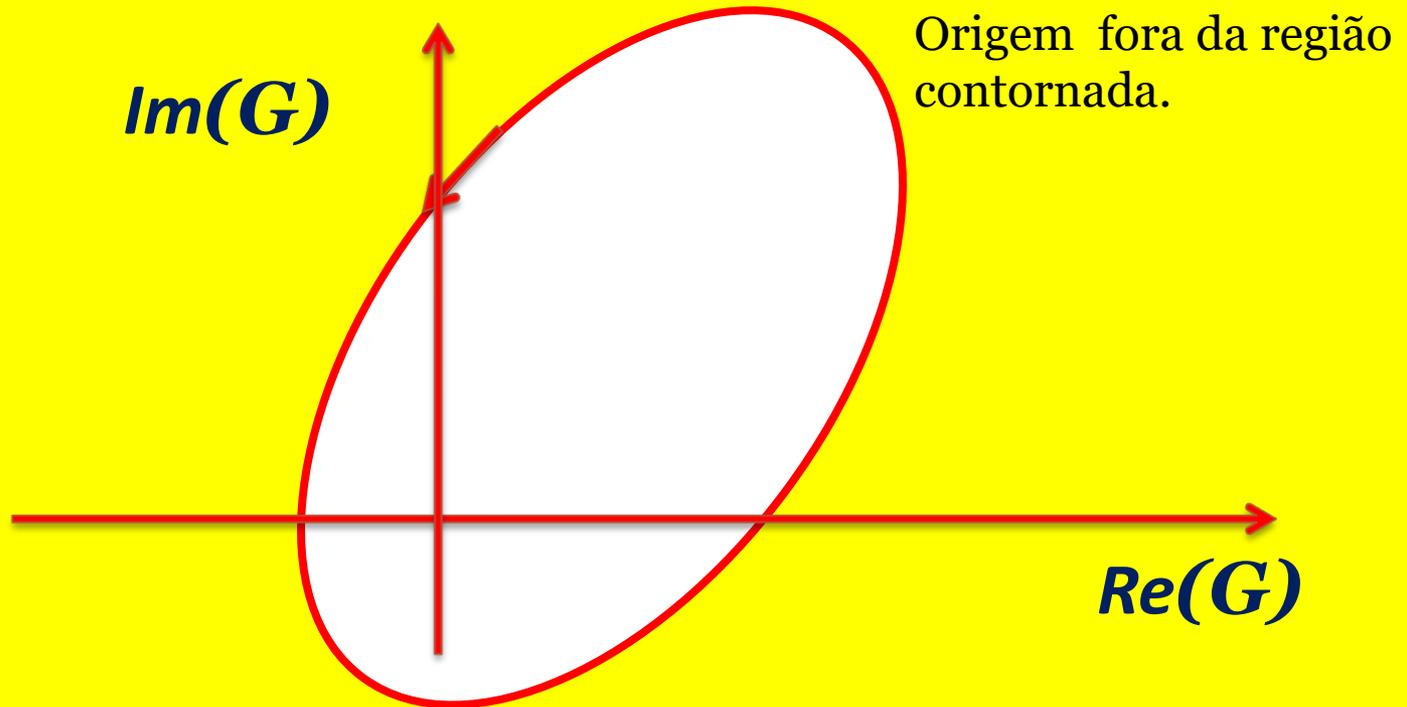
Definições

8



Definições

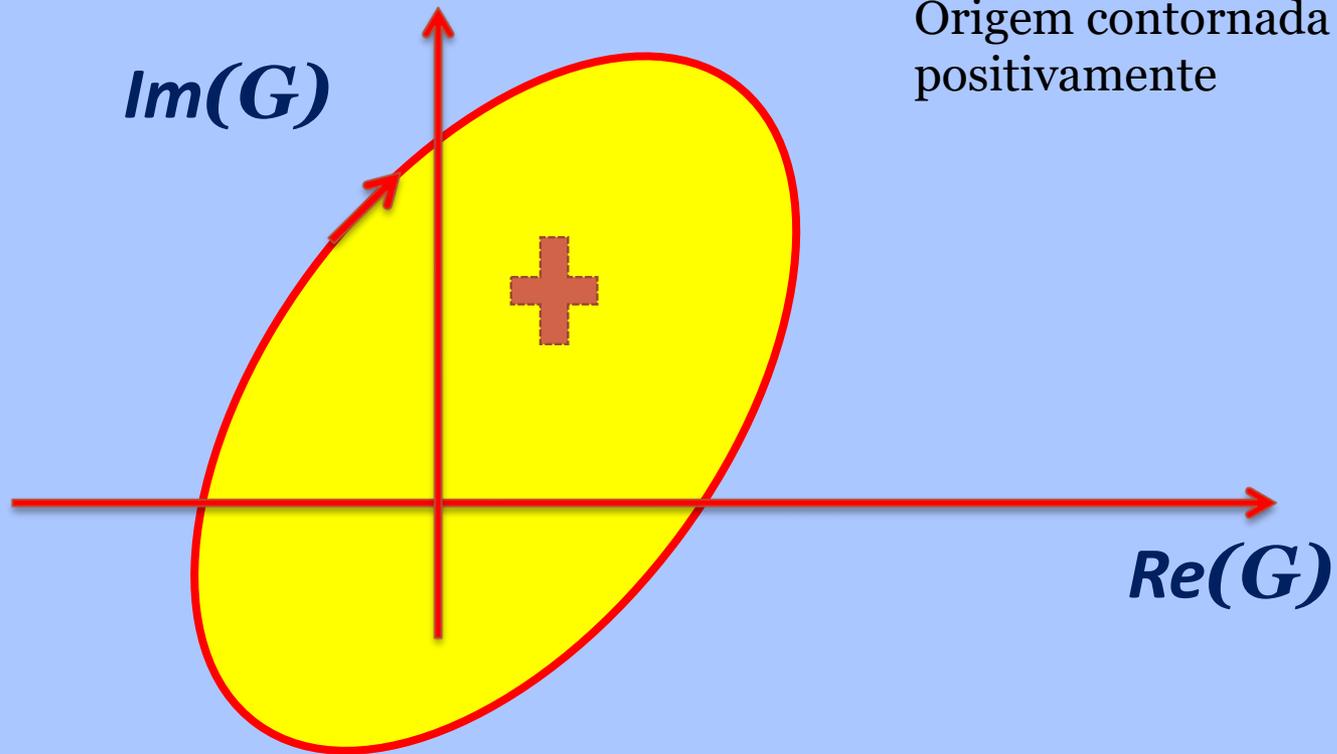
9



Definições

10

f) O sentido horário (SH) será considerado o sentido positivo

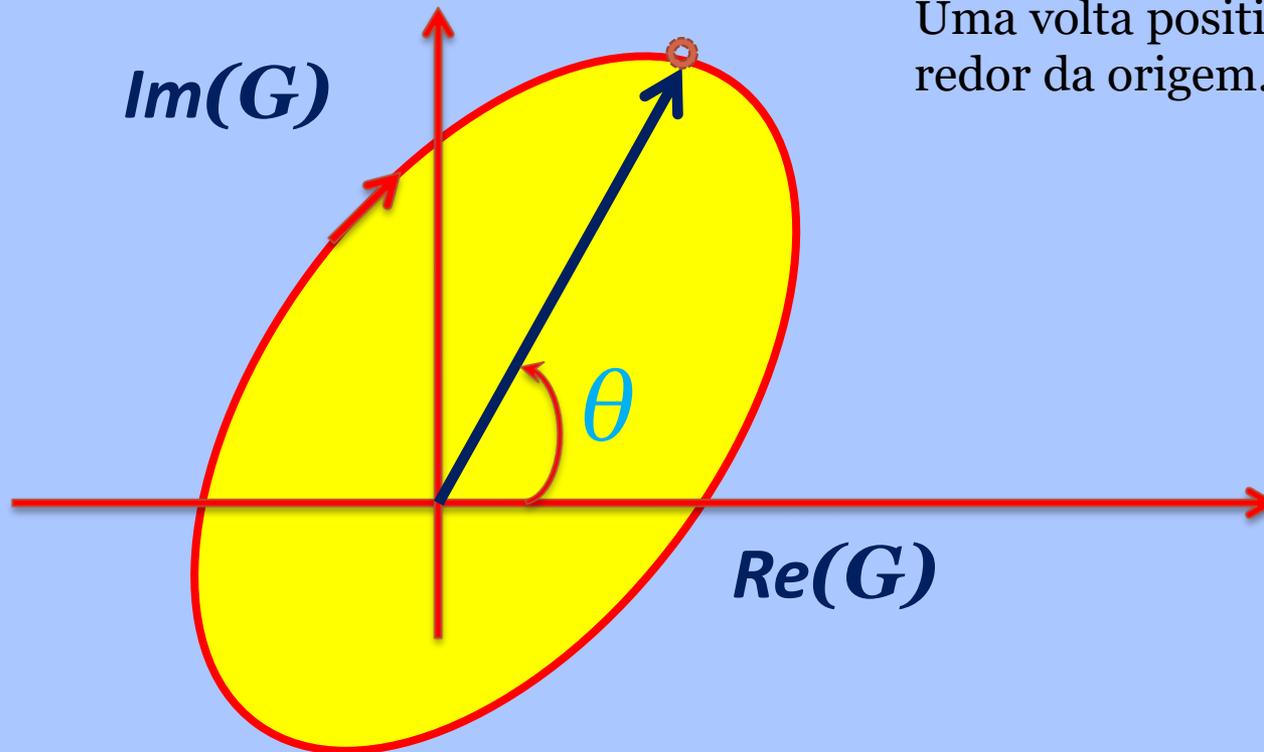


Origem contornada uma vez,
positivamente

Definições

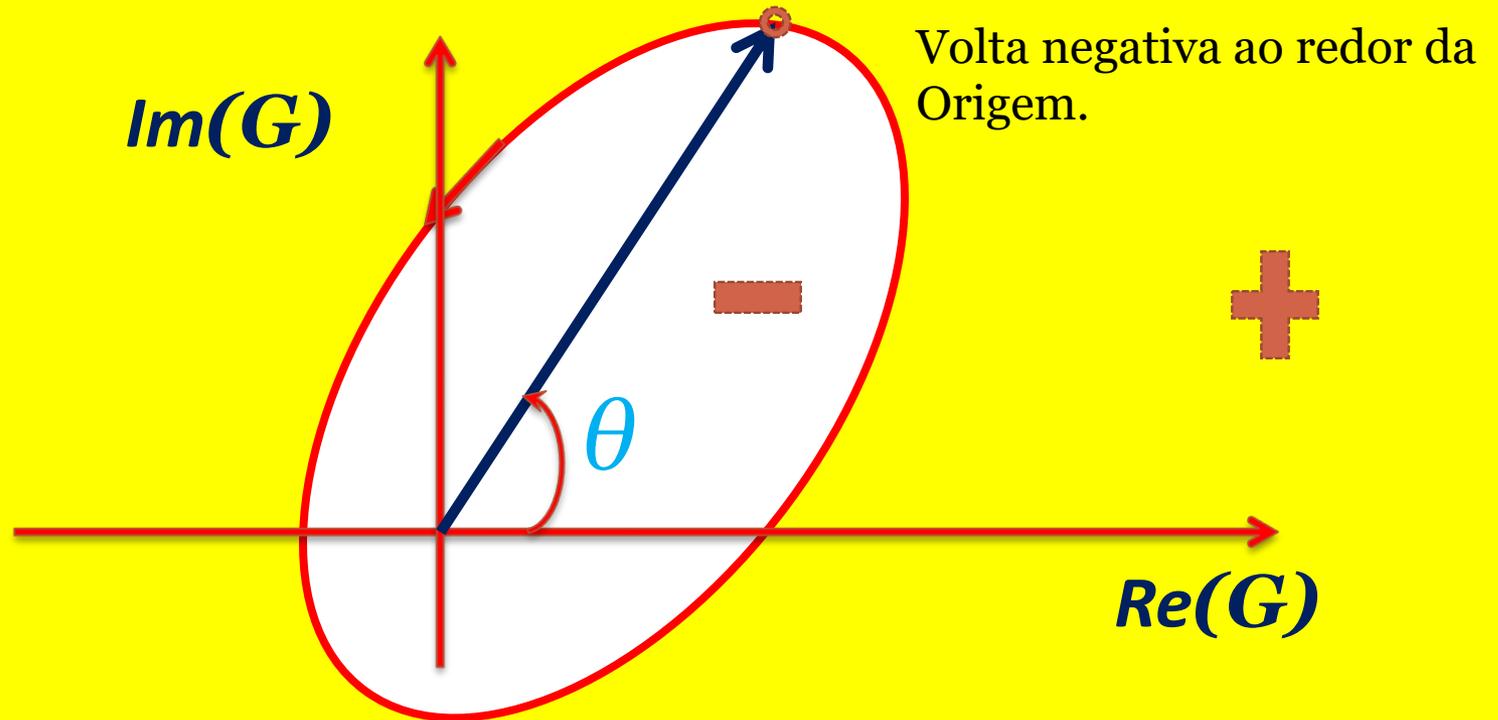
11

g) Uma curva fechada dá n vezes na origem positivamente quando a reta que liga a origem a um ponto da curva percorrer $n \times 360^\circ$ no sentido horário.



