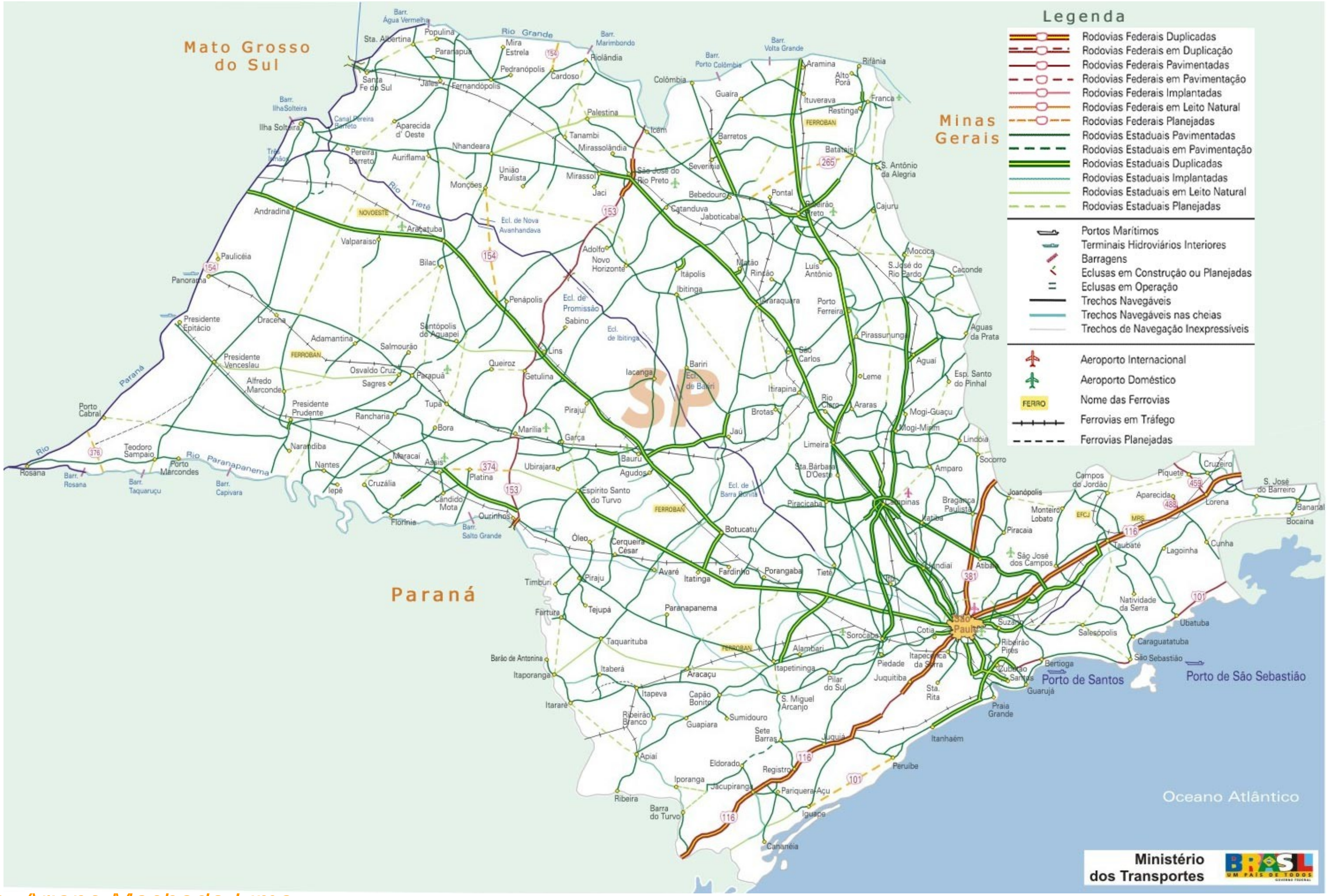
Aula 2

Conceitos básicos de grafos

Profa. Ariane Machado Lima

