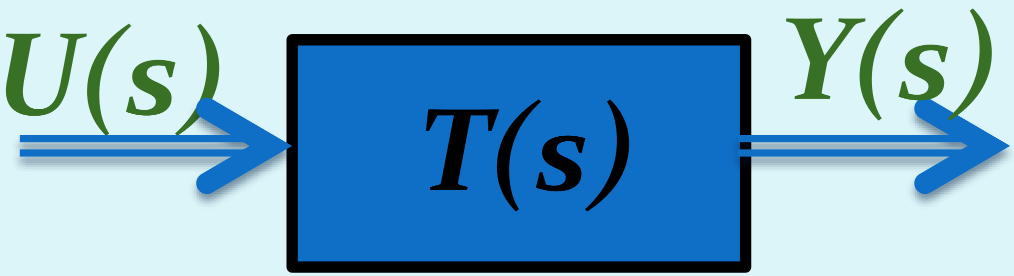
Espaço de Estados (EE)

- *Motivação*
- *Conceitos*
  - *Definição*
  - *Variável de Estado*
  - *Trajetória de Estado*
- *ESTABILIDADE NO EE*
- *Exemplos*
- *Solução das EE*
  - *Matriz de transição*
    - * *Propriedades*
  - *Convolução do termo forçante*
- *Solução Numérica*

Espaço de Estados: Motivação

- *Sistemas dinâmicos complexos (MIMO, Multivariáveis) exigem em geral ED não-lineares de ordem elevada para sua descrição, cujas soluções são raras e difíceis analítica e mesmo numericamente.*
- *Mesmo para sistemas lineares de ordem elevada e SISO como os descritos pela FT:*



$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

A *EDO* que descreve o sistema é:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y(t) = u(t)$$

- *A EDO anterior de ordem elevada é matematicamente conveniente para descrever o sistema*
- *No entanto, praticamente ela é ruim no caso numérico porque derivadas sucessivas da variável amplificam os ruídos (imprecisão numérica):*
  - *Quanto maior a ordem mais ruído → mais imprecisa a solução!*
- *Uma solução para este problema é a utilização do Espaço de Estados (EE), onde a equação diferencial de ordem n é transformada num sistema de n-equações diferenciais de primeira ordem:*

