Controle Ótimo (clássico)

- *Índices de Desempenho*
- *Seletividade*
- *ITAE*
- *Exemplos*

Controle PID

$$Gc = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)=K_p+\frac{K_i}{s}+K_d s$$

$$T=\frac{GcG}{1+GGc}$$

Índices de Desempenho

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

ótimo $\rightarrow \; e(t) = 0 \Rightarrow \quad y(t) = r(t)$

$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$ onde T é o tempo de acomodação

$$IAE = \int_0^T \left| e(t) \right| dt$$

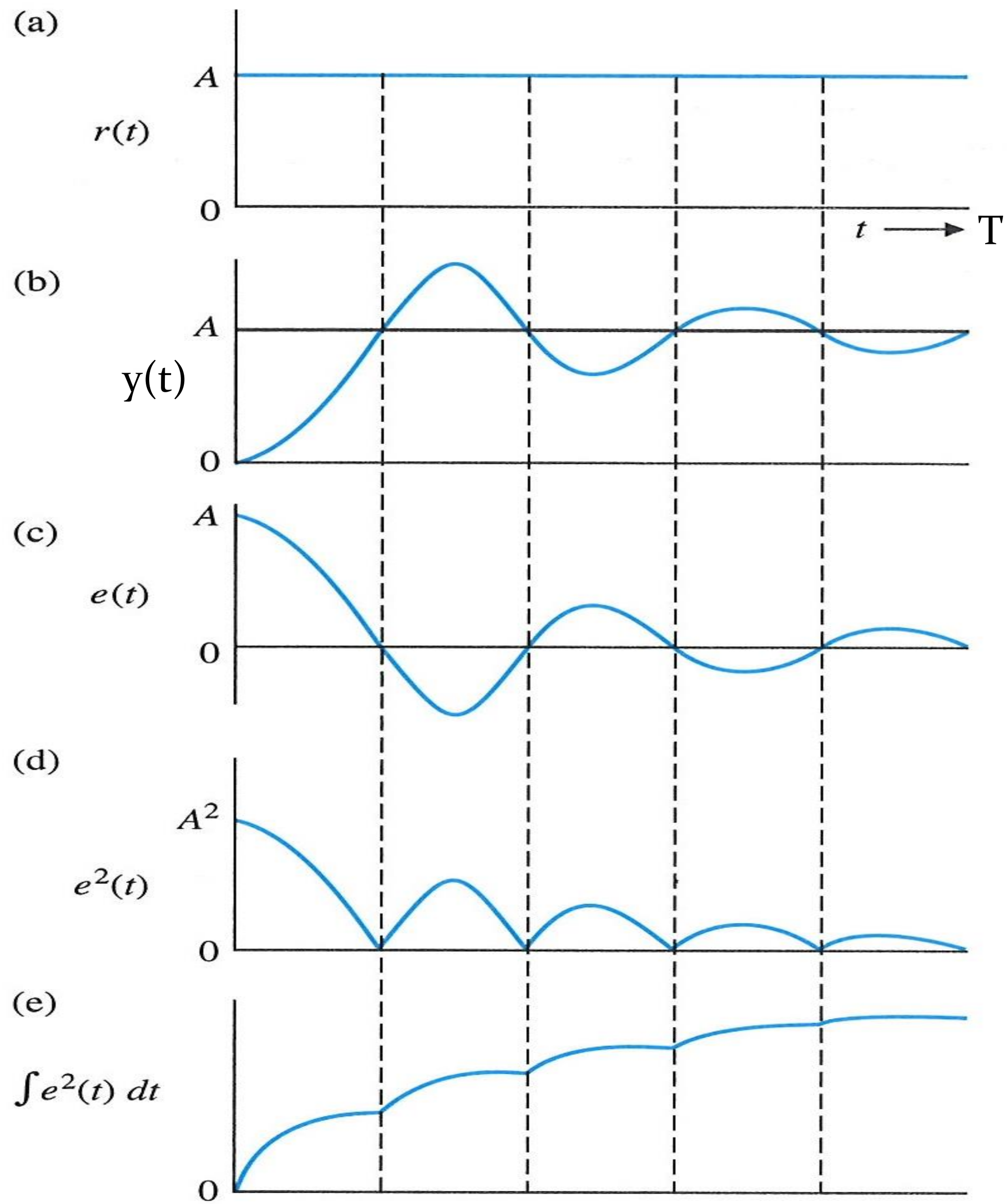
$$ITAE = \int_0^T t\left| e(t) \right| dt$$

$$ITSE = \int_0^T te^2(t)dt$$

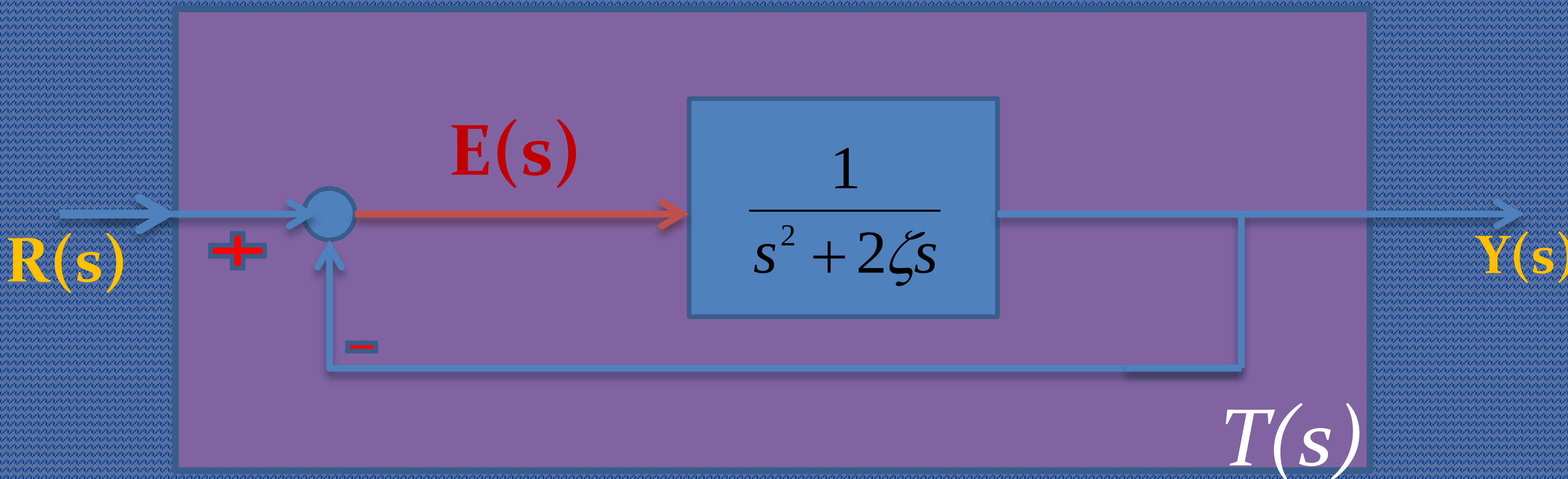
$$I = \int_0^T f\left(\mathrm{e(t), u(t), t}\right)dt$$