Definições

12

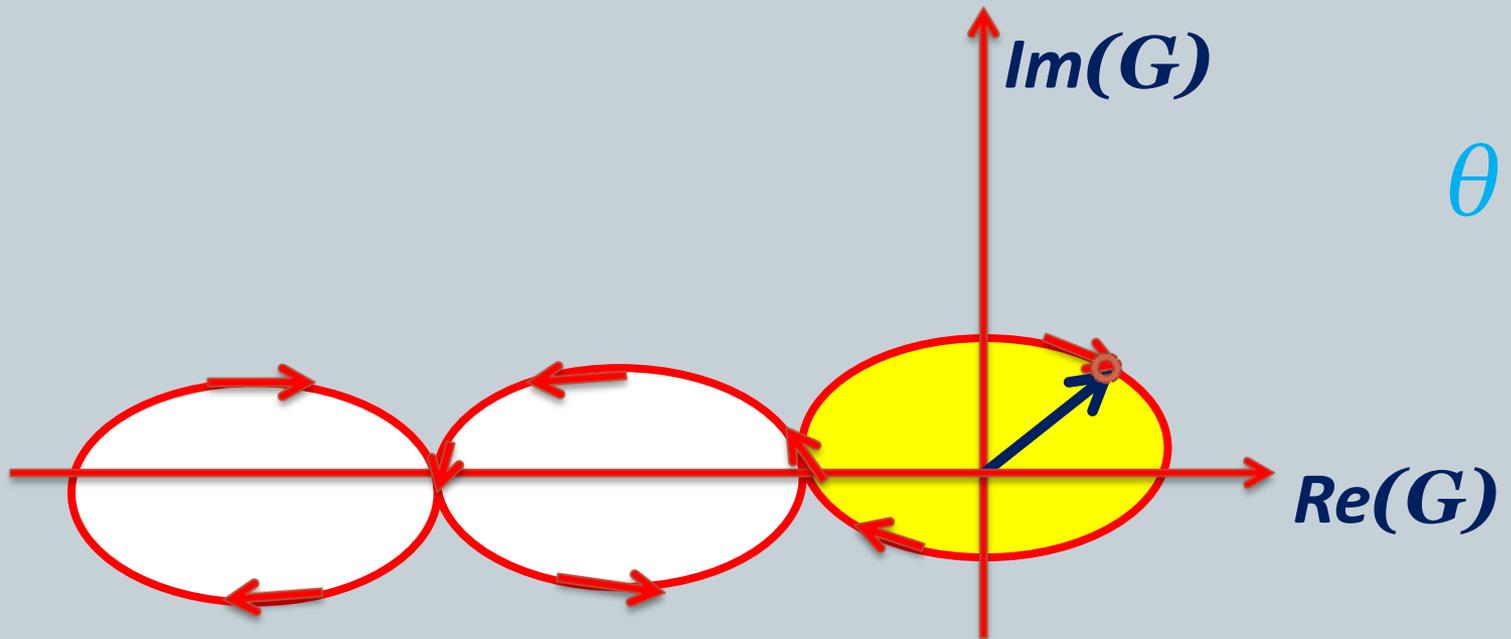


Definições

13

Voltas líquidas: $N_o = n_x SH - m_x SAH$

$N_o = +1$



Propriedades da Transformada $G(s)$

14

Para $G(s)$ analítica, a transformação é:

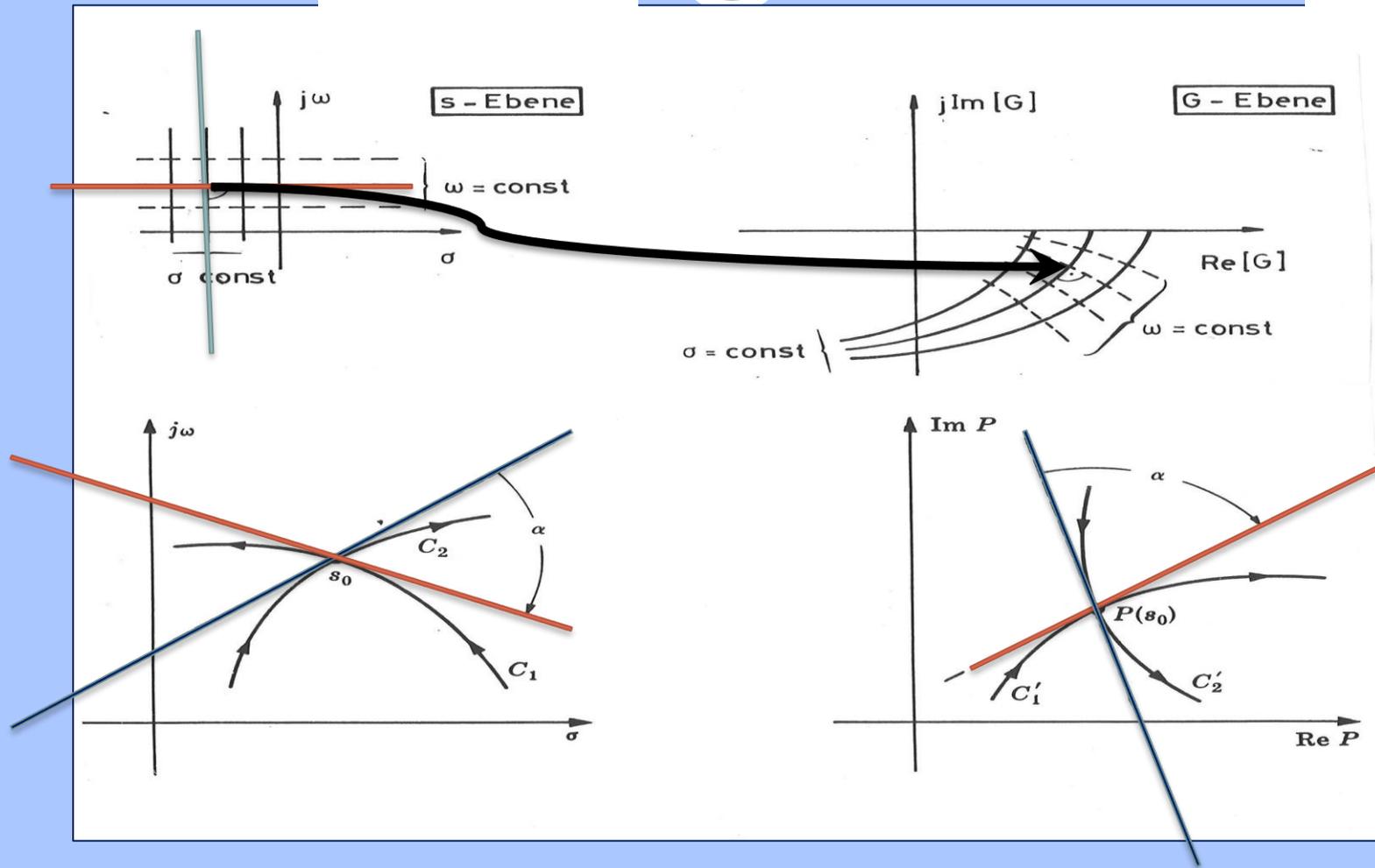
- Unívoca
- A transformada é conforme: ângulos e orientação relativas no plano- s são preservadas no plano complexo do contradomínio ($\psi(s)$).
- Transformada conforme \rightarrow trajetória fechada no plano- s \rightarrow trajetória fechada no plano $\psi(s)$.

Transformada conforme

$P(s)$

15

$\psi(s)$



Teorema de Cauchy

16

- Também conhecido como Princípio do Argumento

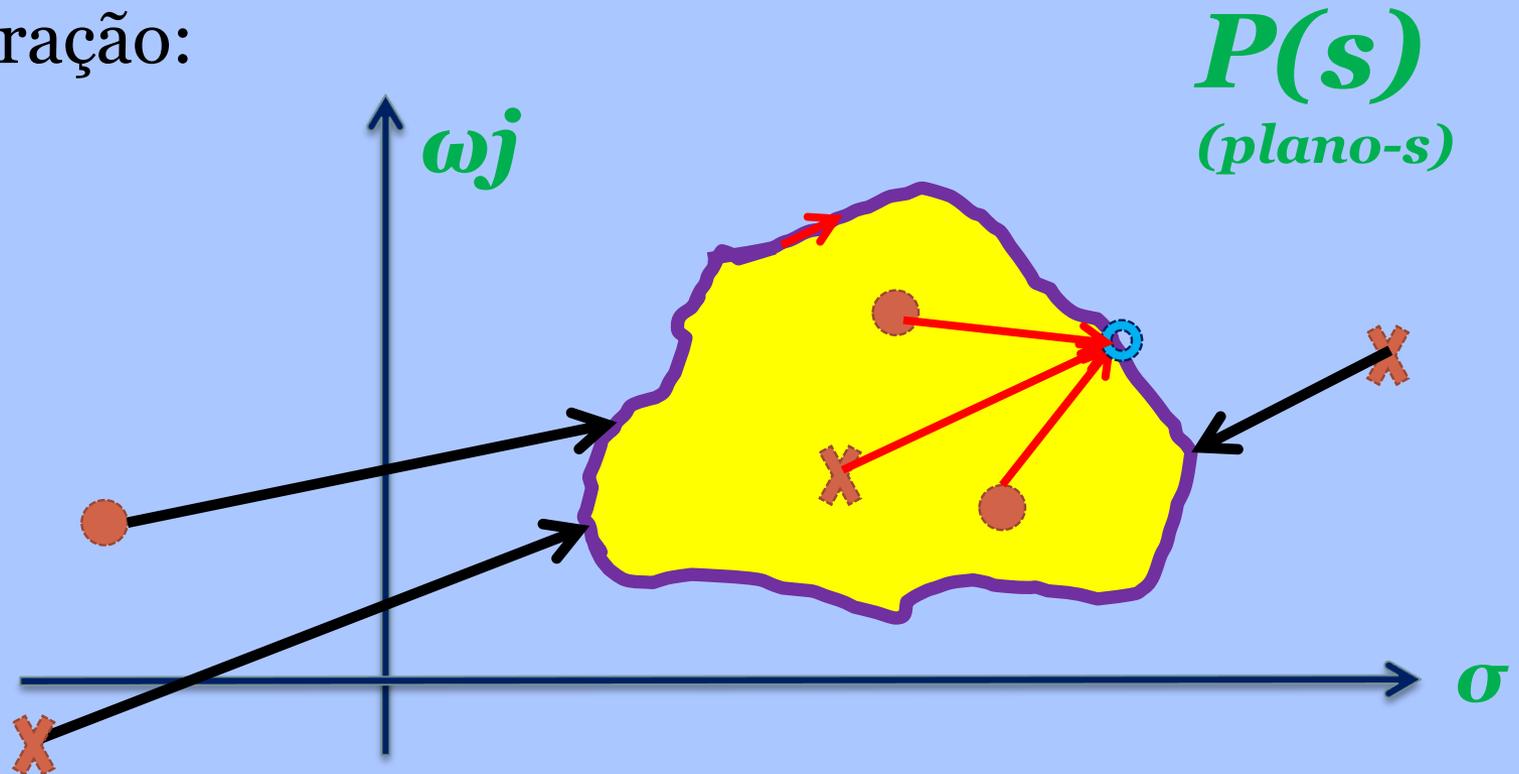
“ O número de voltas (N_o) num contorno fechado ao redor da origem do plano $\psi(s)$ é igual ao número de zeros (Z_o) menos o número de polos (P_o) de $G(s)$ que são contornados por uma curva fechada no plano- s :

$$N_o = Z_o - P_o. \quad ”$$

Teorema de Cauchy

17

- Ilustração:

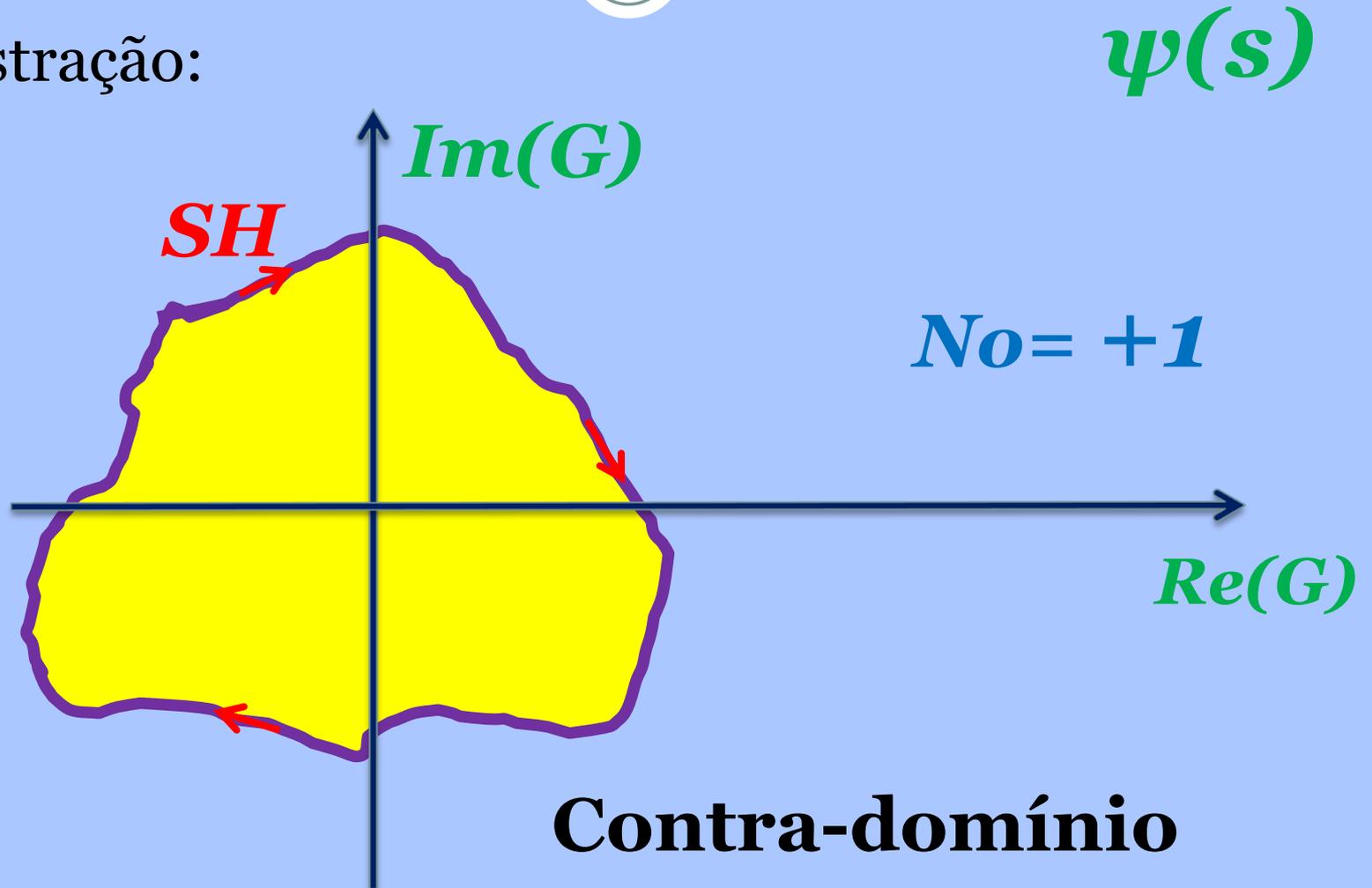


Domínio

Teorema de Cauchy

18

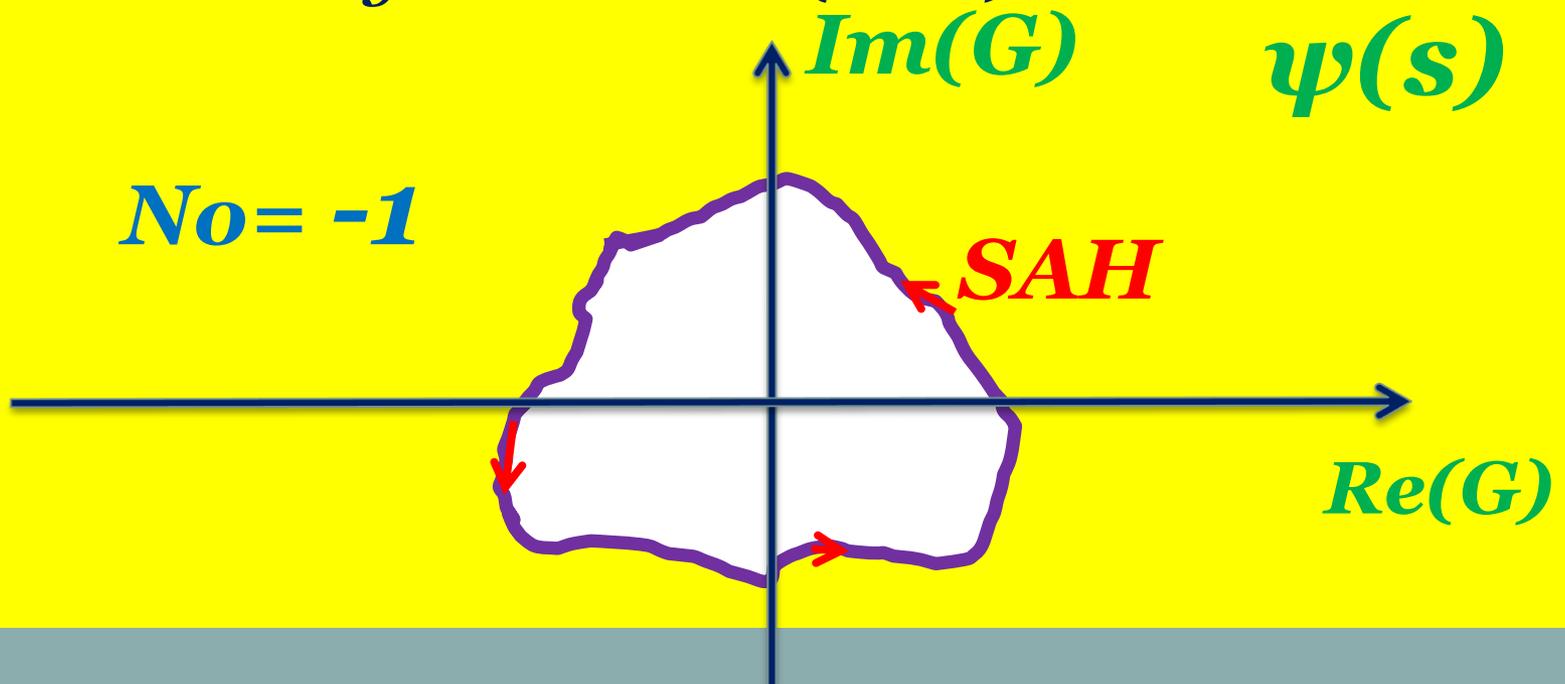
- Ilustração:



Teorema de Cauchy (cont.)

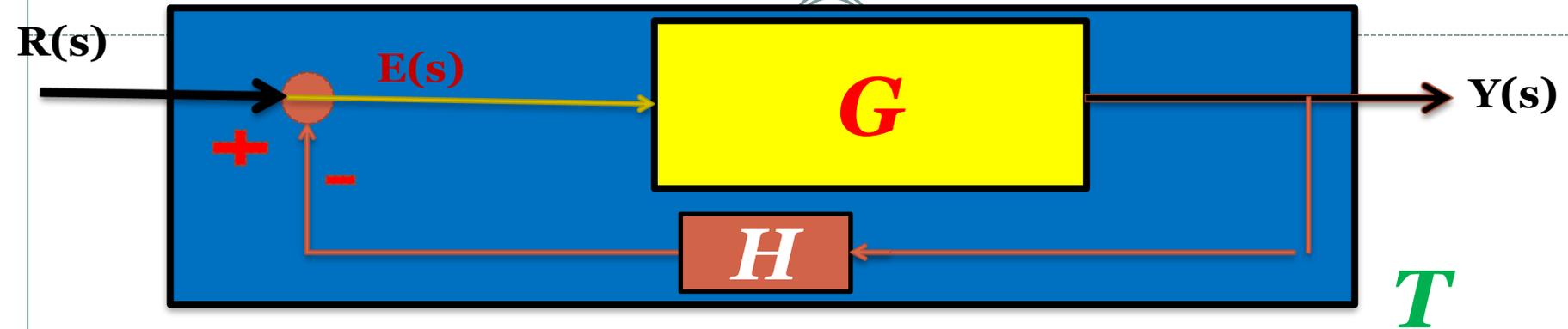
19

- Se a origem é contornada no sentido horário pela curva no plano $\psi(s)$, então $N_o > 0$, caso contrário $N_o \leq 0$, isto é, a origem não é contornada ou é contornada negativamente (SAH).



Critério de Estabilidade de Nyquist

20



$$\text{FTMA} : GH(s)$$

$$\text{FTMF} : T(s) = \frac{G}{1 + GH}$$

$$\Phi(s) = 1 + GH(s) = 0$$

obs : Polos de MF \equiv zeros de $\Phi(s)$

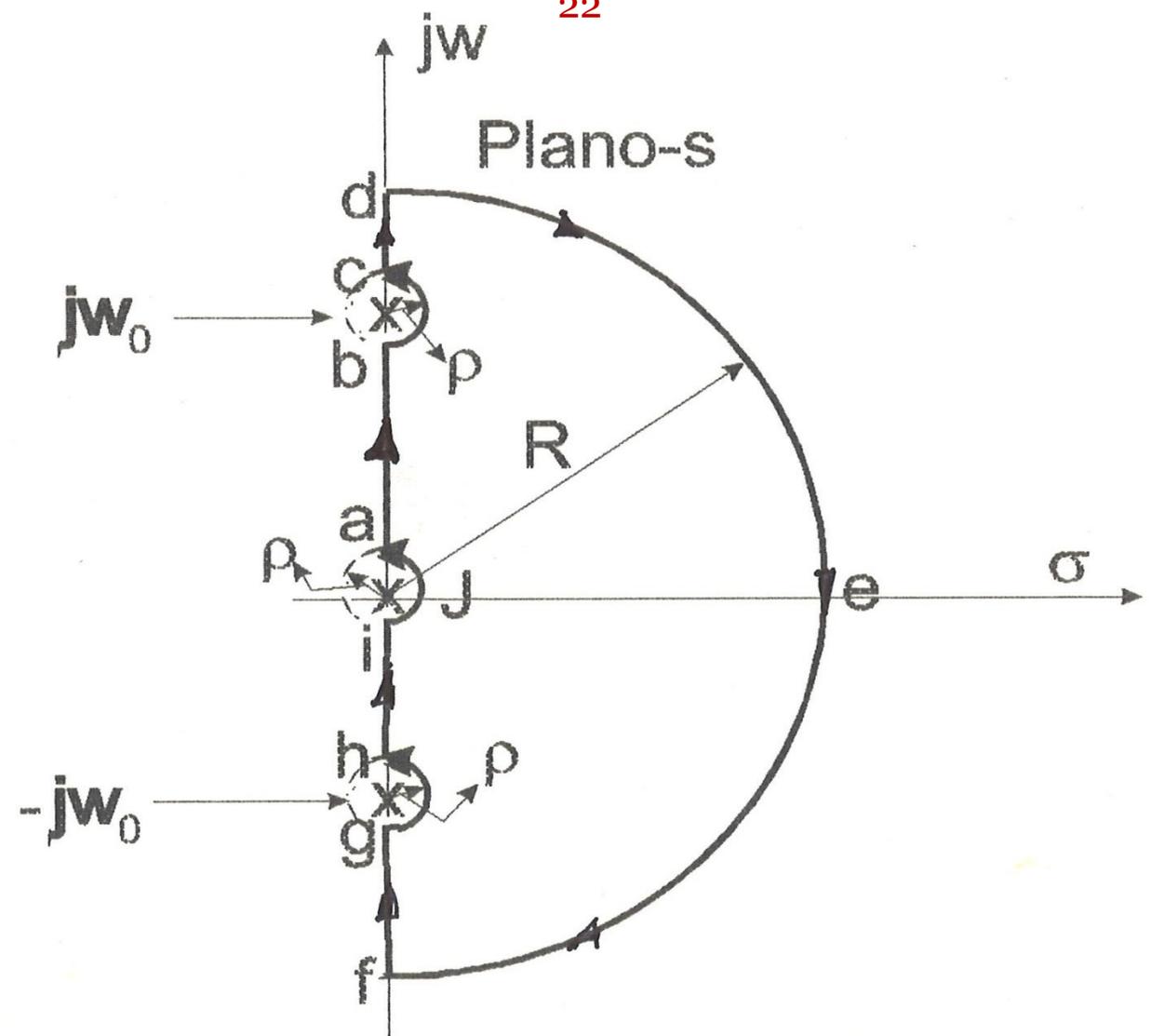
Critério de Estabilidade de Nyquist

21



- Para estabilidade em MF sabemos que os polos de MF, portanto os zeros de $\Phi(s)$, devem estar todos no semi-plano esquerdo do plano- s ($P(s)$), isto é, devem ter todos parte real negativa.
- Nyquist propôs um critério de estabilidade baseado no teorema do argumento de Cauchy e nos planos $P(s)$ e $\psi(s)$. Ele criou uma curva fechada englobando todo o semi-plano direito de $P(s)$ e usando a equação característica $\Phi(s)$ para criar a imagem em $\psi(s)$ pôde associar os zeros e polos contornados em $P(s)$ com os contornos da origem em $\psi(s)$. A curva fechada em $P(s)$ é conhecida como o ***Caminho de Nyquist***.