Espaço de Estados

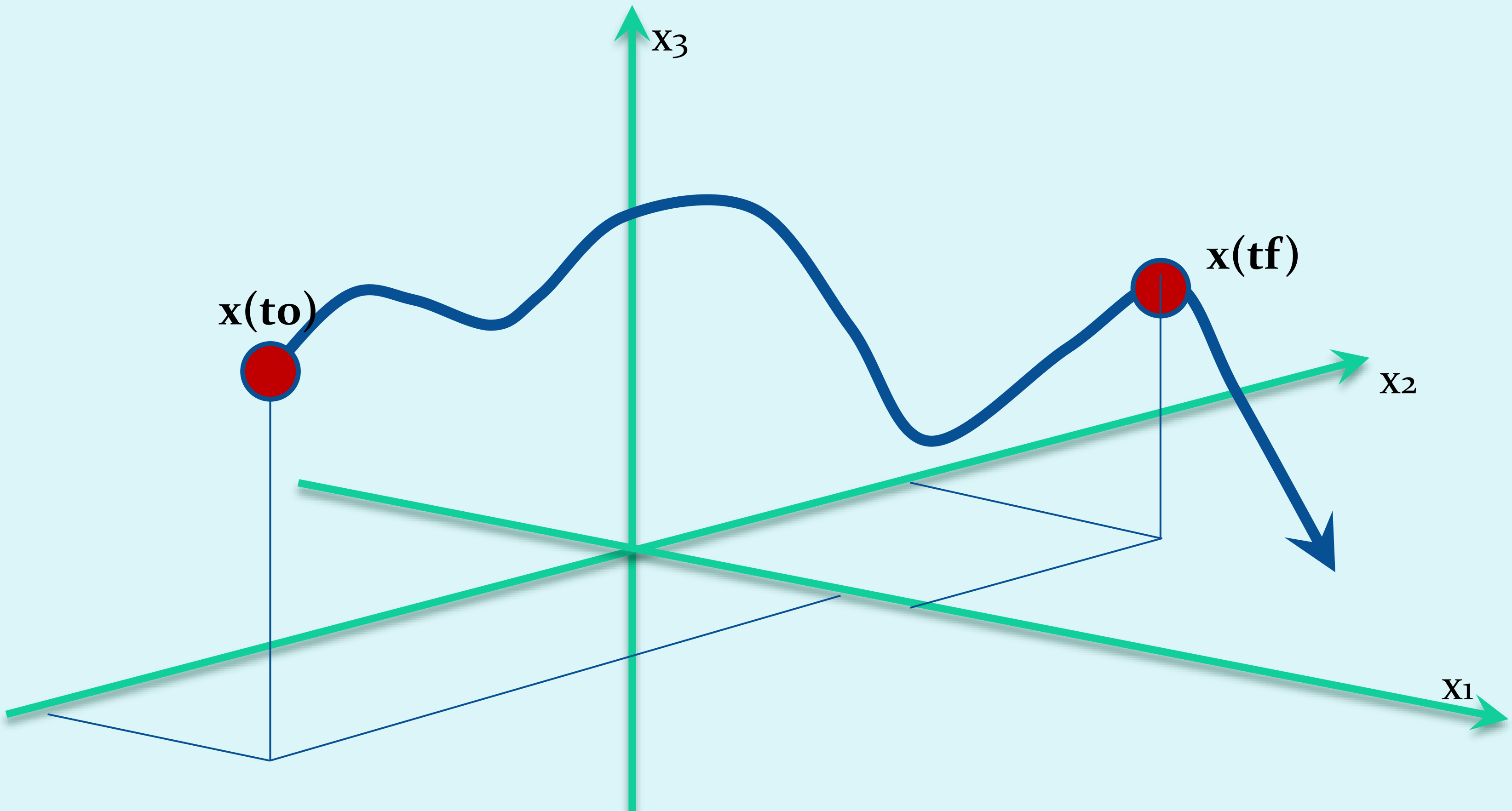
- *Espaço de Estado (**E.E.**):*

  "É o espaço de dimensão n, com n eixos coordenados, cada um deles associados a uma variável de estado. Qualquer vetor **x***(t) é representado por um ponto no* ***E.E.***

  → variando t, o vetor de estados descreve uma trajetória neste espaço, chamada de:

  trajetória de estado."

Trajetória de Estados



Espaço de Estados

- *Estado de um sistema dinâmico:*

  *"É o **menor** conjunto de variáveis de estado cujo conhecimento no instante t=to, juntamente com o conhecimento da entrada* $\mathbf{u}(t)$ *para t≥to, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante t≥to".*

- *Variáveis de estado: podem **não** ter significado físico.*
- Vetor de estados:

  "É o vetor das variáveis de estado:

  $$\mathbf{x}(t) = [\ x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ldots\ldots\ x_n]^T.$$

  Este vetor ***não é único***, mas determina univocamente o estado do sistema $\mathbf{x}(t)$ para qualquer $t \geq to$, conhecidos $\mathbf{x}(t)$ e o vetor de entradas $\mathbf{u}(t \geq to)$.

Espaço de Estados (continuação)

- **Sistemas não lineares**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\underbrace{x_1, x_2 \ldots . x_n}_{\mathbf{x}}, \underbrace{u_1, u_2, \ldots u_r}_{\mathbf{u}}, t) \end{cases}$$

$\longleftarrow$ *dinâmica*

$\longleftarrow$ *observação (medida)*

- **Sistemas lineares (variantes no tempo)**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ *dinâmica*

$\longleftarrow$ *observação (medida)*

- **Sistemas lineares (Invariante no tempo) = SLIT**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ *dinâmica*

