

# *Lugar das Raízes*

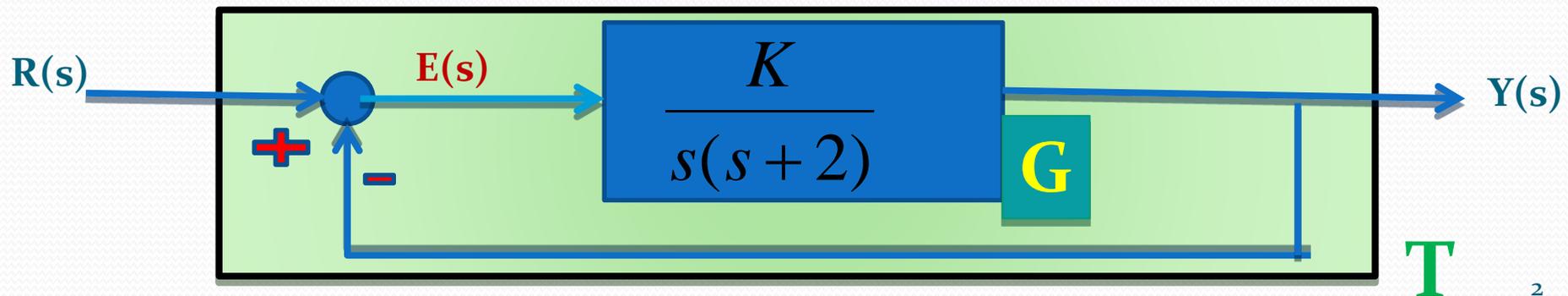
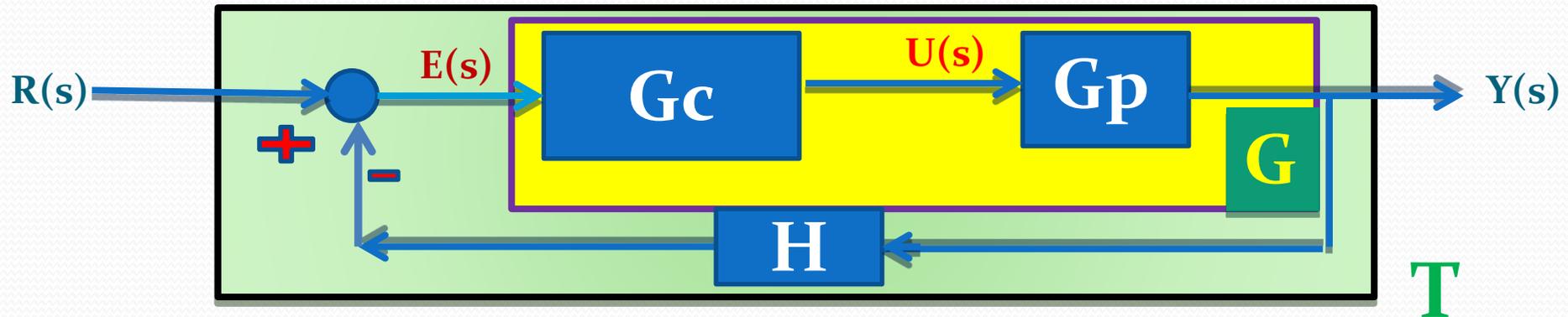
## *Root locus*

- 1. Motivação*
- 2. O movimento dos polos com os ganhos*
- 3. Regras para construção do LR*
- 4. Exemplos*
- 5. Sintonia de um PID usando o LR*

# Lugar das Raízes

- Motivação: As raízes da equação característica (polos) determinam o comportamento do sistema.

$G = G_c G_p =$  canal direto     $L = GH =$  Malha aberta     $T =$  Malha Fechada



# Lugar das Raízes

$$T = \frac{G}{1 + GH}$$

$$GH(s) = \frac{K}{s^2 + 2s}$$

Polos de  
MA

$$p1=0$$

$$p2=-2$$

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

$\Phi(s) = 1 + GH(s) = 0 \rightarrow$  equação característica.

$$\Phi(s) = s^2 + 2s + K = 0$$

• *Conforme  $K$  varia os polos se movimentam no plano  $s$ :*

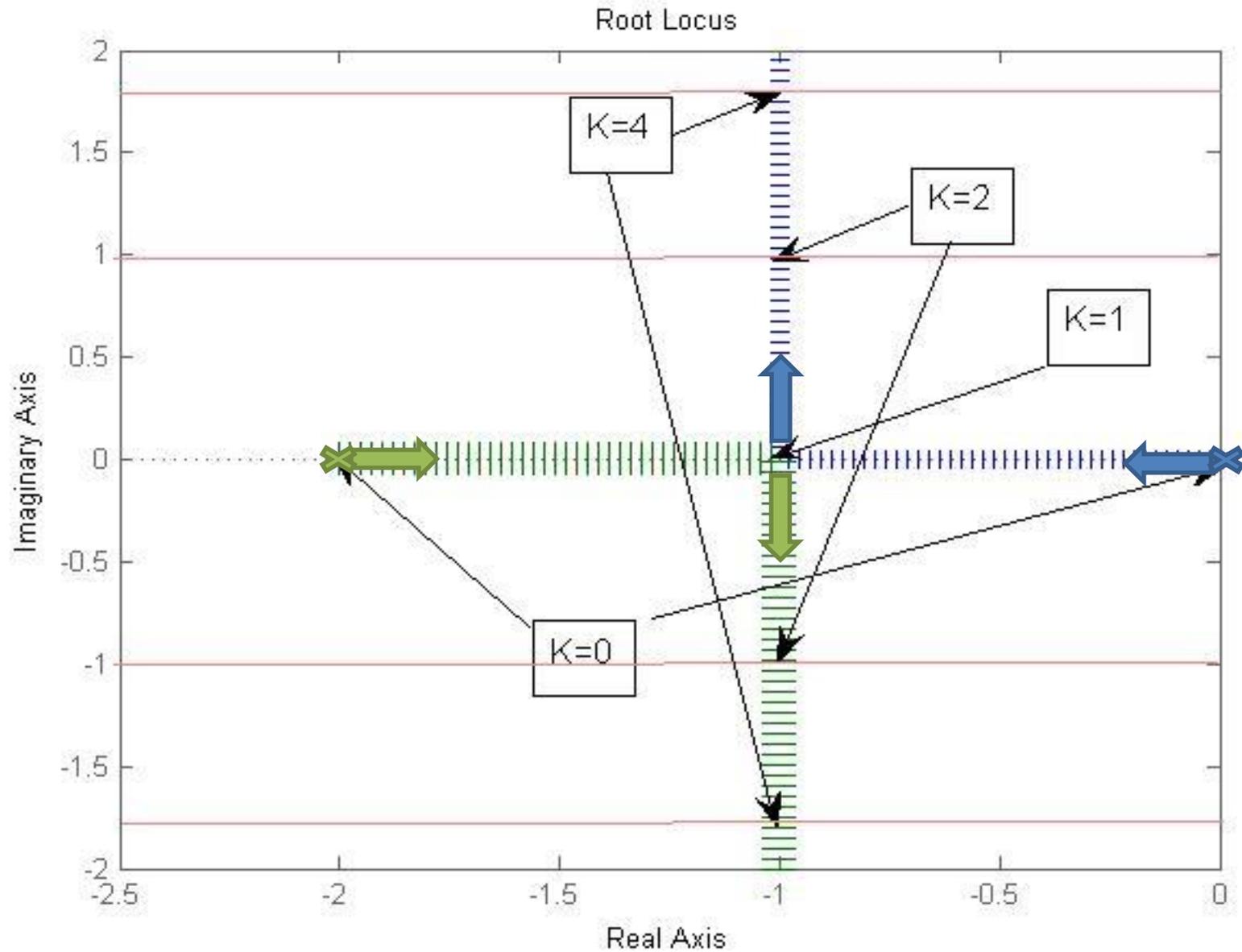
$K=0 \rightarrow p1=0 \quad p2=-2$  : polos de malha aberta!!

$K=1 \rightarrow p1=p2=-1$

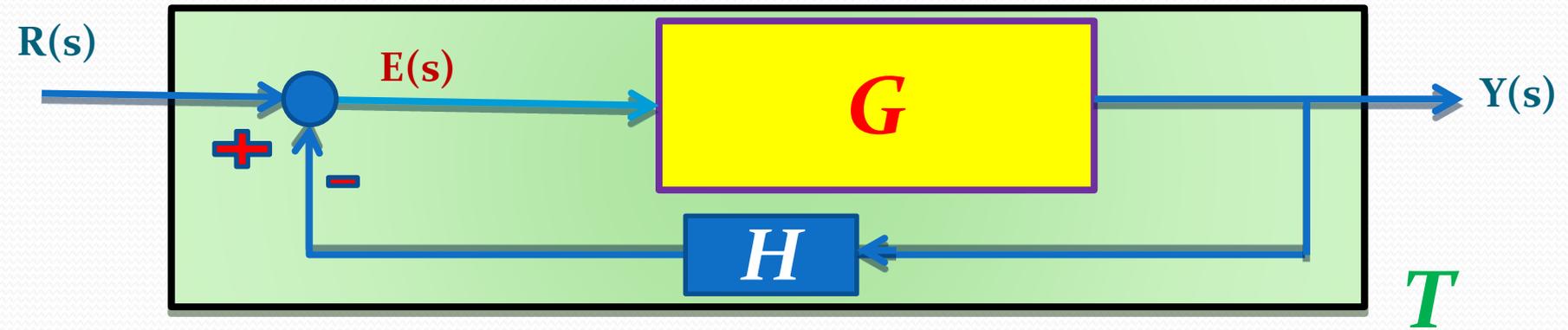
$K=2 \rightarrow p1=p2^*=-1+j$

$K=4 \rightarrow p1=p2^*=-1+\sqrt{3}j$

# Lugar das Raízes



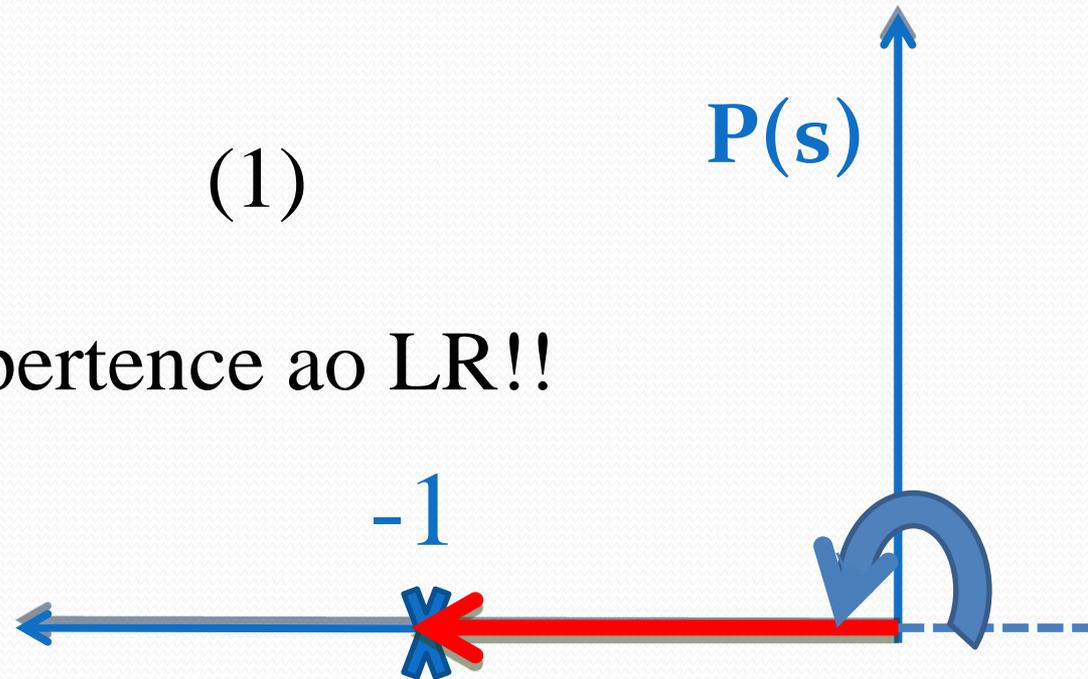
# Lugar das Raízes



$$\Phi(s) = 1 + GH(s) = 0$$

$$GH(s) = -1 = 1 \angle \pm 180^\circ \quad (1)$$

Todo  $s$  que satisfaz (1) pertence ao LR!!