Caminho de Nyquist



Caminho de Nyquist

23

1. trecho ab: $s=jw$, $0 < w < w_o$

2. trecho bc :

$$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (jw_o + \rho e^{j\theta}), \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

3. trecho cd: $s=jw$, $w_o < w < \infty$

4. trecho def : $s = \lim_{R \rightarrow \infty} (Re^{j\theta}), \quad 90^\circ \leq \theta \leq -90^\circ$

5. trecho fg: $s=jw$, $-\infty < w < -w_o$

6. trecho gh:

$$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (-jw_o + \rho e^{j\theta}), \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

7. trecho hi: $s=jw$, $-w_o < w < 0$

8. trecho ija : $s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho e^{j\theta}), \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

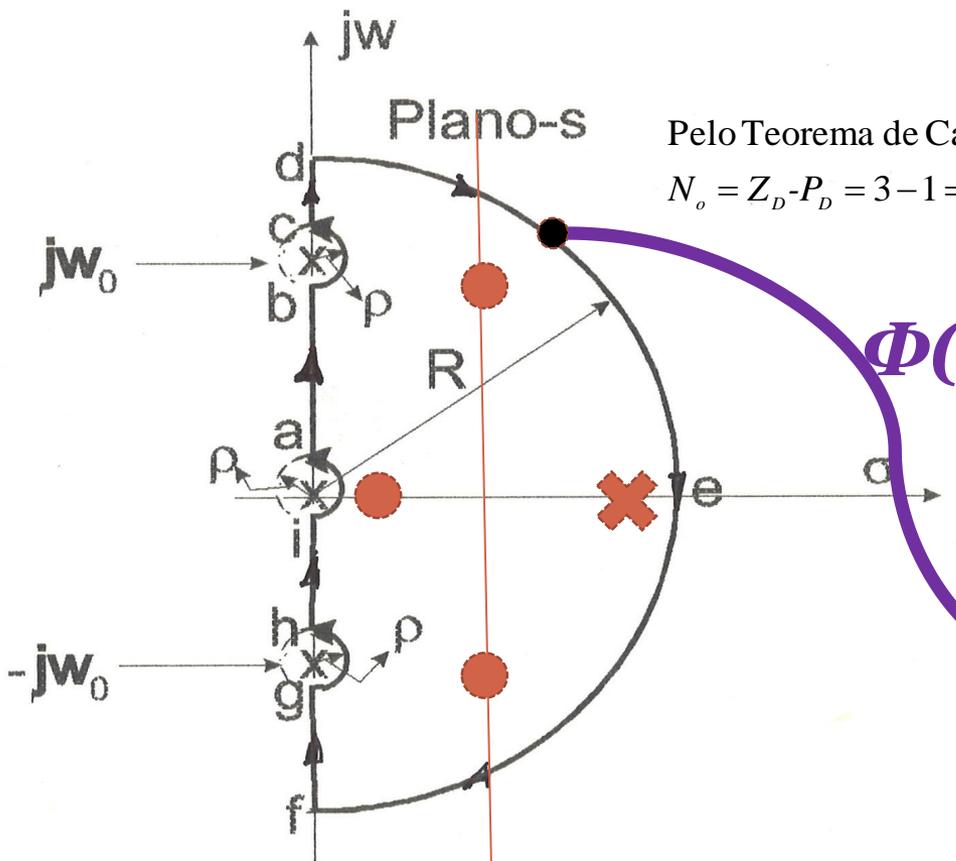
Caminho de Nyquist

24

- O Caminho de Nyquist é a curva fechada C no plano- s , que contorna todos os pontos no semi-plano direito. Se $G(s)$ tem polos no eixo imaginário ou na origem, a curva C contorna estes pontos com pequenas circunferências de raio $\rho \rightarrow 0$.
- O raio R de C tende para infinito: $R \rightarrow \infty$, de modo que a curva engloba todo o semi-plano direito do plano- s . Evidentemente, a curva C contornará todos os polos e zeros de $G(s)$ que estiverem no semiplano direito.

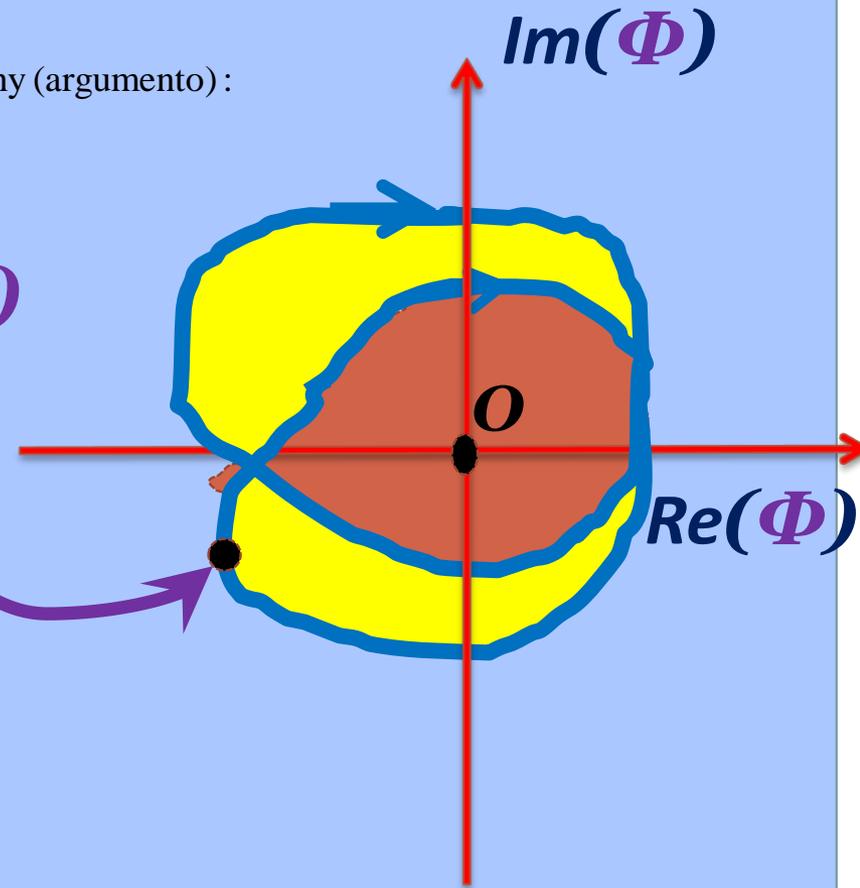
Critério de Estabilidade de Nyquist

25



Pelo Teorema de Cauchy (argumento):

$$N_o = Z_D - P_D = 3 - 1 = 2$$



Caminho de Nyquist

Diagrama de Nyquist

Critério de Estabilidade de Nyquist

26

$$\text{Cauchy : } N_o = Z_D - P_D$$

(Obs. : $Z_D = \text{zeros de } \Phi(s) \equiv \text{polos de MF}$)

Nyquist : para *estabilidade* $Z_D = 0$

$$\Rightarrow N_o = -P_D$$

isto é, para *estabilidade*, o número de voltas ao redor da origem no sentido anti - horário (SAH) do plano - $\Psi(s)$ deve ser igual ao número de polos instáveis da equação característica $\Phi(s)$.

Obs : O sistema do slide anterior seria instável em MF (voltas positivas ao redor da origem)!

Critério de Estabilidade de Nyquist

27

$$1) \Phi(s) = 1 + GH(s) = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D + KN}{D} = 0$$

\Rightarrow polos de $GH(s) \equiv$ polos de $\Phi(s) \rightarrow D(s) = 0$

(polos de MA \equiv polos da equação característica).

$$2) \Phi(s) = 1 + GH(s) = 0 \Rightarrow GH(s) = -1.$$

Ao invés de olharmos as voltas de $\Phi(s)$ ao redor da origem do plano - $\Psi(s)$ podemos olhar as voltas de $GH(s)$ ao redor do ponto -1 do plano - $\Psi(s)$.

Critério de Estabilidade de Nyquist

28

Considerando: $GH(s) = -1$

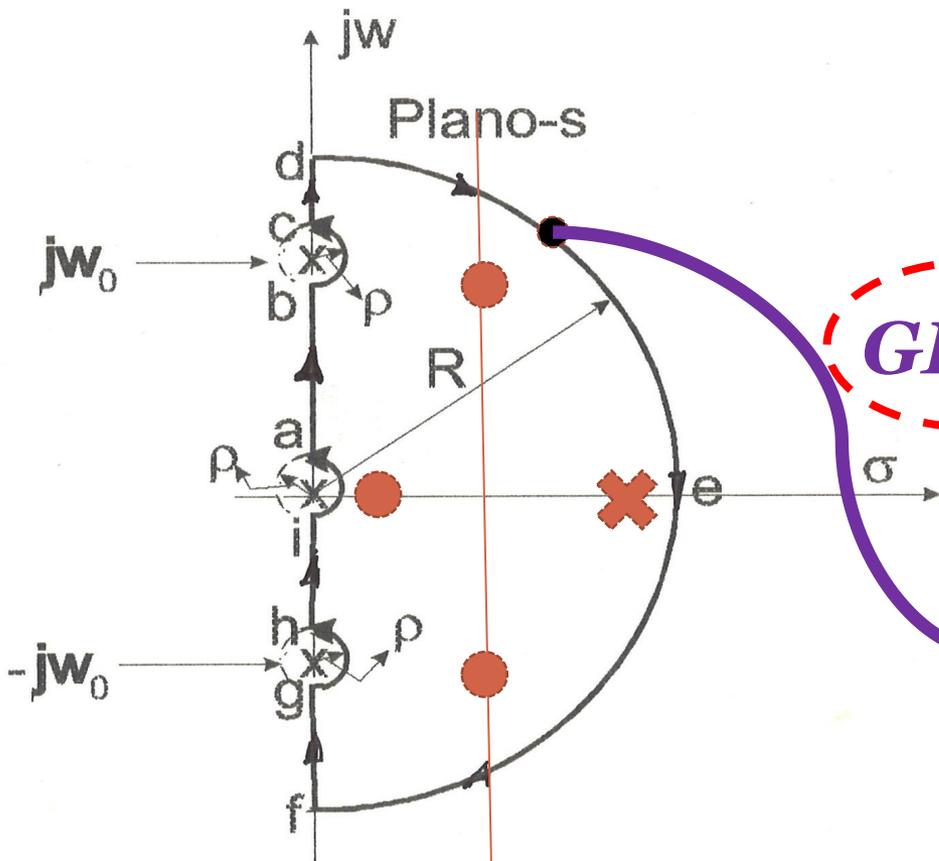
“Um sistema de controle em malha fechada é estável se e somente se:

$$N_1 \leq -P_{GH}$$

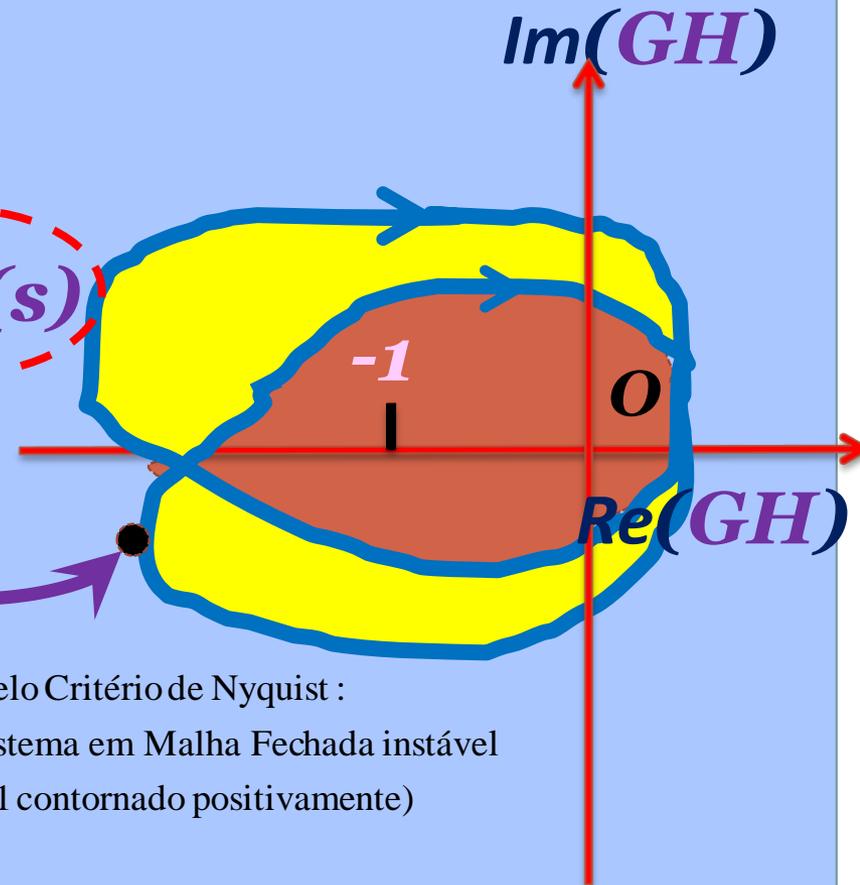
isto é, o número de voltas ao redor do ponto -1 no plano complexo $\psi(s)$ seja nulo ou negativo (sentido anti-horário) e igual ao número de polos instáveis da função de transferência de malha aberta ($GH(s)$)”

