Controlabilidade e Observabilidade

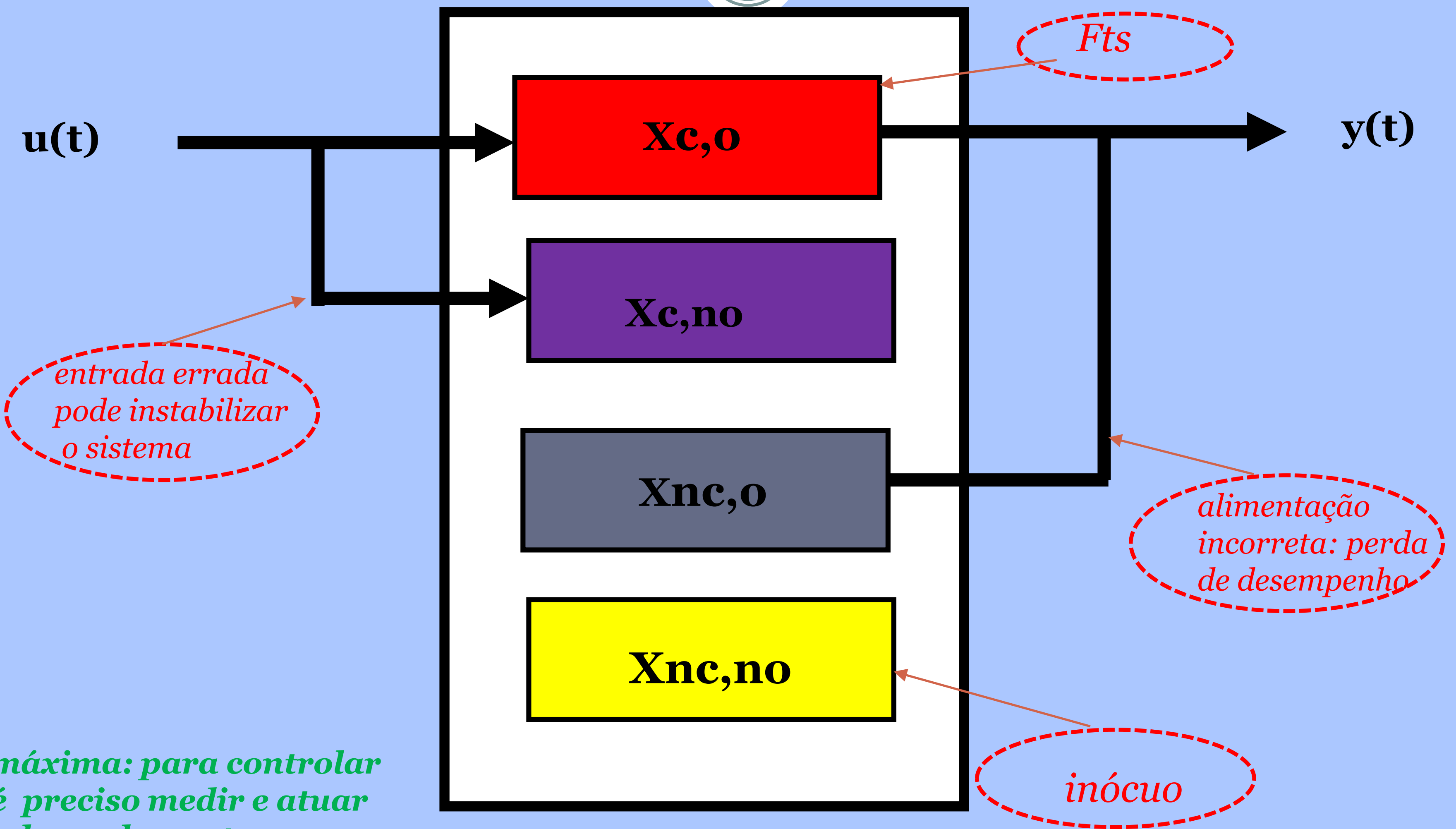
Formalização

- FORMALIZAÇÃO DA CONTROLABILIDADE
  - *Matriz de Controlabilidade*
  - *Exemplos*
- FORMALIZAÇÃO DA OBSERVABILIDADE
  - *Matriz de Observabilidade*
  - *Exemplos*

Controlabilidade

Um sistema é dito *controlável (ou completamente controlável)*, se existir um vetor de entradas ***u***(*t*) sem restrições, que possa transferir ***qualquer*** estado inicial **x**(*to*), para ***qualquer*** estado final **x**(*tf*), num intervalo finito de tempo.