Índice ISE

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$$



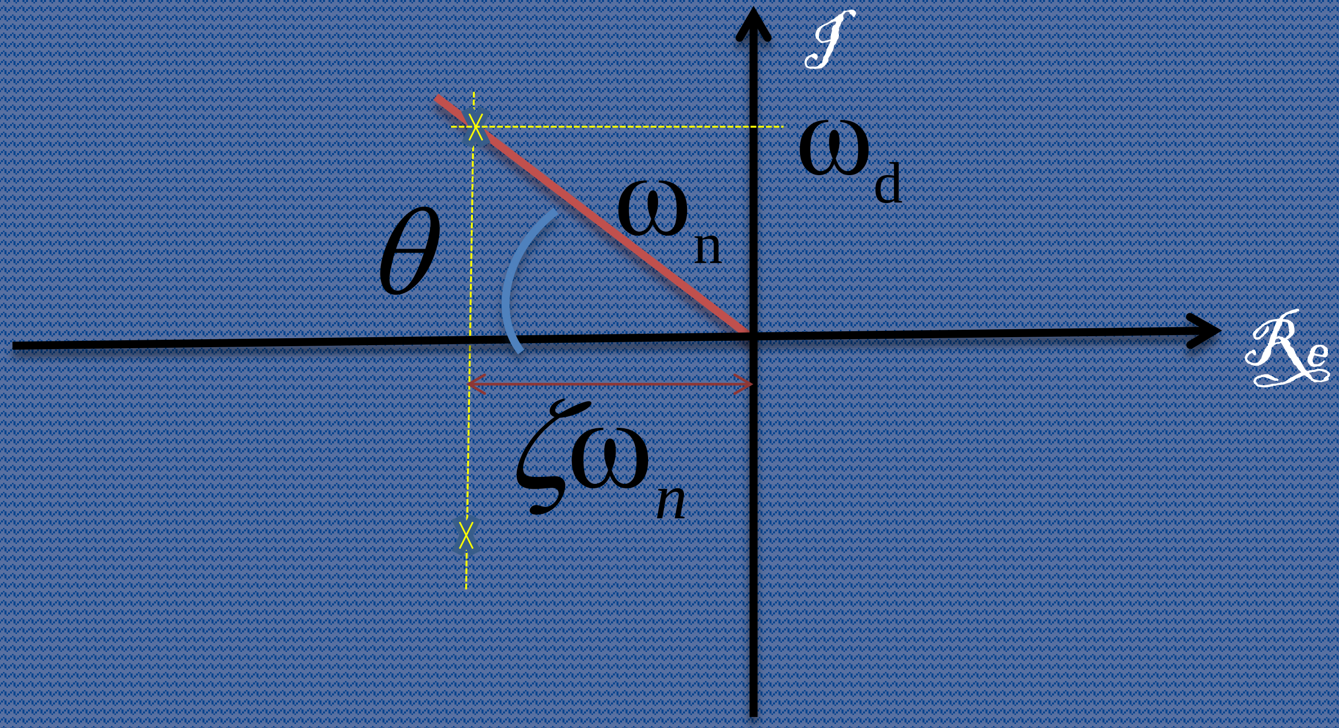
Controle Ótimo: Seletividade



$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}\Rightarrow \omega_n=1{,}0$$

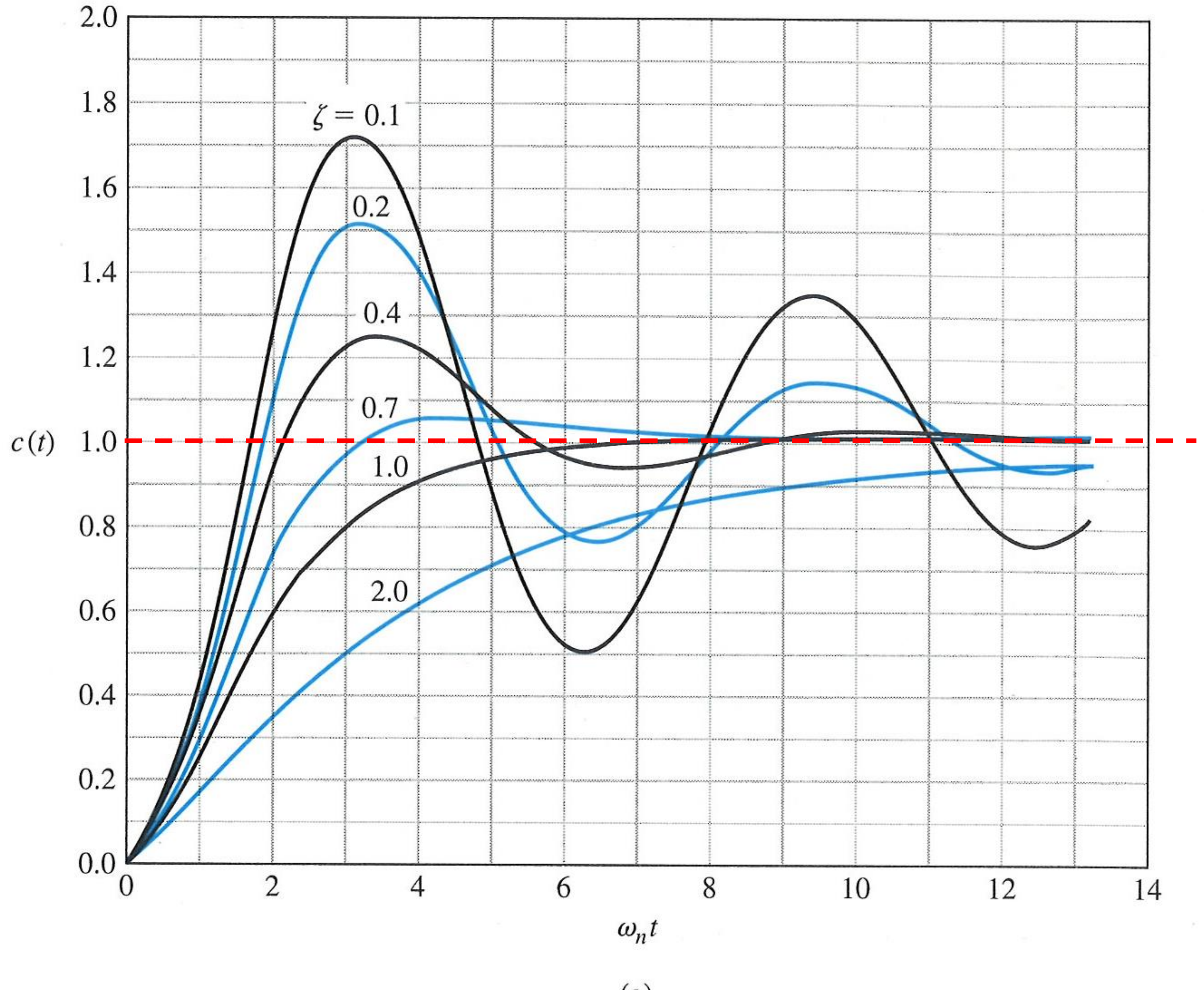
$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s^2+2\zeta s}{s^2+2\zeta s+1}\Rightarrow E(s)=\frac{s^2+2\zeta s}{s^2+2\zeta s+1}R(s)$$

