Seguidores

- INTRODUÇÃO
- RASTREAMENTO DE SINAIS CONSTANTES
  - exemplo
- RASTREAMENTO DE SINAIS VARIANTES NO TEMPO
  - exemplo
- CASO GERAL:RASTREAMENTO DE SINAIS VARIANTES NO TEMPO E DISTÚRBIO.

Introdução

- Até aqui estudamos o problema do Regulador, cujo objetivo é levar o Estado para zero: $\mathbf{x}(t_f) \rightarrow \mathbf{0}$. Os reguladores são capazes de rejeitar distúrbio muito bem, mas em geral, são ruins para seguir trajetórias ou sinais de referência na entrada. Para adicionar esta característica ao controlador é preciso modificar a lei de controle. Os Seguidores de Referência são também conhecidos como Rastreadores ou Traqueadores ("tracking"). Iniciaremos com os Rastreadores de Sinais Constantes (tipo degrau).

Rastreadores de Sinais Constantes

- Até aqui:
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \end{cases}$$

- Vamos introduzir no modelo a informação sobre o sinal de referência $\mathbf{x_r}(t)$ ou a trajetória descrita no tempo que desejamos seguir (rastrear). A maneira mais direta para isso seria adicionar termos proporcionais a $\mathbf{x_r}(t)$ na equação do controlador. Podemos tentar usar o erro de rastreamento

e=(**x**-$\mathbf{x_r}$) para gerar a ação de controle:

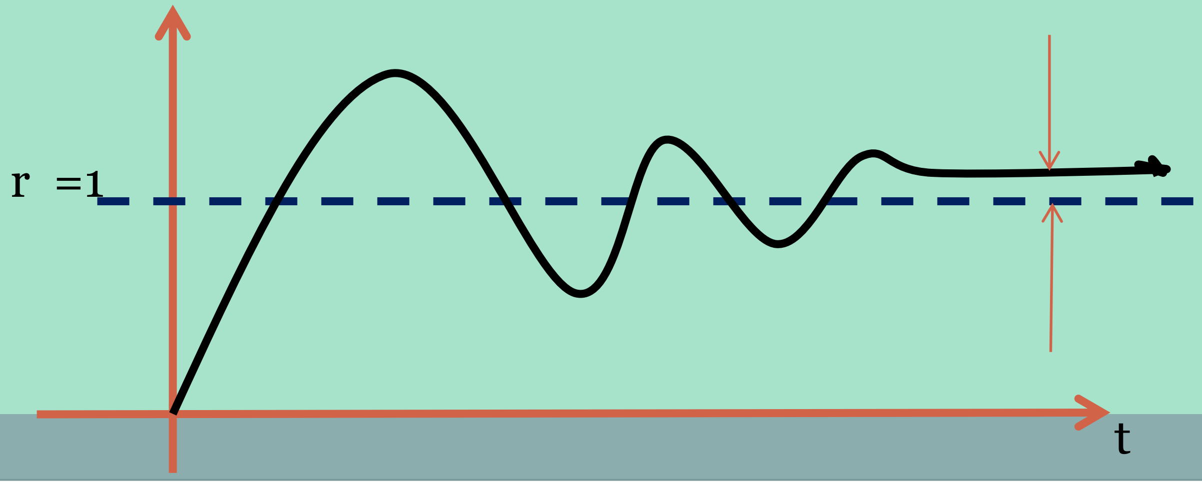
$$\Rightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x_r})$$

Rastreadores de Sinais Constantes

- A equação de malha fechada ficaria:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})}_{\mathbf{F}}\mathbf{x} + \mathbf{BK}\mathbf{x}_{\mathbf{r}}$$

- Com uma escolha adequada dos autovalores de F podemos levar o erro de rastreamento para zero. No entanto, quando $\mathbf{x_r}$ é um sinal constante, como um degrau, o sistema controlado apresenta erro em regime permanente.



Erro em RP: caso escalar → $x_r = 1$

$$\dot{x} = ax + bu \quad , \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

Seja: $u = -k(x - x_r)$ (2)

$$\Rightarrow \dot{x} = ax - bk(x - x_r) \qquad com \qquad x_r = 1$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{(a - bk)}_{f} x + bk$$

degrau

$$\dot{x} = fx + bk \quad , \quad x(0) = x_0$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$sX(s) - x_0 = fX(s) + \frac{bk}{s}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{x_0}{(s - f)} + \frac{bk}{s(s - f)}$$

Erro em RP: caso escalar → $x_r = 1$ (cont.)

Usando o TVF:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0}\left[s\,\frac{x_0}{(s-f)} + s\,\frac{bk}{s(s-f)}\right]$$

$$\Rightarrow x(\infty) = -\frac{bk}{f} \rightarrow \text{não converge para } x_r = 1$$

Mesmo impondo $x(t_f) = x(\infty) = x_r = 1$

$\Rightarrow bk = -f = -(a - bk) \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow$ *sistema sem dinâmica.*

Rastreadores de Sinais Constantes - SISO

- Para que não ocorra erro em Regime Permanente (RP) vamos calcular o Estado no RP ($\mathbf{x}_{RP}$) e a acão de controle (u_{RP}) que garanta que o erro na variável observada (y) seja nulo e vamos forçar o estado $\mathbf{x}$ e a ação de controle a assumirem estes valores. Para isso a nova lei de controle será:

$$u = u_{RP} - \mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{RP}) \qquad (3)$$

