Pedro A. Morettin
Wilton de O. Bussab

ESTATÍSTICA BÁSICA

6ª edição
Revista e atualizada

Editora Saraiva

Editora Saraiva

Rua Henrique Schaumann, 270 – CEP: 05413-010
Pinheiros – TEL.: PABX (0XX11) 3613-3000
Fax: (0XX11) 3611-3308 – Televendas: (0XX11) 3613-3344
Fax Vendas: (0XX11) 3268-3268 – São Paulo – SP
Endereço Internet: http://www.saraivauni.com.br

Filiais

AMAZONAS/RONDÔNIA/RORAIMA/ACRE
Rua Costa Azevedo, 56 – Centro
Fone/Fax: (0XX92) 3633-4227 / 3633-4782 – Manaus

BAHIA/SERGIPE
Rua Agripino Dórea, 23 – Brotas
Fone: (0XX71) 3381-5854 / 3381-5895 / 3381-0959 – Salvador

BAURU/SÃO PAULO (sala dos professores)
Rua Monsenhor Claro, 2-55/2-57 – Centro
Fone: (0XX14) 3234-5643 / 3234-7401 – Bauru

CAMPINAS/SÃO PAULO (sala dos professores)
Rua Camargo Pimentel, 660 – Jd. Guanabara
Fone: (0XX19) 3243-8004 / 3243-8259 – Campinas

CEARÁ/PIAUÍ/MARANHÃO
Av. Filomeno Gomes, 670 – Jacarecanga
Fone: (0XX85) 3238-2323 / 3238-1331 – Fortaleza

DISTRITO FEDERAL
SIA/SUL Trecho 2, Lote 850 – Setor de Indústria e Abastecimento
Fone: (0XX61) 3344-2920 / 3344-2951 / 3344-1709 – Brasília

GOIÁS/TOCANTINS
Av. Independência, 5330 – Setor Aeroporto
Fone: (0XX62) 3225-2882 / 3212-2806 / 3224-3016 – Goiânia

MATO GROSSO DO SUL/MATO GROSSO
Rua 14 de Julho, 3148 – Centro
Fone: (0XX67) 3382-3682 / 3382-0112 – Campo Grande

MINAS GERAIS
Rua Além Paraíba, 449 – Lagoinha
Fone: (0XX31) 3429-8300 – Belo Horizonte

PARÁ/AMAPÁ
Travessa Apinagés, 186 – Batista Campos
Fone: (0XX91) 3222-9034 / 3224-9038 / 3241-0499 – Belém

PARANÁ/SANTA CATARINA
Rua Conselheiro Laurindo, 2895 – Prado Velho
Fone: (0XX41) 3332-4894 – Curitiba

PERNAMBUCO/ALAGOAS/PARAÍBA/R. G. DO NORTE
Rua Corredor do Bispo, 185 – Boa Vista
Fone: (0XX81) 3421-4246 / 3421-4510 – Recife

RIBEIRÃO PRETO/SÃO PAULO
Av. Francisco Junqueira, 1255 – Centro
Fone: (0XX16) 3610-5843 / 3610-8284 – Ribeirão Preto

RIO DE JANEIRO/ESPÍRITO SANTO
Rua Visconde de Santa Isabel, 113 a 119 – Vila Isabel
Fone: (0XX21) 2577-9494 / 2577-8867 / 2577-9565 – Rio de Janeiro

RIO GRANDE DO SUL
Av. A. J. Renner, 231 – Farrapos
Fone: (0XX51) 3371- 4001 / 3371-1467 / 3371-1567 – Porto Alegre

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO/SÃO PAULO (sala dos professores)
Av. Brig. Faria Lima, 6363 – Rio Preto Shopping Center – V. São José
Fone: (0XX17) 227-3819 / 227-0982 / 227-5249 – São José do Rio Preto

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS/SÃO PAULO (sala dos professores)
Rua Santa Luzia, 106 – Jd. Santa Madalena
Fone: (0XX12) 3921-0732 – São José dos Campos

SÃO PAULO
Av. Antártica, 92 – Barra Funda
Fone: PABX (0XX11) 3613-3666 – São Paulo

ISBN 978-85-02-08177-2

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO NA FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

M843e
6. ed.
Morettin, Pedro Alberto,
Estatística Básica/Pedro A. Morettin, Wilton O. Bussab. – 6. ed. – São Paulo : Saraiva, 2010.

Inclui Bibliografia.
ISBN 978-85-02-08177-2

1. Econometria. 2. Estatística. 3. Estatística Matemática – Problemas, Questões, Exercícios. I. Bussab, Wilton de Oliveira, 1940-. II. Título.