Critério de Estabilidade de Nyquist

29



$GH(s)$



Pelo Critério de Nyquist :
sistema em Malha Fechada instável
(-1 contornado positivamente)

Caminho de Nyquist

Diagrama de Nyquist

Critério de Estabilidade de Nyquist

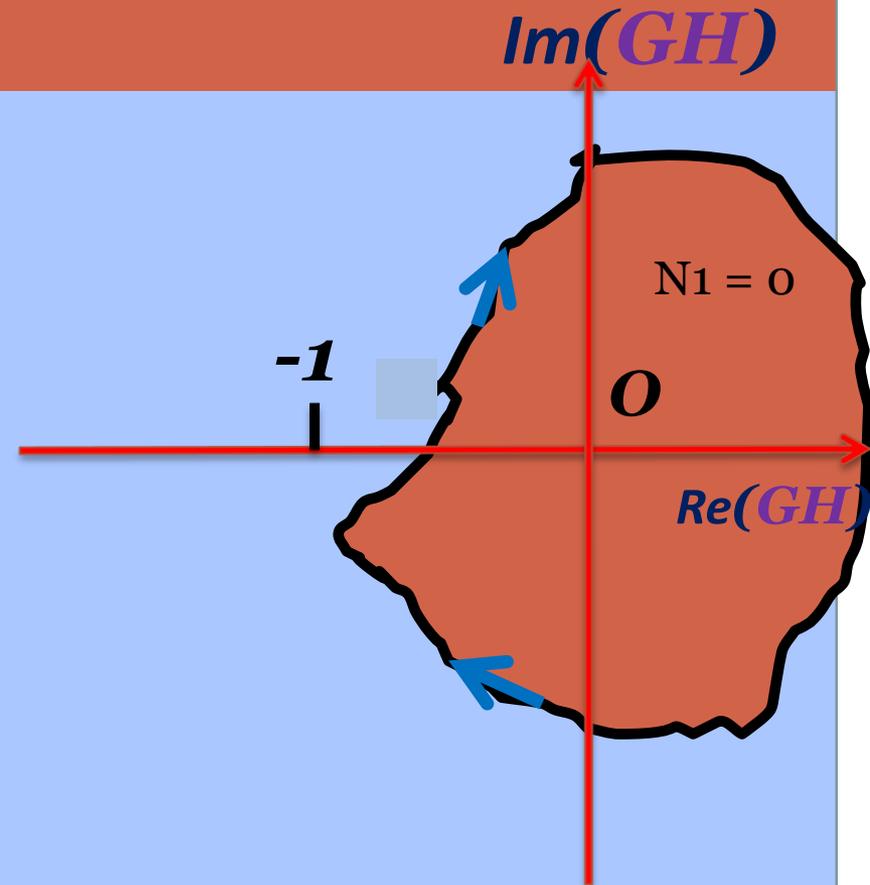
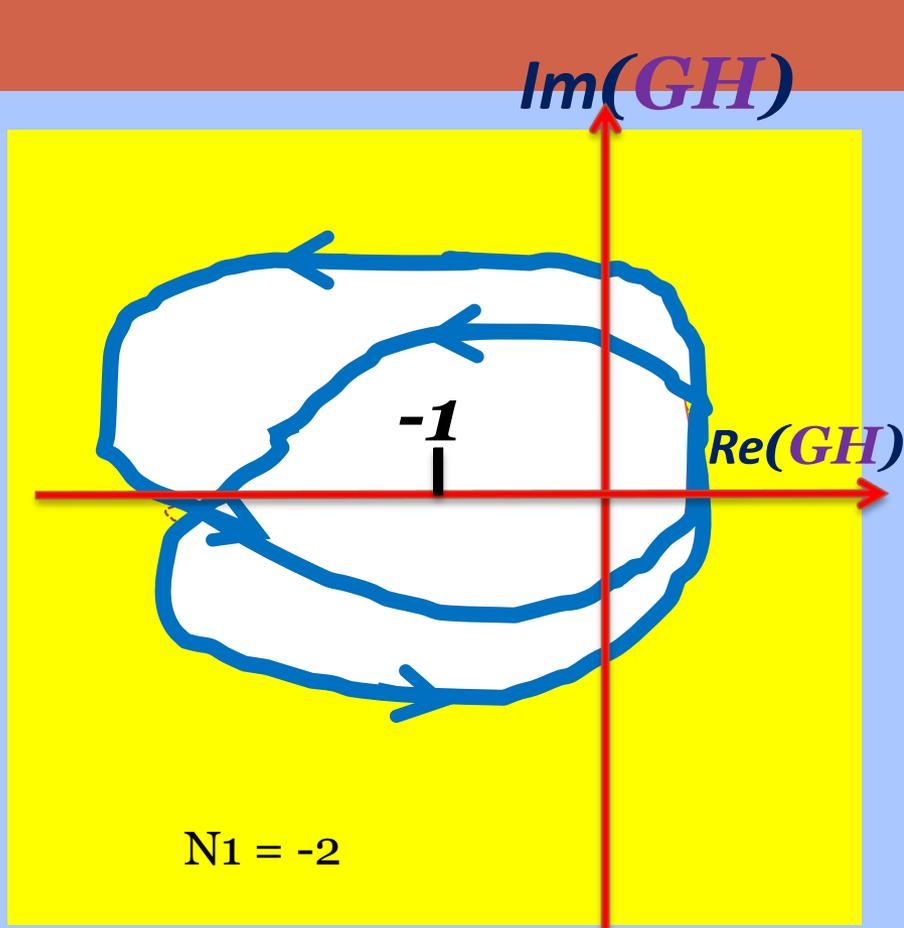
30

- Se $N_1 > 0$ (ponto -1 contornado positivamente) → SISTEMA INSTÁVEL.
- Se a FTMA ($GH(s)$) for instável, isto é, possuir P_{GH} polos instáveis no semiplano direito de $P(s)$ e $\lim_{s \rightarrow \infty} GH(s) = \text{cte}$ (sistema físico), então, para estabilidade em Malha Fechada, o diagrama de Nyquist deve contornar o ponto -1 no plano $\psi(s)$ P_{GH} vezes no sentido anti-horário.
- Se $P_{GH} = 0$ (FTMA estável) o sistema em MF é estável se e somente se $N_1 = 0$ (isto é, -1 não é contornado em $\psi(s)$).

Critério de Estabilidade de Nyquist

Quando $N_1 \leq 0$, o ponto -1 não é contornado positivamente

31



Diagramas polares e Diagramas de Nyquist

32

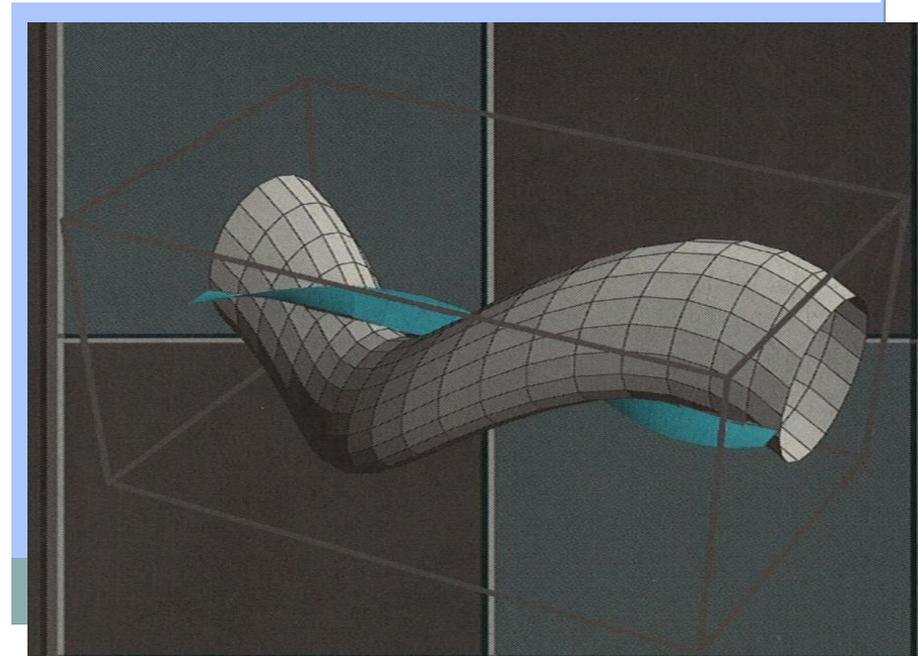
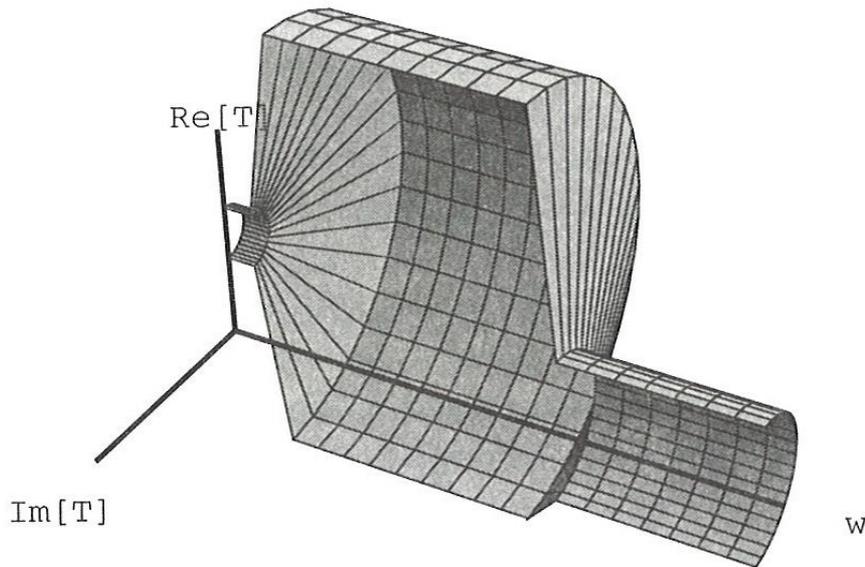
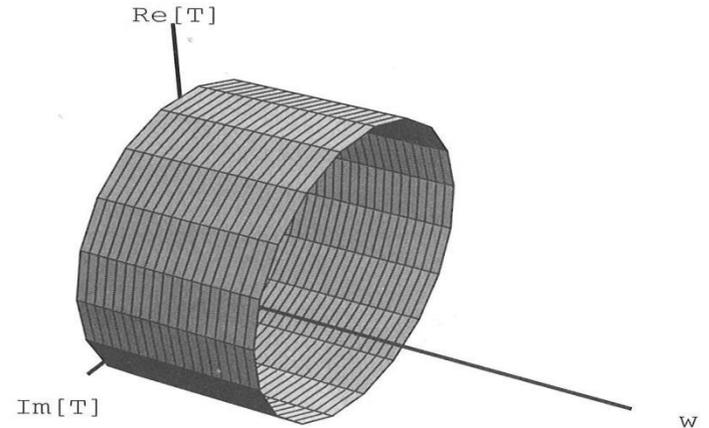
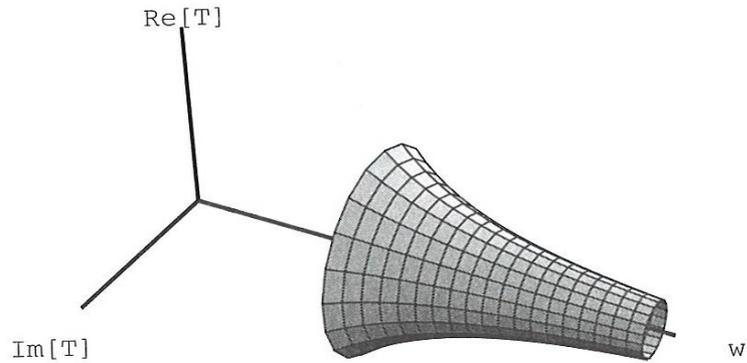
- $G(s)$ com $s = \sigma + \omega j$.