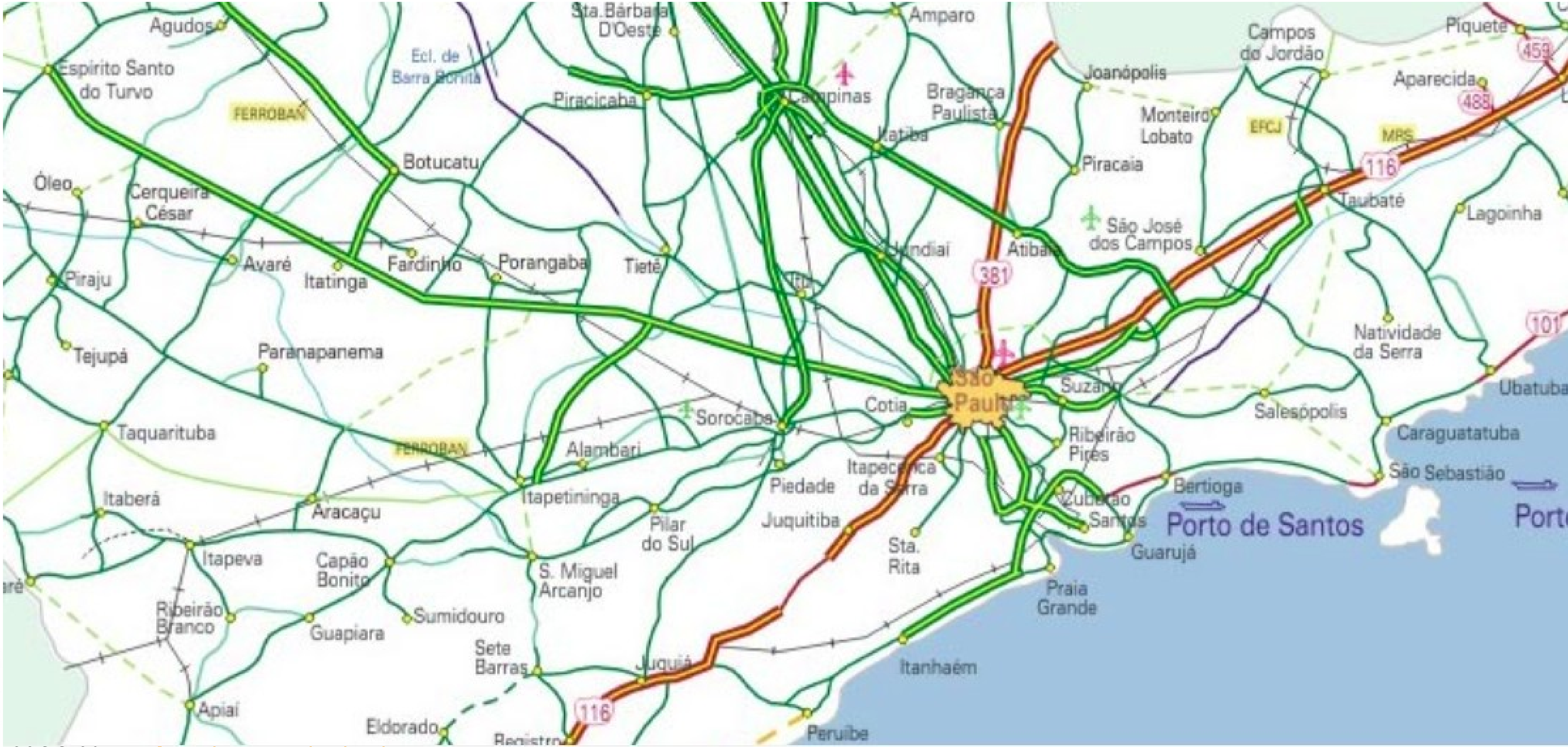
BASEADA NOS SLIDES DO CAP 7 DO LIVRO:

O que é isso? Para que serve?