09-0719 CDD: 330.028
CDU: 330.43

Direção editorial	Flávia Alves Bravin
Coordenação editorial	Ana Paula Matos Gisele Folha Mós Juliana Rodrigues de Queiroz Rita de Cássia da Silva
Produção editorial	Daniela Nogueira Secondo Rosana Peroni Fazolari
Marketing editorial	Nathalia Setrini
Arte e produção	ERJ Composição Editorial
Capa	Weber Amendola
Atualização da 2ª tiragem	ERJ Composição Editorial

Contato com o editorial
editorialuniversitario@editorasaraiva.com.br

6ª Edição
1ª tiragem: 2009
2ª tiragem: 2010

SaraivaUni

Capítulo 6

Variáveis Aleatórias Discretas

6.1 Introdução

No capítulo anterior introduzimos alguns modelos probabilísticos por meio de espaços amostrais bem simples. Isso facilitou bastante a compreensão do conceito de probabilidade e a obtenção de algumas propriedades. Mas, para atender a situações práticas mais gerais, necessitamos ampliar esses conceitos para que tenhamos modelos probabilísticos que representem todos os tipos de variáveis definidas no Capítulo 2. Muito do que foi apresentado naquele capítulo para tratamento descritivo das variáveis terá o seu correspondente no modelo teórico.

Para as variáveis qualitativas, a descrição de probabilidades associadas a eventos construída no capítulo precedente adapta-se muito bem. Dada a sua simplicidade, trataremos aqui de variáveis quantitativas discretas. Já os modelos para variáveis contínuas necessitarão de um artifício matemático, baseado em uma generalização do conceito de histograma, definido na seção 2.3, e esse será o objetivo do próximo capítulo. A extensão dos modelos para várias variáveis será tratada no Capítulo 8.

Por outro lado, quando estudamos a descrição de dados, vimos que os recursos disponíveis para a análise das variáveis quantitativas são muito mais ricos do que para as variáveis qualitativas. Isso sugere o uso de artifícios para transformar essas últimas variáveis naquelas do primeiro tipo. Por exemplo, considere o caso de um questionário em que uma pessoa é indagada a respeito de uma proposição, e as respostas possíveis são *sim* ou *não*. Podemos associar ao problema uma variável que toma dois valores, 1 ou 0, por exemplo, correspondentes às respostas *sim* ou *não*, respectivamente. Esse tipo de variável será estudado neste capítulo.

O conhecimento de modelos probabilísticos para variáveis quantitativas é muito importante, e grande parte do restante deste livro será dedicada à construção desses modelos e inferências sobre seus parâmetros. Essas variáveis, para as quais iremos construir modelos probabilísticos, serão chamadas de *variáveis aleatórias* (v.a.).

6.2 O Conceito de Variável Aleatória Discreta

O conceito de v.a. discreta será introduzido por meio de um exemplo.

Exemplo 6.1. Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes (A e B), e a montagem consistirá em juntar as duas partes e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só poderá ser verificado após a montagem. Para estudar a viabilidade de seu empreendimento, o empresário quer ter uma idéia da distribuição do lucro por peça montada.

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como bom, longo ou curto, conforme sua medida esteja dentro da especificação, maior ou menor que a especificada, respectivamente. Além disso, foram obtidos dos fabricantes o preço de cada componente ($5,00) e as probabilidades de produção de cada componente com as características bom, longo e curto. Esses valores estão na Tabela 6.1.

Se o produto final apresentar algum componente com a característica C (curto), ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de $5,00. Cada componente longo poderá ser recuperado a um custo adicional de $5,00. Se o preço de venda de cada unidade for de $25,00, como seria a distribuição de freqüências da variável X: lucro por conjunto montado?

Tabela 6.1: Distribuição da produção das fábricas A e B, de acordo com as medidas das peças produzidas.

Produto		Fábrica A Cilindro	Fábrica B Esfera
Dentro das especificações	bom (B)	0,80	0,70
Maior que as especificações	longo (L)	0,10	0,20
Menor que as especificações	curto (C)	0,10	0,10

Fonte: Retirada das especificações técnicas das fábricas *A* e *B*.

A construção dessa distribuição de freqüências vai depender de certas *suposições* que faremos sobre o comportamento do sistema considerado. Com base nessas suposições, estaremos trabalhando com um *modelo* da realidade, e a distribuição que obtivermos será uma distribuição teórica, tanto mais próxima da distribuição de freqüências real quanto mais fiéis à realidade forem as suposições.

Primeiramente, vejamos a construção do espaço amostral para a montagem dos conjuntos segundo as características de cada componente e suas respectivas probabilidades. Como os componentes vêm de fábricas diferentes, vamos supor que a classificação dos cilindros e a da esfera, segundo suas características, sejam eventos independentes. Obteremos a configuração da Figura 6.1.

Uma representação do espaço amostral em questão está apresentada na Tabela 6.2 e foi obtida da Figura 6.1.

Figura 6.1: Diagrama em árvore para o Exemplo 6.1.