$\longleftarrow$ *observação (medida)*

Sistema vetorial não linear

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
\vdots \\
\vdots \\
\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
Saídas: \\
y_1 = g_1(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
y_2 = g_2(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
\vdots \\
\vdots \\
y_m = g_m(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t)
\end{cases}
$$

$$\mathbf{x}^T(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \ldots\ldots x_n(t) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y}^T(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \ldots\ldots y_m(t) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{u}^T(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \ldots\ldots u_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \end{bmatrix}$$

obs. linearização: $f(x_1,x_2) = f(\overline{x_1},\overline{x_2}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\overline{x_1}} (x_1 - \overline{x_1}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\overline{x_2}} (x_2 - \overline{x_2}) +$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\overline{x_1}} (x_1 - \overline{x_1})(x_2 - \overline{x_2})\right] + O(3)$$

Espaço de Estados (continuação)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$= [x_1 x_2 x_3 ….x_n] = vetor de Estados

$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$= [x_i x_j x_k ….x_m] = vetor de saídas→ parte medida ou observada de **x**

$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$= [u_1 u_2 u_3 ….u_r] = vetor de entradas

A *[n,n] = Matriz de estados ou matriz da planta do sistema*

B *[n,r}= Matriz de entradas (entradas de controle e de distúrbios)*

C *[m,n]= Matriz de saídas = v.e. medidas por sensores.*

D *[m,r]= Matriz de alimentação direta*

Linearização - Matrizes Jacobianas

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}$$

Linearização - Matrizes Jacobianas

$$A = [n, n] \qquad B = [n, r]$$

$$C = [m, n] \qquad D = [m, r]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados (continuação)

- Relação E.E. e Funções de Transferência (FT)
  - Aplicando a Transformada de Laplace com condições iniciais nulas no SLIT:

$$\left\{\begin{aligned} sX &= AX + BU \qquad (1)\\ Y &= CX + DU \qquad (2)\end{aligned}\right\} U = \text{entrada}; \quad \text{Y} = \text{saída}$$

$$\text{Rearranjando}\,(1): (sI - A)X = BU$$

$$\therefore X = (sI - A)^{-1}BU$$

$$\text{Pondo em}\,(2):$$

$$\text{Y} = \underbrace{\left[\text{C}(sI - A)^{-1}B + D\right]}_{\textbf{G(s)=Matriz de FTs}}U$$

$$G(s) = \left[\text{C}(sI - A)^{-1}B + D\right]$$

Relação EE e FTs

$$G(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D \right]$$

$$\mathbf{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \rightarrow \text{sistema MIMO}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{\left[C(sI - A)^{-1} B + D \right]}_{\mathbf{G}(s)} \mathbf{U}(s)$$

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{U(s)} \rightarrow \text{sistema SISO}$$

Estabilidade no EE

$$G(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D\right]$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{Adj(sI - A)}{|sI - A|}$$

$|sI - A| = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow$ Equação característica

$\Rightarrow$ raízes são os autovalores $\equiv$ polos do sistema.

Para estabilidade os autovalores devem ter parte real negativa :

$\Rightarrow$ polos devem estar no semi-plano esquerdo no plano complexo.

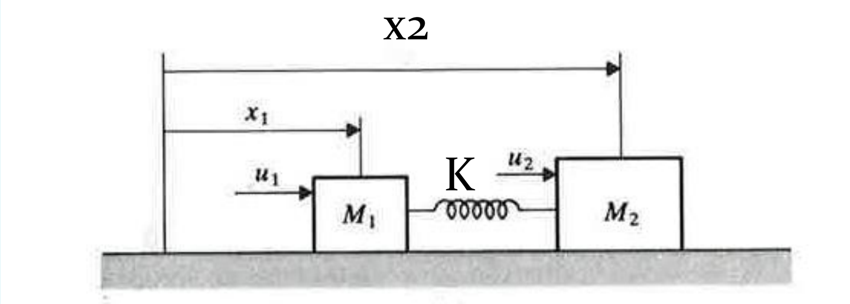
Para sistemas MIMO, *G(s)* é uma matriz de FTs, com dimensão determinada por *C* e *B*.

C =[m,n]   *B=[n,r]* ➔ *G =[m,r]*

Todas as FTs têm a mesma equação característica!!!