MF: Planta de 2ª Ordem



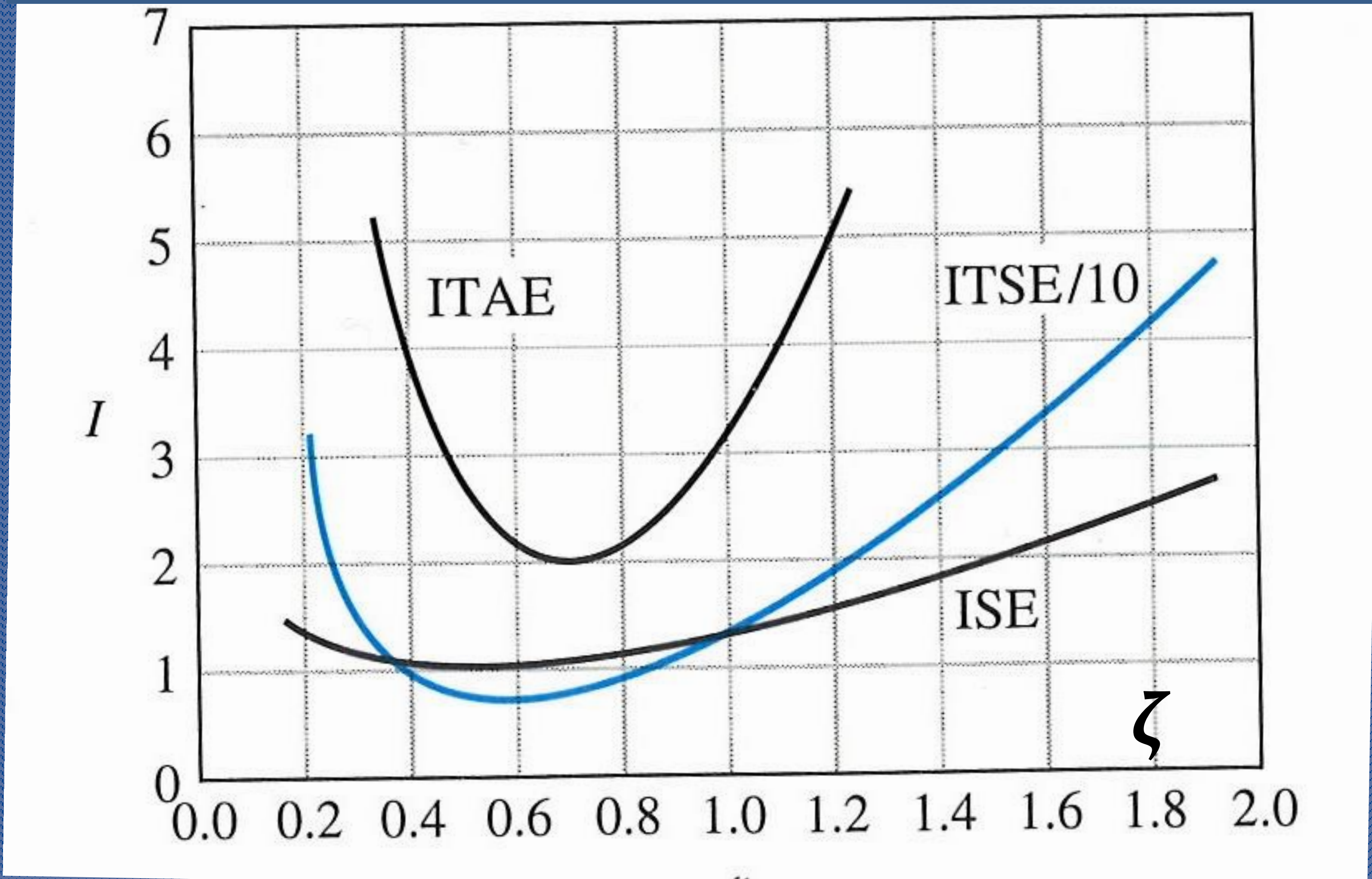
$$\text{Eq. Caract}: \; s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\;2} = 0$$

Resposta ao degrau de sistemas de 2ª Ordem



Controle Ótimo: Seletividade

- Entrada degrau, varia ζ e calcula ISE, ITAE e ITSE
  ➔depende do índice!!



Coeficientes Ótimos ITAE para MF e entrada degrau

$$T(s) = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}$$

Coeficientes Ótimos ITAE para MF e entrada rampa

$$T(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}$$

Coeficientes ITAE (degrau)

- ordem 1:

$$s+\omega_n$$

- ordem = 2, ITAE = 1,93556

$$s^2+1{,}505\,\omega_n s+\omega_n^2$$

- ordem = 3, ITAE = 3,11623

$$s^3+1{,}783\,\omega_n s^2+2{,}172\,\omega_n^2 s+\omega_n^3$$

- ordem = 4, ITAE = 4,56372

$$s^4+1{,}953\,\omega_n s^3+3{,}347\,\omega_n^2 s^2+2{,}648\,\omega_n^3 s+\omega_n^4$$

- ordem = 5, ITAE = 6,28854

$$s^5+2{,}068\omega_n s^4+4{,}499\omega_n^2 s^3+4{,}675\omega_n^3 s^2+3{,}257\omega_n^4 s+\omega_n^5$$

- ordem = 6, ITAE = 8,29536

$$s^6+2{,}152\omega_n s^5+5{,}629\omega_n^2 s^4+6{,}934\omega_n^3 s^3+6{,}792\omega_n^4 s^2+3{,}740\omega_n^5 s+\omega_n^6$$