No caso especial em que $\sigma = 0$, $G(\omega j)$ é a função de transferência senoidal. O plano- s torna-se a reta do eixo imaginário. $G(\omega j)$ pode ser descrita no contra-domínio em função de uma única variável, a frequência ω . Com o auxílio da reta ωj do plano- s , constroem-se os diagramas polares no plano $\psi(s)$.

- Usando $s = \sigma + \omega j$ constroem-se os diagramas de Nyquist, que são todas curvas fechadas em $\psi(s)$.
- Os 'softwares' como Matlab ou Scilab constroem apenas os diagramas polares. Quando eles forem abertos deverão ser fechados 'manualmente', através de métodos analíticos ou gráficos.

Funções Complexas: ex. 3D

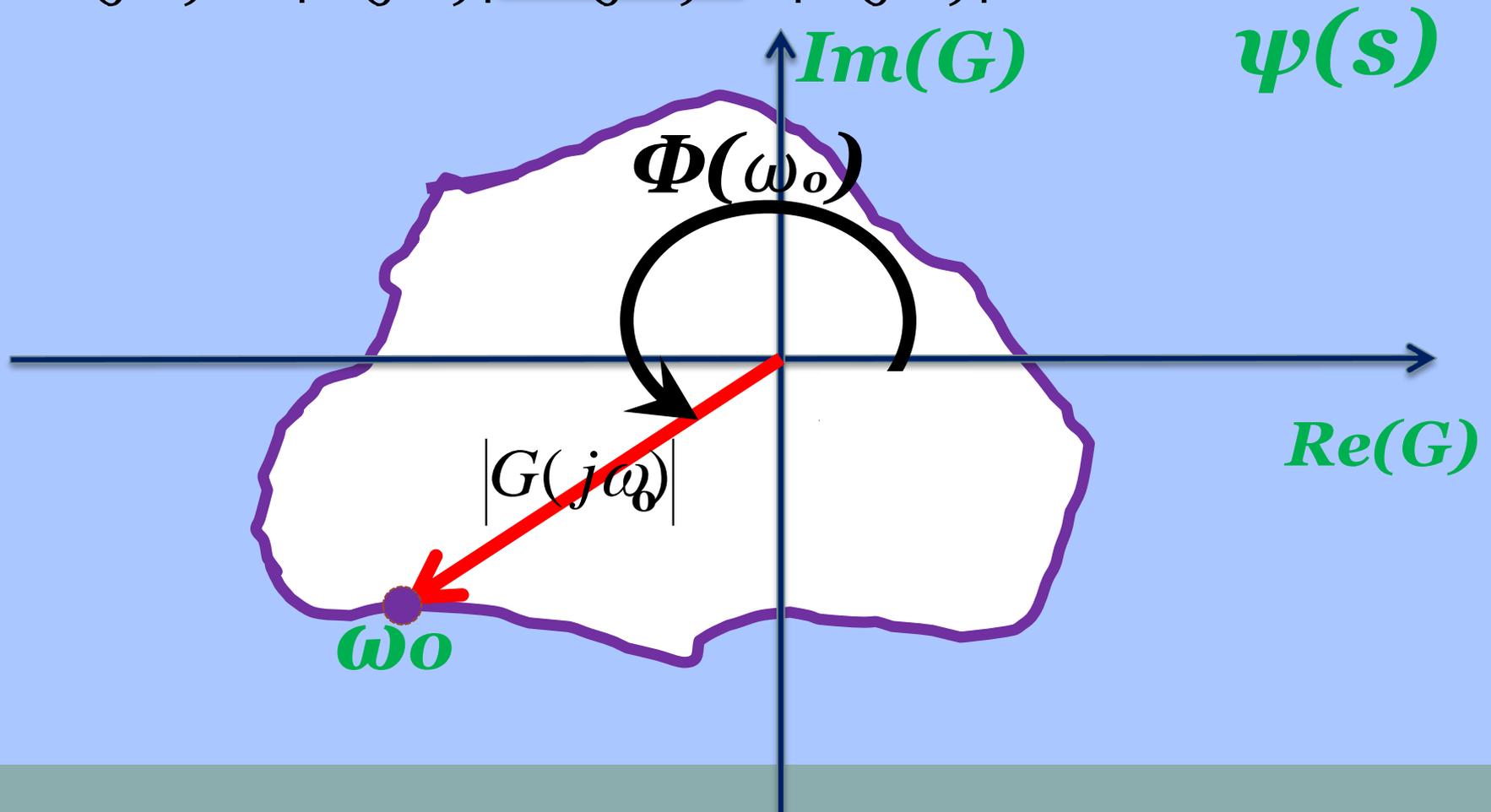
33



Diagramas polares

34

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\Phi}$$



Diagramas polares

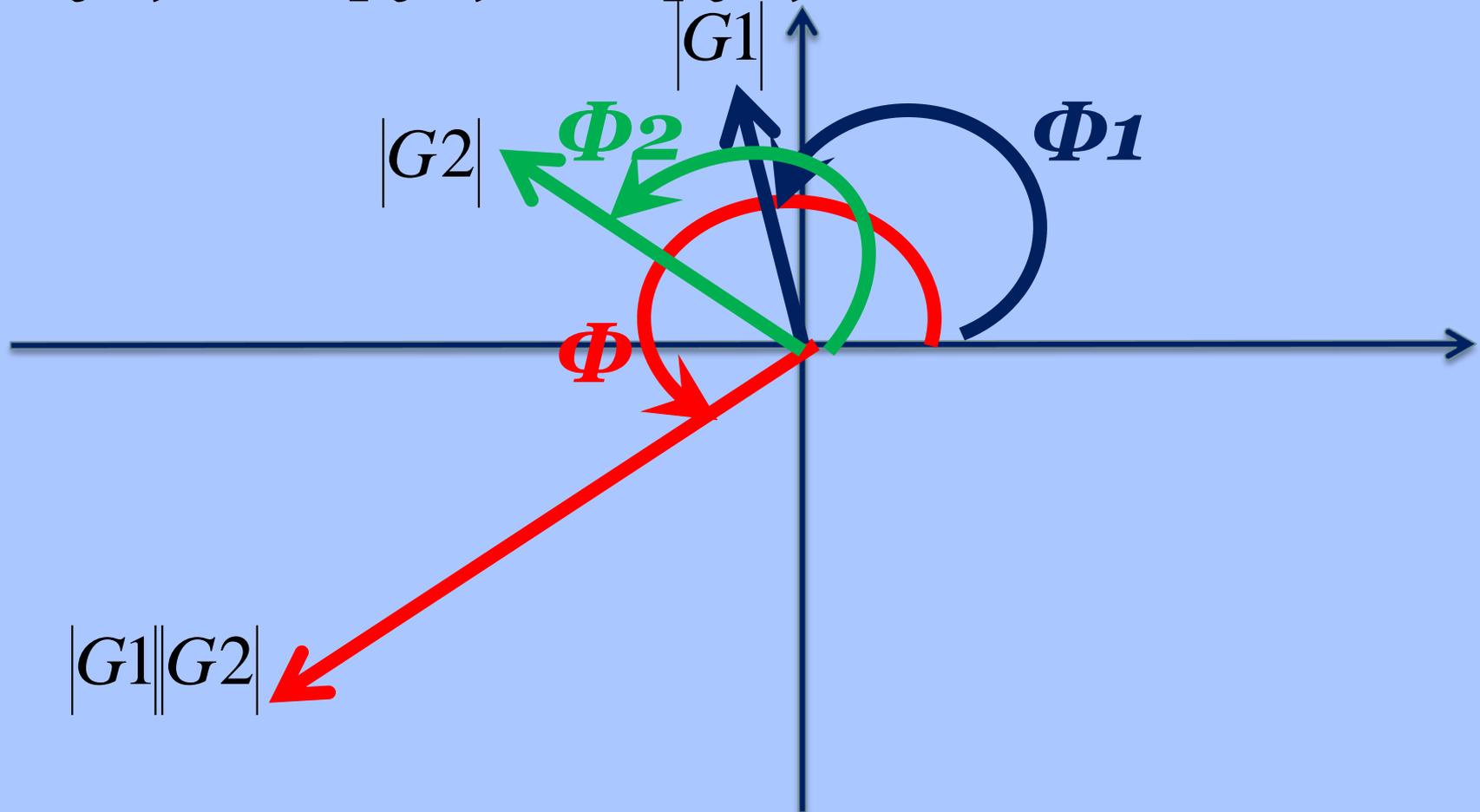
35

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = e^{j\Phi} = e^{j(\Phi_1 + \Phi_2)}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$



FT senoidal na forma de Bode:

Função de transferência com polos e zeros reais:

36

Seja :

$$G_1(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)} \rightarrow FT \text{ senoidal} \rightarrow$$

$$\rightarrow G_1(j\omega) = \frac{K(j\omega + z_1)(j\omega + z_2)}{(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)(j\omega + p_3)}$$

Forma de Bode :

$$G_1(j\omega) = \frac{K|z_1| \left(\frac{j\omega}{|z_1|} + 1 \right) |z_2| \left(\frac{j\omega}{|z_2|} + 1 \right)}{|p_1| \left(\frac{j\omega}{|p_1|} + 1 \right) |p_2| \left(\frac{j\omega}{|p_2|} + 1 \right) |p_3| \left(\frac{j\omega}{|p_3|} + 1 \right)}$$

FT senoidal na forma de Bode:

Função de transferência com polos e zeros reais:

37

$$G_1(j\omega) = \frac{K|z_1 z_2| \left(j\omega / |z_1| + 1 \right) \left(j\omega / |z_2| + 1 \right)}{|p_1 p_2 p_3| \left(j\omega / |p_1| + 1 \right) \left(j\omega / |p_2| + 1 \right) \left(j\omega / |p_3| + 1 \right)}$$

Seja: $K_B = \frac{K|z_1 z_2|}{|p_1 p_2 p_3|} \rightarrow$ *cte* de Bode.

$$G_1(j\omega) = \frac{K_B \left(j\omega / |z_1| + 1 \right) \left(j\omega / |z_2| + 1 \right)}{\left(j\omega / |p_1| + 1 \right) \left(j\omega / |p_2| + 1 \right) \left(j\omega / |p_3| + 1 \right)}$$

FT senoidal na forma de Bode:

Função com par de polos (ou zeros) complexos conjugados:

→ Polos : 38

$$G_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

FT senoidal na Forma de Bode :

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j\right]}$$

→ Zeros :

$$G_3(j\omega) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j\right]}{1}$$

FT senoidal na forma de Bode

Função de transferência genérica:

39

$$G(j\omega) = \frac{K_B \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{j\omega}{z_i}\right)}{(j\omega)^{\pm m} \prod_{p=1}^q \left(1 + \frac{j\omega}{p_p}\right) \prod_{k=1}^n \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)^2 + 2\zeta \frac{\omega j}{\omega_{n_k}}\right]^{\pm 1}}$$

obs : $m \in \mathcal{N}$; $\mathcal{N} = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$K_B \equiv \text{ganho de Bode} = K \frac{\prod_{i=1}^r |z_i|}{\prod_{p=1}^q |p_p|} \in \mathfrak{R}$$

Obs: em geral não se tem polos ou zeros complexos repetidos.