Controlabilidade e Observabilidade



máxima: para controlar é preciso medir e atuar adequadamente

Controlabilidade e Observabilidade

- Se $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{c,no}}$ for estável, uma entrada limitada não instabilizará o sistema. O sistema é dito estabilizável.
  - Ex. caso escalar:

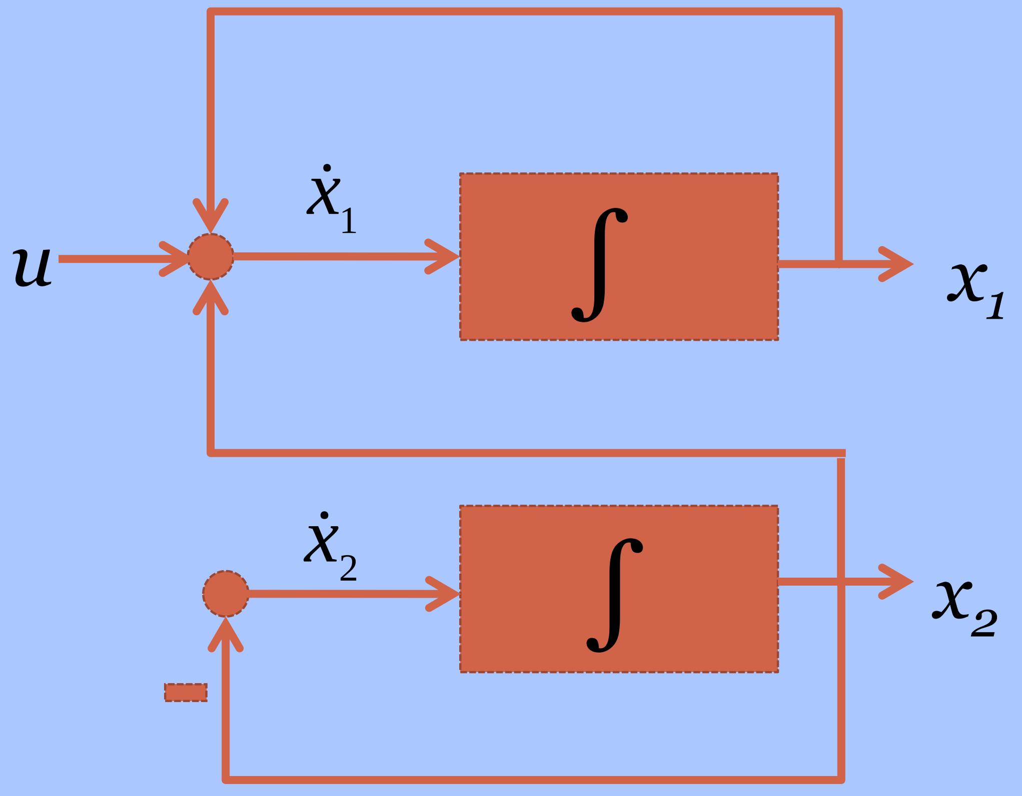
$$\dot{x} = ax, \qquad a > 0\,, \qquad x(0) = \alpha$$
$$\rightarrow x(t) = \alpha e^{-at}$$

- Se $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{nc,o}}$ for estável, uma medida ruim não instabilizará o sistema. O sistema é dito detectável.