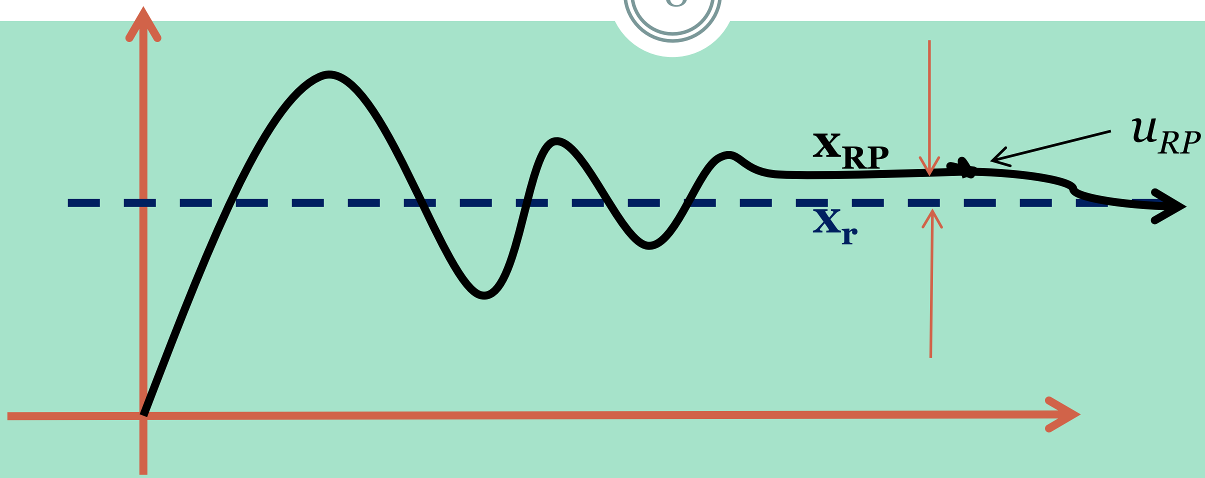
para evitar e_{RP} *para chegar a trajetória em RP*

- obs: 1) $u = -\mathbf{Kx} + \mathbf{Kx}_{\mathbf{RP}} + u_{RP}$

regulador *chegar a trajetória sem erro*

2) quando $\boldsymbol{e_{RP}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathbf{RP}}$ e $u = u_{RP}$

Rastreadores de Sinais Constantes - SISO



Quando o sistema chegar ao RP : $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \xrightarrow{RP} \begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{RP} + \mathbf{B}u_{RP} & (4) \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x}_{RP} + \mathbf{D}u_{RP} & (5) \end{cases}$$

Vamos impor que em RP o sistema tenha chegado à trajetória de referência : $y = x_r$ (6)

inicialmente escalar

Rastreadores de Sinais Constantes - SISO

- Também é razoável admitir que o Estado em RP ($\mathbf{x}_{\mathrm{RP}}$) e a ação de controle (u_{RP})) sejam proporcionais à trajetória de referência (x_r), formalmente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{RP} = \mathbf{N}_{\mathbf{x}} x_r & (7) \\ u_{RP} = \mathbf{N}_u x_r & (8) \end{cases}$$

$$\textit{Pondo}\ (6), (7)\ \text{e}\ (8)\ \text{em}\ (4)\ \text{e}\ (5):$$

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{N}_{\mathbf{x}} x_r + \mathbf{B}\mathbf{N}_u x_r \\ x_r = \mathbf{C}\mathbf{N}_{\mathbf{x}} x_r + \mathbf{D}\mathbf{N}_u x_r \end{cases}$$

$$\text{Cuja solução não trivial}\ (x_r \neq 0)\ \text{é}:$$

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{N}_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{N}_u \\ 1 = \mathbf{C}\mathbf{N}_{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{N}_u \end{cases}$$

Rastreadores de Sinais Constantes - SISO

- Ou na forma matricial: $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N_x} \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N_x} \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

  se $\mathbf{\Lambda}$ for inversível.

- Tendo $\mathbf{N_x}$ e $\mathbf{N}_u$, de (7) e (8) temos $\mathbf{x}_{\text{RP}}$ e u_{RP} e usando (3) calculamos a nova lei de controle, que garante $\mathbf{e}_{\text{RP}}$ nulo para sinais de referência constantes.

- (3) → $u = u_{RP} - \mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{RP}}) = -\mathbf{Kx} + \mathbf{Kx}_{\mathbf{RP}} + u_{RP}$

  $u = -\mathbf{Kx} + (\mathbf{KN_x} + \mathbf{N}_u)\, x_r = -\mathbf{Kx} + \mathbf{N}\, x_r$

  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \leftarrow u \\ u = -\mathbf{Kx} + \mathbf{N}x_r \end{cases}$

  regulador

  pré-alimentação

Rastreadores de Sinais Constantes - MIMO

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{RP}} = \mathbf{N}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{RP}} = \mathbf{N}_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{N}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} + \mathbf{B}\mathbf{N}_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{r}} = \mathbf{C}\mathbf{N}_{\mathbf{x}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} + \mathbf{D}\mathbf{N}_{\mathbf{u}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} \end{cases}$$