Diagramas polares e Nyquist: Formas Gerais

40

- a) Sistemas do *tipo zero*: 1^a e 2^a Ordem e ordem superior:
Diagramas polares fechados

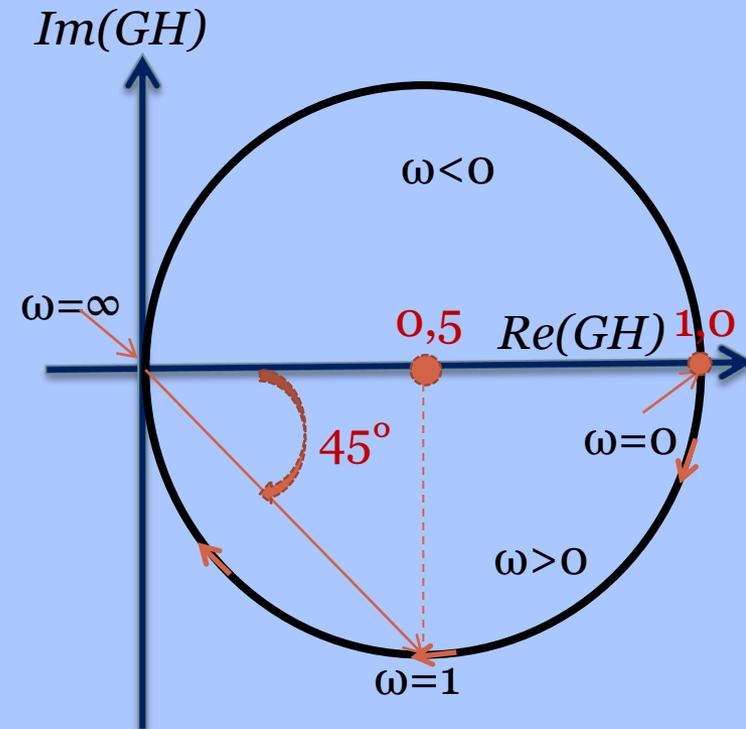
a.1) 1^a Ord: $GH(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow GH(j\omega) = \frac{1}{1+j(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega)^2}} \angle -\tan^{-1} \omega$

- Pontos notáveis:

○ $\omega = 0 \rightarrow GH(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$

○ $\omega = 1 \rightarrow GH(j\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ$

○ $\omega = \infty \rightarrow GH(j\omega) = 0 \angle -90^\circ$

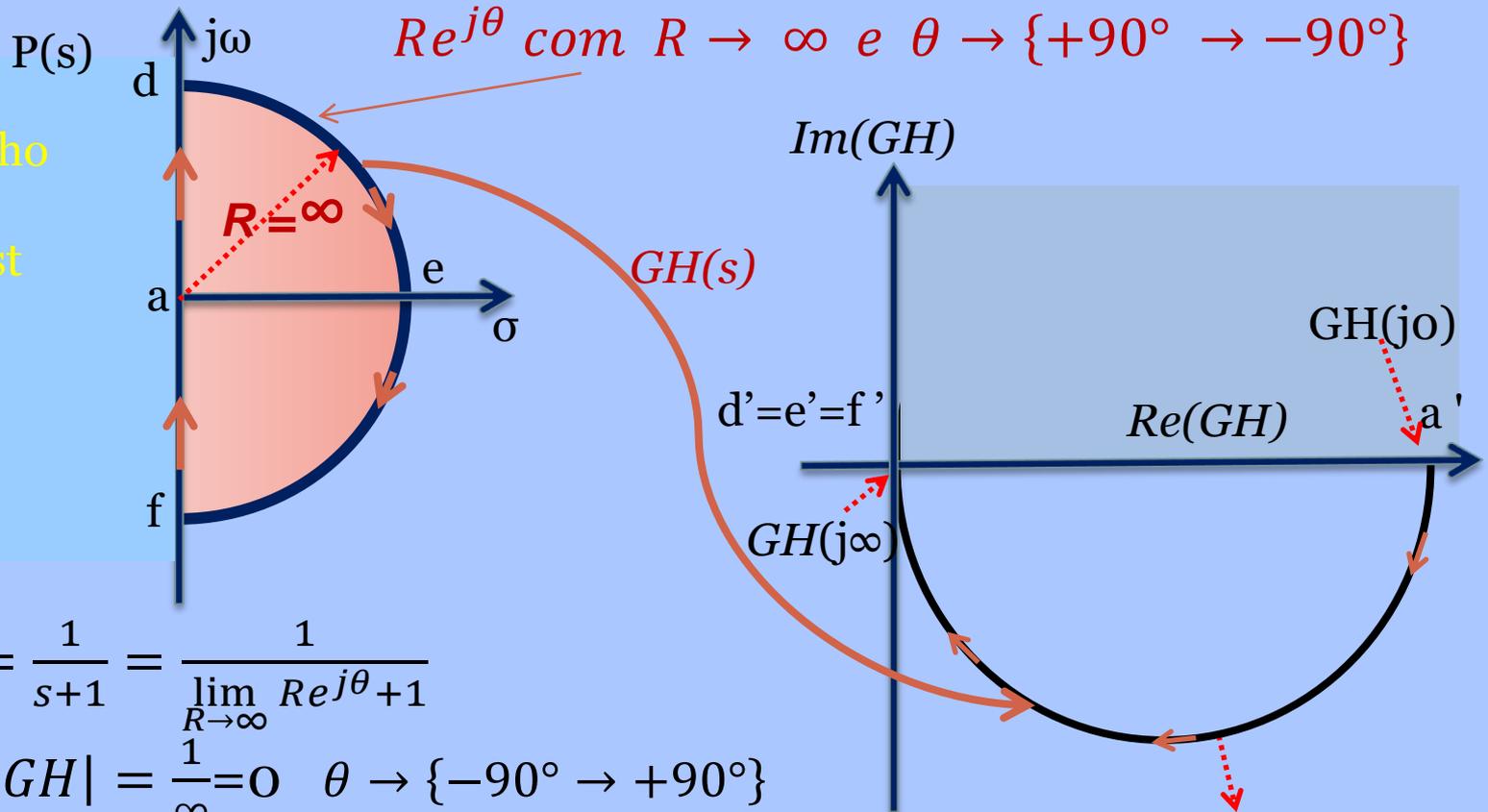


Sistemas do tipo zero: 1ª e 2ª Ordem

41

Ou usando a curva C

Caminho De Nyquist



$$GH(s) = \frac{1}{s+1} = \frac{1}{\lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta} + 1}$$

$$d, e, f \rightarrow |GH| = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \theta \rightarrow \{-90^\circ \rightarrow +90^\circ\}$$

$$a \rightarrow GH(j0) = 1 \rightarrow |GH| = 1 \quad \theta = 0^\circ$$

Mapeamento do eixo Imaginário positivo

Diagramas polares e Nyquist: Formas Gerais

42

- a.2) Sistemas do tipo zero de 2ª Ordem e superior:
Diagramas polares fechados

$$GH(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}$$

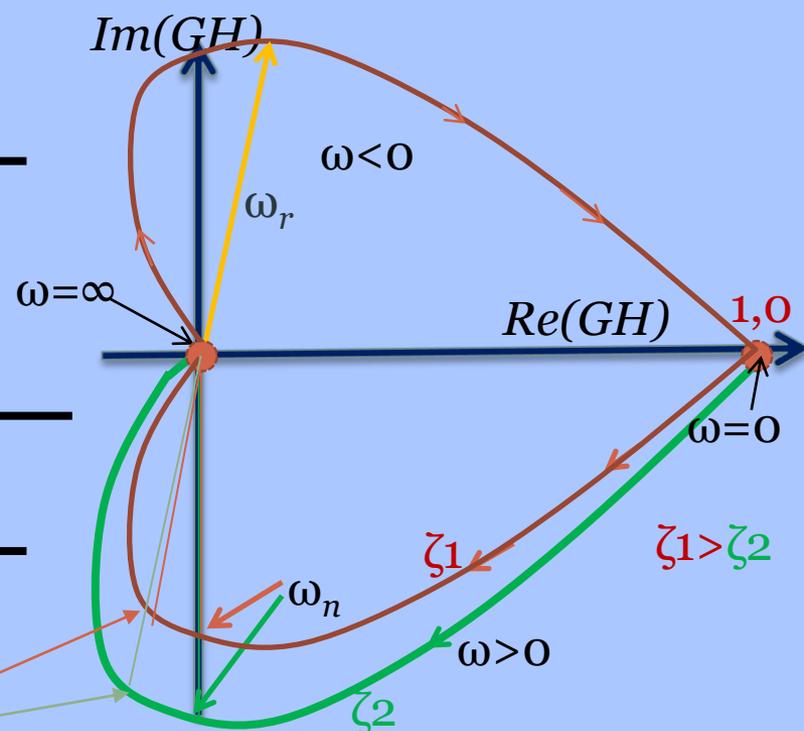
- Pontos notáveis:

- $\omega = 0 \rightarrow GH(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$

-

- $\omega = \omega_n \rightarrow GH(j\omega) = \frac{1}{2\zeta} \angle -90^\circ$

- $\omega = \infty \rightarrow GH(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$

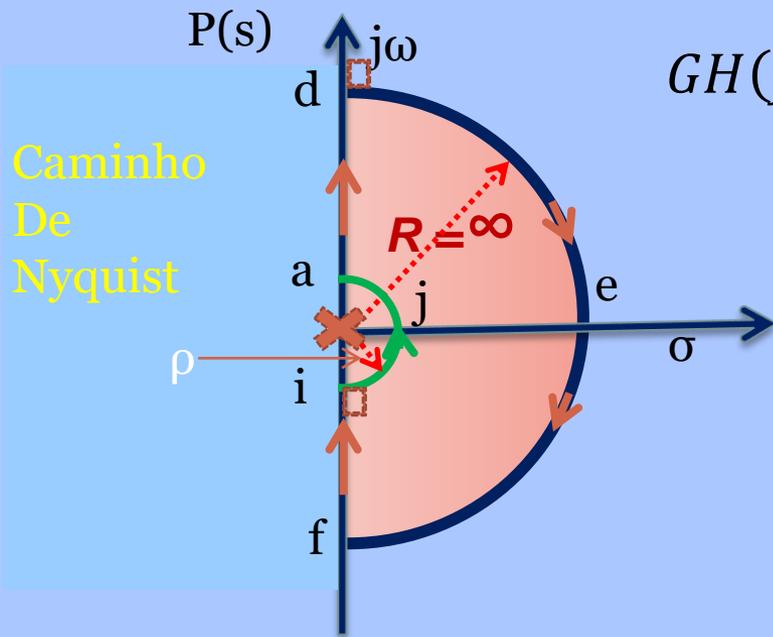


$\omega_r \rightarrow$ frequência de ressonância

Diagramas polares e Nyquist: Formas Gerais

43

- Sistemas do tipo um: Diagrama polar aberto, uma semicircunferência de raio infinito: $GH(s) = \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow 1/j\omega(j\omega+1)$



$$GH(j\omega) = \frac{1}{\omega(\sqrt{(1+\omega^2)})} \quad \underline{-90^\circ - \tan^{-1} \omega}$$

Pontos notáveis:

$$\omega \rightarrow 0 \rightarrow GH(j\omega) = \infty \quad \underline{-90^\circ}$$

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow GH(j\omega) = 0 \quad \underline{-180^\circ}$$

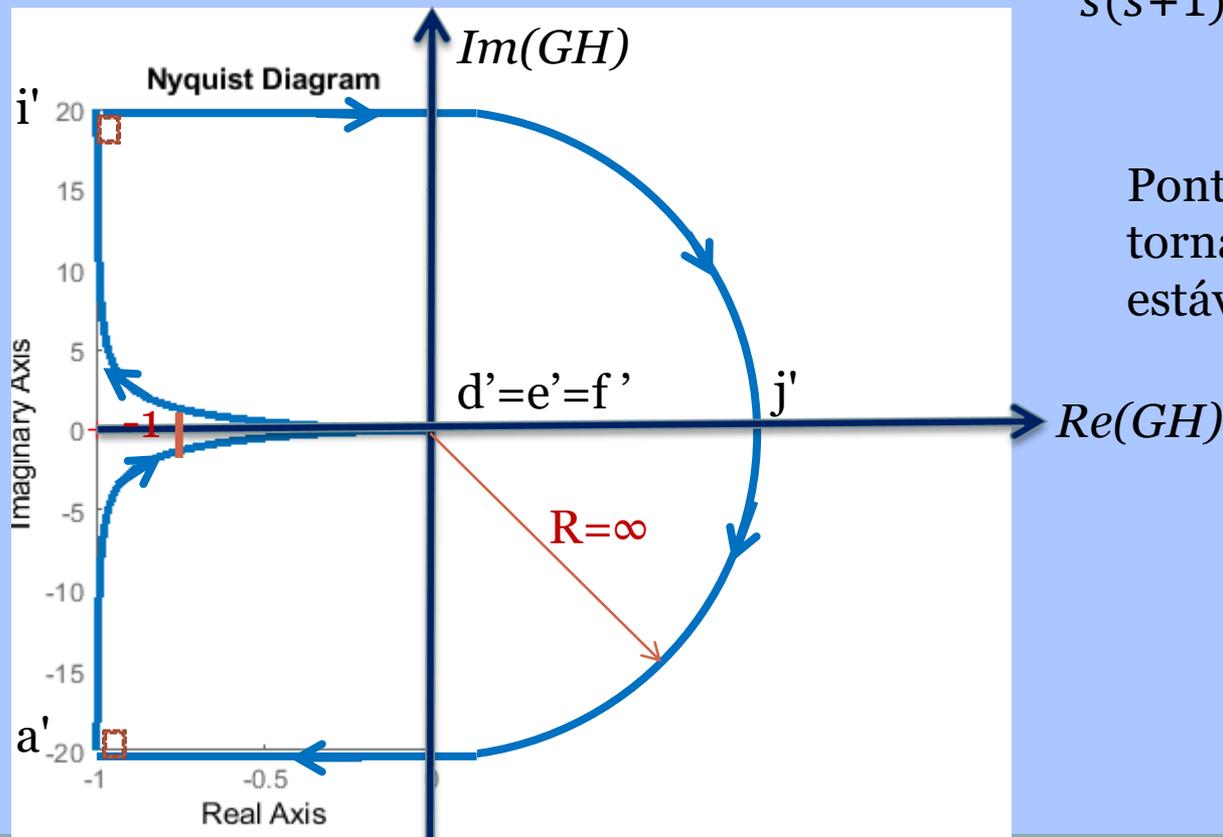
Se ω cresce entre 0 e ∞ , a razão de amplitude diminui de ∞ até zero e o ângulo de fase diminui continuamente de -90° até $-180^\circ \rightarrow$ o contorno não corta o eixo negativo, mas aproxima por baixo.