Exemplos: Sistema não controlável

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u$$

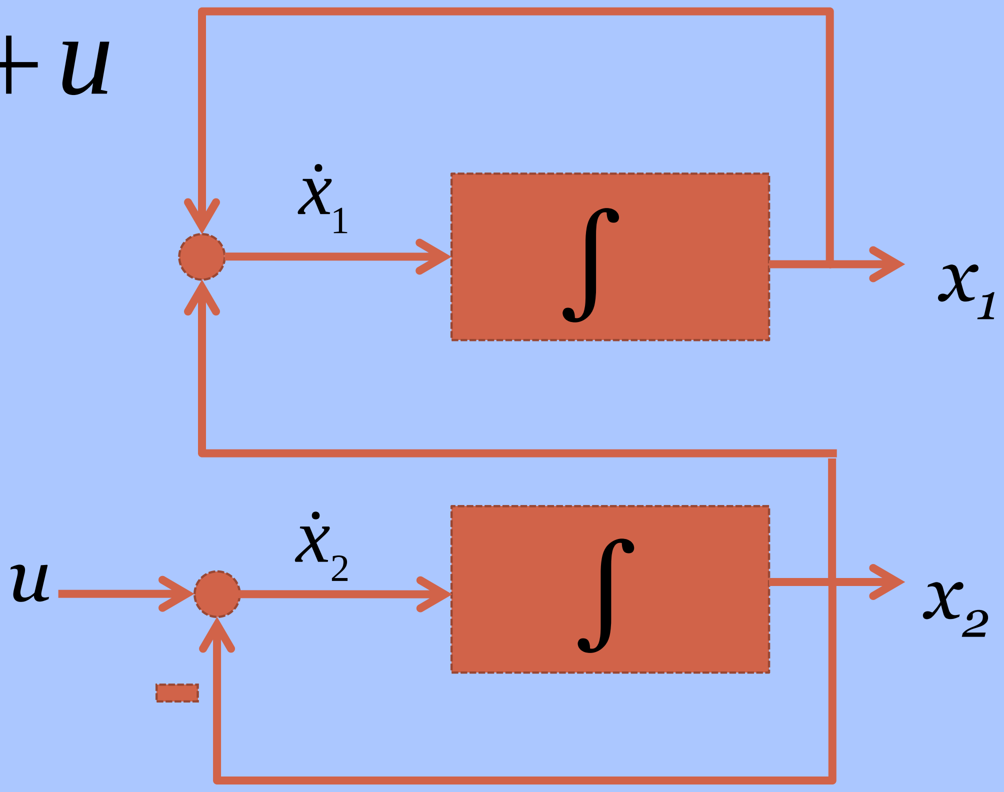
$$\dot{x}_2 = -x_2$$



Exemplos: Sistema controlável

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$



Controlabilidade e Observabilidade

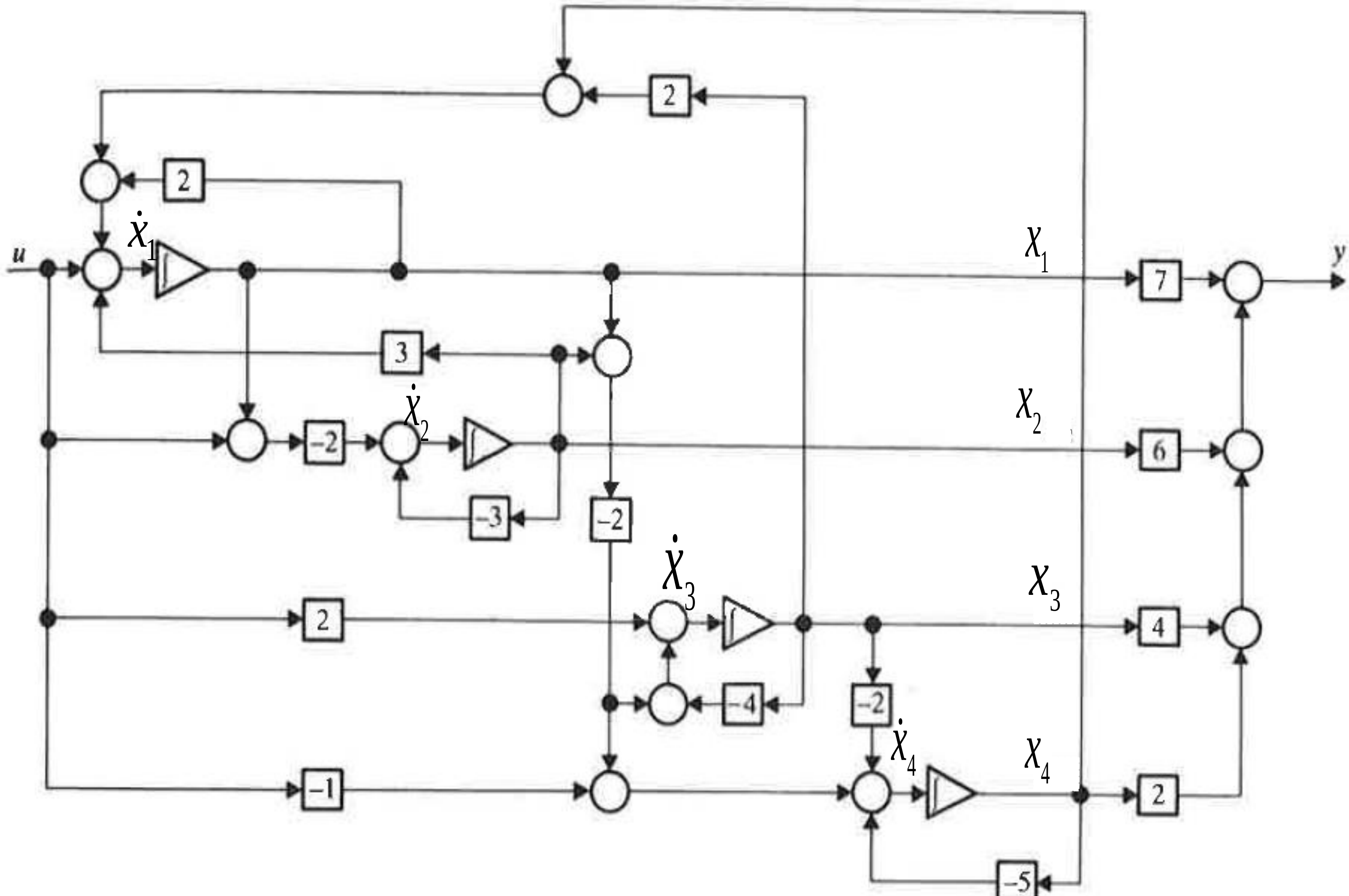
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2u \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2u \\ \dot{x}_4 = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 - u \end{cases}$$

Eq. de Observação:

$$y = 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = [7 \quad 6 \quad 4 \quad 2]$$

Controlabilidade e Observabilidade ???