# Lugar das Raízes

- Os polos de MF (zeros de  $\Phi(s)$ ) são os pontos do plano  $s$  para os quais o vetor  $GH(s)$  tem módulo **1** e fase  **$\pm (2n+1)180^\circ$ ,  $n=0,1,2,\dots$** .  $GH(s) = -1 = 1 \angle \pm 180^\circ$
- Admitindo 
$$GH(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

Para um ponto  $S_i$  qualquer do plano  $s$ , cada termo de  $GH(s)$  pode ser representado na forma polar:

$$(s_i - z_1) = A_1 e^{j\alpha_1}$$

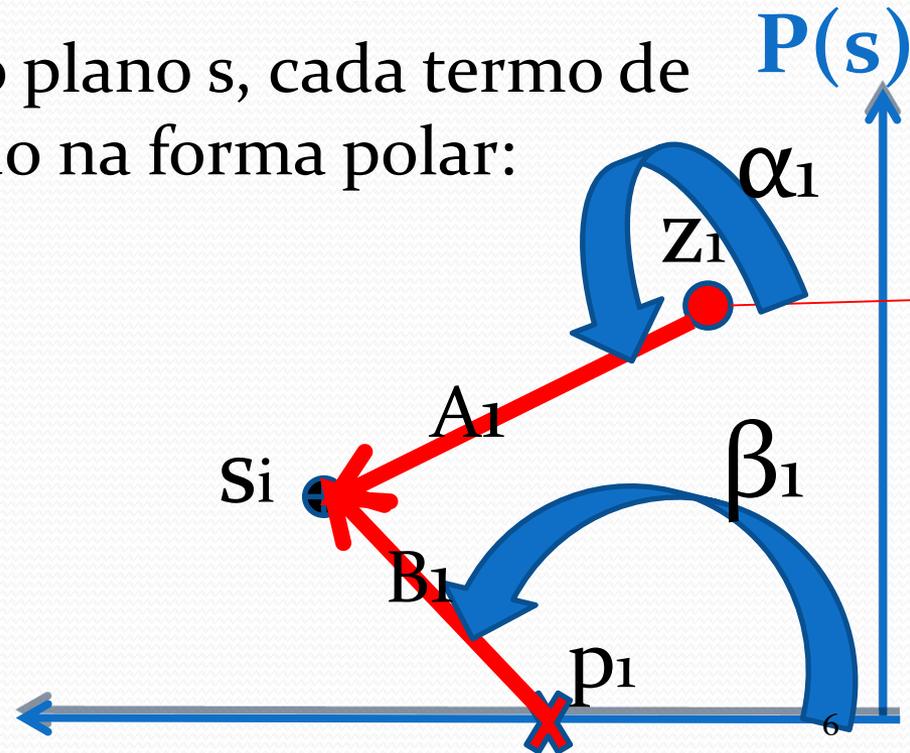
⋮

$$(s_i - z_m) = A_m e^{j\alpha_m}$$

$$(s_i - p_1) = B_1 e^{j\beta_1}$$

⋮

$$(s_i - p_n) = B_n e^{j\beta_n}$$



# Lugar das Raízes

$$GH(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

$$GH(s) = |GH| \angle GH$$

$$|GH| = K \frac{A_1 A_2 \cdots A_m}{B_1 B_2 \cdots B_n} \quad \leftarrow s_i$$

$$\angle GH = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m - \beta_1 - \beta_2 \cdots - \beta_n \quad \leftarrow s_i$$

Os polos de MF são pontos do plano-s que satisfazem as duas condições a seguir:

Para que um ponto  $S_i$  pertença ao LR ele deve satisfazer duas condições:

Condição de fase:

$$\angle GH = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m - \beta_1 - \beta_2 - \cdots - \beta_n = \pm(2n + 1)180^\circ$$

Condição de magnitude:

$$|GH| = K \frac{A_1 A_2 \cdots A_m}{B_1 B_2 \cdots B_n} = 1$$

$$\text{ou } K = \frac{B_1 B_2 \cdots B_n}{A_1 A_2 \cdots A_m}$$

# Lugar das Raízes

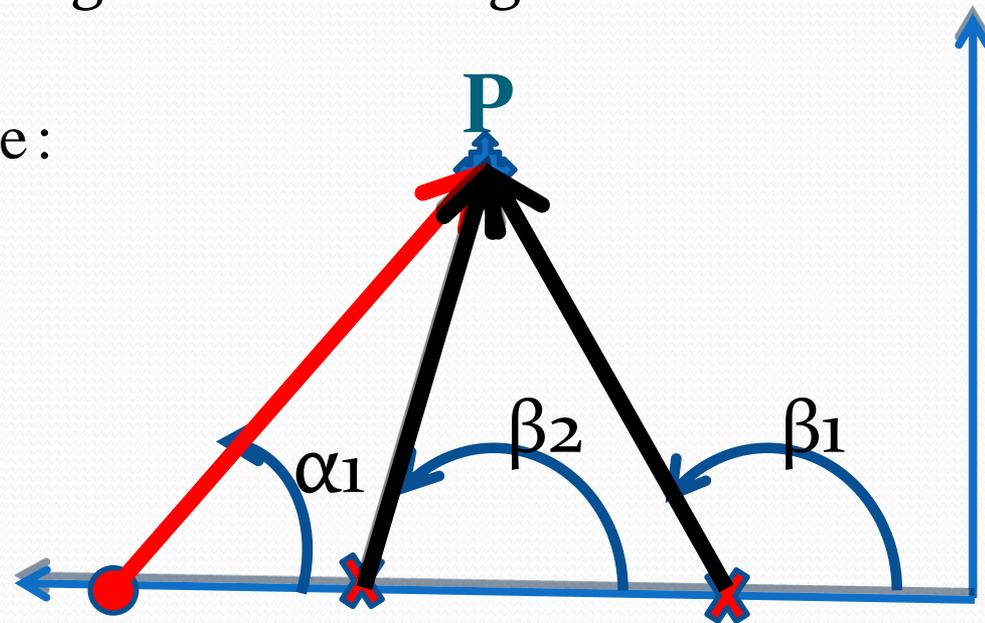
- Em geral, faz-se o traçado do LR inteiramente pela condição de fase (critério dos ângulos). Em seguida, com a condição de magnitude (critério dos módulos) determinam-se os valores do ganho  $K$  no diagrama.

Se  $P \in$  ao LR, vale a condição de fase:

$$\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 = (2i + 1)\pi$$

$$K \frac{|P - z_1|}{|P - p_1||P - p_2|} = 1$$

$$K = \frac{|P - p_1||P - p_2|}{|P - z_1|}$$



- Seria muito difícil traçar o lugar das raízes usando o procedimento anterior. Alternativa, criar regras comuns:

# Lugar das Raízes

$$T = \frac{G}{1+GH}$$

seja  $GH(s) = K \frac{N(s)}{D(s)}$

$N(s)$  e  $D(s)$  polinômios e  $K$  um fator de amplificação ( $\in$  real).

$$T = \frac{GD}{D+KN}$$

$\therefore \Phi(s) = D + KN = 0 \rightarrow$  equação característica.

$\Rightarrow$  quando  $K$  varia, as raízes de  $\Phi(s)$  se movem no plano  $s$  ( $P(s)$ )!

REGRA : Quando  $K = 0 \Rightarrow \Phi(s) = D = 0 \Rightarrow$  polos de MF  $\equiv$  polos de MA!!!

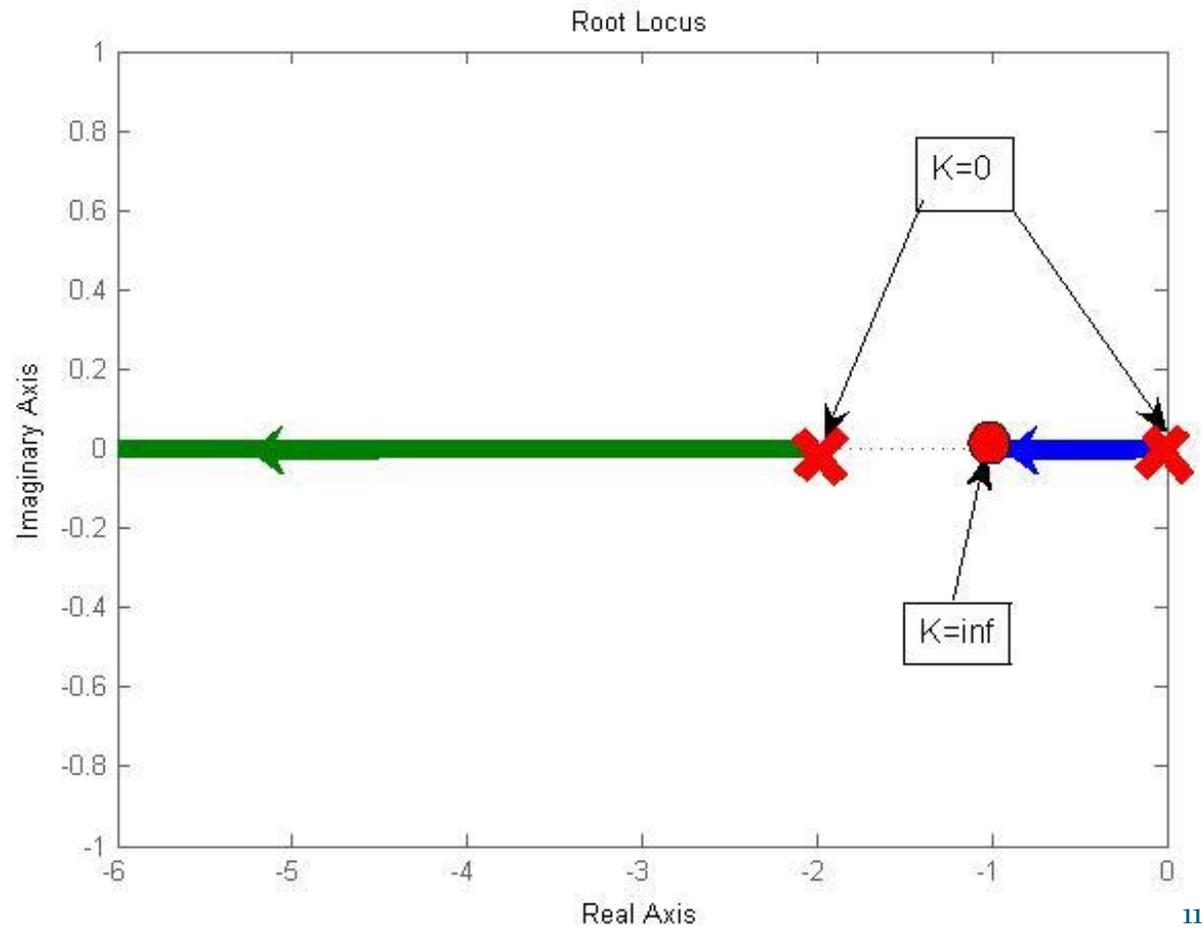
REGRA : Quando  $K \rightarrow \infty : \Phi(s) \cong KN(s) = 0 \Rightarrow$  polos de MF se aproximam dos zeros de MA.

REGRA : Conforme  $K$  aumenta os polos de MA se movimentam em direção aos zeros de MA.

REGRA : Qualquer ponto pertencente ao LR é um polo de MF possível.

Exemplo :

$$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)}$$



# Regras básicas para o traçado do LR

1. *Simetria em relação ao eixo real .*
2. *Número de ramos = Número de polos de MA.  
Ramos podem se cruzar mas nunca formam um laço sobre si mesmos.*
3. *Ramos começam nos polos de MA ( $K=0$ ) e terminam nos zeros de MA ( $K \rightarrow \infty$ ). Como o número de zeros ( $m$ ) é menor ou igual ao número de polos ( $n$ ),  $(n-m)$  ramos vão para o  $\infty$  na direção de assíntotas.  
*Polos de ordem  $q \rightarrow q$  ramos saem deles.  
Zeros de ordem  $q \rightarrow q$  ramos chegam neles**

# Regras básicas para o traçado do LR

## 4. Assíntotas:

$$K > 0 \rightarrow \frac{180(2i+1)}{(n-m)}, i = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1)$$

$$K < 0 \rightarrow \frac{180(2i)}{(n-m)}, i = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1)$$

Partem do C.G. de zeros e polos no eixo real :