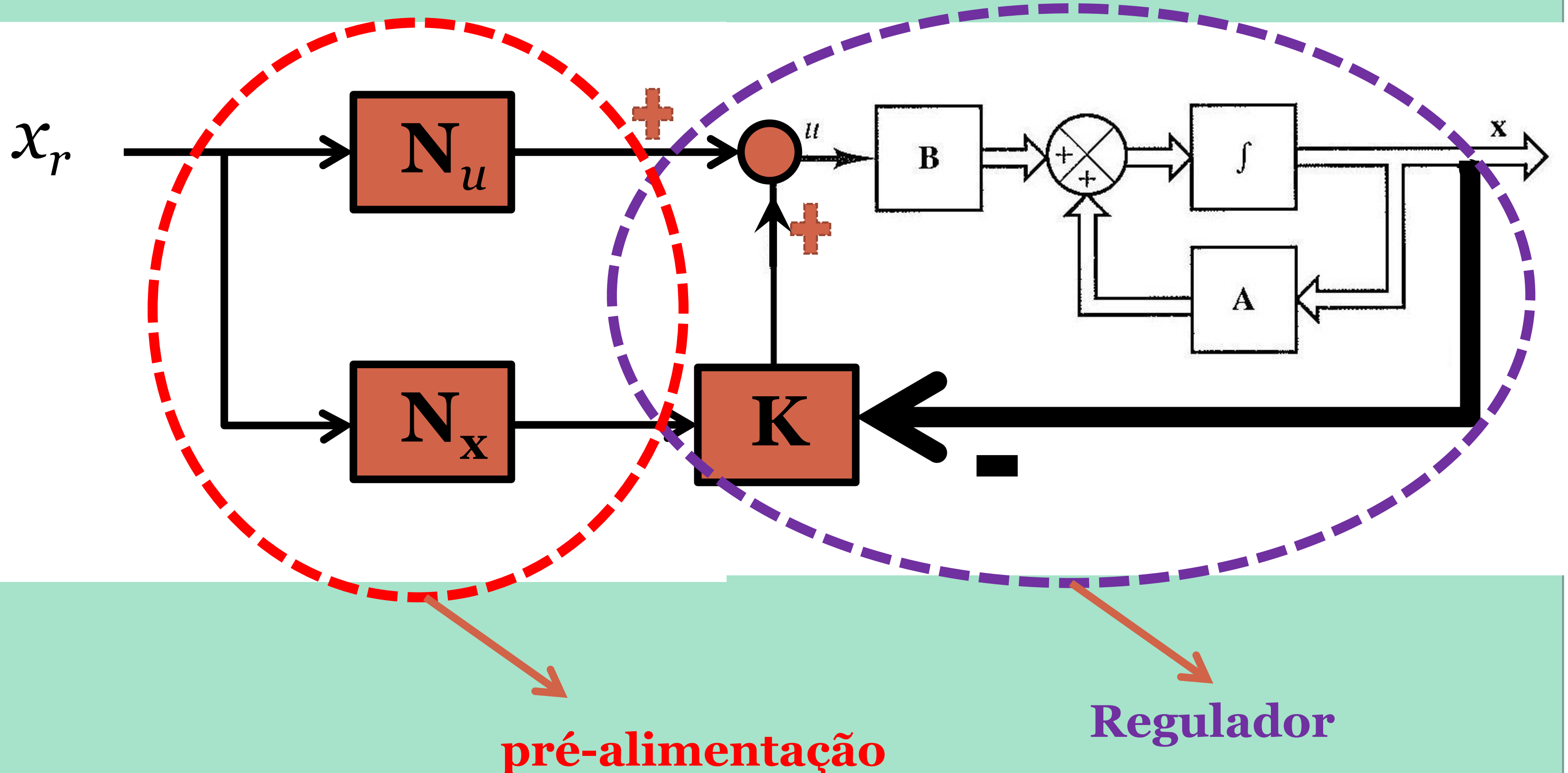
Cuja solução não trivial ($\mathbf{x}_{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$) é:

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{N}_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{N}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{N}_{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{N}_{\mathbf{u}} \end{cases}$$

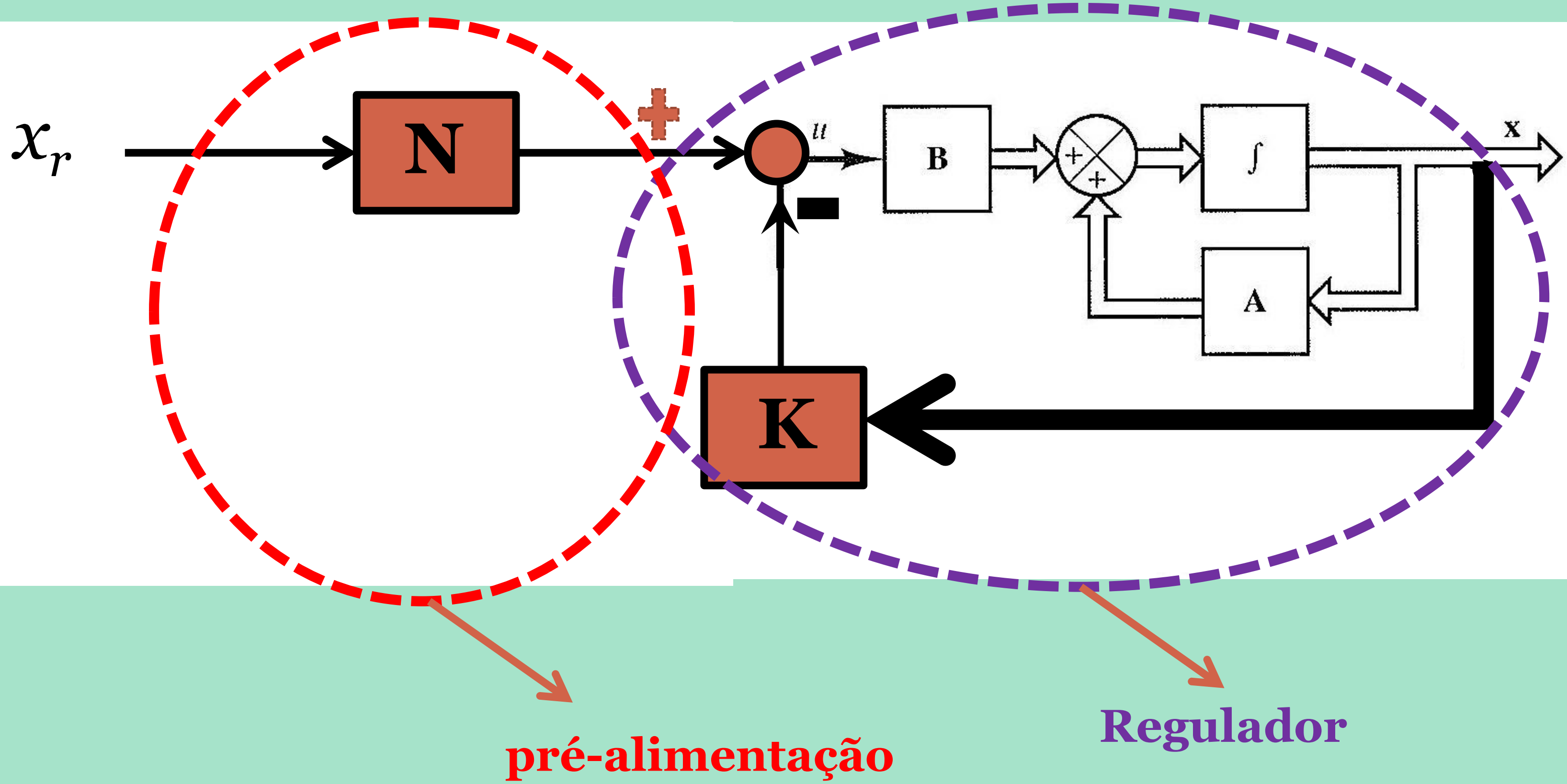
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}}{}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

se $\mathbf{\Lambda}$ for inversível.