Espaço de Estados (continuação)

Exemplo:



Modelo

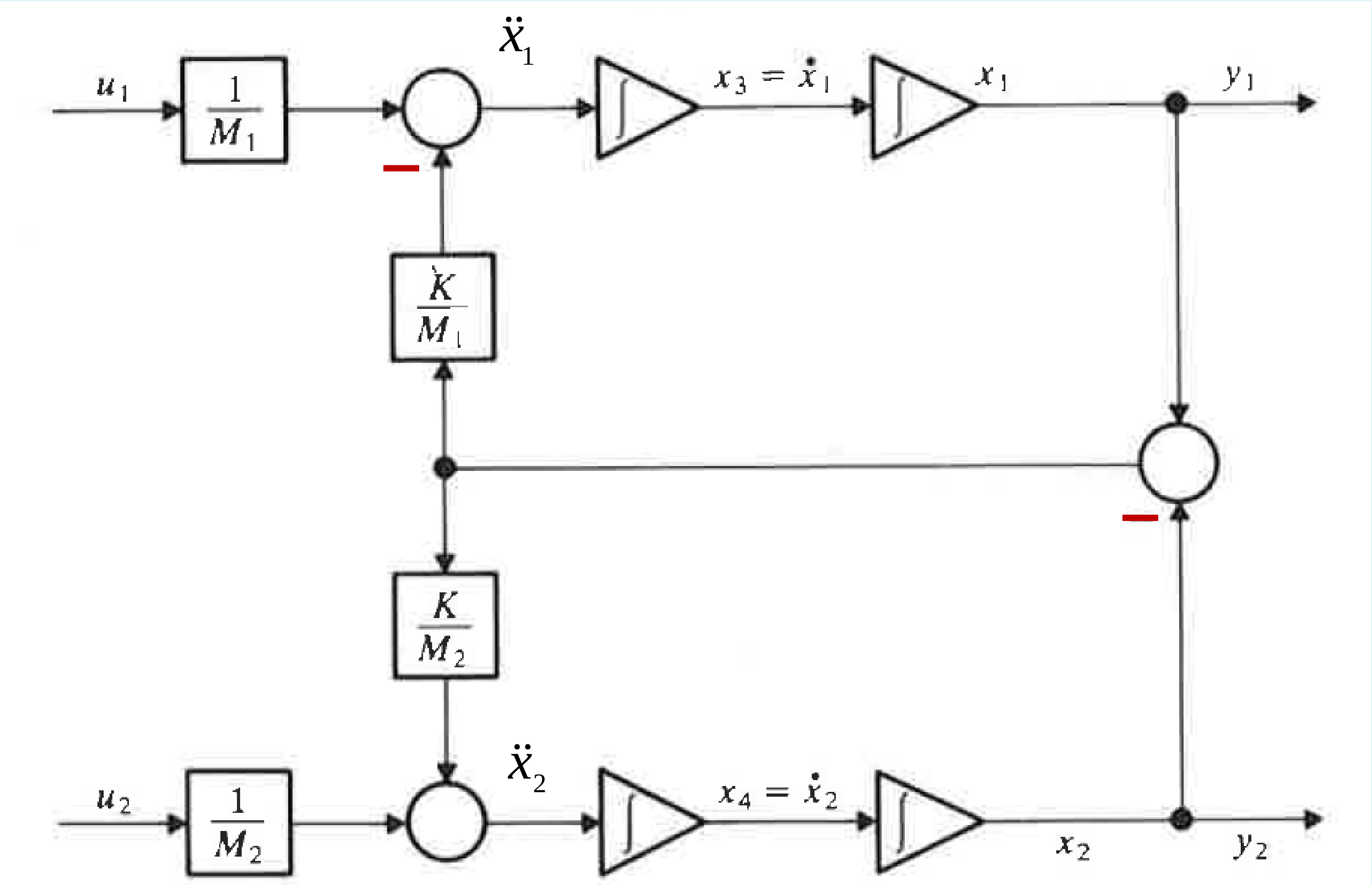
$$\ddot{x}_1 + \frac{K}{M_1}(x_1 - x_2) = \frac{u_1}{M_1}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{K}{M_2}(x_2 - x_1) = \frac{u_2}{M_2}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^T \\ \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