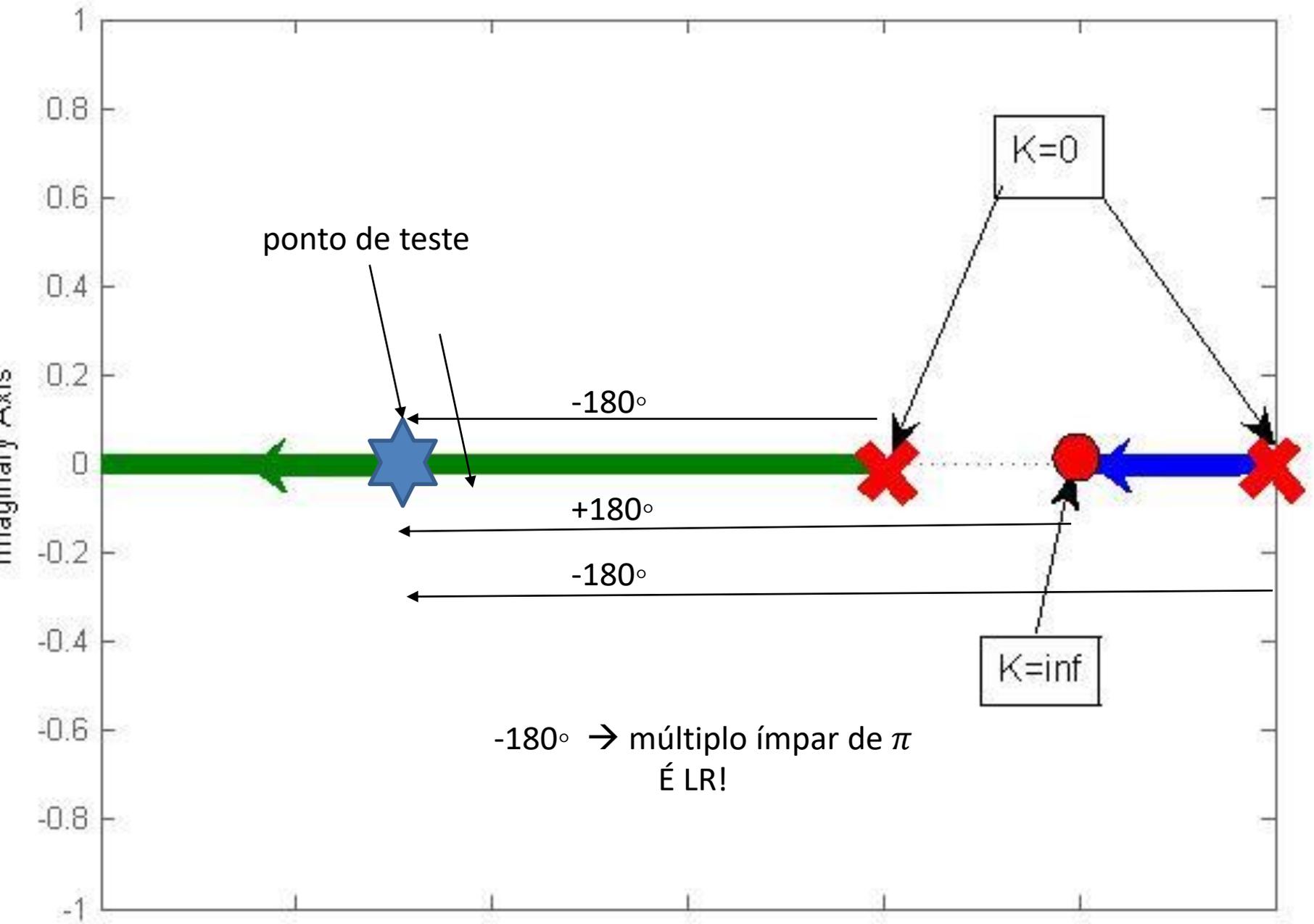
$$\text{CG} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k - \sum_{j=1}^m z_j}{(n-m)}$$

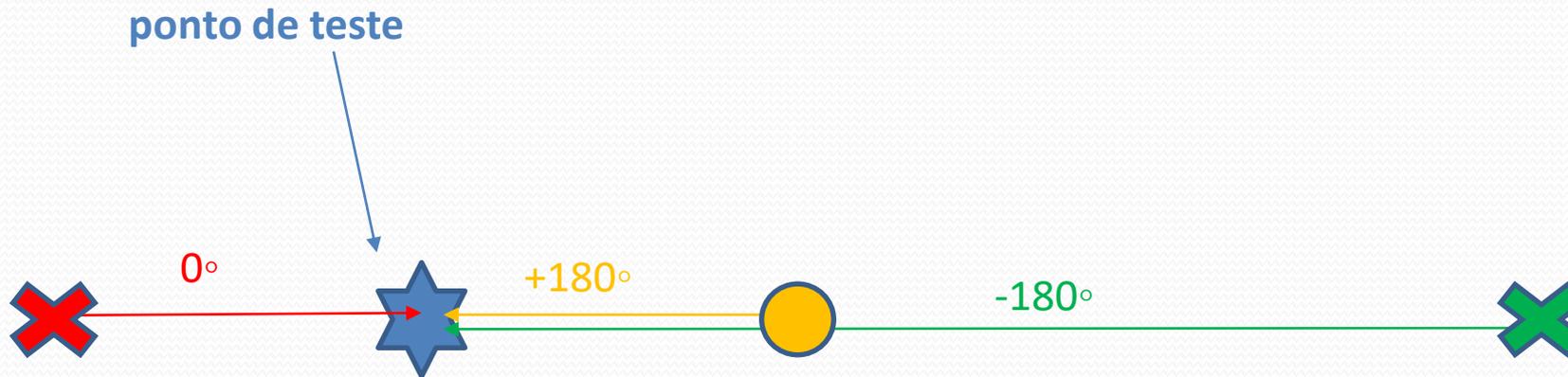
## 5. LR no eixo real:

$K > 0 \rightarrow$  pontos do eixo real com número ímpar de zeros e polos a sua direita pertencem ao LR.

$K < 0 \rightarrow$  pontos do eixo real com número par de zeros e polos a sua direita pertencem ao LR.

# Root Locus





$0^\circ \rightarrow$  não é múltiplo ímpar de  $\pi$   
NÃO É LR!

# Regras básicas para o traçado do LR

6. Pontos de separação  $b$ : ponto do eixo real de chegada ou saída de dois ou mais ramos, sempre em ângulo reto (pontos de sela no eixo real):

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(b - p_k)} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(b - z_j)}$$

7. Ângulo de partida/chegada em polos/zeros complexos. Testar cada polo/zero em questão quanto à condição de fase (teste=ponto muito próximo do polo/zero).

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m - \beta_1 - \dots - \beta_n = 180^\circ$$

# Regras básicas para o traçado do LR

8. Cruzamento do eixo imaginário:

Teoremas de Routh-Hurwitz:

(n)-ésima linha nula  $\rightarrow$  determinação de  $K$ .

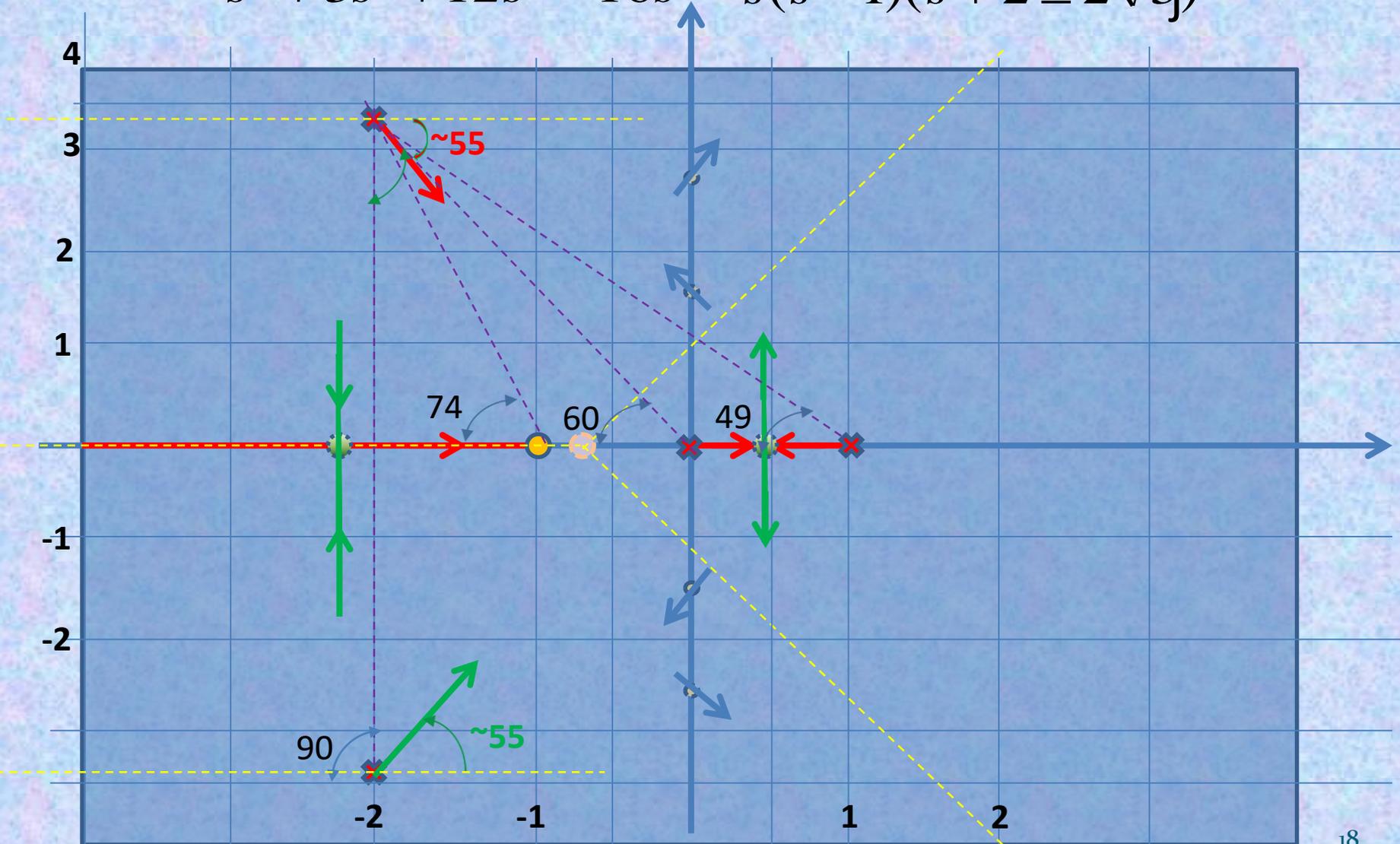
(n-1)-ésima linha nula:

$$cs^2 + d = 0$$

$\rightarrow$  determinam-se os pontos de cruzamento ( $c$  e  $d$  elementos da linha (n-1) do algoritmo de Routh-Hurwitz).

# Exemplo : *Modo longitudinal* de avião : Ganho Proporcional

$$GH_1(s) = \frac{K_p(s+1)}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s} = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+2 \pm 2\sqrt{3}j)}, K > 0$$



## Modo longitudinal do avião: (cont.)

- Regra 2: número de ramos = número de polos = **4**
- Regra 3: **1 ramo** sai de um polo e vai para o zero.  
 $(n-m)=4-1=$ **3 ramos** vão na direção de assíntotas

- Regra 5: LR no eixo real:

$K > 0 \rightarrow$  pontos do eixo real com número ímpar de zeros e polos a sua direita pertencem ao LR.



- Regra 3: Assíntotas:  $\frac{180(2i+1)}{(n-m)} = 60(2i+1) \dots i=0,1,\dots,(n-m-1) = 0,1,2$ 
  - $i=0 \rightarrow 60^\circ$      $i=1 \rightarrow 180^\circ$      $i=2 \rightarrow 300^\circ = -60^\circ$
  - $CG = \frac{\sum p_i - \sum z_k}{n-m} = \frac{0+1-2-2-(-1)}{3} = \frac{-2}{3} = -0,67$

## Modo longitudinal do avião: (cont.)

- Regra 6: Pontos de Separação: pontos de sela sobre o eixo:

$$\frac{d}{ds} GH(s) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \frac{K(s+1)}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s} =$$

$$\frac{(-3s^4 - 10s^3 - 21s^2 - 24s + 16)}{(s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s)^2} = 0$$

$$s_1 = 0,46 \quad s_2 = -2,22 \quad \cancel{s_3 = s_4^* = -0,70 + 1,16j}$$

- Regra 8: Pontos de cruzamento sobre o eixo imaginário

- Critério de Routh na Equação Característica

$$1 + GH(s) = 0 \Rightarrow 1 + K \frac{N}{D} = 0 \Rightarrow D + KN = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s + K(s+1) = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 - (K - 16)s + K = 0$$

## Modo longitudinal do avião: (cont.)

$s^4$	1	12	K
$s^3$	3	K-16	0
$s^2$	$\frac{52-K}{3}$	K	
$s^1$	$\frac{-K^2+59K-832}{(52-K)}$	0	
$s^0$	K		

Penúltima linha inteira de zeros:  $-K^2 + 59K - 832 = 0$

$$K_1 = 35,7$$

$$K_2 = 23,3$$

Formar polinômios com a linha anterior:

$$\frac{52-K}{3} s^2 + K = 0$$

$$s_1 = s_2^* = + 2,56j$$

$$s_3 = s_4^* = 1,56j$$

## Modo longitudinal do avião: (cont.)

- Regra 7: ângulo de partida (ramos saem!) dos polos complexos

$$\sum_j^m \Phi_{Zj} - \sum_i^n \Phi_{Pi} = 180^\circ$$

$$\Phi_Z - \Phi_{p1} - \Phi_{p1^*} - \Phi_{p2} - \Phi_{p3} = 180^\circ$$

- polo 1:

$$\Rightarrow \Phi_{p1} = -180 + \Phi_Z - \Phi_{p1^*} - \Phi_{p2} - \Phi_{p3}$$

$$\Rightarrow \Phi_Z = 180 - \tan^{-1} 2\sqrt{3} = 180 - 74 \cong 106^\circ$$

$$\Rightarrow \Phi_{p1^*} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Phi_{p2} = 180 - \tan^{-1} \sqrt{3} = 120^\circ$$