Esquema de controle para este seguidor:



Esquema de controle para este seguidor:



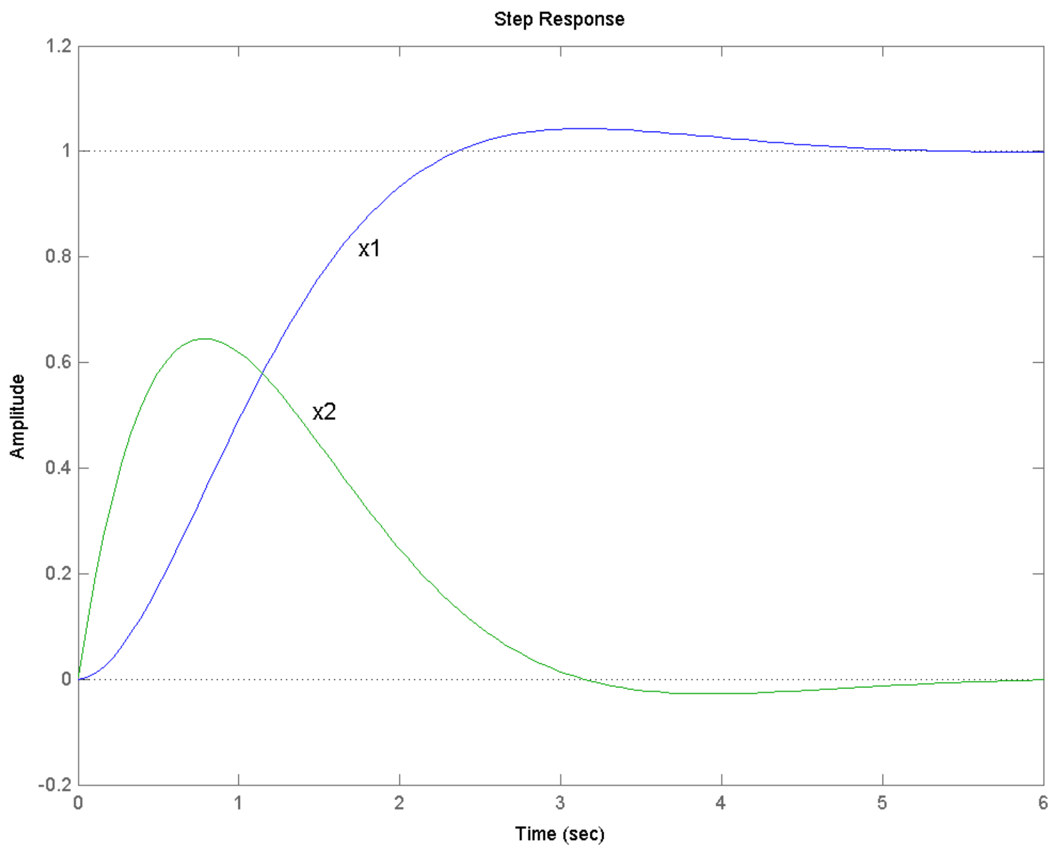
Seguidor de degrau unitário

- A=[0 1;-1 0];
- eig(A) → +-j
- B=[0 1]';
- CT=ctrb(A,B);
- rank(CT) → 2
- C=[1 0];
- D=0;
- A1=[A B;C D];
- A2=inv(A1);
- N0=[0 0 1]';
- Nxu=A2*N0; →

$$\begin{bmatrix}1\\0\\ \hdashline 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}\right\}Nx\\ \left.\vphantom{1}\right\}Nu\end{matrix}$$

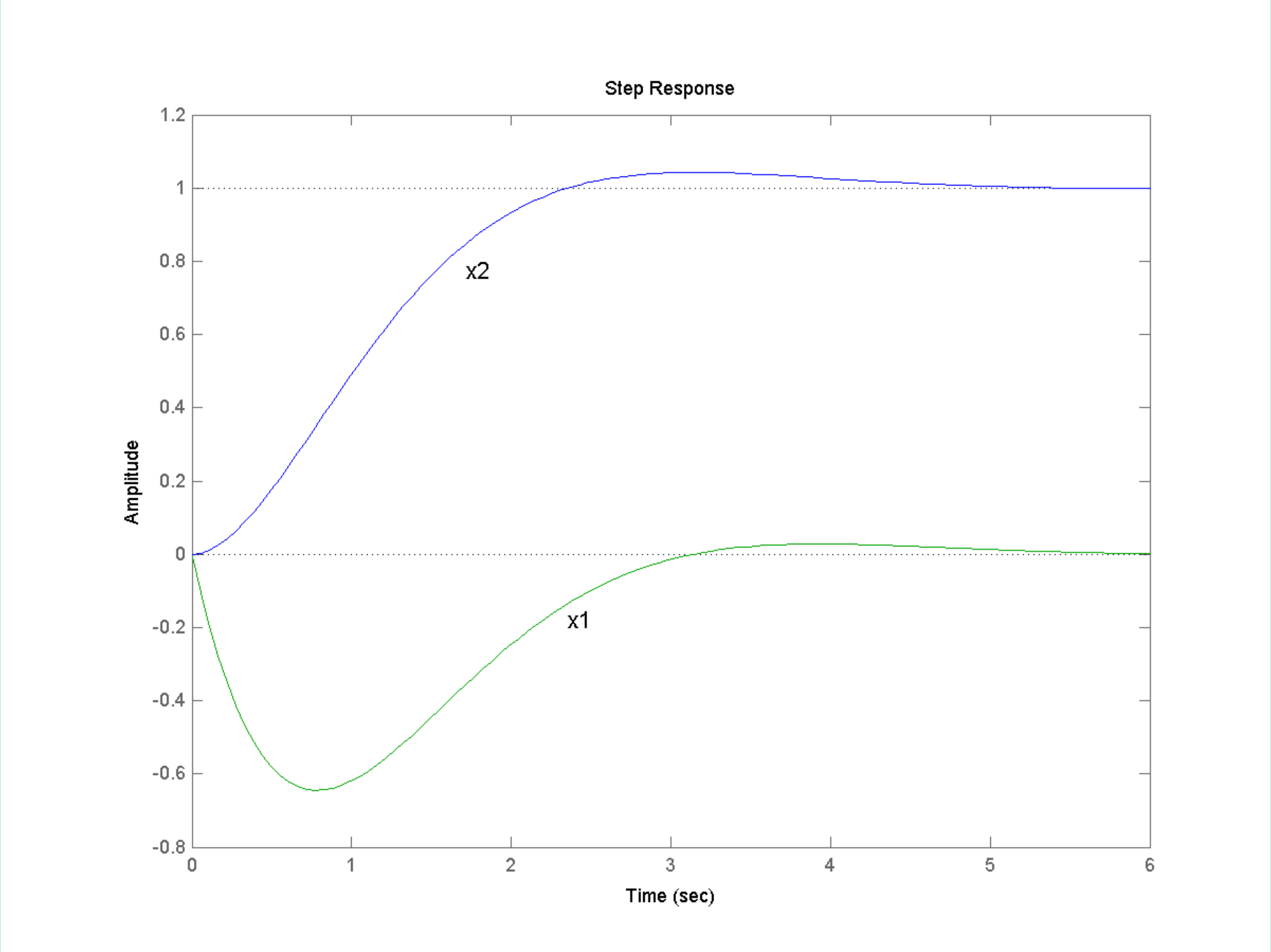
- % Regulador: p1=p2*=-1+j
- v=[-1+j -1-j];
- K=place(A,B,v);
- F=A-B*K;
- eig(F)
- Nx=Nxu(1:2);
- Nu=Nxu(3);
- urp=Nu+K*Nx;
- B2=[0 urp]';
- step(F,B2,C,D)
- hold on
- C1=[0 1];
- step(F,B2,C1,D)