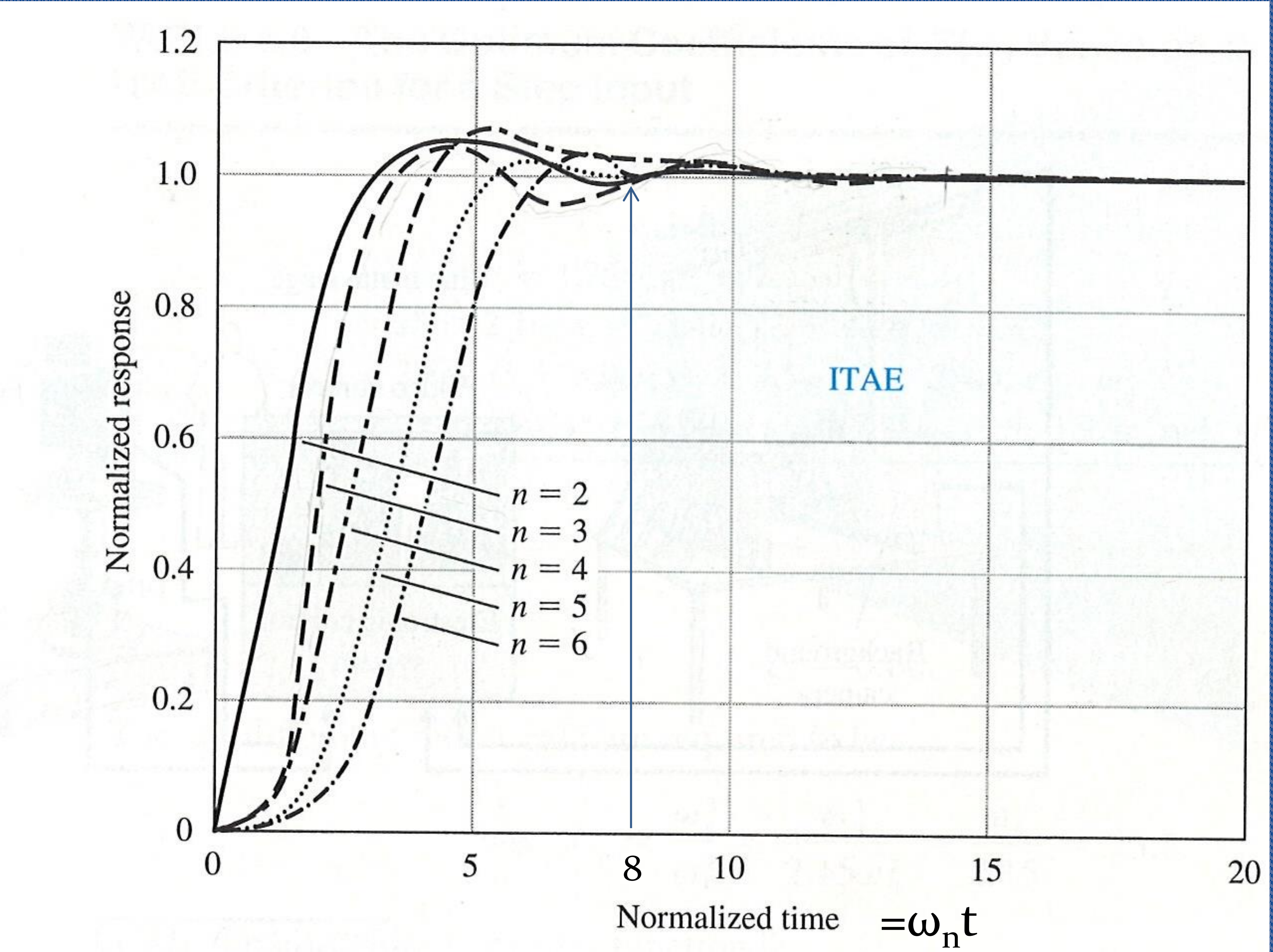
- ordem = 7, ITAE = 10,5852

$$s^7+2{,}217\omega_n s^6+6{,}745\omega_n^2 s^5+9{,}349\omega_n^3 s^4+11{,}580\omega_n^4 s^3+8{,}680\omega_n^5 s^2+ \\ +4{,}323\omega_n^5 s+\omega_n^7$$

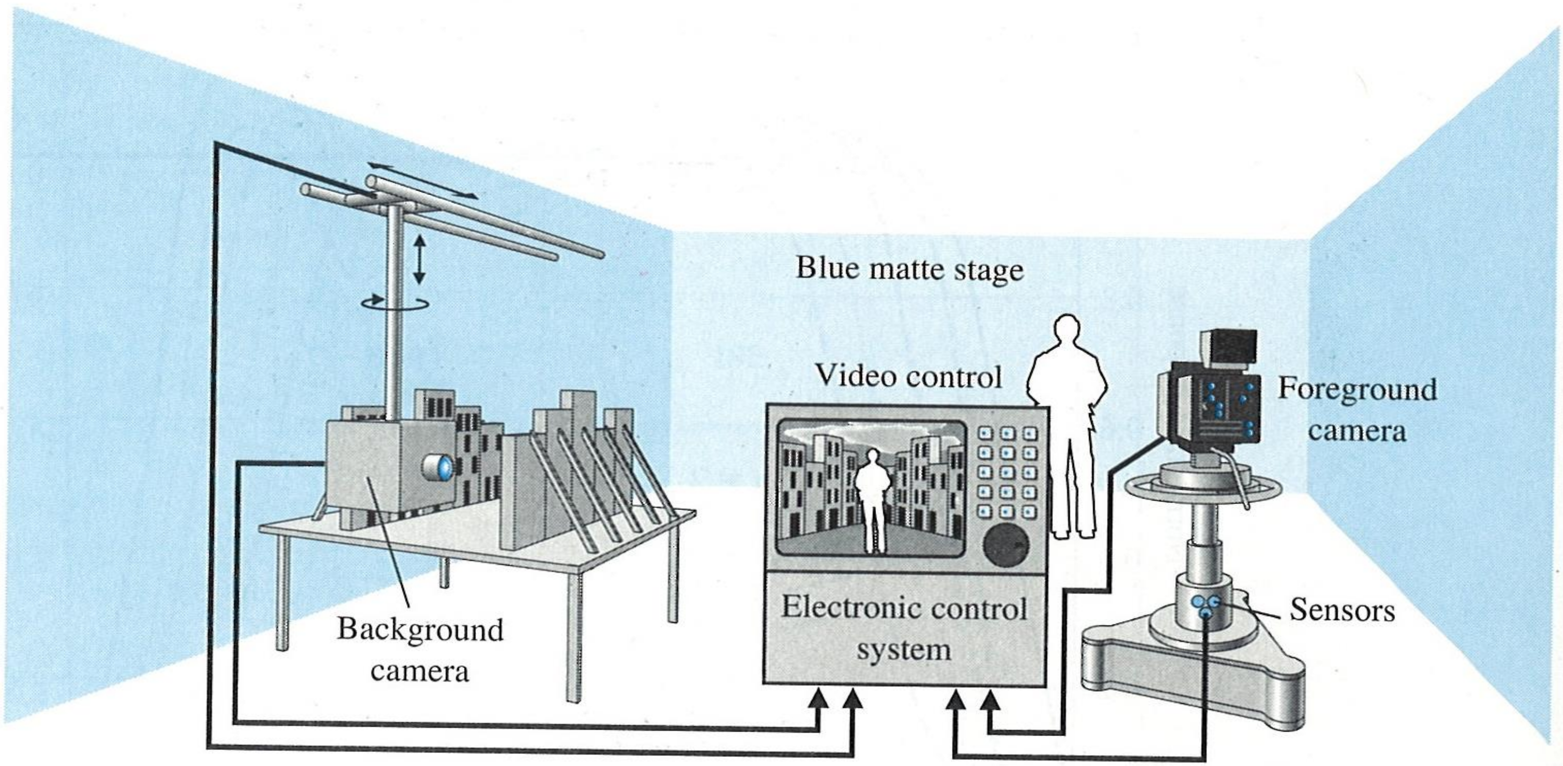
- ordem = 8, ITAE = 13,1553

$$s^8+2{,}275\omega_n s^7+7{,}849\omega_n^2 s^6+11{,}888\omega_n^3 s^5+17{,}588\omega_n^4 s^4+16{,}116\omega_n^5 s^3+ \\ +11{,}339\omega_n^6 s^2+4{,}815\omega_n^7 s+\omega_n^8$$