Formalização da Controlabilidade

$$Dado:$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x_0}$$

$$\text{A solução analítica é:}$$

$$\mathbf{x}(\Delta t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{x_0} + \int_{ti}^{tf} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(tf-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} \equiv \mathbf{\Phi}(\Delta t) = \text{matriz de transição para um intervalo de tempo } \Delta t.$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(\Delta t) = \mathbf{\Phi}(\Delta t)\mathbf{x_0} + \int_{ti}^{tf} \mathbf{\Phi}(t_f - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

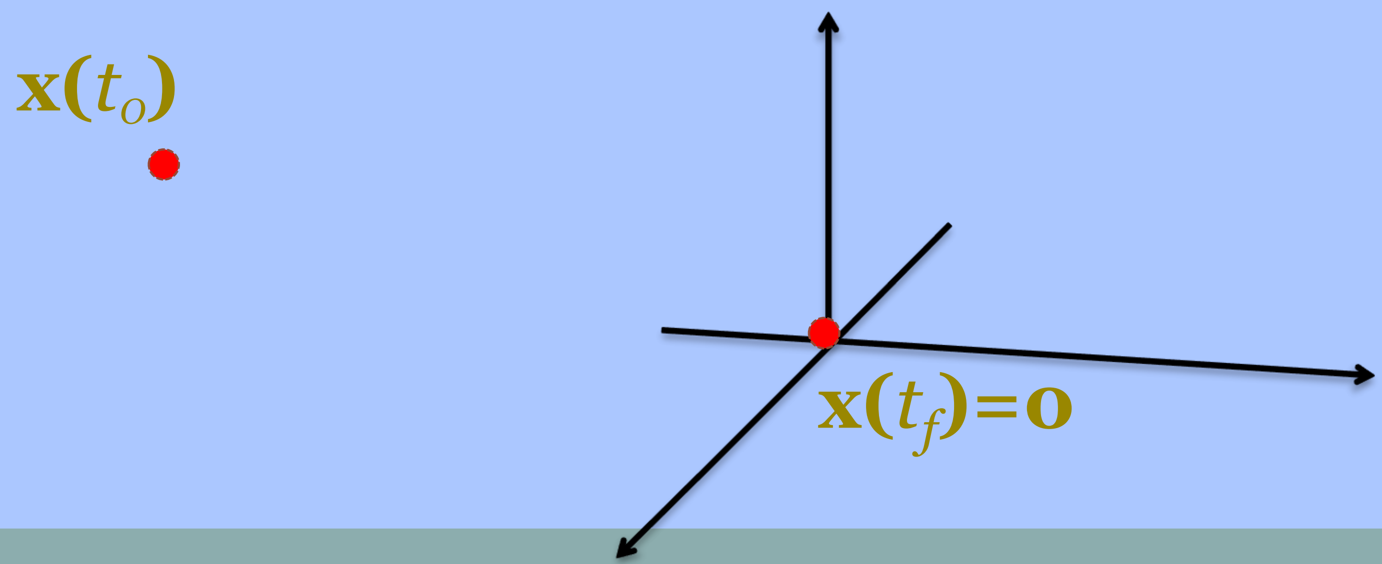
$$\Delta t = (t_f - t_i).$$

$$\text{Se o instante inicial for zero:} \qquad \Delta t = (t_f - 0) = t_f \;\therefore$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x_0} + \int_0^{tf} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(tf-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Formalização da Controlabilidade

- Se o sistema é totalmente controlável, em particular existe $\mathbf{u}(t)$ capaz de levar o estado final para a origem do EE num intervalo finito de tempo a partir de qualquer $\mathbf{x}(t_o)$:



Formalização da Controlabilidade

$$\Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{\Phi}(t_f - 0)\mathbf{x_0} + \int_0^{tf} \mathbf{\Phi}(t_f - \tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

$$\because \mathbf{0} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x_0} + \int_0^{tf} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_f - \tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Rearranjando:

$$\mathbf{x_0} = -\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_f}\int_0^{tf} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_f - \tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x_0} = -\int_0^{tf} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_f}\mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_f - \tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau = -\int_0^{tf} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\tau + \frac{\mathbf{A}^2\tau^2}{2!} - \frac{\mathbf{A}^3\tau^3}{3!} + \cdots (-1)^k \frac{\mathbf{A}^k\tau^k}{k!}$$

$$\mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{\mathbf{A}^i\tau^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\tau)\mathbf{A}^i$$

$$com \;\; \alpha_i(\tau) = \frac{(-1)^i\tau^i}{i!}$$

$$\mathbf{x_0} = -\int_0^{tf} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau = -\int_0^{tf} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\tau)\mathbf{A}^i\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

$$onde : \alpha_i(\tau) = \frac{(-1)^i \tau^i}{i!}$$

$$\mathbf{x_0} = -\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i\mathbf{B} \underbrace{\int_0^{tf} \alpha_i(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{-\beta_i(\tau)}$$

$$\mathbf{x_0} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i\mathbf{B}\beta_i(\tau) = [\mathbf{A}^0\mathbf{B}\beta_0 + \mathbf{A}^1\mathbf{B}\beta_1 + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\beta_2 + \cdots]$$