Seguidor de degrau unitário



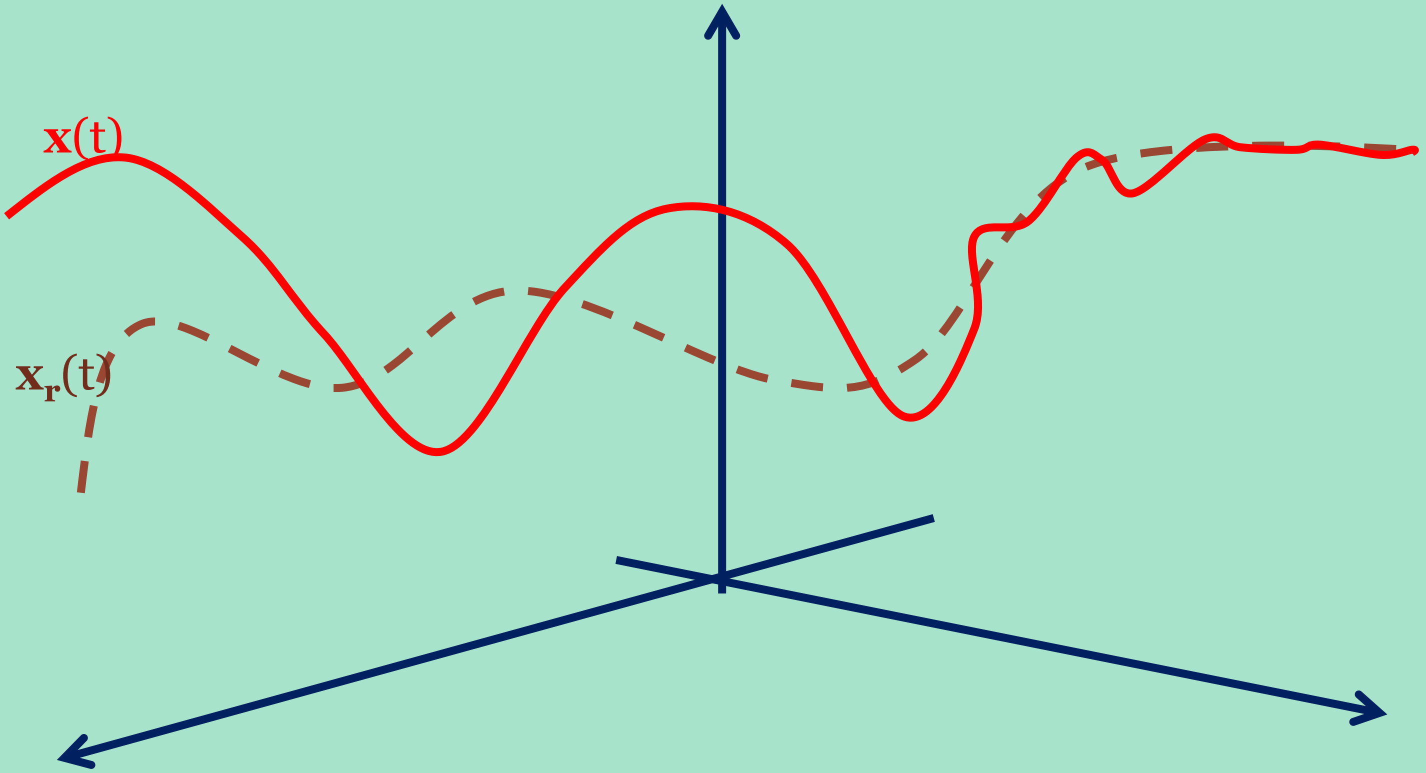
B=[0 1]’
C=[1 0]

Seguidor de degrau unitário



B=[1 0]'
C=[0 1]

Seguidor com referência variante



Seguidor com referência variante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{r} = \mathbf{A}_\mathbf{r}\mathbf{x}_\mathbf{r} \qquad (2)$$

$$Seja: \quad \mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathbf{r} \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{r}$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}_\mathbf{r}\mathbf{x}_\mathbf{r} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$De\,(3): \ \mathbf{x} = \mathbf{e} + \mathbf{x}_\mathbf{r}$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{e} + \mathbf{x}_\mathbf{r}\right) - \mathbf{A}_\mathbf{r}\mathbf{x}_\mathbf{r} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_\mathbf{r}\right)\mathbf{x}_\mathbf{r} + \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Vamos admitir por facilidade que
$\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_\mathbf{r}$
tenham a mesma dimensão.

Seguidor com referência variante

- Notação matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{e}}\\ \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{r}}\end{bmatrix}}_{\dot{\bar{\mathbf{x}}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \left(\mathbf{A}-\mathbf{A}_{\mathbf{r}}\right)\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{x}_{\mathbf{r}}\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}}\underbrace{\mathbf{u}}_{\mathbf{u}}$$

u será calculado adiante.