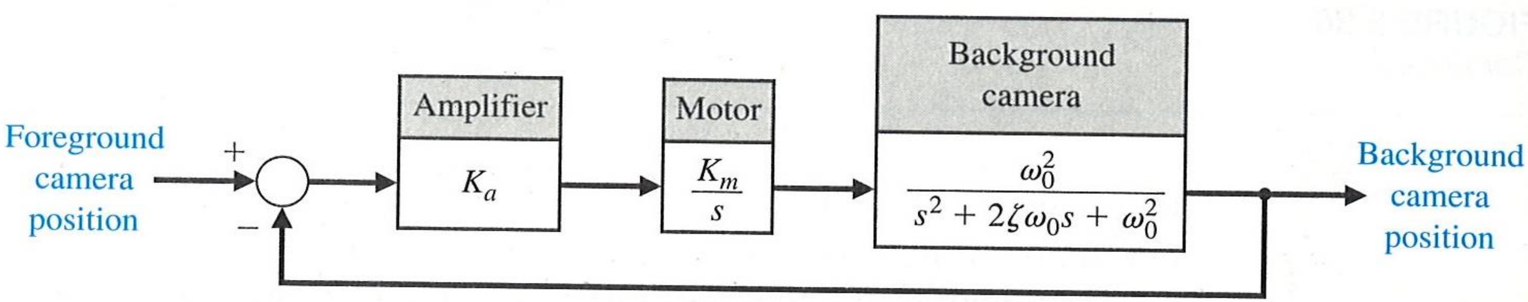
Resposta normalizada ao degrau com FT ITAE



Exemplo: controle de sincronia para duas câmeras



(a)



Solução ITAE para o problema da câmera

Fechando a malha:

$$T = \frac{K_m K_a \omega^2}{s^3+2\zeta\cdot\omega_o s^2+\omega^2 s+K_m K_a \omega_o{}^2} = \frac{K\omega^2}{s^3+2\zeta\cdot\omega_o s^2+\omega^2 s+K\omega_o{}^2}$$

- Especificações: Rapidez → Tempo de acomodação → $Ta \approx 1{,}0s$

  Precisão → Mimimizar Overshoot

- Sintonia do PID usando ITAE: (tabela n=3)
- $2\zeta\omega_o = 1{,}75\omega_n \qquad (a)$
- $\omega_o{}^2 = 2{,}15\,\omega_n{}^2 \qquad (b)$
- $K\omega_o{}^2 = \omega_n{}^3 \qquad (c)$

Obs: ω_n → frequência natural do sistema em MF (controlado)

Admitindo que ainda não se tenha o equipamento e que ele possa ser especificado:

3 equações e 4 incógnitas: $\omega_n, \omega_o, K, \zeta$

- Vamos usar as curvas de resposta ao degrau ITAE para achar ω_n:

Solução ITAE para o problema da câmera (cont.)

- n =3 → $\omega_n T_a = 8\ \ e\ \ queremos\ Ta \leq 1{,}0s$

  seja Ta = $0{,}8s$ → $\omega_n = 10 rad/s$

Engenheiro: esta frequência é possível ? ← conhecimento do sistema!

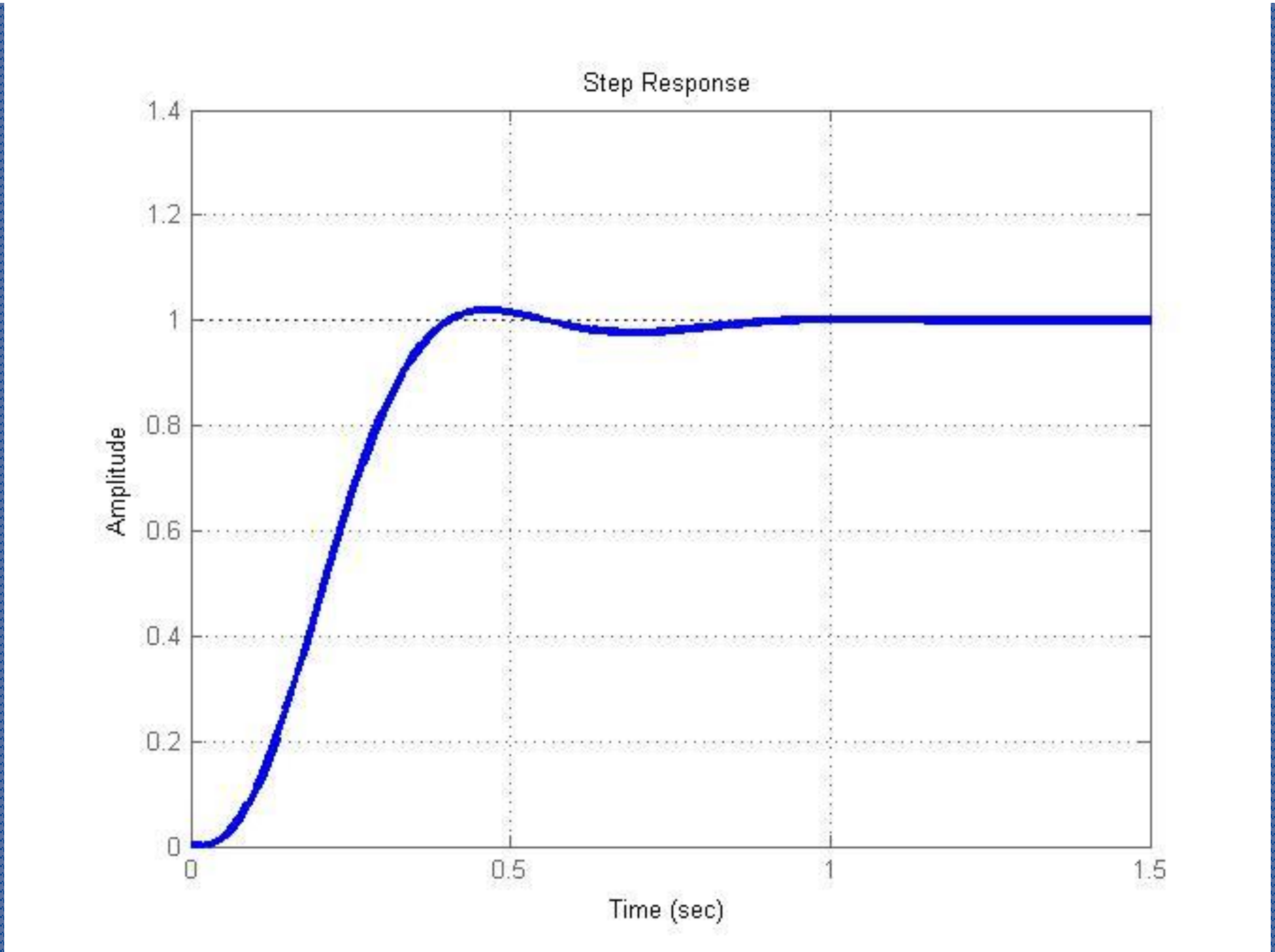
$$(b) \rightarrow \quad \omega_o = \sqrt{215} = 14{,}7\ rad/s$$
$$(a) \rightarrow \quad \zeta = 0{,}596 \cong 0{,}6$$
$$(c) \rightarrow \quad K = KaKm = 4{,}60$$