Espaço de Estados (continuação)



Espaço de Estados (continuação)

$$\dot{x_1} = x_3$$
$$\dot{x_2} = x_4$$
$$\dot{x_3} = \frac{K}{M_1}(x_2 - x_1) + \frac{u_1}{M_1}$$
$$\dot{x_4} = \frac{K}{M_2}(x_1 - x_2) + \frac{u_2}{M_2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{M_1} & \frac{K}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{K}{M_2} & -\frac{K}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alternativa : definir o movimento do sistema pelo movimento do centro de massa:

$$\bar{x} = x_G = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M}$$

E a diferença: $\delta = x_1 - x_2$

Espaço de Estados (continuação)

$$\ddot{\bar{x}} = \frac{u_1 + u_2}{M}$$

$$\ddot{\delta} = -\tfrac{KM}{M_1 M_2}\delta + \frac{u_1}{M_1} - \frac{u_2}{M_2}$$

E definindo:

$$z = \begin{bmatrix} \bar{x} & \delta & \dot{\bar{x}} & \dot{\delta} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \\ y = \bar{C}z \end{cases}$$

Exercício para casa: Para o novo vetor de estados $[\bar{x}, \delta]$

a) mostre que:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{KM}{M_1 M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{M} & \dfrac{1}{M} \\ \dfrac{1}{M_1} & -\dfrac{1}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{M_2}{M} & 0 & 0 \\ 1 & -\dfrac{M_1}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares (TL)

- *Não alteram características do sistema:*
  - *Se é estável, permanece estável sob uma TL.*
  - *Mesmos* polos (autovalores)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \text{seja}: x = Tz \end{cases}$$

$$T\dot{z} = ATz + Bu \qquad (1)$$

$$y = CTz$$

$$\text{multiplicar (1) por } T^{-1} \text{ a esquerda}:$$

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$$

$$y = CTz$$

$$\text{e definindo}: T^{-1}AT = \Lambda; T^{-1}B = \Gamma; CT = \theta$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + \Gamma u \\ y = \theta z \end{cases}$$

Solução da ED no EE: Matriz de Transição

- Caso escalar:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$sX(s) - x_0 = aX(s) + bU(s)$$

$$\therefore X(s) = \frac{x_0}{(s-a)} + \underbrace{\frac{1}{(s-a)}}_{G_1(s)} \cdot \underbrace{bU(s)}_{G_2(s)}$$

Transformada inversa (tabela de transformadas):

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)\, d\tau$$

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} \cdots\cdots + \frac{a^kt^k}{k!}$$

Solução da ED no EE: Matriz de Transição

- *Caso Multivariável:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax(t)} + \mathbf{Bu(t)}, \qquad \mathbf{x(0)} = \mathbf{x_0}$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$\mathbf{X(s)} = \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{x_0} + \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{BU(s)}$$

Aplicando a transformada inversa e usando a analogia com o caso escalar:

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0} + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

onde:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!}\cdots = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{\Phi}(t) =$ matriz de transição.

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{\Phi}(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\right)\right]$$

$\mathbf{\Phi}(s) = \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \rightarrow$ matriz resolvente.

Propriedades da Matriz de Transição

$\mathbf{\Phi}(\Delta t)$ tem todas as propriedades de $\mathbf{e}^{\mathbf{A\Delta t}}$

$$a)\ \dot{\Phi}(\Delta t) = A\Phi(\Delta t)$$

$$\Phi(\Delta t) = e^{A\Delta t} \Rightarrow \dot{\Phi}(\Delta t) = Ae^{A\Delta t} = A\Phi(\Delta t)$$

$$b)\ \Phi(0) = I = e^{A.0}$$

$$c)\ \Phi^{-1}(\Delta t) = e^{-A\Delta t} = e^{A(-\Delta t)} = \Phi(-\Delta t)$$