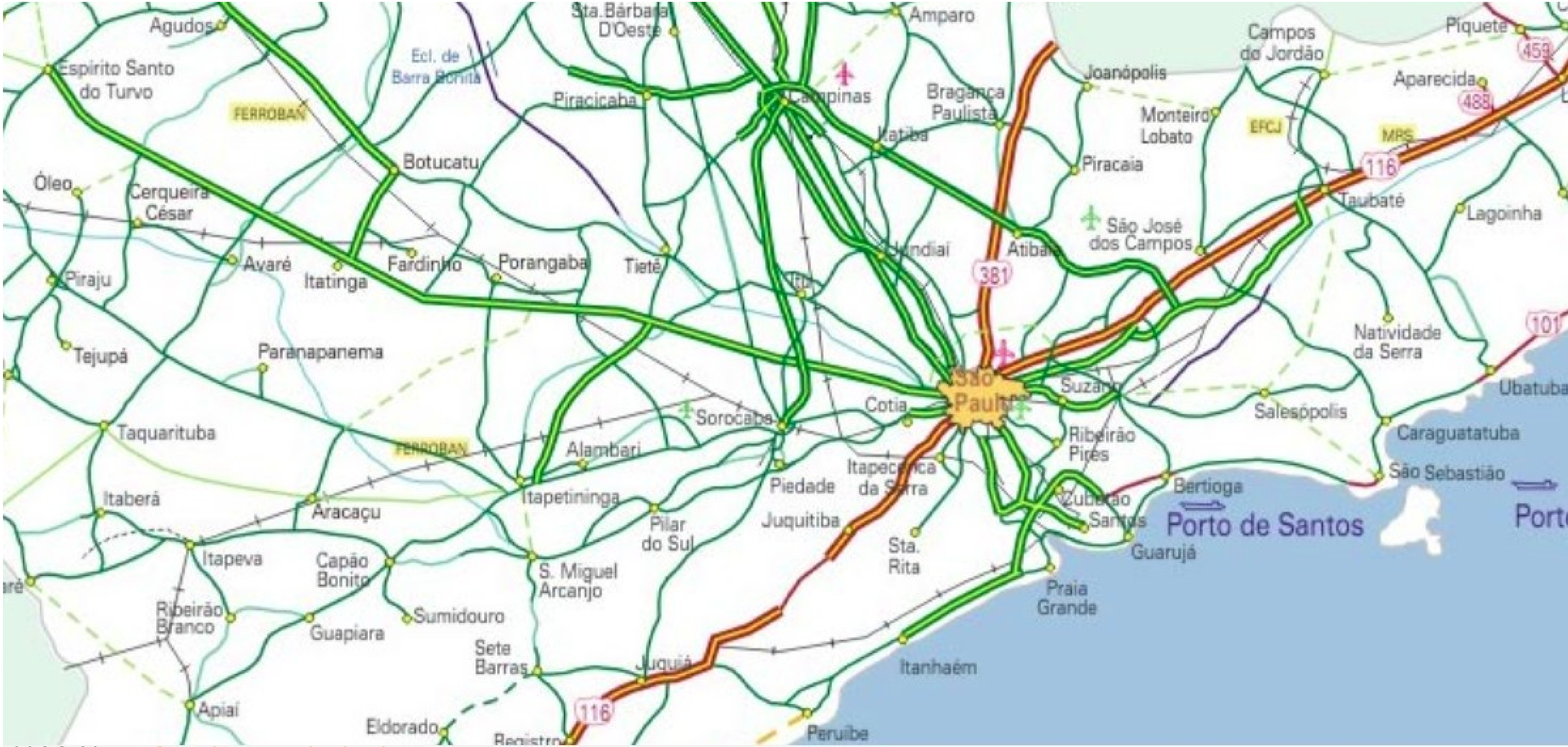


Profa. Ariane Machado Lima

O que é isso? Para que serve?

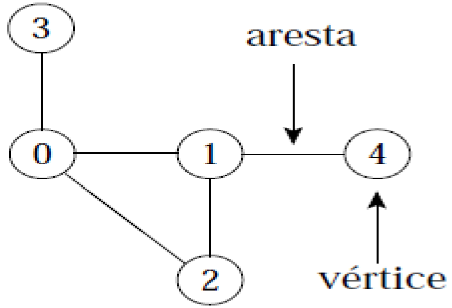


Como representamos essas informações?



Grafos

- **Grafo**: conjunto de vértices e arestas.
- **Vértice**: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- **Aresta**: conexão entre dois vértices.



As arestas também podem ter atributos (normalmente um “peso”)

- Notação: $G = (V, A)$
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas

Grafos

- Que outras coisas podem ser modeladas por grafos?
- Que perguntas podemos fazer nesses problemas?

Grafos - Motivação

- Muitas aplicações em computação necessitam considerar conjunto de conexões entre pares de objetos:
  - Existe um caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual é a menor distância entre um objeto e outro objeto?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?
- Existe um tipo abstrato chamado grafo que é usado para modelar tais situações.

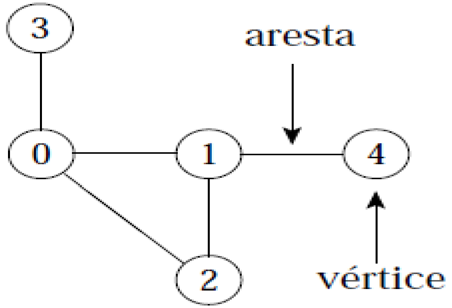
Profa. Ariane Machado Lima

Aplicações

- Alguns exemplos de problemas práticos que podem ser resolvidos através de uma modelagem em grafos:
  - Ajudar máquinas de busca a localizar informação relevante na Web.
  - Descobrir os melhores casamentos entre posições disponíveis em empresas e pessoas que aplicaram para as posições de interesse.
  - Descobrir qual é o roteiro mais curto para visitar as principais cidades de uma região turística.

Retomando...

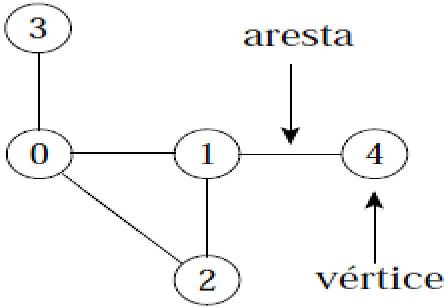
- **Grafo**: conjunto de vértices e arestas.
- **Vértice**: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- **Aresta**: conexão entre dois vértices.



- Notação: $G = (V, A)$
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas

Retomando...

- **Grafo**: conjunto de vértices e arestas.
- **Vértice**: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- **Aresta**: conexão entre dois vértices.

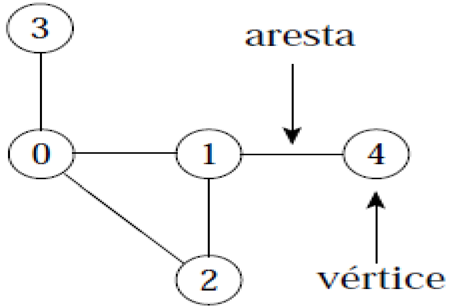


- Notação: $G = (V, A)$
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas

Será que essa aresta, como está aqui, é o suficiente para caracterizar conexões?

Retomando...

- **Grafo**: conjunto de vértices e arestas.
- **Vértice**: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- **Aresta**: conexão entre dois vértices.