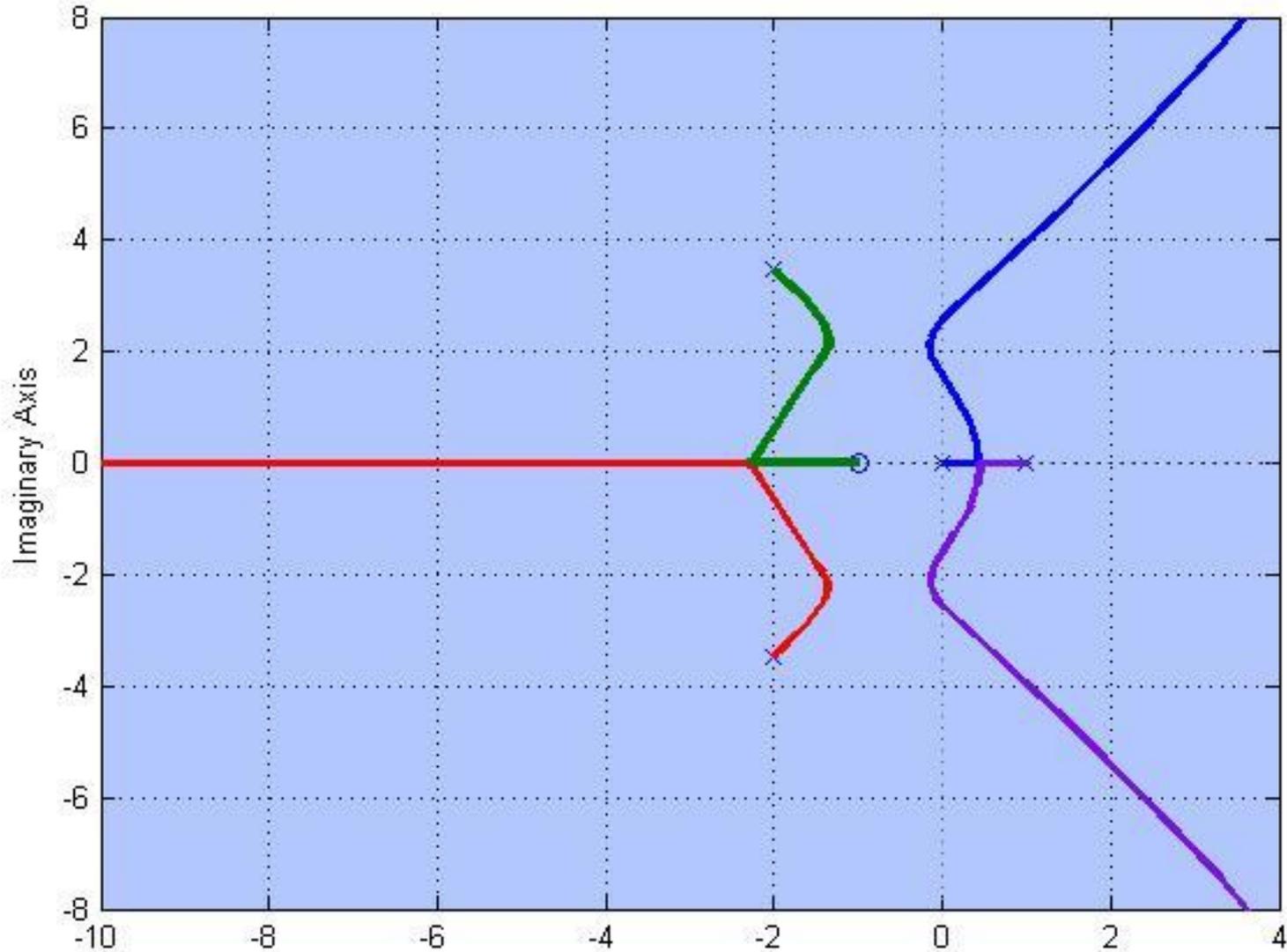
$$\Rightarrow \Phi_{p3} = 180 - \tan^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{3} = 131^\circ$$

$$\Rightarrow \Phi_{p1} \approx -55^\circ$$

# Exemplo : *Modo longitudinal* de avião

$$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s} = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+2 \pm 2\sqrt{3}j)}, K > 0$$

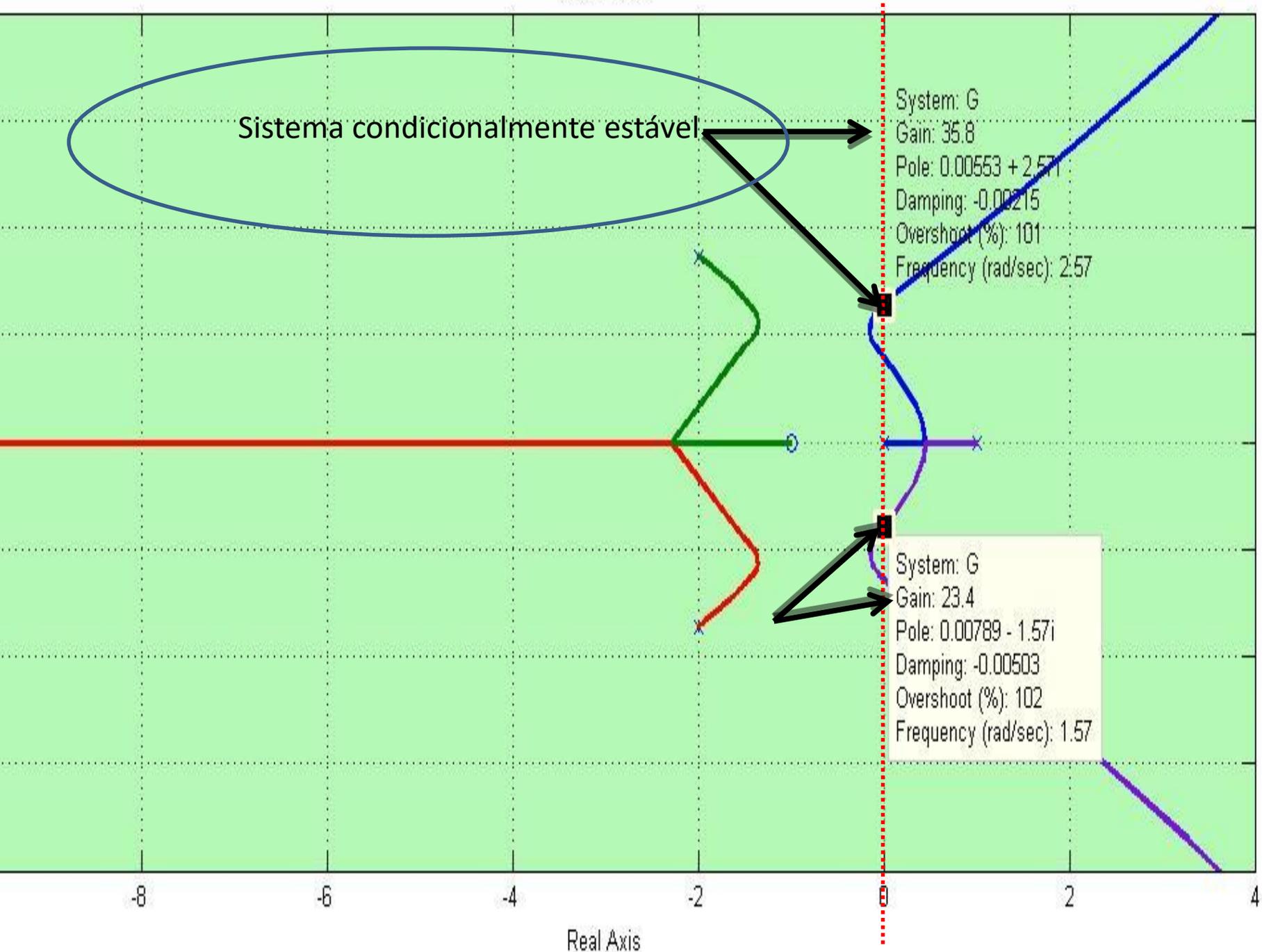
Root Locus



Sistema condicionalmente estável

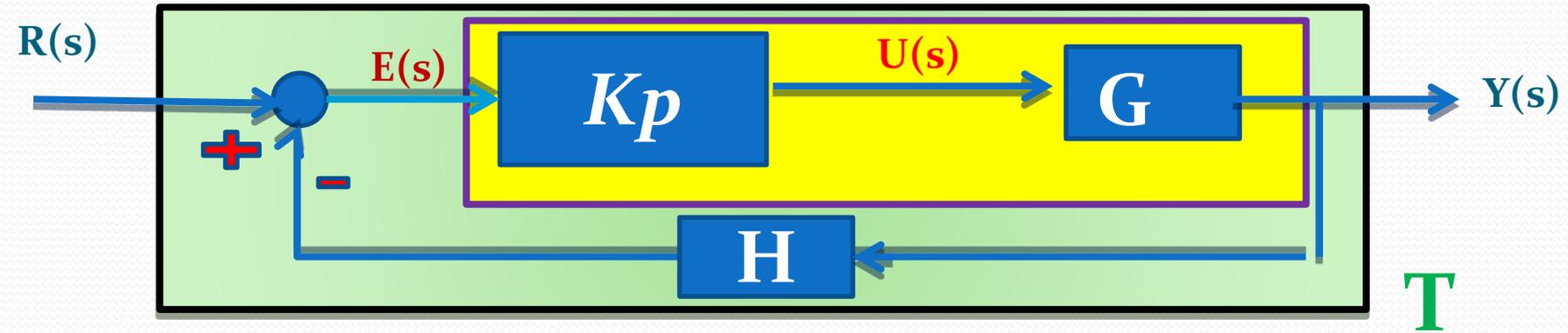
System: G  
Gain: 35.8  
Pole:  $0.00553 + 2.57i$   
Damping: -0.00215  
Overshoot (%): 101  
Frequency (rad/sec): 2.57

System: G  
Gain: 23.4  
Pole:  $0.00789 - 1.57i$   
Damping: -0.00503  
Overshoot (%): 102  
Frequency (rad/sec): 1.57



# LR para definir um PID

- Determinação do Ganho Proporcional  $K_p$



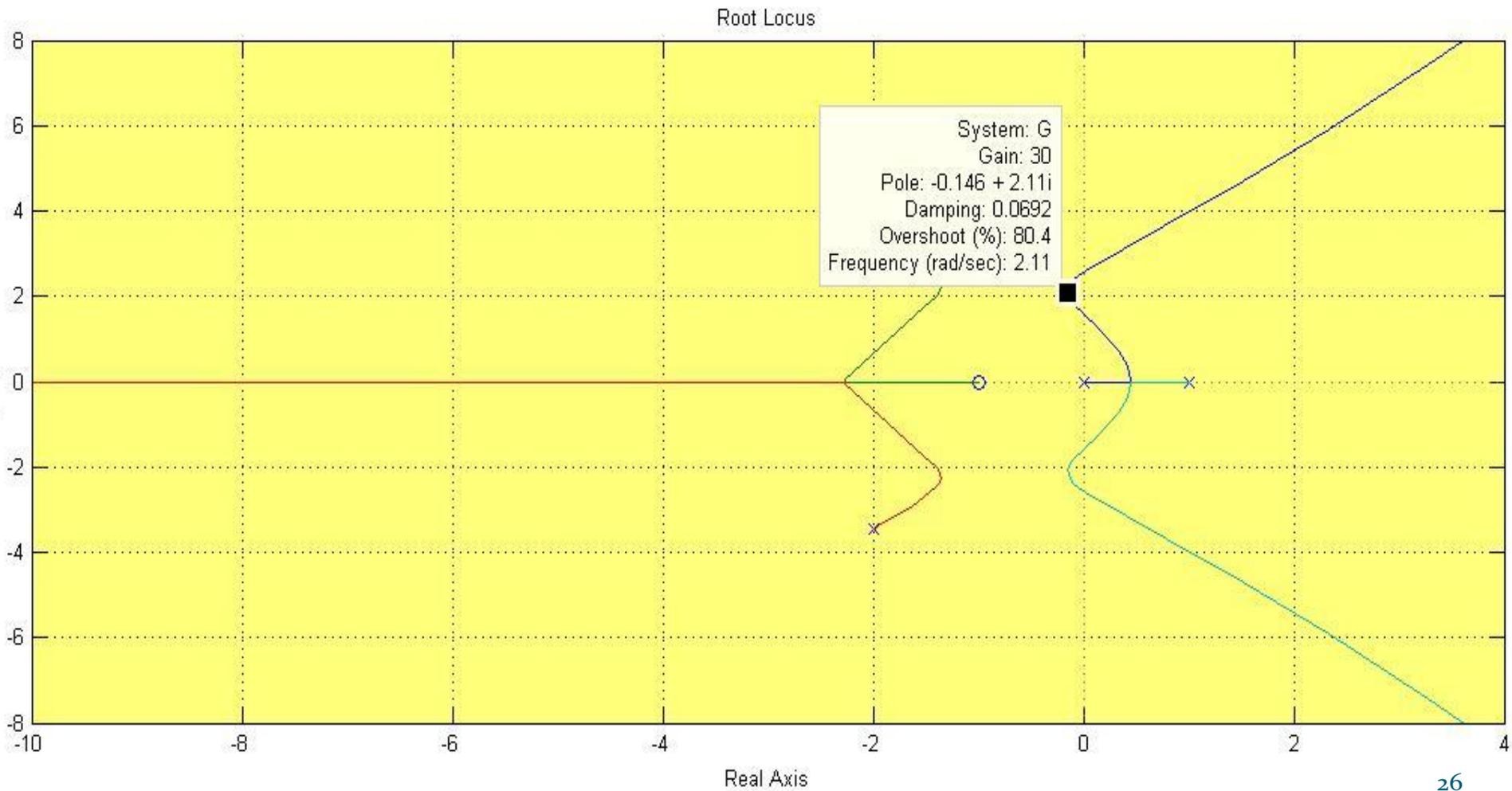
$$T = \frac{K_p G}{1 + K_p GH} \quad \text{seja } GH = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\Phi_1(s) = 1 + K_p GH = 1 + K_p \frac{N}{D} = 0$$