Seguidor com referência variante e distúrbio

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{\mathbf{w}} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{sistema} \qquad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{w}} = \mathbf{A}_{\mathbf{w}}\mathbf{x}_{\mathbf{w}} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{distúrbio} \qquad (2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{referência} \qquad (3)$$

$$Seja: \quad \mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{r}} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{e} + \mathbf{x}_{\mathbf{r}} \qquad (5)$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{r}}$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{\mathbf{w}} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} - \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}}$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(\mathbf{e} + \mathbf{x}_{\mathbf{r}}) + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{\mathbf{w}} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} - \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}}$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{\mathbf{w}} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} - \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}}$$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\mathbf{r}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{r}} \end{bmatrix}$$

Seguidor com referência variante e distúrbio

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1 & (\mathbf{A}-\mathbf{A}_\mathbf{r})\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{x}_\mathbf{w} \\ \mathbf{x}_\mathbf{r}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{ex}}$$

$$\because \qquad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{x}_{ex} \qquad (6)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{w} = \mathbf{A}_\mathbf{w}\mathbf{x}_\mathbf{w} \qquad (2)$$

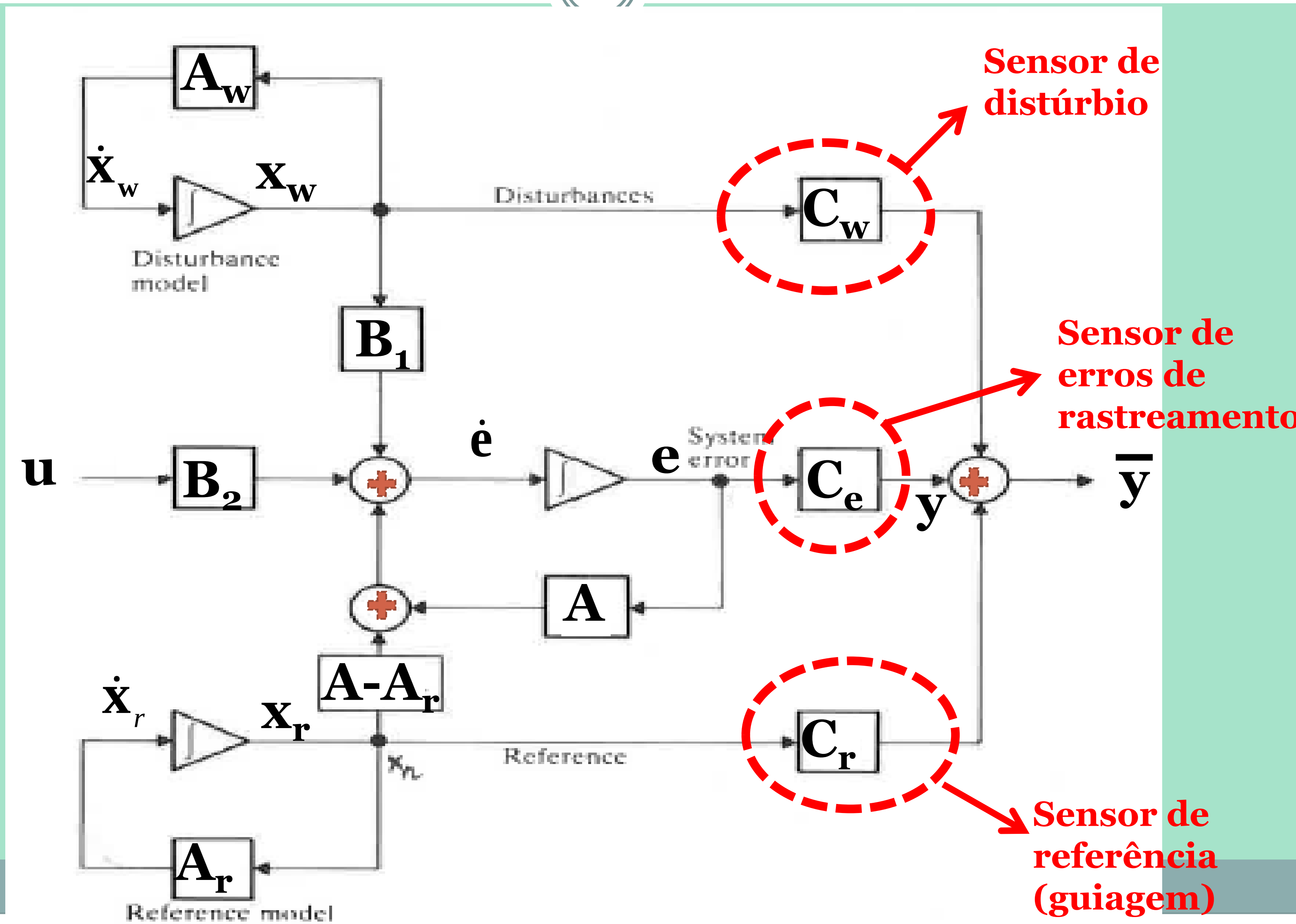
$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{r} = \mathbf{A}_\mathbf{r}\mathbf{x}_\mathbf{r} \qquad (3)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{r}\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ex}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A}_\mathbf{w} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_\mathbf{r}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0} \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{x}_\mathbf{w} \\ \mathbf{x}_\mathbf{r}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}} \qquad (7)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ex}}\end{bmatrix}}_{\dot{\bar{\mathbf{x}}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{F} \\ 0 & \mathbf{A}_0\end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{e} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{ex}}\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B}_2 \\ 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}_\mathbf{e} & \mathbf{C}_\mathbf{w} & \mathbf{C}_\mathbf{r}\end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}} = \Theta\bar{\mathbf{x}}$$

Seguidor com referência variante e distúrbio



Cálculo de $\boldsymbol{u}$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{Ae} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{Fx}_{ex}$$