- Notação: $G = (V, A)$
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas

Será que essa aresta, como está aqui, é o suficiente para caracterizar conexões?

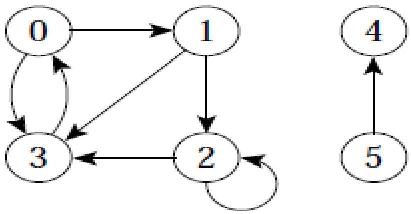
Imagine fazer um caminho pelas ruas das cidades… com mão e contra-mão….

PAR ORDENADO!

Grafos Direcionados

- Um **grafo direcionado** G é um par (V, A), onde V é um conjunto finito de vértices e A é uma relação binária em V.
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u. (adjacente vem depois)
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops*.

Como descrever self-loop em u?



Também chamados **Digrafos** (sem acento)

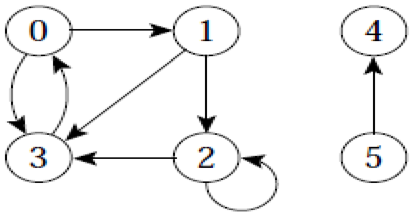
Profa. Ariane Machado Lima

PAR ORDENADO!

Grafos Direcionados

- Um **grafo direcionado** G é um par (V, A), onde V é um conjunto finito de vértices e A é uma relação binária em V.
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u. (adjacente vem depois)
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops*.

Como descrever self-loop em u?



(u, u)

Também chamados **Digrafos** (sem acento)

Profa. Ariane Machado Lima

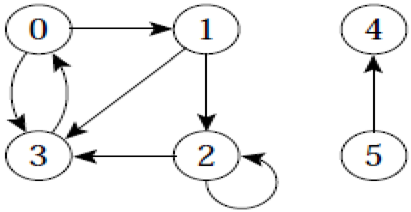
PAR ORDENADO!

Grafos Direcionados

- Um **grafo direcionado** G é um par (V, A), onde V é um conjunto finito de vértices e A é uma relação binária em V.
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u. (adjacente vem depois)
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops*.

Como descrever self-loop em u?

Descreva matematicamente (formalmente) esse grafo:



(u, u)

Também chamados **Digrafos** (sem acento)

PAR ORDENADO!

Grafos Direcionados

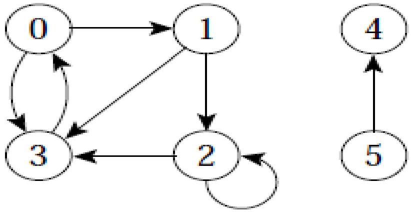
- Um **grafo direcionado** G é um par (V, A), onde V é um conjunto finito de vértices e A é uma relação binária em V.
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u. (adjacente vem depois)
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops*.

Como descrever self-loop em u?

(u, u)

Descreva matematicamente (formalmente) esse grafo:

G = (V,A)
V = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
A = {(0,1), (0,3), (1,2), (1,3),
(2,2), (2,3), (3,0), (5,4)}

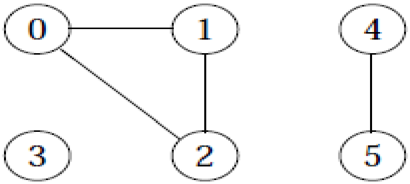


Também chamados **Digrafos** (sem acento)

Grafos Não Direcionados

- Um **grafo não direcionado** G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.

(apenas uma participa da definição do grafo)

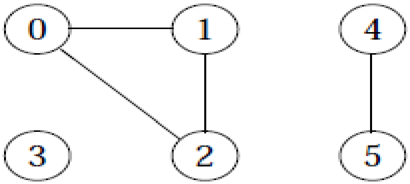


Grafos Não Direcionados

- Um **grafo não direcionado** G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.

(apenas uma participa da definição do grafo)

Descreva matematicamente (formalmente) esse grafo:

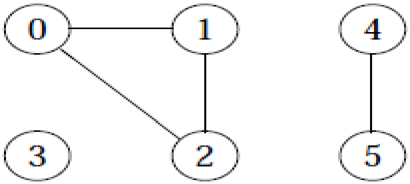


Grafos Não Direcionados

- Um **grafo não direcionado** G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.

(apenas uma participa da definição do grafo)

Descreva matematicamente (formalmente) esse grafo:



G = (V,A)
V = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
A = {(0,1), (1,2), (2,0), (4,5)}

Grafos Não Direcionados

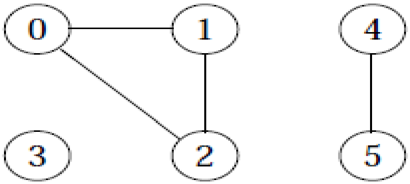
- Um **grafo não direcionado** G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.

(apenas uma participa da definição do grafo)

Descreva matematicamente (formalmente) esse grafo:

G = (V,A)
V = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
A = {(0,1), (1,2), (2,0), (4,5)}

Posso inverter os vértices nas arestas?

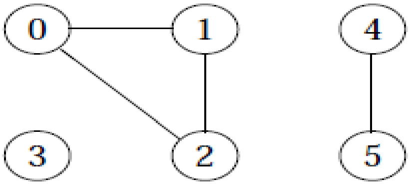


Grafos Não Direcionados

- Um **grafo não direcionado** G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.