$$d)\ \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

$$\Phi(t_2 - t_0) = e^{A\Delta t} = e^{A(t2-t0)} = e^{A(t2-t1+t1-t0)}$$

$$= e^{A(t2-t1)}e^{A(t1-t0)} = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$$

$$e)\ \Phi(t+\tau) = e^{A(t+\tau)} = e^{A(t)}e^{A(\tau)} = \Phi(t)\Phi(\tau)$$

$$f)\ \Phi(t)\Phi(\tau) = \Phi(\tau)\Phi(t)$$

$$g)\ \Phi^q(t) = \Phi(t)\Phi(t)\Phi(t)\cdots = e^{At}e^{At}e^{At}\cdots = e^{A(t+t+t+\cdots)}$$

$$= e^{Aqt} = \Phi(qt)$$

Solução numérica pela Matriz de Transição

$$Dado:$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax(t)} + \mathbf{Bu(t)}, \qquad \mathbf{x(0)} = \mathbf{x_0}$$

A solução analítica é:

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0} + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

$$onde:$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{\mathbf{A}^2\Delta t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3\Delta t^3}{3!} \cdots\cdots = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbf{A}^k\Delta t^k}{k!} = \mathbf{\Phi}(\Delta t)$$

$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{\Phi}(\Delta t) =$ matriz de transição para um intervalo de tempo Δt.

$$\Rightarrow \mathbf{x(t)} = \mathbf{\Phi}(\Delta t)\mathbf{x_0} + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

O termo de convolução para $\mathbf{u(\tau)} = \mathbf{u} = \mathbf{c\underline{te}}$ no intevalo $\Delta t = t - 0$ é:

$$\underbrace{\left(\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)d\tau\right)}_{\mathbf{\Gamma}(\Delta t)}\mathbf{Bu} = \mathbf{\Gamma}(\Delta t).\mathbf{B}.\mathbf{u}$$

Solução numérica pela Matriz de Transição

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta t) = \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)}d\tau = \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}\theta}d\theta$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta t) = \int_0^t \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\theta + \frac{\mathbf{A}^2\theta^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3\theta^3}{3!} \cdots\cdots \right) d\theta$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta t) = \left(\mathbf{I}\theta + \frac{\mathbf{A}\theta^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2\theta^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^3\theta^4}{4!} \cdots\cdots \right)\Bigg|_0^t$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(\Delta t) = \Delta t \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}\Delta t}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2\Delta t^2}{3!} + \frac{\mathbf{A}^3\Delta t^3}{4!} \cdots\cdots \right) = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{A}^k \Delta t^k}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(\mathbf{t}) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{A}^k \Delta t^k}{k!} \right) \mathbf{x_0} + \left(\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{A}^k \Delta t^k}{(k+1)!} \right) \mathbf{Bu}$$

obs: Se $\mathbf{A}$ for inversível, tem-se ainda:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{I})$$

E.E. com controle:

- Simulações (Matlab, Scilab)
  - Comandos csim, step, impulse:

$$s1 = \text{syslin}('c', A, B, C, D)$$

$$[y\,[, x]] = \text{csim}(u, t, sl, [x0\,[, tol]])$$

u = entrada
Mas nos nossos sistemas teremos entradas controladas (ação de controle) e não controladas (distúrbios)!!

E.E. com controle:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

u= ação de controle
w= distúrbio

Para simular o sistema em malha aberta com distúrbio:

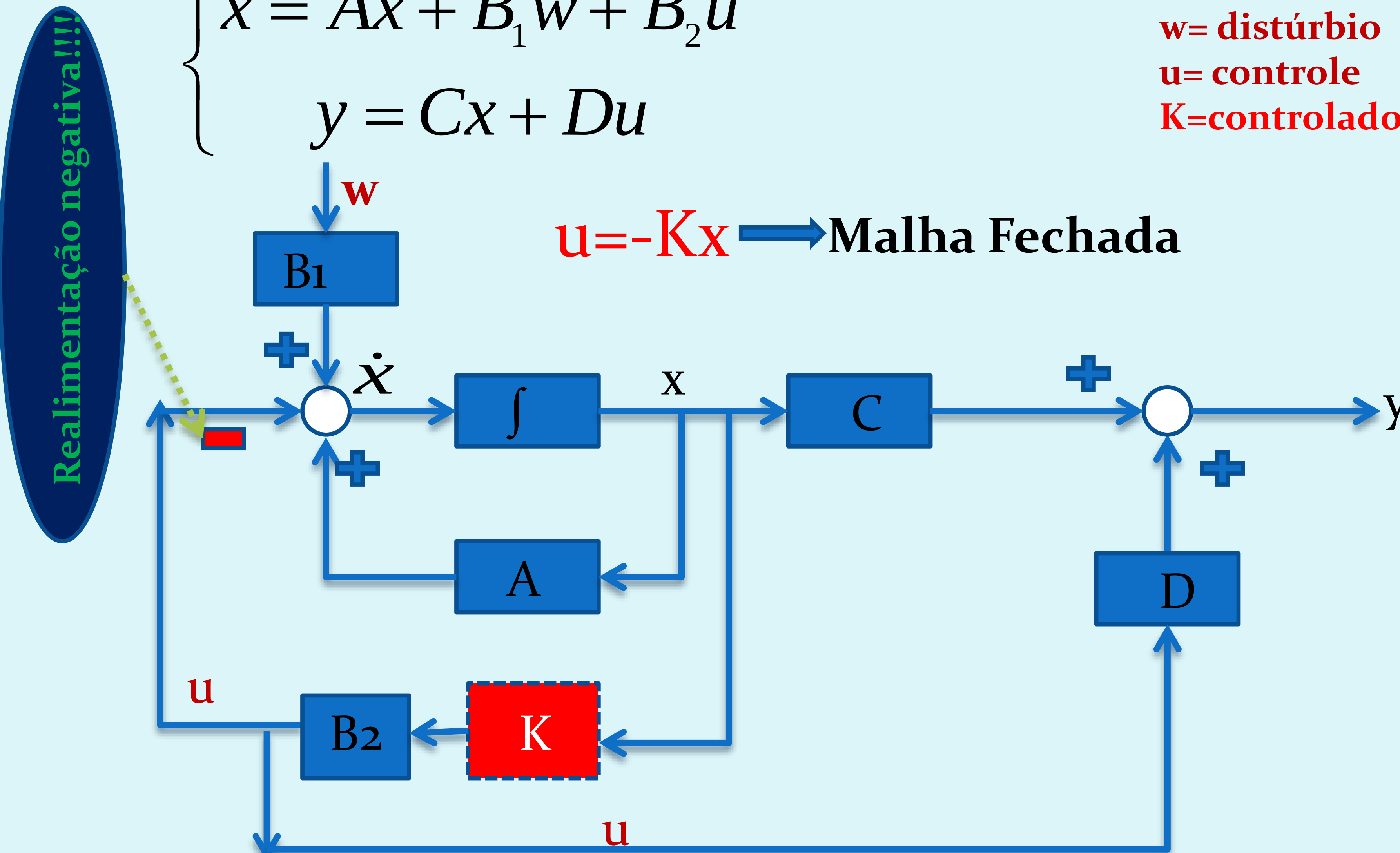
$$\mathrm{s1} = \mathrm{syslin}('\mathrm{c}', \mathrm{A}, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}, \mathrm{D})$$

$$[\mathrm{y}\,[, \mathrm{x}]] = \mathrm{csim}(\boxed{\mathrm{w},}\ \mathrm{t}, \mathrm{sl}, [\mathrm{x0}\,[, \mathrm{tol}]])$$

E.E. com controle:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

w= distúrbio
u= controle
K=controlador



Exercícios para casa:

- Determine numericamente a matriz de transição e a matriz dos termos forçantes expandindo as séries de Taylor do slide 26 acima até o quarto termo, para 20 intervalos de tempo de 0,2 s, para o seguinte sistema sujeito a uma entrada degrau unitário e fazendo o gráfico de saída para *x1*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \mathrm{u}$$