Trecho $ija \rightarrow i'j' a' \rightarrow GH(j\omega) = \frac{1}{\lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho e^{j\theta} (\rho e^{j\theta} + 1)]} = \infty e^{-j\theta}$

Diagramas polares e Nyquist: Formas Gerais

44

- Sistemas do tipo um: Diagrama polar aberto, uma semicircunferência de raio infinito: $GH(s) = \frac{1}{s(s+1)}$



Ponto -1 não é contornado \rightarrow sistema estável em MF!

Exemplos

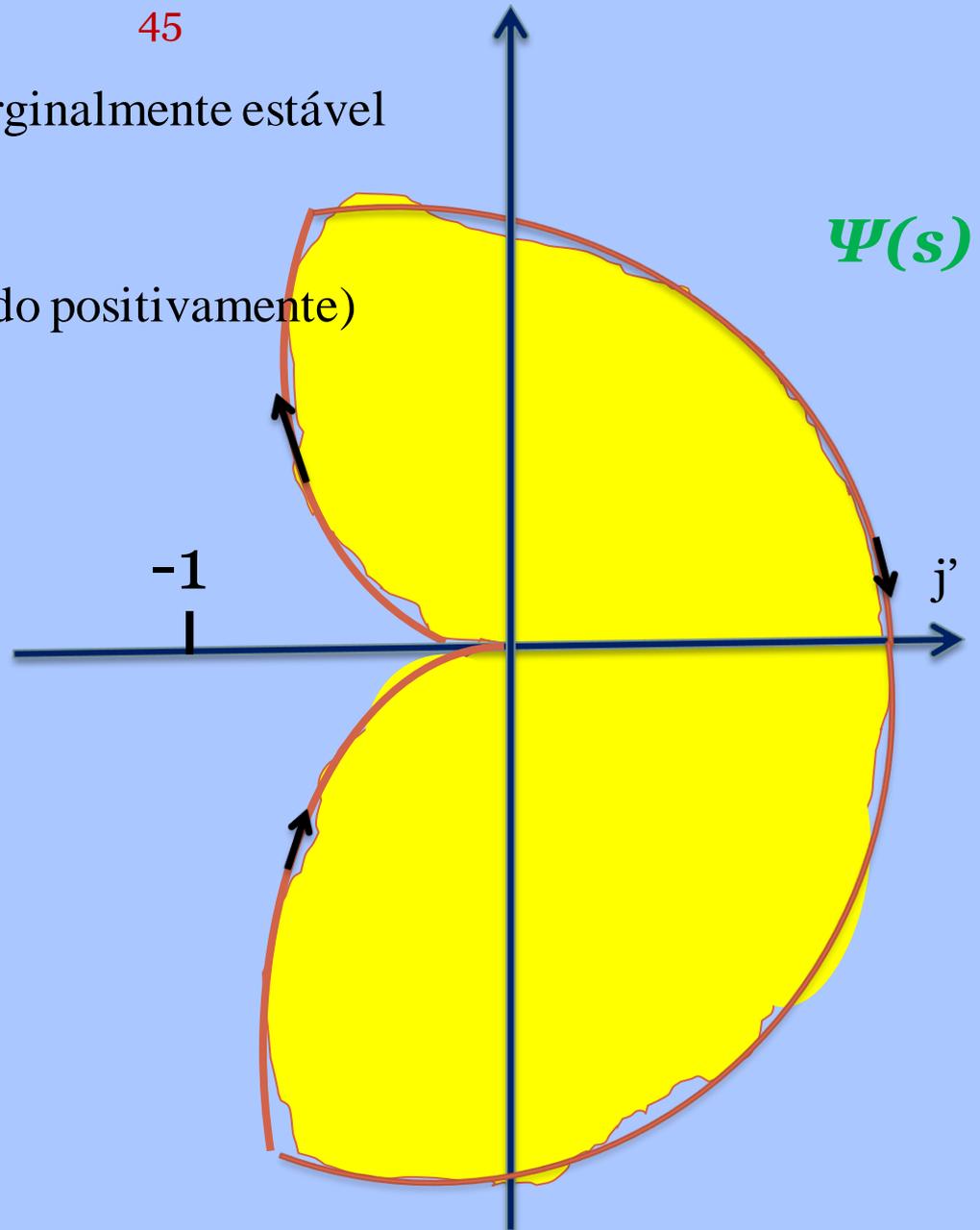
45

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow GH \text{ marginalmente estável}$$

Para estabilidade: $N_1 \leq 0$

Neste caso, $N_1 = 0$ (-1 não é contornado positivamente)

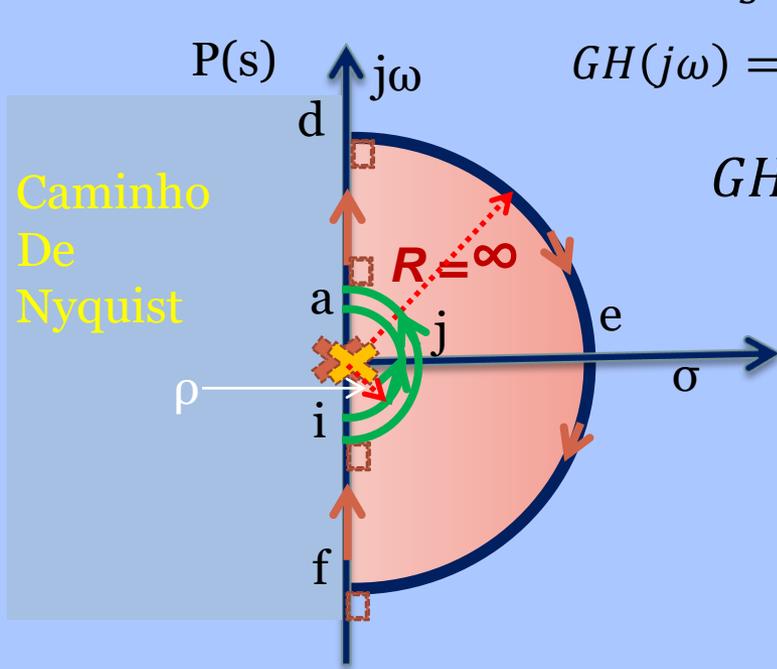
\Rightarrow sistema estável em MF!



Diagramas polares e Nyquist: Formas Gerais

46

- Sistemas do tipo q : Diagrama polar aberto, q semicircunferências de raio infinito: $q = 2 \rightarrow GH(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)} \rightarrow K/(j\omega)^2(jT\omega+1)$



$$GH(j\omega) = \frac{K}{\omega^2 \sqrt{1+(\omega T)^2}} \left[-\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} \infty - \tan^{-1} \omega T \right]$$

$$GH(j\omega) = \frac{K}{\omega^2 \sqrt{(T\omega)^2+1}} \left[-180^\circ - \tan^{-1} \omega T \right]$$

Pontos notáveis:

$$\omega \rightarrow 0 \rightarrow GH(j\omega) = \infty \left[-180^\circ \right]$$

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow GH(j\omega) = 0 \left[-270^\circ \right]$$

O termo $(j\omega)^2$ no denominador contribui com -180° no ângulo de fase total de $GH(j\omega)$ para $0 \leq \omega \leq \infty$. Em $\omega = 0$, o gráfico é assintótico a uma reta paralela ao eixo real. Em $\omega = \infty$, $|GH| \rightarrow 0$ e a curva é tangente a um dos eixos.

Exercício para casa:

49

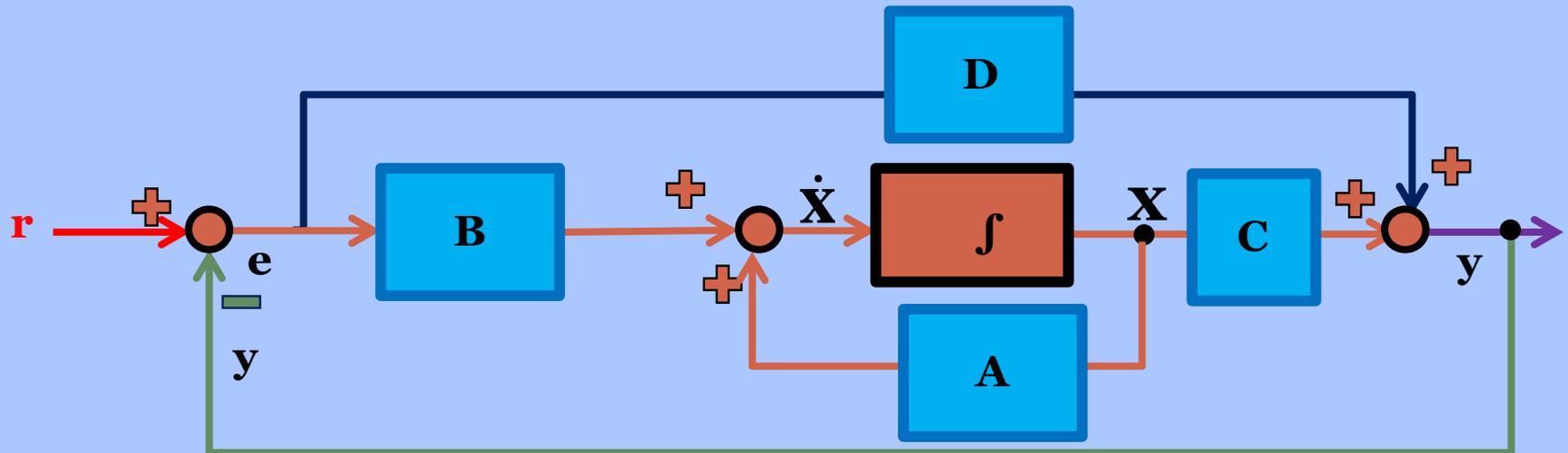
- Fazer o diagrama de Nyquist para:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

- a) verificar a estabilidade absoluta em malha fechada;
- b) Se o sistema for instável dizer quantos polos de malha fechada são instáveis pelo teorema do argumento;
- c) Achar a equação característica de MF e determinar seus polos e verificando sua resposta em b).

Estabilidade Nominal - MIMO

50



Estabilidade Nominal - MIMO

51

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{e}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{e} \quad (2)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]}_{FTMA} \mathbf{E}(s) = \mathbf{L}(s)$$

$$\Phi_A(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \Rightarrow Eq. \text{caract.} : |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Fechando a malha com :

$$\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_F \mathbf{x} + \mathbf{B}_F \mathbf{r}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_F = [\mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{C}], \text{ com } \mathbf{D} \neq -\mathbf{I}$$

$$\Phi_F(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F]^{-1} \Rightarrow Eq. \text{caract.} : |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F| = 0$$

Estabilidade Nominal - MIMO

52

$\mathbf{D} = \mathbf{0}$ por facilidade:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}||\mathbf{L} + \mathbf{I}| = 0$$

$$\therefore |\mathbf{L} + \mathbf{I}| = \frac{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F|}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} = 0$$

\Rightarrow se não houver cancelamento de raízes:

$$|\mathbf{L} + \mathbf{I}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F| = 0 \rightarrow \text{zeros de } |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F| \equiv \text{polos de MF}$$

$\Rightarrow |\mathbf{L} + \mathbf{I}| = 0$ descreve as características de Malha Fechada.

polos de MF \equiv zeros de $|\mathbf{L} + \mathbf{I}|$

Estabilidade Nominal - MIMO

53

**Seja: $L(j\omega) = GK(j\omega)$ com P_R polos instáveis:
→ $N = -P_R$ (P_R voltas no SAH ao redor de -1).**

“ O sistema em MF com matriz de transferência de malha aberta $L(s)$ com P_R polos instáveis é estável se e somente se o diagrama de Nyquist do $\det(L(j\omega))$ não passa pelo ponto -1 e o contorna P_R no SAH, quando s percorre o Caminho de Nyquist”.

Lembrando ainda que nos sistemas MIMO, todas as Fts tem o mesmo denominador, a mesma equação característica.