(apenas uma participa da definição do grafo)

Descreva matematicamente (formalmente) esse grafo:



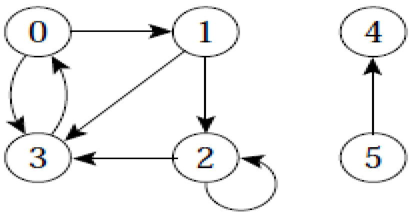
G = (V,A)
V = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
A = {(1,0), (1,2), (2,0), (4,5)}

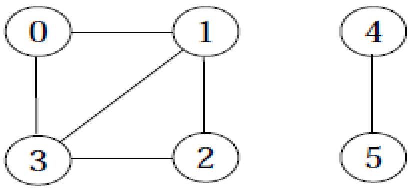
Posso inverter os vértices nas arestas?

SIM!!!

Vizinhos e adjacentes

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.





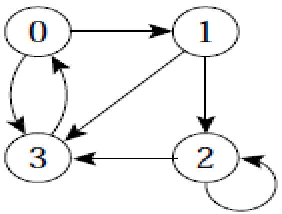
1 é adjacente a 3 ?
1 é vizinho de 3 ?
3 é adjacente a 1 ?
3 é vizinho de 1 ?

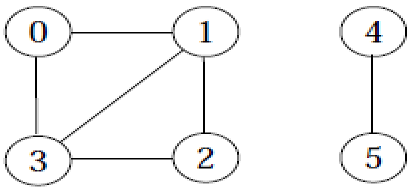
1 é adjacente a 3 ?
1 é vizinho de 3 ?
3 é adjacente a 1 ?
3 é vizinho de 1 ?

Profa. Ariane Machado Lima

Vizinhos e adjacentes

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.



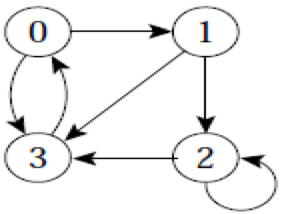


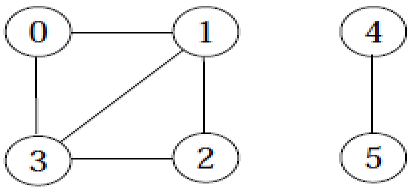
1 é adjacente a 3 ? Não
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ?
3 é vizinho de 1 ?

1 é adjacente a 3 ? Sim
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ?
3 é vizinho de 1 ?

Vizinhos e adjacentes

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.



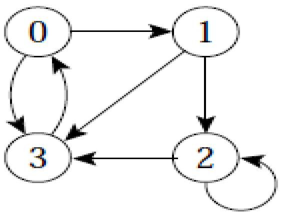


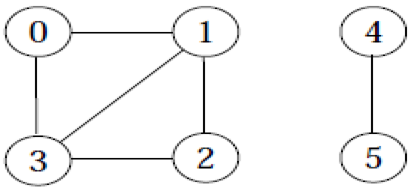
1 é adjacente a 3 ? Não
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

1 é adjacente a 3 ? Sim
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

Vizinhos e adjacentes

- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.





1 é adjacente a 3 ? Não
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

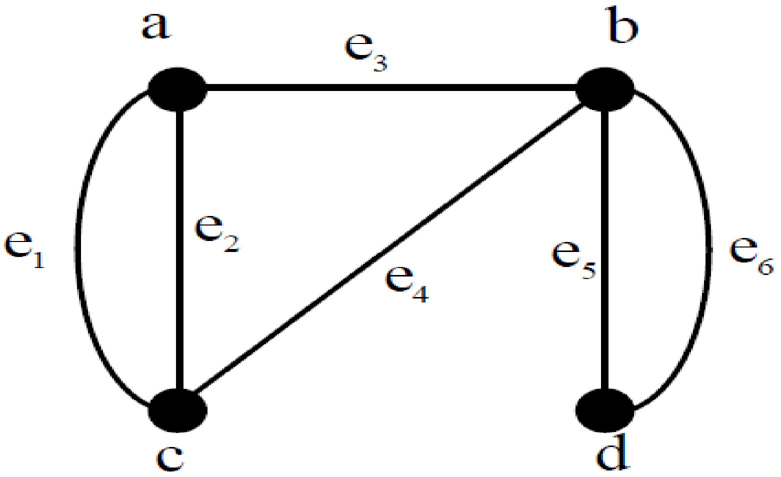
1 é adjacente a 3 ? Sim
1 é vizinho de 3 ? Sim
3 é adjacente a 1 ? Sim
3 é vizinho de 1 ? Sim