$$T = \frac{1000}{s^3 + 17{,}5s^2 + 215s + 1000} = \frac{1000}{(s + 7{,}08)(s + 5{,}21 \pm 10{,}68j)}$$

Tarefa 1): Repetir o exercício com os valores da nova tabela ITAE do slide 10

Câmeras

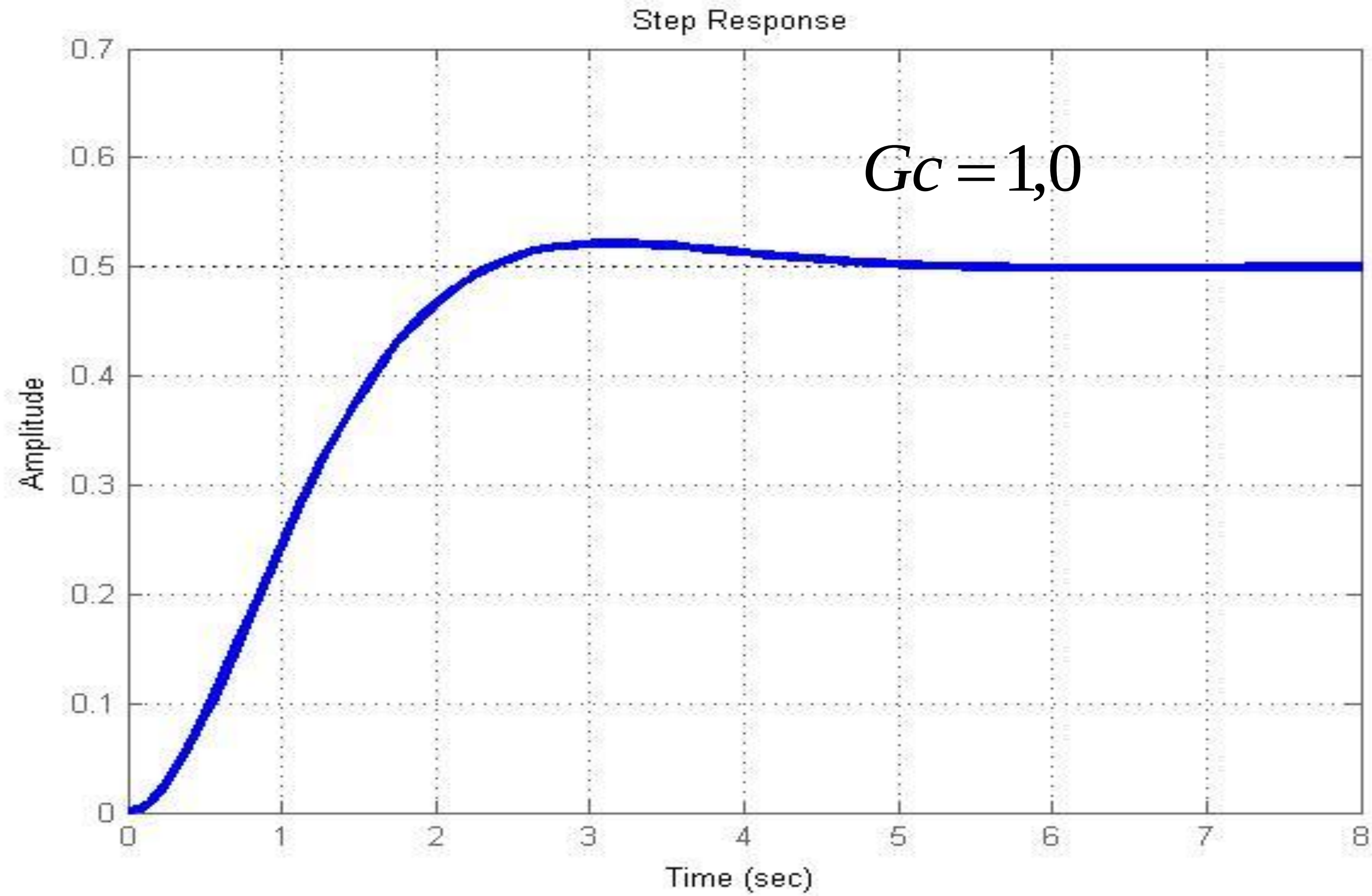
$$T=\frac{1000}{s^3+17{,}5s^2+215s+1000}=\frac{1000}{(s+7{,}08)(s+5{,}21\pm 10{,}68\,j)}$$



Sistema de Controle de Temperatura

- Planta: $G = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

Sistema em MF: Gc=1,0



Controlador PID de Temperatura

$$Gc = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

$$T = \frac{GcG}{1 + GGc} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + (2 + K_d)s^2 + (1 + K_p)s + K_i}$$

Controlador PID de Temperatura

- *Especificações: 1) Desempenho ótimo para entrada degrau*

  2) $Ta \leq 0,5\ s$
- usando a equação caraterística para n=3 do índice ITAE:

$$s^3 + 1,75\,\omega_n\,s^2 + 2,15\,\omega_n^2\,s + \omega_n^3 = 0$$

Nesta solução, vamos admitir que o sistema em malha fechada tenha um par de polos complexos dominantes ➔

O sistema acomoda em quatro ctes de tempo: $T_a = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$ *e vamos admitir:* $\zeta = 0,8$ *(próximo a 0,707)* ➔ $\omega_n = 10\ rad/s$ *(possível??)*

A equação característica fica:

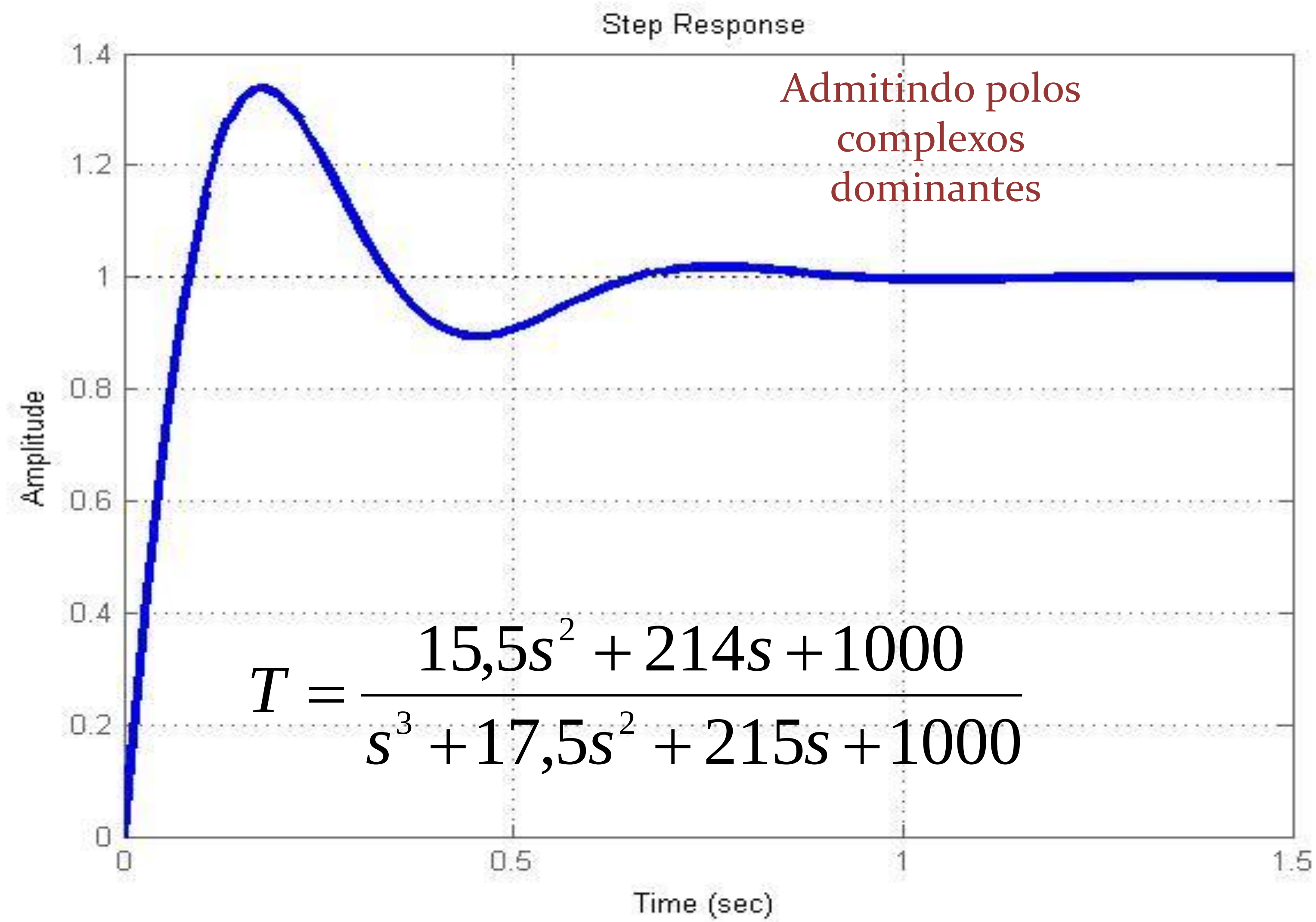
$$s^3 + 17,5\,s^2 + 215\,s + 1000 = 0$$

Igualando com a equação caracterítica do slide 17:

$Kp = 214$ $Ki = 1000$ $Kd = 15,5$

Sistema de Controle de Temperatura

- MF, ITAE, sem pré-compensador



Admitindo polos
complexos
dominantes

$$T = \frac{15{,}5s^2 + 214s + 1000}{s^3 + 17{,}5s^2 + 215s + 1000}$$

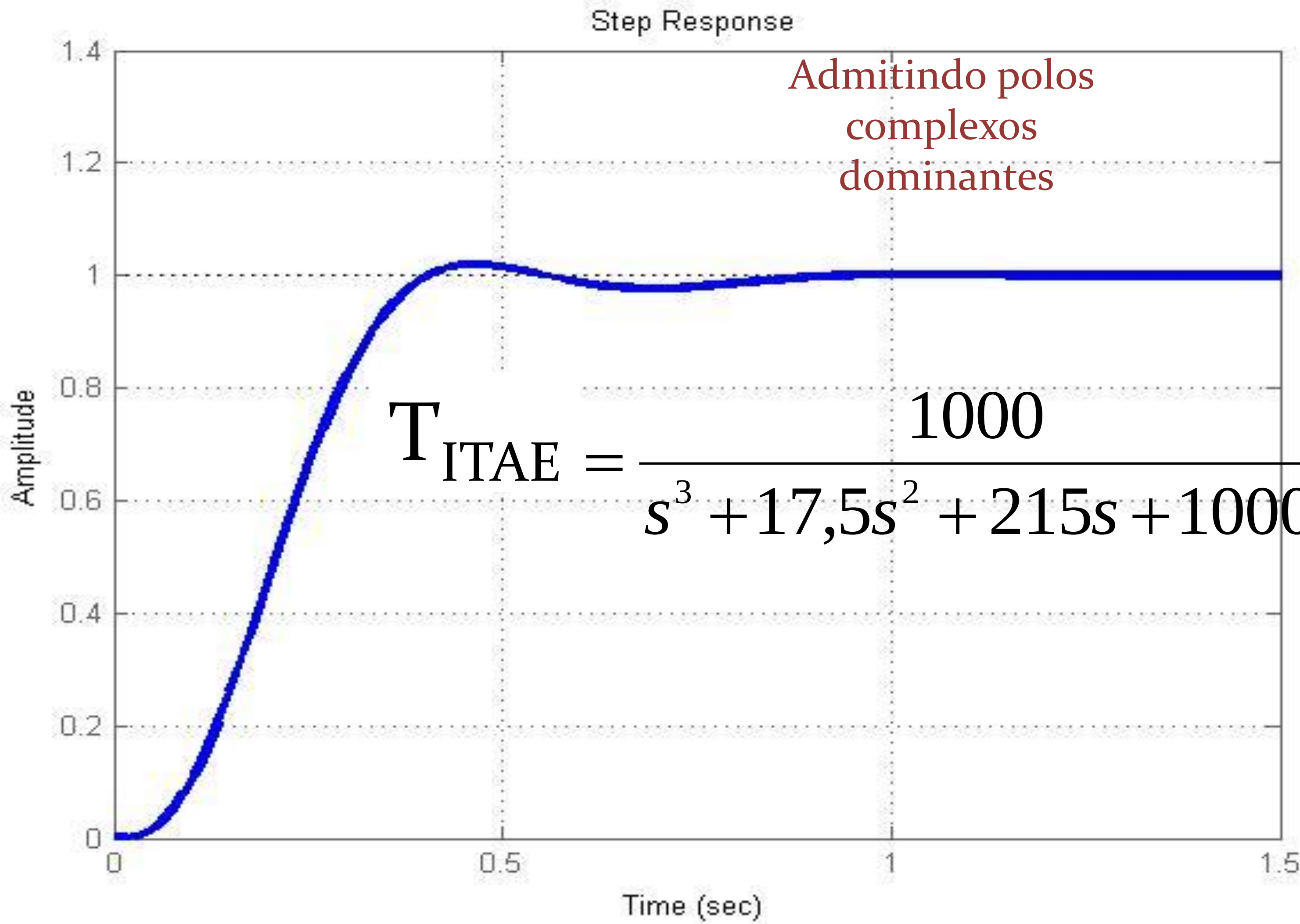
Para que o sistema tenha o comportamento ITAE, vamos utilizar um pré-filtro de tal forma a eliminar os zeros de T(s)