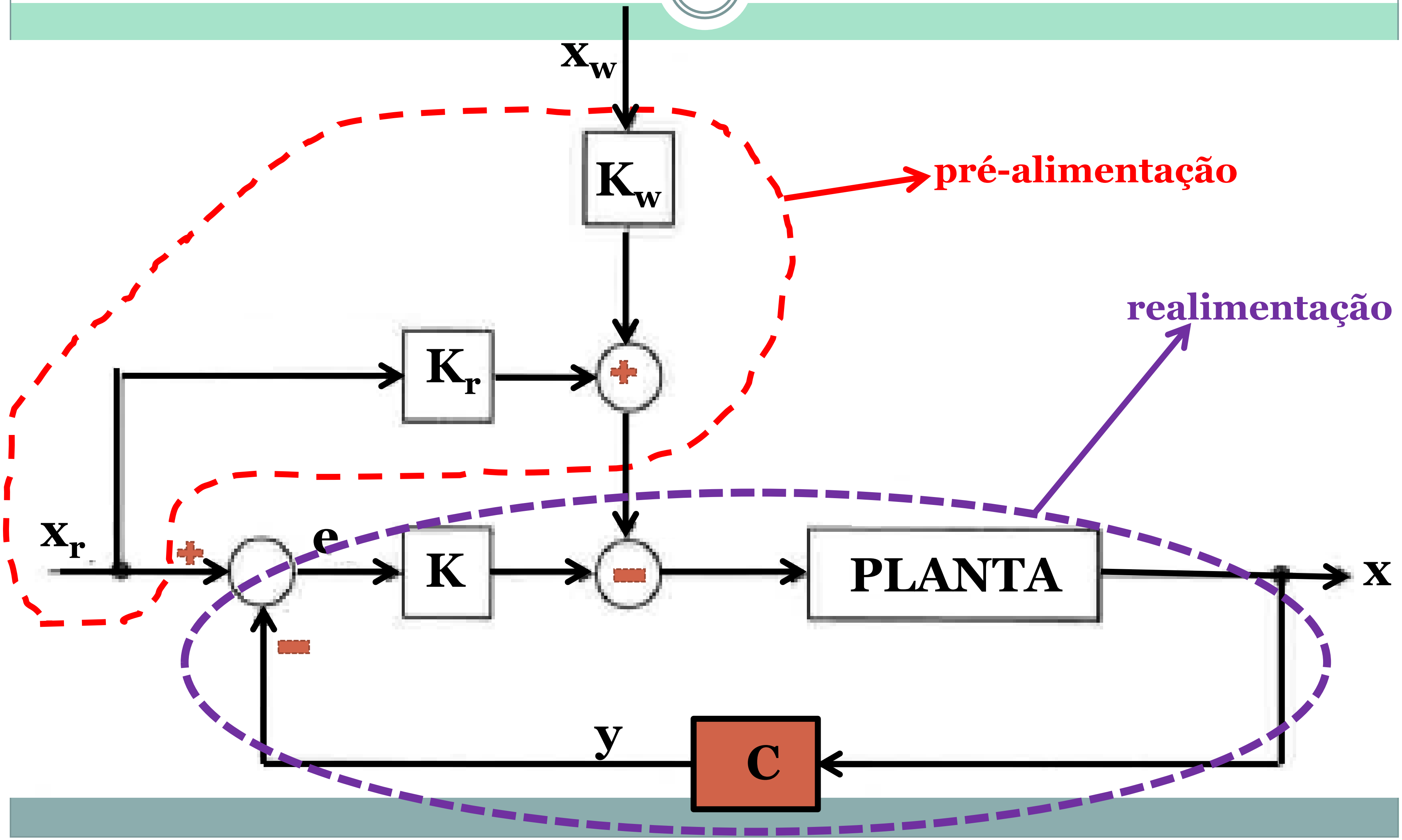
$$Seja:\ \mathbf{u} = -\mathbf{Ke} - \mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}$$

$$\therefore \mathbf{u} = \underbrace{-\mathbf{Ke}}_{\substack{\text{reali-}\\ \text{men-}\\ \text{tação}}} \underbrace{-\mathbf{K}_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} - \mathbf{K}_{\mathbf{w}}\mathbf{x}_{\mathbf{w}}}_{\text{antecipação}}$$

$$\therefore \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{Ae} + \mathbf{B}_2(-\mathbf{Ke} - \mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}) + \mathbf{Fx}_{ex}$$

$$\therefore \dot{\mathbf{e}} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})}_{\substack{\text{reali-}\\ \text{men-}\\ \text{tação}}}\mathbf{e} + \underbrace{(\mathbf{F} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}})}_{\text{realimentação}}\mathbf{x}_{ex}$$

Seguidor com referência variante e distúrbio



Cálculo de $\boldsymbol{u}$

- Em RP: $\dot{e} = 0$ *e queremos e(t)* $\rightarrow 0$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{x}_{ex} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)\mathbf{e} + \left(\mathbf{F} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\right)\mathbf{x}_{ex} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)\mathbf{e} = -(\mathbf{F} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}})\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}$$

$$\therefore \mathbf{e} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}})\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}$$

e*(t)* não pode ser anulado já que $\mathbf{e} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_{\mathbf{ex}})$

O ideal seria escolher **K** e $\mathbf{K}_{\mathbf{ex}}$ para manter o erro em zero, mas isso em geral não é possível. Temos que nos contentar com objetivos mais modestos e fazer uma combinação linear de **e**(t) ser anulada:

$$\mathbf{z} = \overline{\mathbf{C}}\,\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

$\overline{\mathbf{C}} \rightarrow$ matriz singular

$\Rightarrow \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ independentemente de $\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}$

Cálculo de $\boldsymbol{u}$

$$\mathbf{e} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}})\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}$$

$$\therefore \overline{\mathbf{C}}\mathbf{e} = \overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}}) = \mathbf{0}$$

$$\therefore \overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{F} = \underbrace{\overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{B}_2}_{se \text{ for inversível}}\mathbf{K}_{\mathbf{ex}}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{ex}} = \underbrace{\left[\overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{B}_2\right]^{-1}\overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}}_{\mathbf{W}^T}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{ex}} = \mathbf{W}^T\mathbf{F}$$

onde $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{I}$

ou seja $\mathbf{W}^T$ é pseudo-inversa à esquerda e portanto tem pseudo inversa

Observações : 1)

$$\underbrace{\mathbf{z}}_{(jx1)} = \overline{\mathbf{C}} \underbrace{\mathbf{e}}_{(nx1)}$$

$$\overline{\mathbf{C}} \rightarrow (jxn)$$

$$\left[\underbrace{\overline{\mathbf{C}}}_{(jxn)} \underbrace{\left(\mathbf{A} - \mathbf{B_2K}\right)^{-1}}_{(nxn)} \underbrace{\mathbf{B_2}}_{(nxm)} \right]$$