- Fazer o LR determinando um  $K_p$  ótimo  $\rightarrow K^\circ$

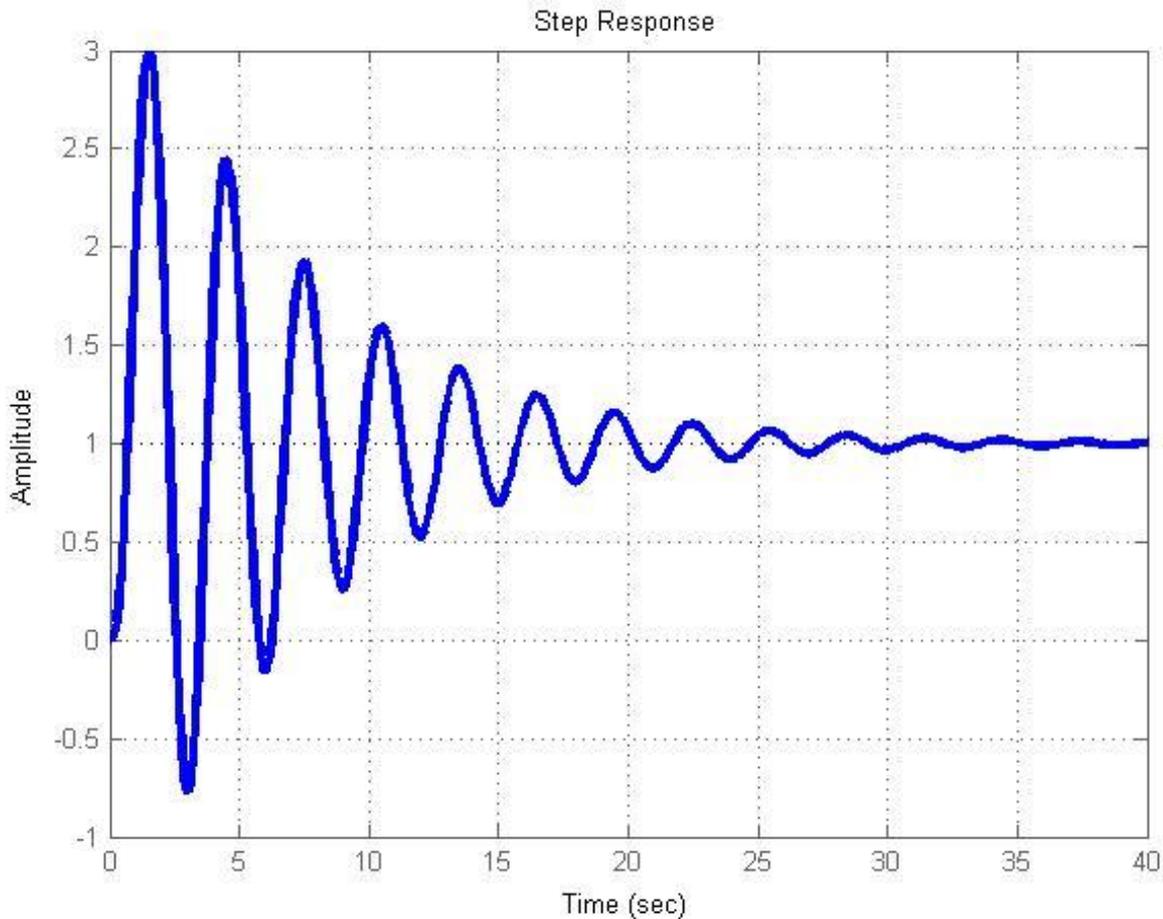
# Exemplo : *Modo longitudinal de avião: Ganho Proporcional*

$$GH_1(s) = \frac{K_p(s+1)}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s}, K_p > 0 \Rightarrow K^o = 30$$



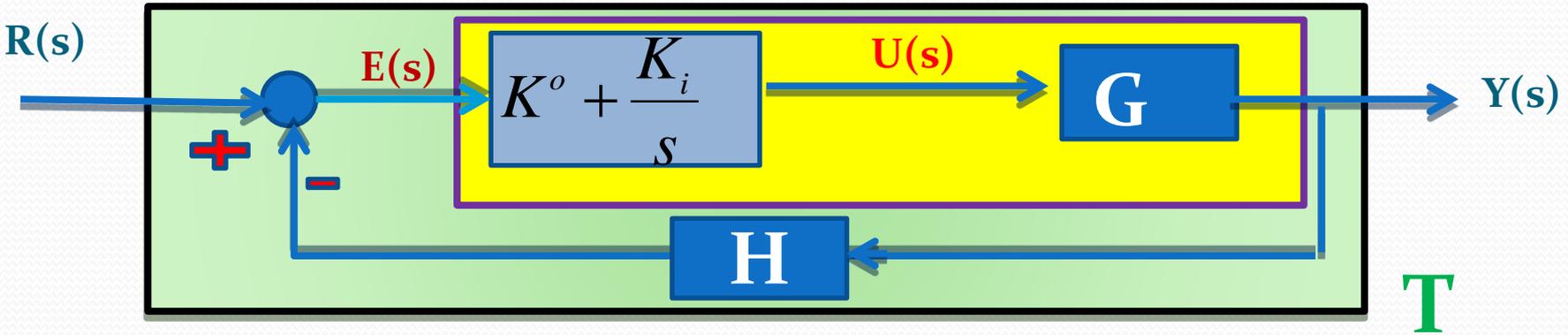
# Exemplo : *Modo longitudinal* de avião: Ganho Proporcional

$$GH_1(s) = \frac{K_p(s+1)}{s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s}, K_p > 0 \Rightarrow K^o = 30$$



# LR para definir um PID

- Determinação do Ganho Integral  $K_i$



$$\Phi_2(s) = 1 + \left( K^o + \frac{K_i}{s} \right) GH = 1 + \left( K^o + \frac{K_i}{s} \right) \frac{N}{D} = 0$$

$$\Phi_2(s) = 1 + \left( K^o \frac{N}{D} + \frac{K_i}{s} \frac{N}{D} \right) = \frac{D + K^o N}{D} + K_i \frac{N}{sD} = 0$$

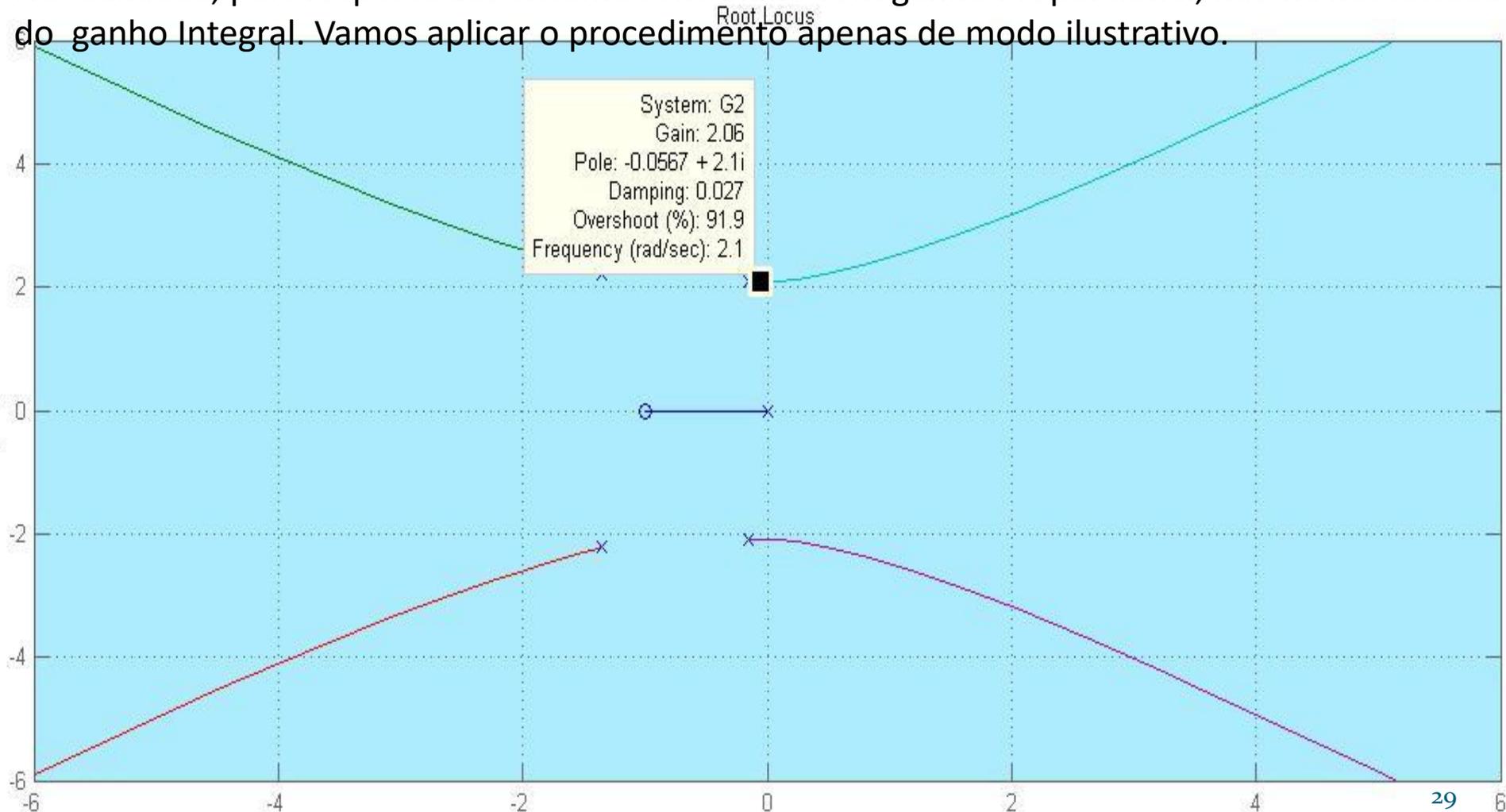
$$1 + K_i \frac{N}{s(D + K^o N)} = 0$$

- Fazer o LR determinando um  $K_i$  ótimo  $\rightarrow K_i^o$

# Exemplo : *Modo longitudinal* de avião : Ganho Integral

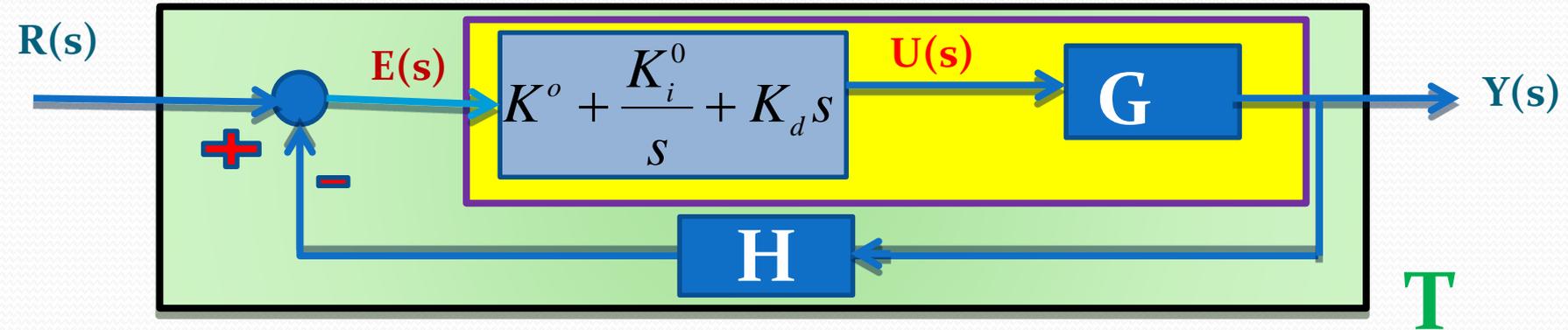
$$1 + GH_2(s) = 1 + K_i \frac{(s + 1)}{s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 14s^2 + 30s}, K_i > 0 \Rightarrow K_i^o = 2$$

Na realidade, pela resposta dos sistema controlado com ganho Proporcional, não há necessidade do ganho Integral. Vamos aplicar o procedimento apenas de modo ilustrativo.