$$\mathbf{x_0} = \underbrace{[\overbrace{\mathbf{B}}^{[n,m]} \vdots \mathbf{AB} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \cdots\cdots \vdots \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B}]}_{\mathscr{C}[n,n.m]} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (a)$$

$$\mathscr{C}[n,n.m] = matriz\ de\ controlabilidade\ !$$

Formalização da Controlabilidade

- Para que a equacão (a) seja satisfeita, ou seja, para que $\mathbf{x}_0$ seja determinado de maneira unívoca, $\mathscr{C}$ deve ter posto (rank) n ➔ o que significa dizer que é possível extrair de $\mathscr{C}$ pelo menos uma matriz nxn com determinante não-nulo ➔ ∃ pelo menos n vetores LI em $\mathscr{C}$.

- Se o sistema for não controlável (isto é faltam entradas que controlem o sistema)➔ mudar ou incluir novos atuadores .

- Exemplos
- comando *Scilab*: contr(A,B)
- *Matlab*: ctrb(A,B)

Por que os sistemas são não controláveis ou não observáveis?

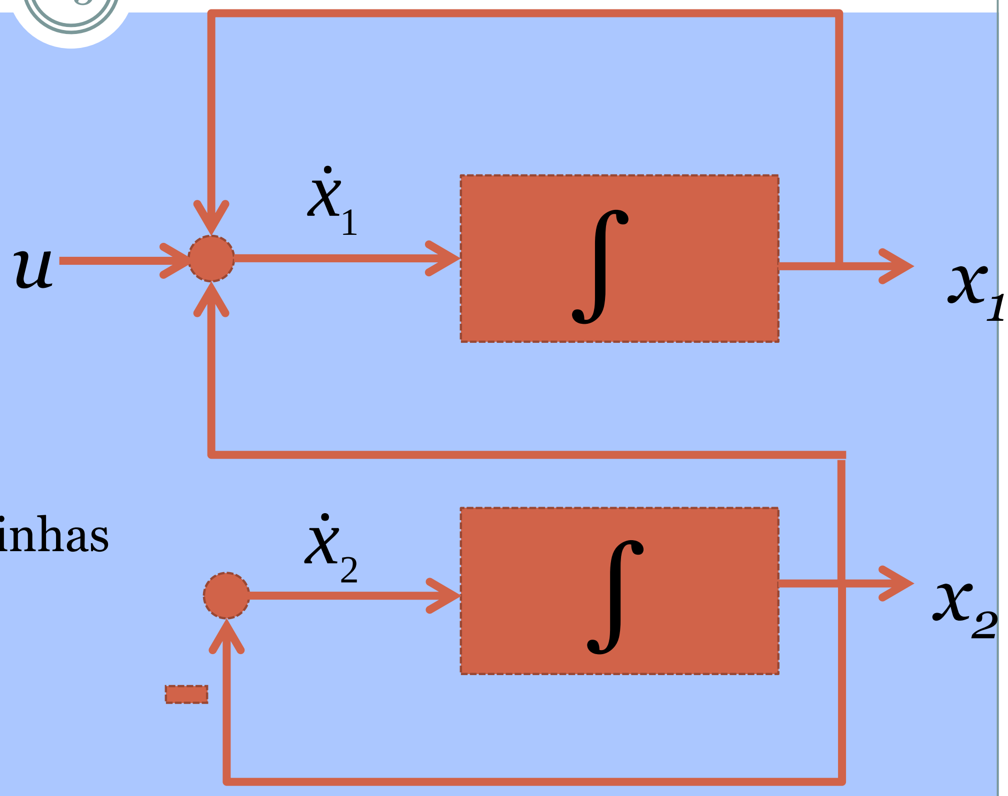
- Má formulação do modelo matemático: uso de variáveis redundantes ➔ SLLD. (número de variáveis de estado não é mínimo). Ocorre na formulação de sistemas complexos de dinâmica pouco familiar.
- Sistemas intrinsecamente não controláveis.
- Excesso de simetria.

- Solução: mudar o sistema
  - reformular o sistema se tiver excesso de varíaveis;
  - sistemas não controláveis ➔ mudar atuação;
  - sistemas não-observáveis➔ mudar sensores.

Exemplos: Sistema não controlável

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B = [n,m]

n= ordem do sistema, n. de linhas

m = 1 entrada de controle

$\mathscr{C}$ = [n,nxm]=[2,2x1]=[2,2]

$\mathscr{C}$= [B,A*B]= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$|\mathscr{C}|$=0⇒posto = 1

➔ Sistema não é totalmente controlável.