$m \longrightarrow$ entradas de controle

$j \longrightarrow$ medidas de erro a anular

- se $j > m$, mais incógnitas do que equações: sistema sobredeterminado => não há solução; (sistema sub-atuado)
- se $j < m$, mais equações do que incógnitas : sistema subdeterminado => há múltiplas solução; (sistema sobre-atuado)
- se $j = m$, solução única (sistema quadrado)

Observações : 2)

- Inversibilidade de: $\left[\overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{B}_2\right]$

Poderíamos pensar que a existência desta inversa depende de **K** ou seja da malha fechada, mas não é verdade. A existência desta inversa depende apenas da malha aberta. A inversa não depende de **K**, porquê a realimentação não altera os zeros de um sistema. Caso escalar, por simplicidade:

$$\left[\overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{B}_2\right]=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\therefore \left[\overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{B}_2\right]^{-1}=\frac{D(s)}{N(s)} \longrightarrow$$

Se fosse possível, variaríamos K e alteraríamos N(s), e por-Tanto os zeros do sistema!

Seja o erro em malha aberta, sem distúrbio externo:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \xrightarrow{\text{Laplace}} \mathbf{E}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{U}$$

$$\mathbf{z} = \overline{\mathbf{C}}\,\mathbf{e} \xrightarrow{\text{Laplace}} \mathbf{Z} = \overline{\mathbf{C}}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{U}$$

- Podemos mostrar que $\left|\overline{\mathbf{C}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{B}_2\right|$ possui inversa se e somente se:

$$\left|\overline{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}_2\right| \neq 0 \rightarrow \textit{malha aberta} \rightarrow \textit{independe}\,\mathbf{K}$$

Ainda, se $\mathbf{A}$ for inversível:

$\left|\overline{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}_2\right| \neq 0$ pode ser substituída por:

$$\lim_{s \to 0}\left|\overline{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}_2\right| \neq \mathbf{0} \neq \left|\overline{\mathbf{C}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_2\right|$$

obs: $s \rightarrow 0$: frequência nula (corrente contínua)

Exemplo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{\mathbf{w}} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \qquad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{w}} = \mathbf{A}_{\mathbf{w}}\mathbf{x}_{\mathbf{w}} \qquad (2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} \qquad (3)$$

$$Seja: \quad \mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{r}} \qquad (4)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1 & (\mathbf{A}-\mathbf{A}_{\mathbf{r}})\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{r}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{e} - \mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\mathbf{x}_{\mathbf{ex}} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{r}}) - \mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{r}}\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ex}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\mathbf{w}} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{r}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{ex}} = \underbrace{\left[\overline{\mathbf{C}}(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_2\right]^{-1}\overline{\mathbf{C}}(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}}_{\mathbf{W}^T}\mathbf{F}$$

Exemplo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{\mathbf{w}} + \mathbf{B}_2\left[-\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{r}}) - \mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}\right] \\ \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ex}} = \mathbf{A}_0\mathbf{x}_{\mathbf{ex}} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_{\mathbf{w}} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{x}_{\mathbf{r}} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)\mathbf{x} + \left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right]\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{r}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\mathbf{x}_{\mathbf{ex}}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)\mathbf{x} + \left[\left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right] - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\right]\mathbf{x}_{\mathbf{ex}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ex}} = \mathbf{A}_0\mathbf{x}_{\mathbf{ex}} \end{cases}$$

Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{ex}} \end{bmatrix}}_{\dot{\bar{\mathbf{x}}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right) & \overbrace{\left[\left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2\mathbf{K}\right] - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_{\mathbf{ex}}\right]}^{\mathbf{A}_{\mathbf{y}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\mathbf{0}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{ex}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{x}}(t_1) = \Phi(\Delta t)\bar{\mathbf{x}}(t_0)$$

$$\Phi(\Delta t) = e^{\bar{\mathbf{A}}\Delta t}$$

Obs: Como colocar um sinal harmônico no EE

$\delta(t) \rightarrow U(s)=1 \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$

$$sen\,\omega t \overset{Laplace}{\overbrace{\dashrightarrow}} \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

$$(s^2+\omega^2)Y(s) = \omega U(s)$$

Aplicando a transformada inversa

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega u$$

Seja:
$$\left.\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_2 \end{aligned}\right\} \dot{x}_1 = x_2 \qquad (a)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + \omega u \qquad (b)$$

Pondo (a) e (b) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} u$$

Se $u = \delta(t)$ no instante zero = fazer $x_2(0) \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$\alpha \in R$

Seguidor com referência variante e distúrbio

% Seguidor de sinal variante no tempo
A=[0 1;-1 0]
display('polos de sem controle')
eig(A)
B1=[0 1]'
B2=[0 1]'
CT=ctrb(A,B2);
display('posto da matriz de controlabilidade')
rank(CT)
C=[1 0]
D=0
Aw=[0 1; -100 0] ⟶ **senóide w=10**
Ar= [0 1; -1 0] ⟶ **senóide w=1**
C1=[1 0] ⟶ $\bar{\mathbf{C}}$

Seguidor com referência variante e distúrbio


```
v=[-1+j -1-j];
display('ganho de realimentaçao')
K=place(A,B2,v)
F=A-B2*K;
F1=inv(F);
F2=[ B1  (A-Ar)];
Ke=inv(C1*F1*B2)*C1*F1*F2;
Ax=zeros(2);
Ao=[Aw Ax;Ax Ar];
Ay=[B1  B2*K]-B2*Ke;

Ay=[Ay [ 0 0]'];
AT=[(A-B2*K)  Ay ; [0 0;0 0; 0 0;0 0]     Ao];

xTo=[1    0    1     0     1     0]';
sys=ss(AT,xTo,AT,xTo);
[y,T]=step(sys,30);
plot(T,y(:,1))
```

$\longrightarrow \mathbf{K_{ex}}$ (Ke)

$\longrightarrow \overline{\mathbf{A}}$ (AT)

Seguidor com referência variante e distúrbio