# LR para definir um PID

- Determinação do Ganho Derivativo  $K_d$



$$\Phi_3(s) = 1 + \left( K^o + \frac{K_i^o}{s} + K_d s \right) GH = 1 + \left( K^o + \frac{K_i^o}{s} + K_d s \right) \frac{N}{D} = 0$$

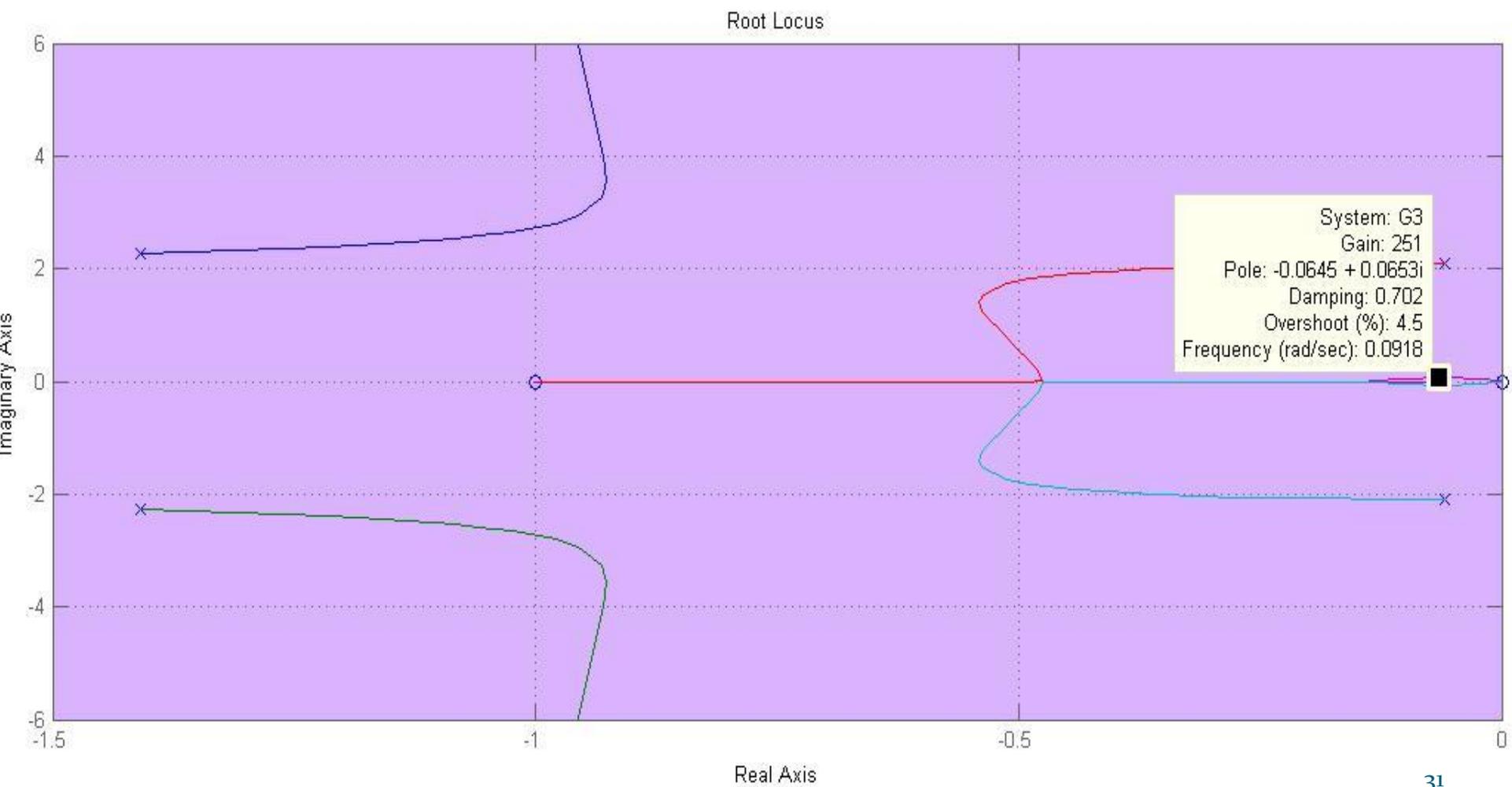
$$\Phi_3(s) = 1 + \left( K^o \frac{N}{D} + \frac{K_i^o}{s} \frac{N}{D} + K_d \frac{N}{D} s \right) = \frac{sD + sK^o N + K_i^o N}{sD} + K_d \frac{N}{D} s = 0$$

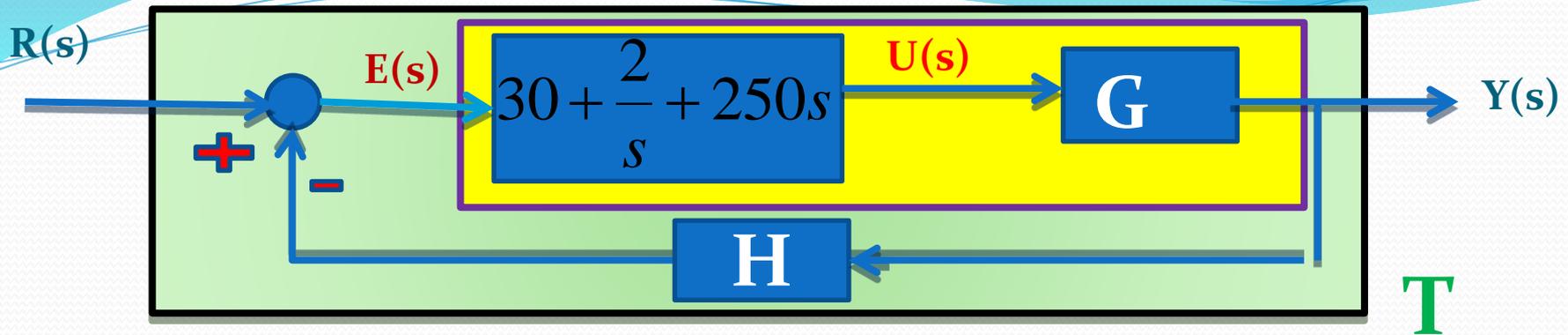
$$1 + K_d \frac{s^2 N}{sD + (K^o s + K_i^o) N} = 0$$

- Fazer LR determinando um  $K_d$  ótimo  $\rightarrow K_d^o$

# Exemplo : *Modo longitudinal* de avião : Ganho Derivativo

$$1 + GH_3(s) = 1 + K_d \frac{(s_3 + s^2)}{s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 14s^2 + 32s + 2}, K_d > 0 \Rightarrow K_d^o = 250$$





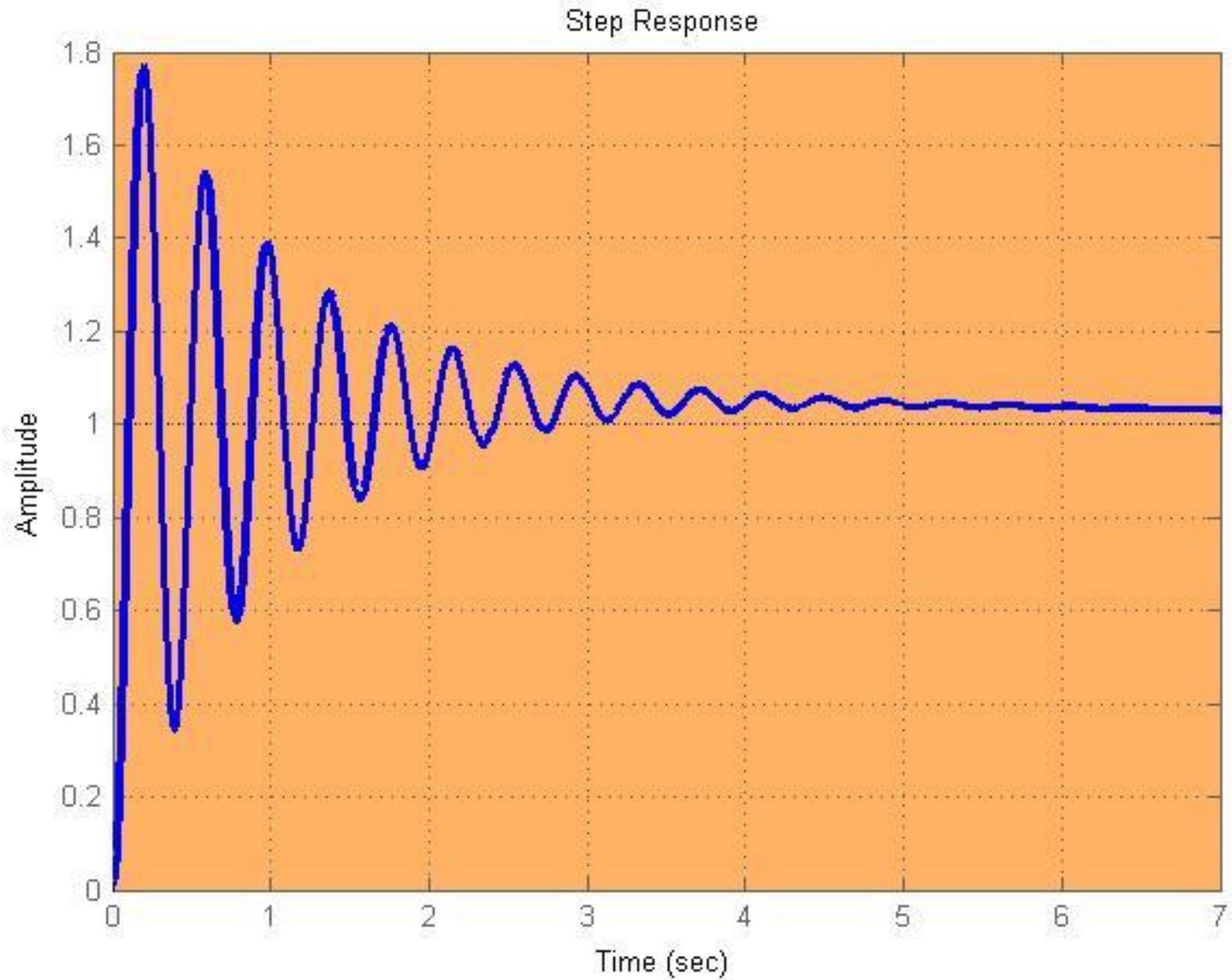
$$T = \frac{250s^3 + 280s^2 + 32s + 2}{s^5 + 3s^4 + 262s^3 + 264s^2 + 32s + 2}$$

Polos:

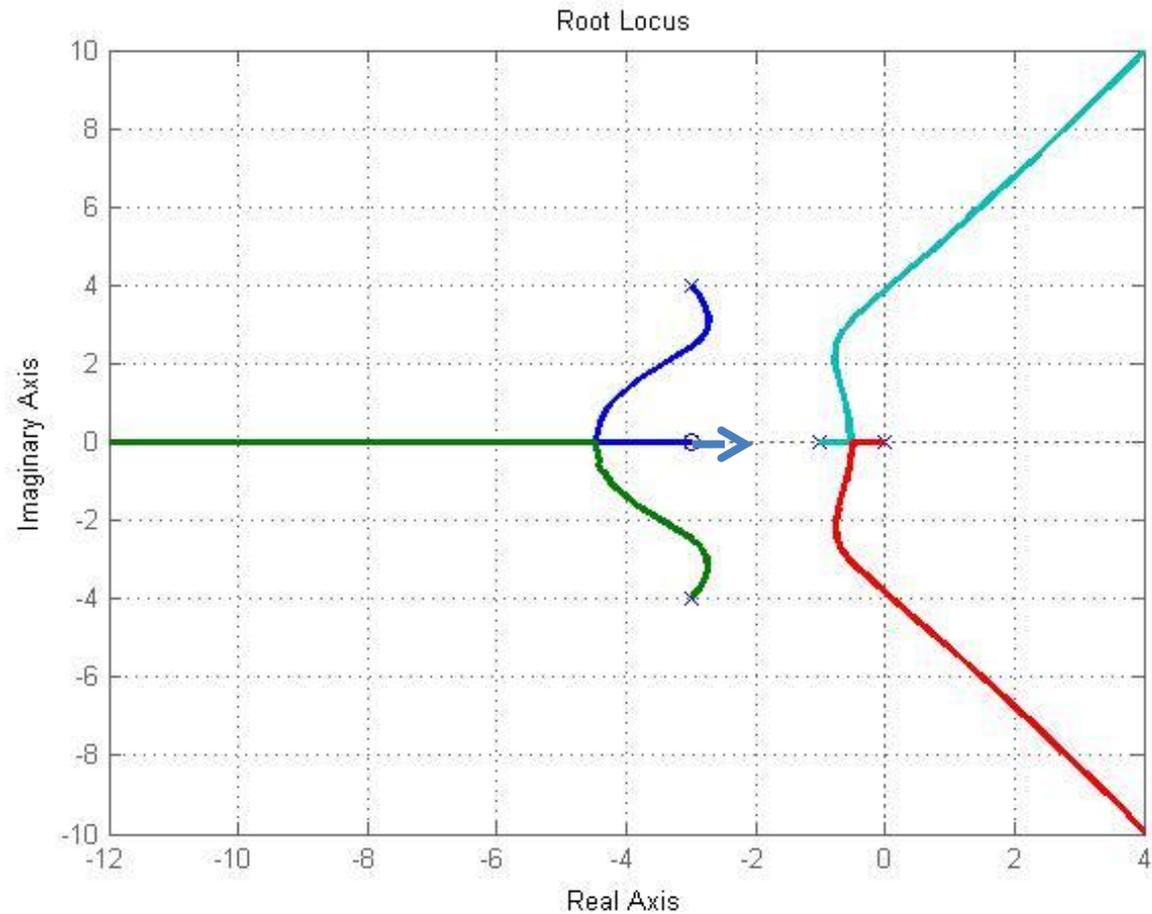
- 0,9925 + 16,0897i
- 0,9925 - 16,0897i
- 0,8858
- 0,0646 + 0,0672i
- 0,0646 - 0,0672i

Zeros:

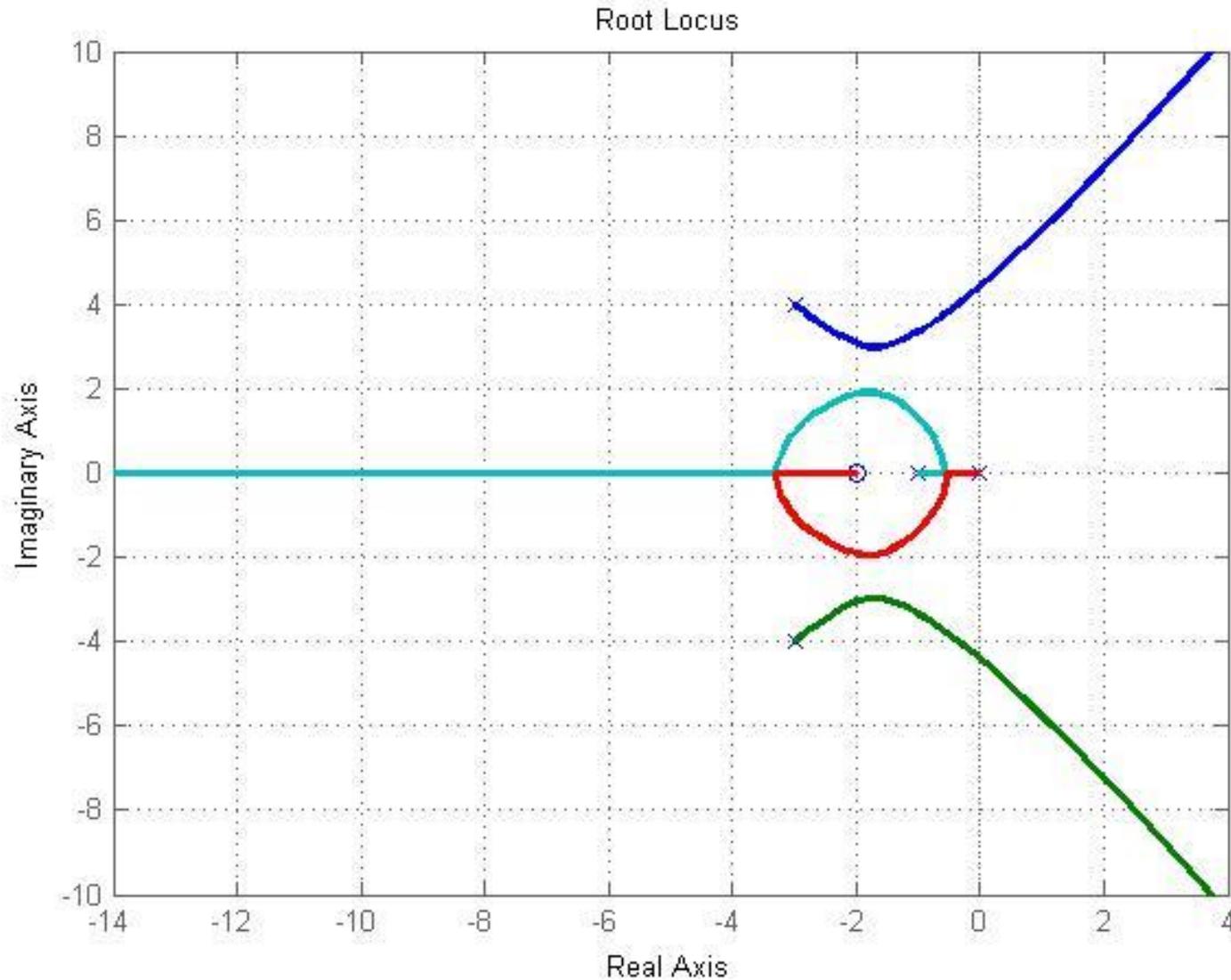
- 1,0000
- 0,0600 + 0,0663i
- 0,0600 - 0,0663i



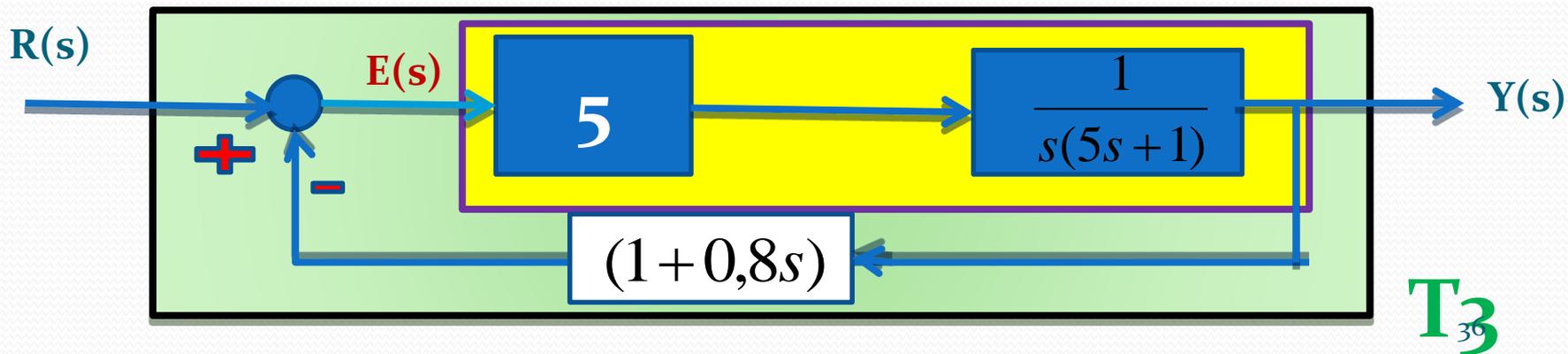
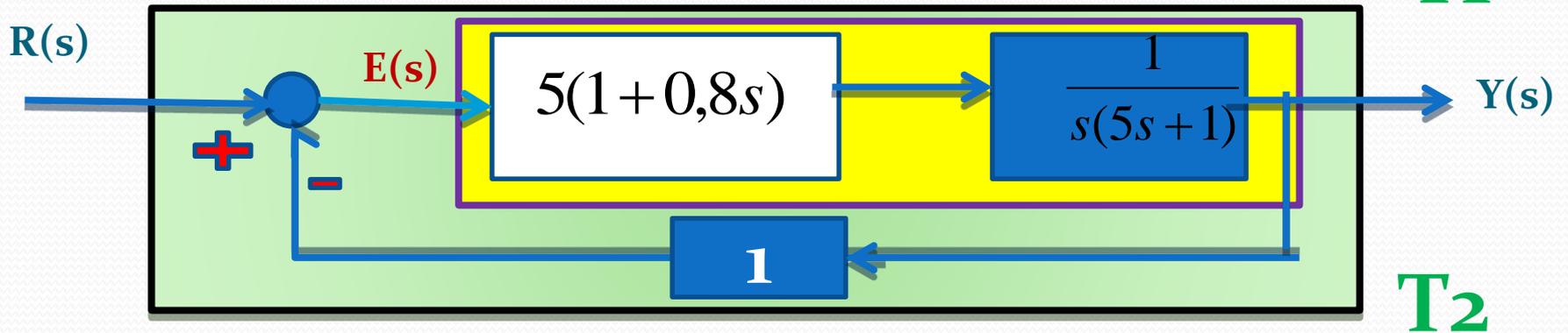
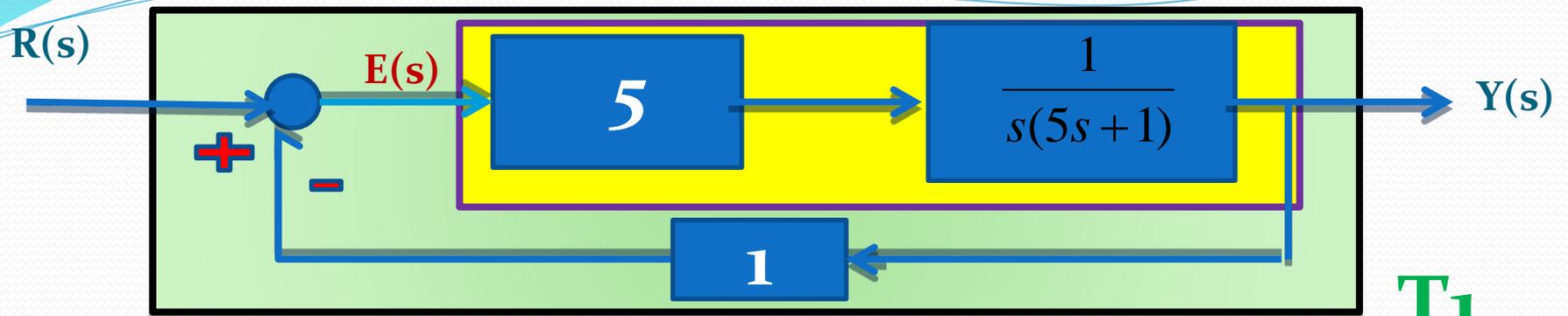
# Introdução e Movimentação de Zeros