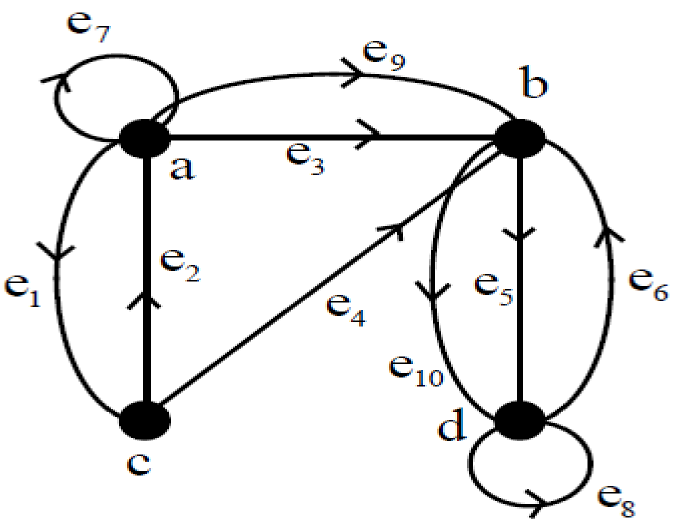
1 e 4 não são adjacentes nem vizinhos

Observação

Essas definições anteriores referem-se aos grafos “simples”

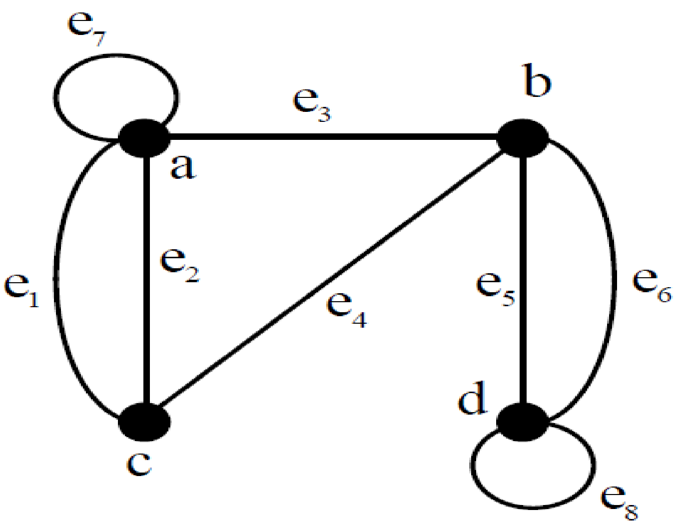
Há ainda os multigrafos (nos quais múltiplas arestas paralelas são permitidas)





Observação

Ou ainda os pseudografos (não orientados nos quais *self-loops* são permitidos)



Observação

Nesta disciplina iremos estudar apenas os grafos simples (a menos que algo diferente seja explitamente mencionado, por exemplo em exercícios ou EP's)

Ex: Redes Sociais

Que informação pode ser interessante eu querer obter de uma rede social?

Ex: Redes Sociais

Que informação pode ser interessante eu querer obter de uma rede social?

Pessoas potencialmente mais influentes?

Como eu obtenho essa informação do grafo?

Ex: Redes Sociais

Que informação pode ser interessante eu querer obter de uma rede social?

Pessoas potencialmente mais influentes?

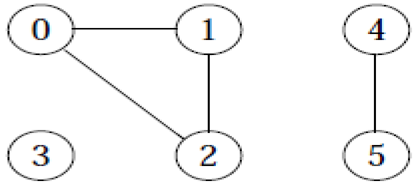
Como eu obtenho essa informação do grafo?

→ tamanho da rede de contato? nr de seguidores?

(não direcionado x direcionado)

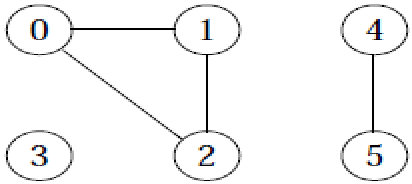
Grau de um Vértice

- Em grafos não direcionados:
  - O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.
  - Um vérice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.
  - Ex.: O vértice 1 tem grau e o vértice 3

