Controle Ótimo

- INTRODUÇÃO E HISTÓRICO
- DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO
- LQR (REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR)
- ÍNDICE DE DESEMPENHO QUADRÁTICO
    - Matrizes de ponderação
- MÉTODO DE PONTRYAGIN
- EQUAÇÃO DE RICCATI
- EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE RICCATI

Introdução e histórico

- Controle Linear Quadrático (LQ)-1980→:

  parte dos controle ótimos (1960→)
- Linear: planta linear no Espaço de Estado (EE)
- Quadrático: Índice de desempenho Quadrático (função objetivo): funcional dos estados (**x**) e das entradas de controle (**u**). Índice usado para otimizar o controlador.

Problema de controle ótimo:

- “ Determinar uma lei de controle que minimize um índice quadrático sujeito às restrições do sistema linear”.
- Resolveremos no domínio do tempo. Poderia ser resolvido no domínio da frequência: controle $\mathcal{H}2$.
- Vantagem do LQ: leis de controle linear fáceis de serem implementadas e analisadas (muitos resultados da Álgebra Linear)

LQR

- Inicialmente, vamos nos ater ao problema do Regulador: $\mathbf{x}(t_f) \rightarrow 0$.
- LQR: Linear Quadratic Regulator: Regulador Linear Quadrático.
- O Objetivo é minimizar o efeito do distúrbio sobre o sistema e manter o estado próximo à origem. A seguir, apresentaremos o seguidor de trajetórias.
- Preocupação com o Regime Permanente (RP):
  - Horizonte de tempo infinito: neste caso as leis de controle são funções lineares invariantes no tempo;
  - Horizonte finito: leis de controle lineares variantes no tempo (mais difícil de implementar e analisar)

LQR

- Sistema Linear:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\right\} \text{ eventualmente } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

- Índice Quadrático:

$$J = \int_0^{tf} \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{u}\right)dt \qquad \text{ou} \qquad J = \int_0^{tf} \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(t)\mathbf{u}\right)dt$$

- Problema: *minimizar* J usando $\mathbf{u}$(t)
- Interpretação de J:
  - Caso escalar:

$$J = \int_0^{tf} \left(qx^2 + pu^2\right)dt$$

Se p >>q ➔ energia de controle é penalizada fortemente (motores e atuadores pequenos, pouco consumo de combustível)

Se q >>p ➔estado penalizado fortemente (precisão de posicionamento)

sistemas amortecidos, pequenos overshoots, oscilações pequenas.

LQR

- **Q** e **P** matrizes: podemos penalizar diferentemente cada estado ou cada ação de controle.
- **Q** ≥ 0: Matriz simétrica semi-definida positiva*.
- P > 0: Matriz simétrica definida positiva.

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow \mathbf{Q} = 0 \qquad \mathbf{Q} > 0$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{P}\mathbf{u} > 0 \Rightarrow \mathbf{P} > 0 \qquad (\mathbf{P} \quad \text{pode ser invertida})$$

- Soluções do LQR:
  - ***Princípio do Mínimo de Pontryagin*** (1956)
  - Equações de Euler-Lagrange
  - Hamilton-Jacobi-Bellman (1958)
  - 2º Teorema de Liapunov (1890)

*Uma matriz é (semi)definida positiva se dos seus menores da diagonal principal têm determinante (nulo ou positivo)positivo.

LQR: Método de Pontryagin

- Transforma o problema de controle num problema de otimização.
- Hamiltoniana: onde aparecem o funcional a ser minimizado e as restrições do problema:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{u},t) = \underbrace{\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{P}\mathbf{u}}_{\dot{\mathbf{J}}} + \boldsymbol{\lambda}^T(\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}}_{\dot{\mathbf{x}}})$$

$\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor de multiplicadores de Lagrange

LQR: Método de Pontryagin

- Este princípio estabelece que o controle ótimo e as trajetórias de estado devem satisfazer três equações:

$$1)\quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^{T}}; \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \rightarrow \textbf{condição inicial}$$

$$2)\quad -\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{T} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}; \qquad \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{t}_f) = 0 \rightarrow \textbf{condição final}$$

$$3)\quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

$$1) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\,; \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \rightarrow \textbf{condição inicial}$$

$$2) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{T}\boldsymbol{\lambda}\,; \qquad \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{t}_f) = 0 \rightarrow \textbf{condição final}$$

$$3) \Rightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{T}\boldsymbol{\lambda}$$

LQR: Método de Pontryagin

$$\mathbf{(3) \rightarrow (1):}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}}_{\substack{\textbf{matriz} \\ \textbf{Hamiltoniana}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \rightarrow \textbf{condição inicial} \\ \rightarrow \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{t}_f) = \mathbf{0} \rightarrow \textbf{condição final} \end{array}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$Seja: \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\therefore \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{x} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\overbrace{\mathbf{R}\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\overset{(2)}{=} -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\overbrace{\mathbf{R}\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\lambda}}$$

LQR

- Equação diferencial de Riccati (Conde Jacopo Riccati – matemático veneziano: 1676-1754):

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{R}(t_f)\mathbf{x}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f)=0$$

$$-\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{RA} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} + \mathbf{Q} - \mathbf{RBP}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} \quad ;\mathbf{R}(t_f) = \mathbf{0}$$

- Equação não-linear de primeira ordem que deve ser resolvida regressivamente no tempo (backwards) a partir de $\mathbf{R}(t_f)=0$.
- Solução de horizonte infinito: $\mathbf{u}^o = -\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}}_{\mathbf{K}}\mathbf{x} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$

Horizonte finito→ $\mathbf{u}^o(t) = -\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t)}_{\mathbf{K}(t)}\mathbf{x}(t)$

LQR

- Equação Algébrica de Riccati: sob condições bastante fracas: $\mathbf{R}(t) \rightarrow \mathbf{R}$ (matriz constante)

$$\mathbf{RA} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} + \mathbf{Q} - \mathbf{RBP}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

- Solução de horizonte infinito:

$$\mathbf{u}^{o}(t) = -\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}}_{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

- Scilab: comando ricc($\mathbf{A},\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}},\mathbf{Q}$) $\rightarrow$ $\mathbf{R}$
- Matlab: comando lq($\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Q},\mathbf{P}$) $\rightarrow$ $\mathbf{K}$

LQR

- Condições Necessárias e Suficientes (fracas) para a validade da ARE:

i. O par (**A,B**) deve ser estabilizável (os modos instáveis são controláveis e os modos incontroláveis são estáveis);

ii. **P > 0** ;

iii. **Q ≥ 0** ou $\mathbf{Q=C^TC}$ (**Q** pode ser fatorada) e o par (**A,C**) deve ser detectável (os modos instáveis são observáveis e os modos não observáveis são estáveis).