# Introdução e Movimentação de Zeros

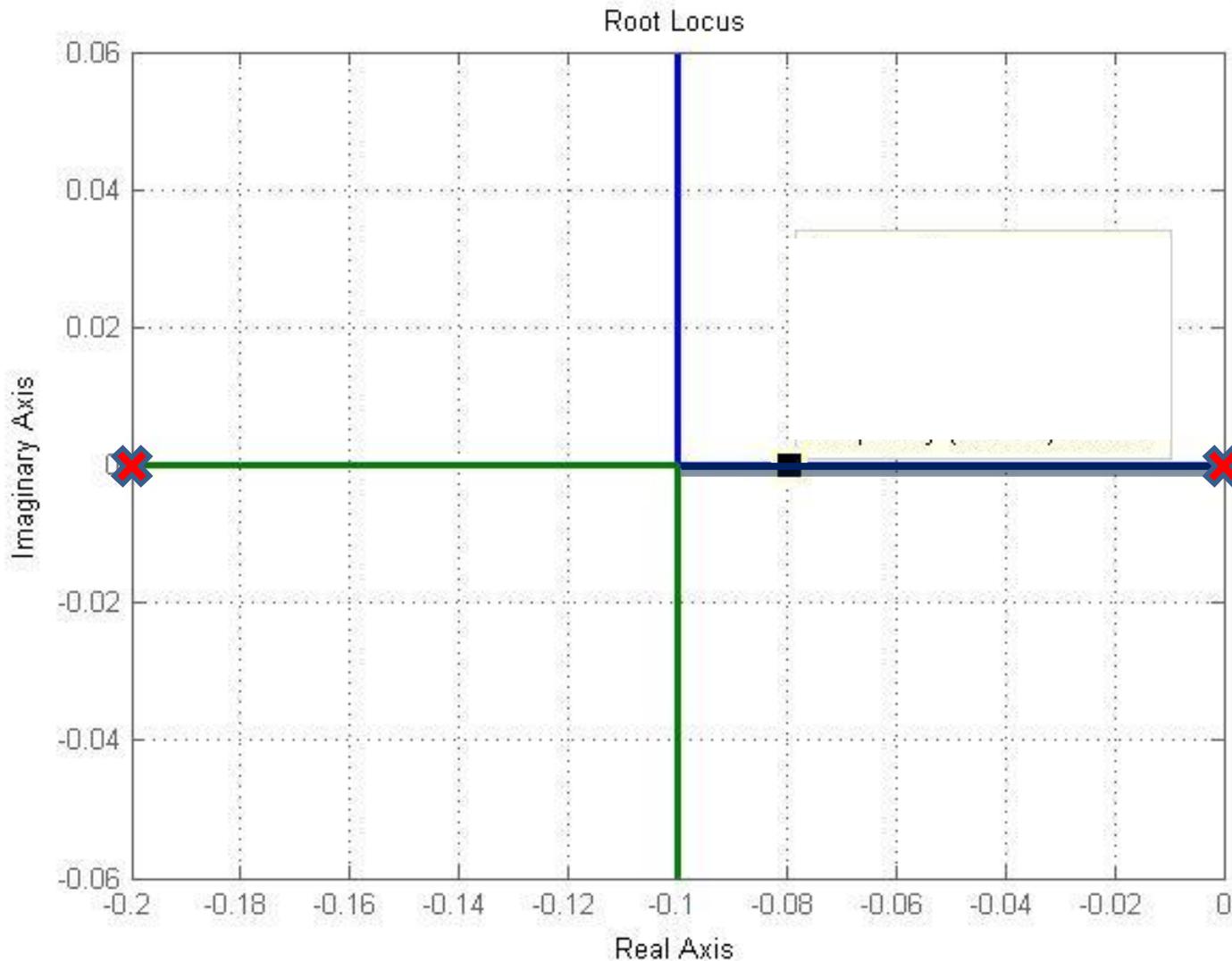


# Adição de Zeros



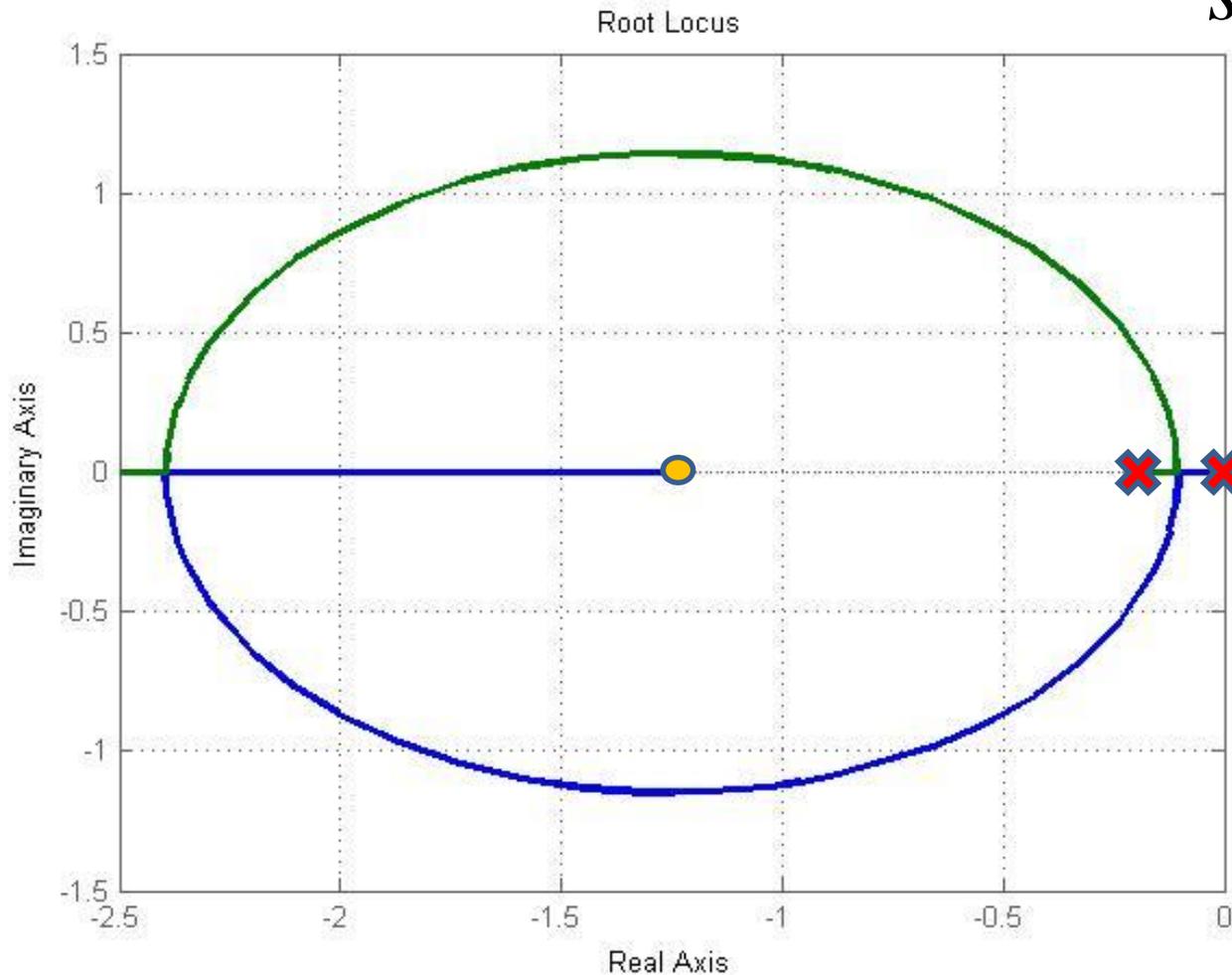
# Adição de Zero: sistema original

$$GH_1 = \frac{(1)}{s(5s + 1)} \quad (1)$$



# Adição de Zero com PD no canal direto (GH2) ou na realimentação (GH3)

$$GH_2 = \frac{(1 + 0,8s)}{s(5s + 1)} = GH_3$$



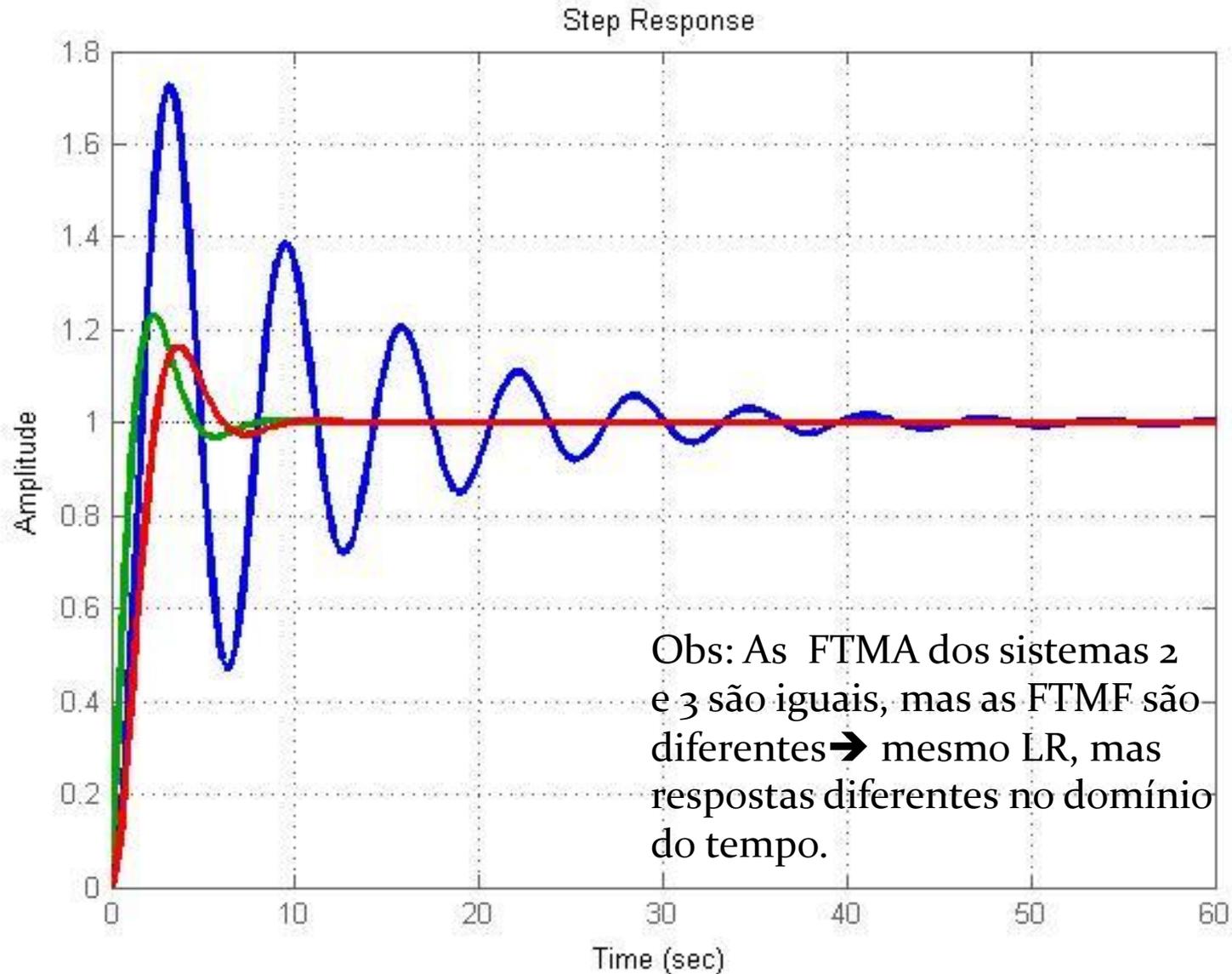
Obs: o zero “atrai” o ramo!

# Adição de Zeros

— =  $T_1$

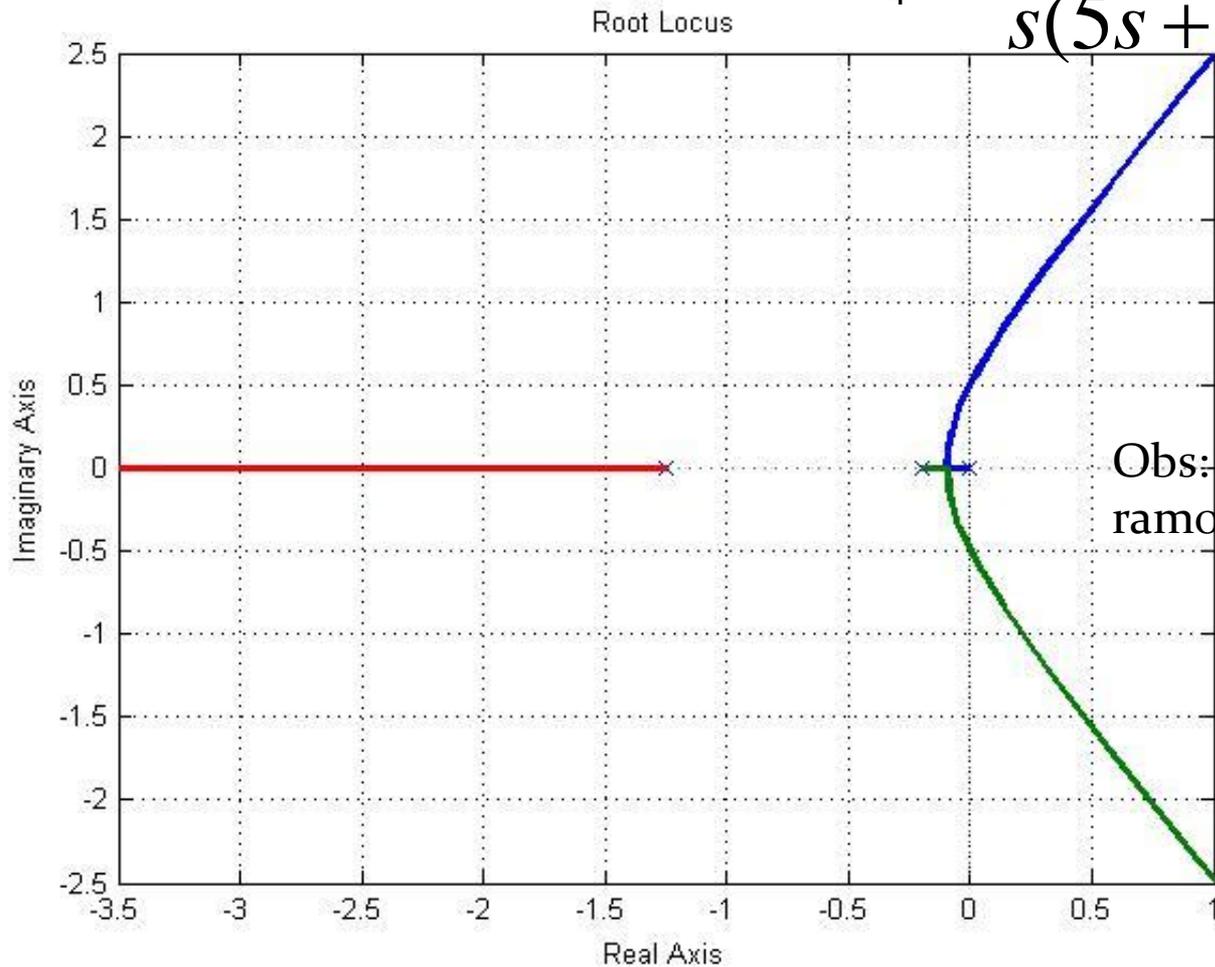
— =  $T_2$

— =  $T_3$



# Adição de polo

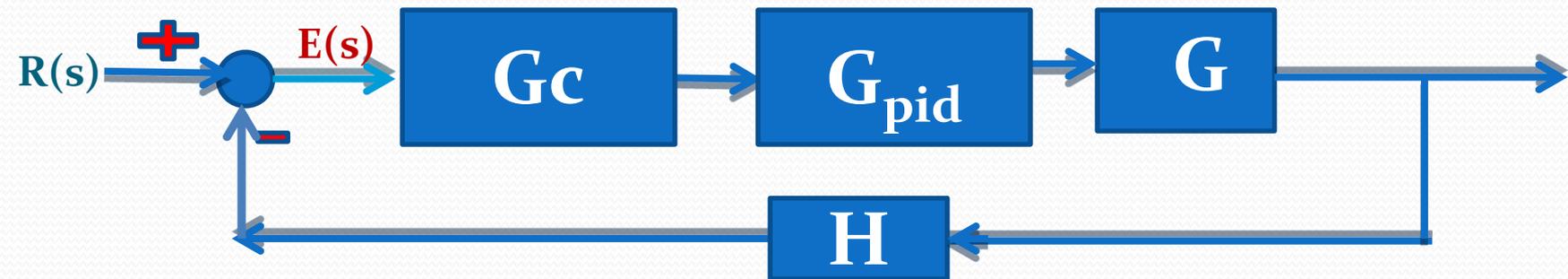
$$GH_4 = \frac{1}{s(5s+1)(1+0,8s)}$$



# Adição de polos e zeros

- Podemos adicionar polos e zeros num sistema de controlado através dos compensadores que têm a seguinte função de transferência:

$$G_c = K \frac{(s + z)}{(s + p)}$$



# Softwares

- Scilab → `evans(GH)`
- Matlab → `rlocus(GH)`

**→  $GH(s) = FTMA!!!!!!!!!!!!$**