Exemplos: Sistema controlável

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

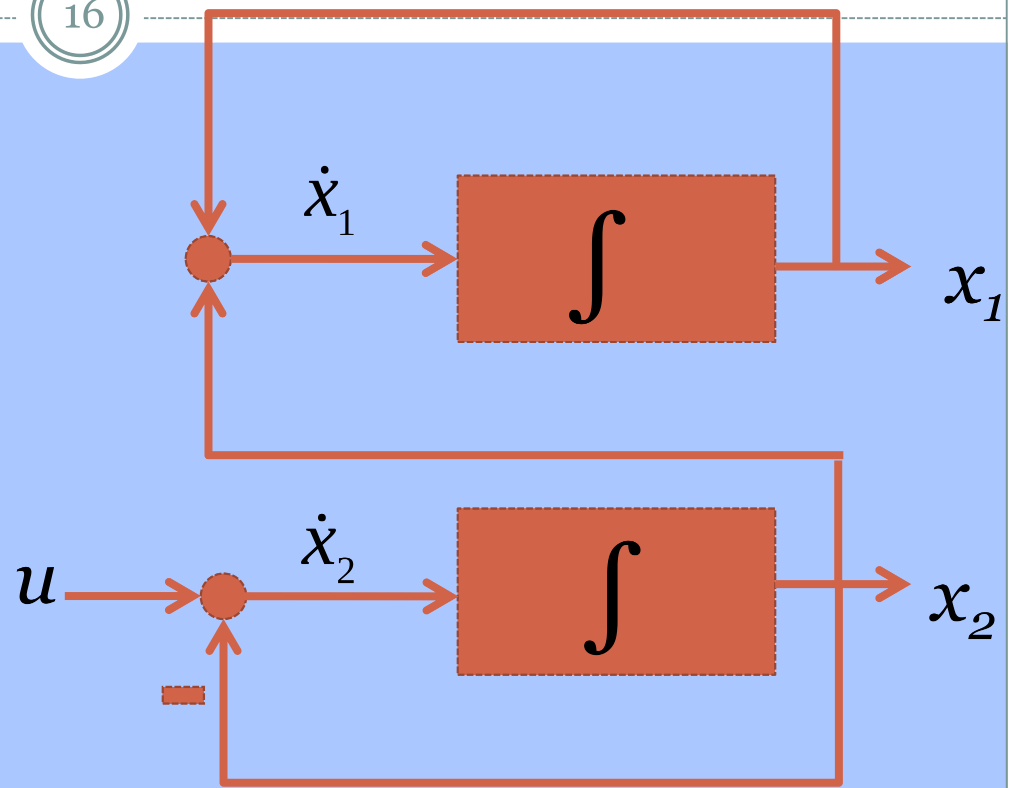
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathscr{C}$ = [n,nxm]=[2,2x1]=[2,2]

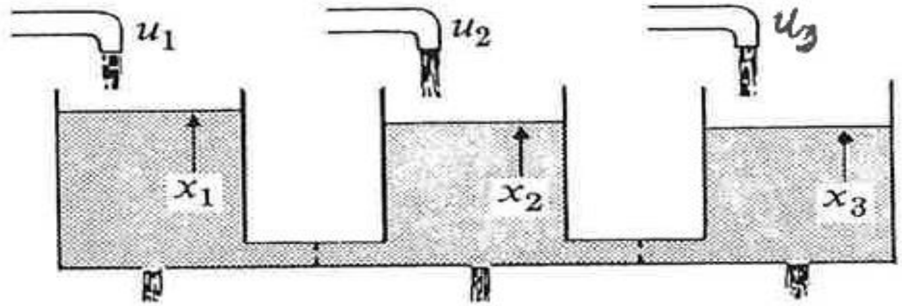
$\mathscr{C}$= [B,A*B]= $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$|\mathscr{C}|$=-1 ⇒ posto = 2

➔ Sistema totalmente controlável.

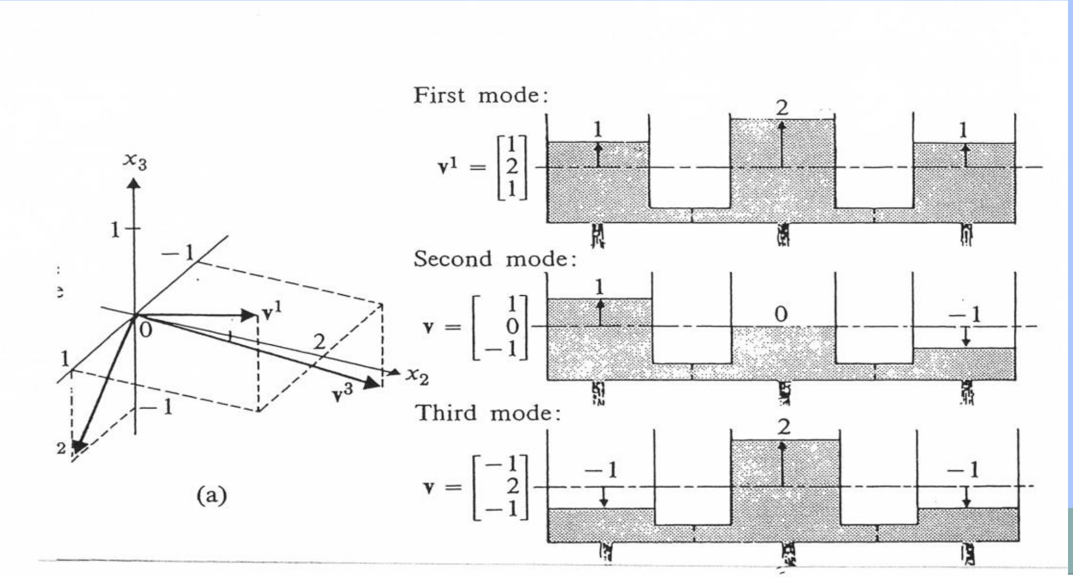


Excesso de simetria



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ex. 3 tanques:

- Matriz de Controlabilidade: $\mathscr{C}$=[n,nxm]=[3,3x1]=[3,3]
- $\mathscr{C}$=[B,A*B,A²*B]
- $\mathscr{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ ➔ $|\mathscr{C}| = 0 \Rightarrow$posto = 2

  ➔ só controle de dois tanques!

  ➔ sistema não é totalmente controlável com estas entradas.
- É preciso alterar a atuação.

Ex. 3 tanques: Continuação

- Seja B=[1 0 0]^T
- $\mathscr{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathscr{C}| = 4 \Rightarrow \text{posto} = 3$

  ➔ sistema completamente controlável!

- Exs. para casa, altere B e verifique a controlabilidade para todas as combinações de entradas

  (ex: B=[0 1 0]^T; B=[1 1 0]^T.....)

Formalização da Observabilidade

Um sistema é dito *observável (ou completamente observável)*, se todo e qualquer estado inicial **x**(*to*) pode ser exatamente determinado das medidas **y**(*t*) e das entradas *u(t)* num intervalo de tempo finito (*0≤ t ≤tf*).

(Sistema é completamente observável se todos os estados afetam cada elemento do vetor de saída)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Solução para o caso não forçado

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

A, B, C e **u**(t) são conhecidos

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\right) + \mathbf{C}\left(\int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\right)$$

Seja z um novo vetor de medidas:

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \underbrace{\mathbf{C}\left(\int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\right)}$$

tudo é conhecido!

Formalização da Observabilidade

- Para estudar a observabilidade é suficiente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Sistema
não forçado

$$\Rightarrow \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\Phi\left(t - t_o\right)\mathbf{x}(t_o)$$

$$para\, t_o = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\Phi\left(t\right)\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i\mathbf{A}^i}{i!}\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(t)\mathbf{A}^i\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_o(t)\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \alpha_1(t)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \alpha_2(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0)\cdots$$

$$\cdots + \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \cdots\alpha_{n-1}(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{x}(0)$$

Formalização da Observabilidade

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathscr{O} = \textit{matriz}\ \text{de observabilidade}} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \qquad (b)$$

Para que *(b)* seja satisfeita, ou seja, para que **y(t)** seja determinado de maneira unívoca, $\mathscr{O}$ deve ter posto (rank) n ➔ o que significa dizer que é possível extrair de $\mathscr{O}$ pelo menos uma matriz *nxn* com determinante não-nulo ➔ ∃ pelo menos n vetores LI em $\mathscr{O}$.

Equivalentemente:

$$\mathscr{O}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \left(\mathbf{A}^2\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \cdots & \left(\mathbf{A}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Semelhante à: $\mathscr{C}$ **= [B AB A²B ....]**

$\mathscr{C}$ = contr (**A,B**)

$\mathscr{O}$ = contr ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$)