$$T_{ITAE} = \frac{1000}{15{,}5s^2 + 214s + 1000} \text{ x } \frac{15{,}5s^2 + 214s + 1000}{s^3 + 17{,}5s^2 + 215\, s + 1000}$$

$$\rightarrow T_{ITAE} = \frac{1000}{s^3+17{,}5s^2+215\, s+1000}$$

Sistema de Controle de Temperatura

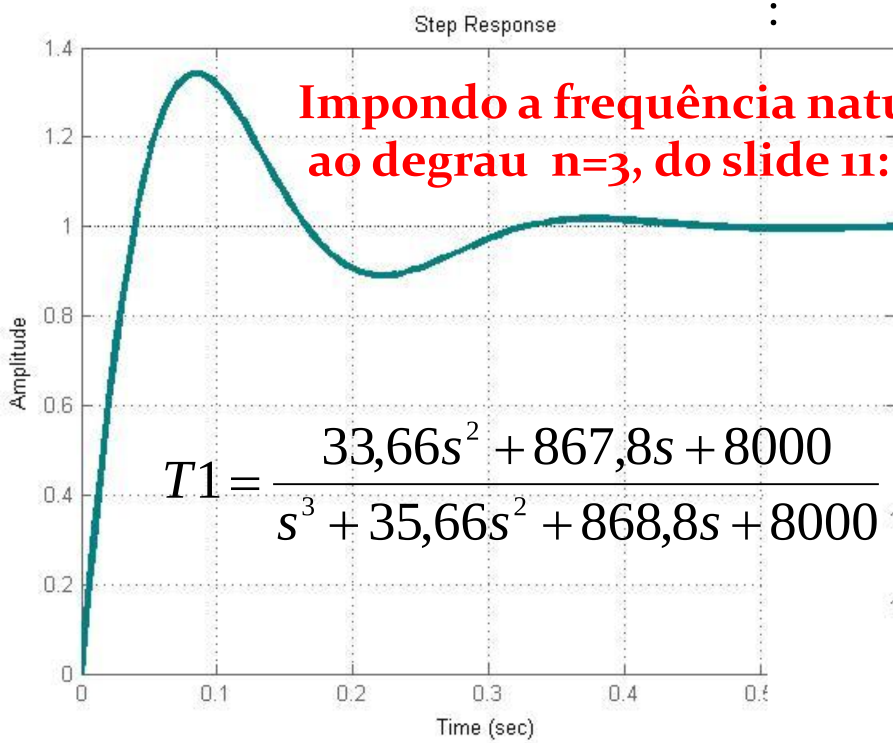
- MF, ITAE, com pré-compensador



Admitindo polos complexos dominantes

$$T_{ITAE} = \frac{1000}{s^3 + 17{,}5s^2 + 215s + 1000}$$

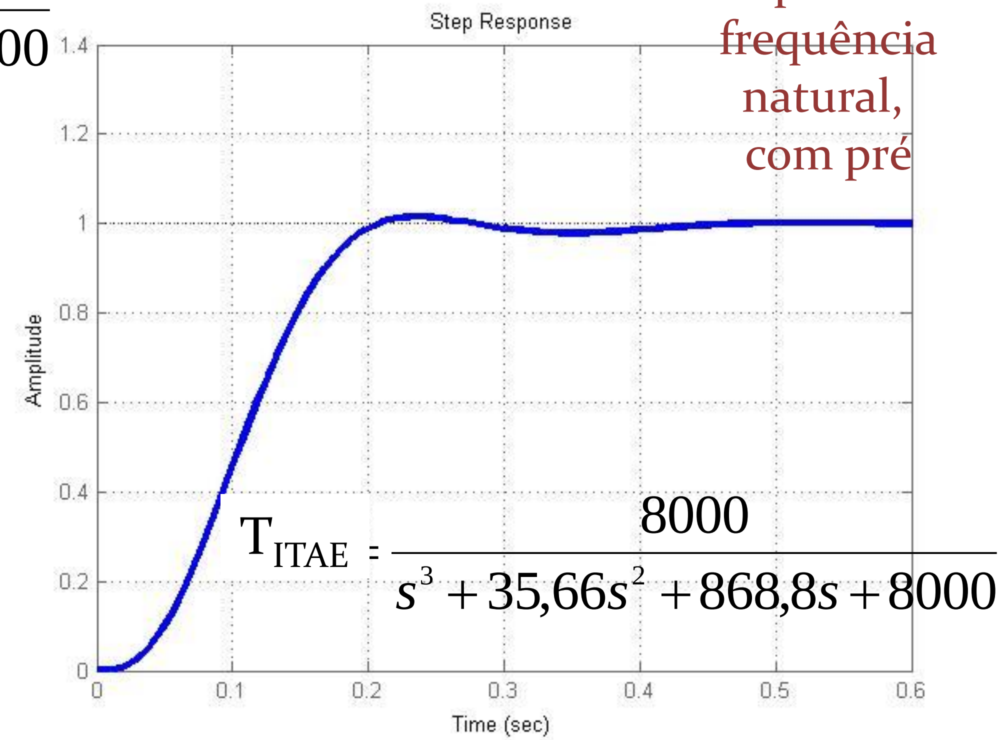
Sistema de Controle de Temperatura: SOLUÇÃO ALTERNATIVA



Impondo a frequência natural, pela resposta ao degrau n=3, do slide 11: sem pré-compensador

$$T1 = \frac{33{,}66s^2 + 867{,}8s + 8000}{s^3 + 35{,}66s^2 + 868{,}8s + 8000}$$

Impondo a frequência natural, com pré



$$T_{ITAE} = \frac{8000}{s^3 + 35{,}66s^2 + 868{,}8s + 8000}$$

Tarefa 2): Fazer o exercício usando a resposta ITAE do slide 11, com os valores da nova tabela ITAE do slide 10 e verificar os resultados apresentados aqui.