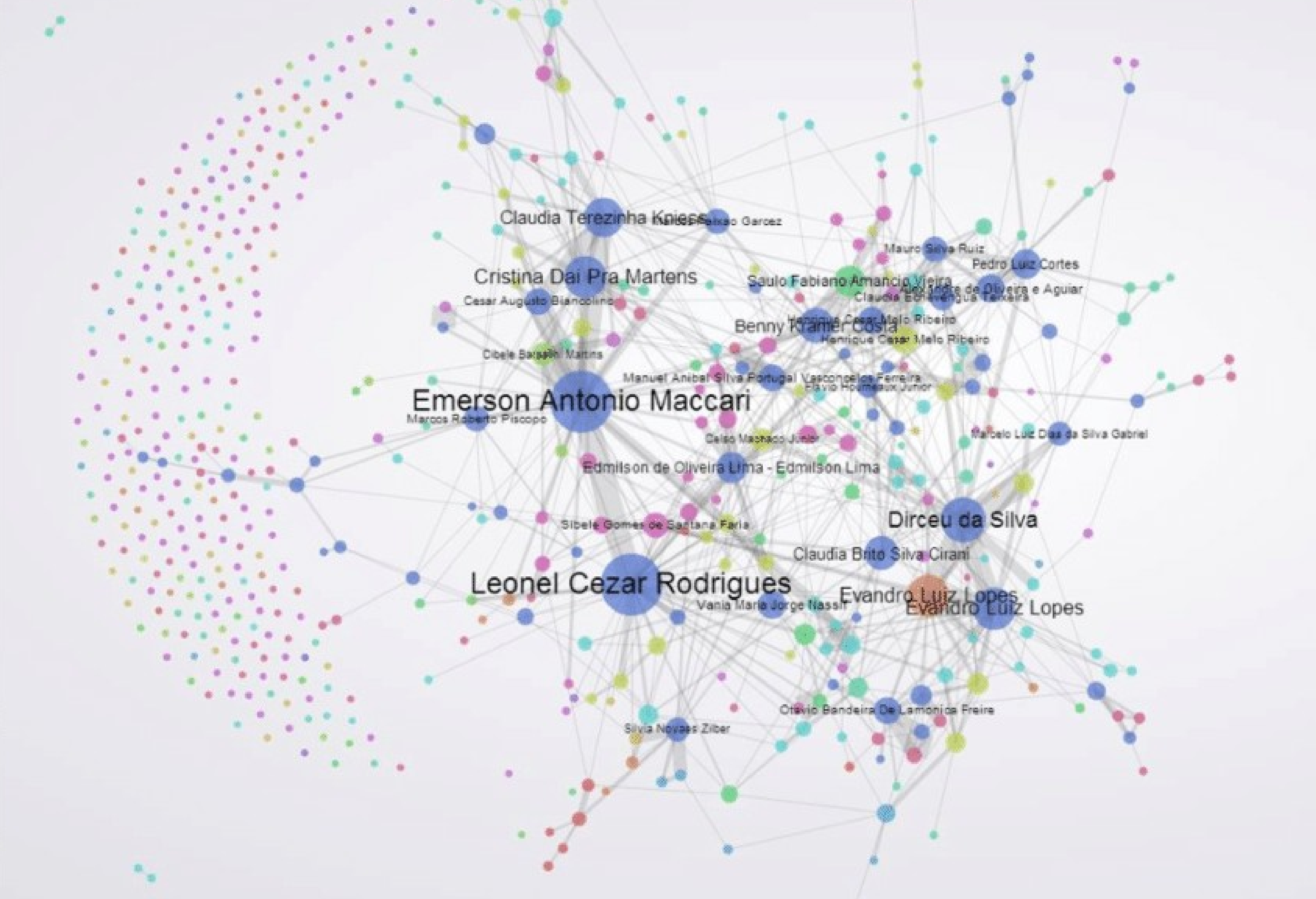


Grau de um Vértice

- Em grafos não direcionados:
  - O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.
  - Um vérice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.
  - Ex.: O vértice 1 tem grau 2 e o vértice 3 é isolado.



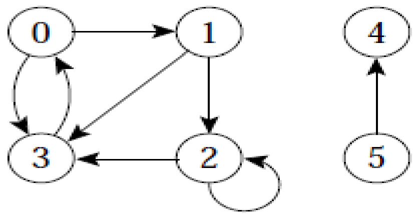
Ex: número de colaborações entre pesquisadores



https://www.researchgate.net/publication/328272425_Analise_e_gestao_de_analise_de_redes_de_colaboracao_entre_pesquisadores_de_programas_de_pos-graduacao_stricto_sensu_com_a_utilizacao_da_ferramenta_computacional_Scriptlattes

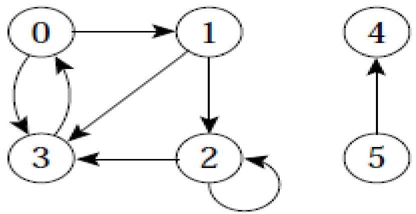
Grau de um Vértice

- Em grafos direcionados
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree*) mais o número de arestas que chegam nele (*in-degree*).
  - Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* *out-degree* e grau



Grau de um Vértice

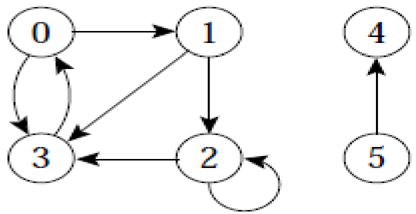
- Em grafos direcionados
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree*) mais o número de arestas que chegam nele (*in-degree*).
  - Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.



Grau de um Vértice

Se eu quero saber o número de seguidores de alguém, que informação eu quero?

- Em grafos direcionados
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree*) mais o número de arestas que chegam nele (*in-degree*).
  - Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.

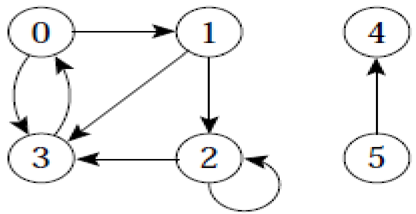


Grau de um Vértice

Se eu quero saber o número de seguidores de alguém, que informação eu quero?

In-degree ou out-degree, depende de como você modela o grafo...

- Em grafos direcionados
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree*) mais o número de arestas que chegam nele (*in-degree*).
  - Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.