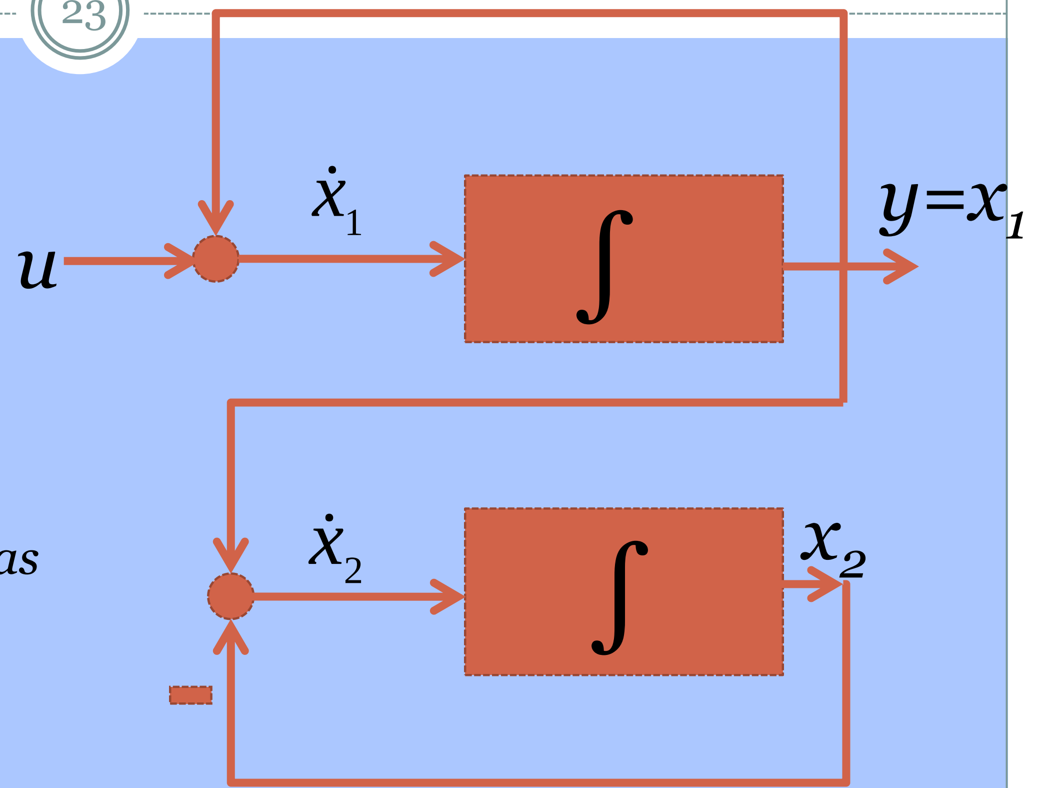
Exemplos: Sistema não observável

$$\dot{x}_1 = x_1 + u$$

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1$$

$$y = x_1$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ C=[1 0]



r = n. de medidas, n. de linhas

$\mathcal{O}$= [nx*r*,n]=[2x1,2]=[2,2]

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C * A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$|\mathcal{O}| = 0 \Rightarrow$ posto = 1

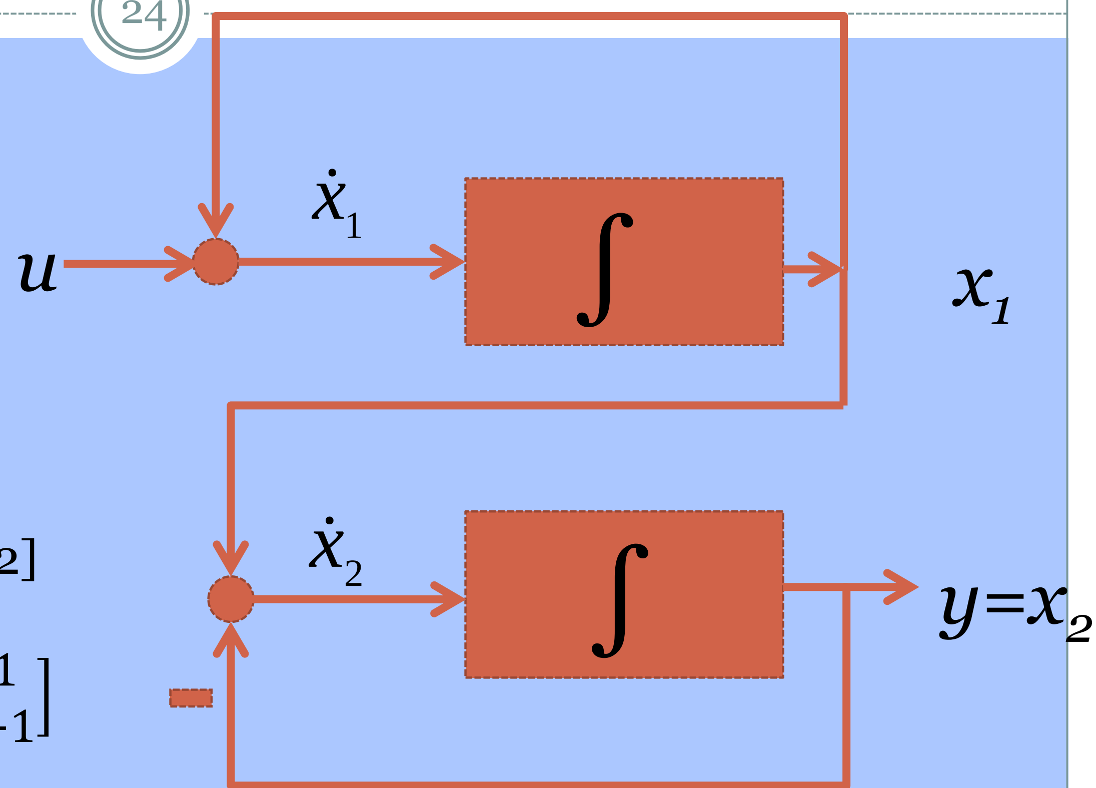
➔ Sistema não é totalmente observável.

Exemplos: Sistema observável

$$\dot{x}_1 = x_1 + u$$

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1$$

$$y = x_2$$



$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ C=[0 1]

$\mathscr{O}^{T}$= [n, nx*r*]=[2,2x1]=[2,2]

$\mathscr{O}^{T}$= $[C^T \quad A^T * C^T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

| $\mathscr{O}^{T}$ |=-1⇒posto = 2

➔ Sistema totalmente observável.