Ex: Logística

Como fazer rotas de distribuição?

https://blog.longa.com.br/roteirizacao-logistica/

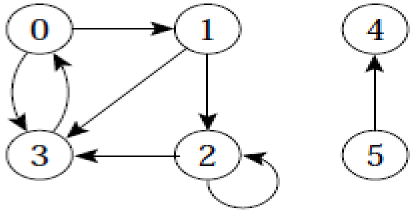
Ex: Logística

Como fazer rotas de distribuição?

https://blog.longa.com.br/roteirizacao-logistica/

- O que é um caminho?
- Quero repetir lugares?
- Quero voltar ao ponto de partida ao final?

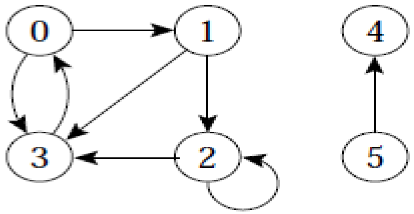
Caminho entre Vértices



Caminho entre Vértices

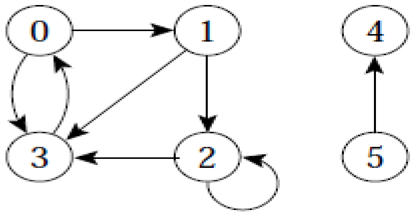
- Um caminho de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é

- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele,



Caminho entre Vértices

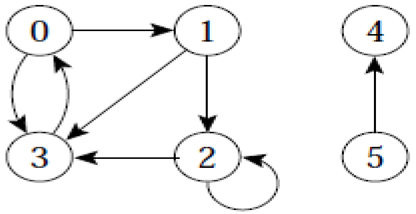
- Um caminho de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Se existir um caminho c de x a y então y é **alcançável** a partir de x via c.



Caminho entre Vértices

- Um caminho de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Se existir um caminho c de x a y então y é **alcançável** a partir de x via c.

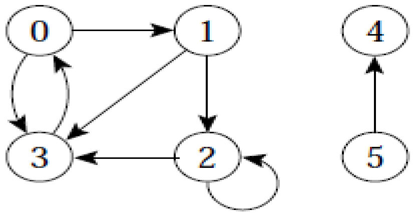
Lembra do exemplo das redes sociais, quem segue quem?



Caminho entre Vértices

- Um caminho de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Se existir um caminho c de x a y então y é **alcançável** a partir de x via c.
- Um caminho é **simples** se todos os vértices do caminho são distintos.

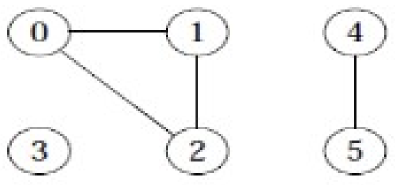
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3)$ é simples e tem comprimento 3. O caminho $(1, 3, 0, 3)$ não é simples.

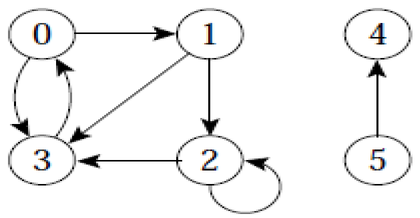


Profa. Ariane Machado Lima

Ciclos

O que é um ciclo?
(grafos não direcionados e direcionados)

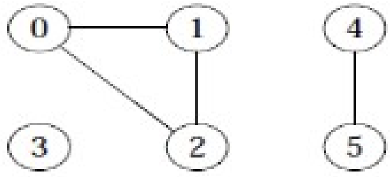


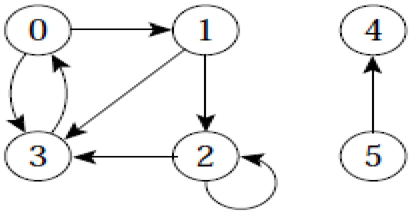


Ciclos

O que é um ciclo?
(grafos não direcionados e direcionados)

(2) é um ciclo? (1)?

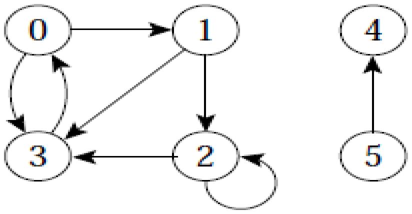




Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.
  - O *self-loop* é um ciclo de tamanho 1.
  - Dois caminhos $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ e $(v'_0, v'_1, \ldots, v'_k)$ formam o mesmo ciclo se existir um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

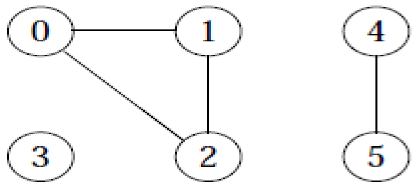
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3, 0)$ forma um ciclo. O caminho$(0, 1, 3, 0)$ forma o mesmo ciclo que os caminhos $(1, 3, 0, 1)$ e $(3, 0, 1, 3)$.



Ciclos

- Em um grafo não direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos três arestas.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.

Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 0)$ é um ciclo.



Profa. Ariane Machado Lima

Referências

ZIVIANI, N. Projetos de Algoritmos - com implementações em Pascal e C. 3ª ed. revista e ampliada Cengage Learning, 2011. Cap 7