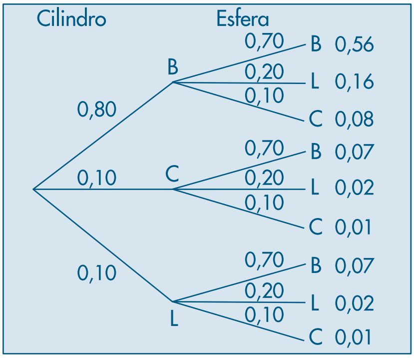


Tabela 6.2: Distribuição de probabilidade das possíveis composições das montagens.

Produto	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
BB	0,56	15
BL	0,16	10
BC	0,08	–5
LB	0,07	10
LL	0,02	5
LC	0,01	–5
CB	0,07	–5
CL	0,02	–5
CC	0,01	–5

Fonte: Figura 5.1 e informações no texto.

A última coluna da Tabela 6.2 foi construída com base nas informações sobre preços. Por exemplo, obtendo uma montagem LB (cilindro longo e esfera boa), do preço de venda \$25,00 devemos descontar: \$10,00 dos custos dos componentes e \$5,00 para recuperar o cilindro longo. Portanto, o lucro X desse conjunto será \$10,00. Verifique os lucros das demais montagens.

Com os dados da Tabela 6.2, vemos que X pode assumir um dos seguintes valores:

$$
\begin{aligned}
15&, \text{ se ocorrer o evento } A_1 = \{BB\};\\
10&, \text{ se ocorrer o evento } A_2 = \{BL, LB\};\\
5&, \text{ se ocorrer o evento } A_3 = \{LL\};\\
-5&, \text{ se ocorrer o evento } A_4 = \{BC, LC, CB, CL, CC\}.
\end{aligned}
$$

Cada um desses eventos tem uma probabilidade associada, ou seja,

$$
P(A_1) = 0{,}56, \quad P(A_2) = 0{,}23,
$$
$$
P(A_3) = 0{,}02, \quad P(A_4) = 0{,}19,
$$

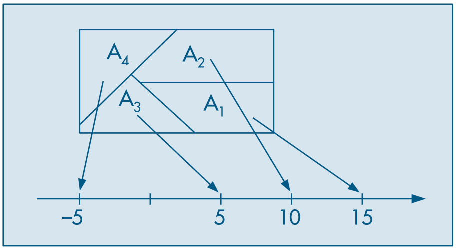
o que nos permite escrever a função $(x, p(x))$ da Tabela 6.3, que é um modelo teórico para a distribuição da variável X, que o empresário poderá usar para julgar a viabilidade econômica do projeto que ele pretende realizar. Aqui, x é o valor da v.a. X e $p(x)$ é a probabilidade de X tomar o valor x. Voltaremos a esse problema mais adiante.

Tabela 6.3: Distribuição da v.a. X.

x	$p(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
–5	0,19
Total	1,00

A função (x, p (x)) é chamada *função de probabilidade* da v.a. X. Esquematicamente teremos a situação da Figura 6.2.

Figura 6.2: Função de probabilidade da v.a. X = lucro por montagem.



É evidente que, ao mesmo espaço amostral da Tabela 6.2, podemos associar outras variáveis aleatórias, como veremos a seguir.

Exemplo 6.2. Se considerarmos Y como sendo a variável "custo de recuperação de cada conjunto produzido", verificaremos que Y irá assumir os valores

$$\begin{aligned} &0, \text{ se ocorrer o evento } B_1 = \{BB, BC, LC, CB, CL, CC\};\\ &5, \text{ se ocorrer o evento } B_2 = \{BL, LB\};\\ &10, \text{ se ocorrer o evento } B_3 = \{LL\}. \end{aligned}$$

A função de probabilidade da v.a. Y está representada na Tabela 6.4 e a Figura 6.3 representa a situação esquematicamente.

Figura 6.3: Função de probabilidade da v.a. Y = custo de recuperação.

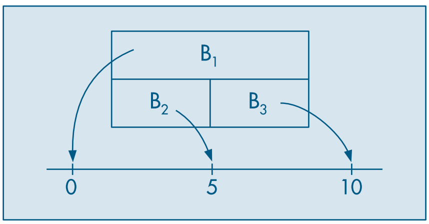


Tabela 6.4: Distribuição da v.a. Y.

y	$p(y)$
0	0,75
5	0,23
10	0,02
Total	1,00

Deduz-se do exposto que uma v.a. X, do tipo discreto, estará bem caracterizada se indicarmos os possíveis valores x_1, x_2, ..., x_n, ... que ela pode assumir e as respectivas probabilidades $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$, ..., ou seja, se conhecermos a sua função de probabilidade $(x, p(x))$. Também usaremos a notação $p(x) = P(X = x)$.

Em algumas situações, a determinação da função de probabilidade (f.p.) é bem mais simples. Isso pode ser verificado pelos dois exemplos seguintes.

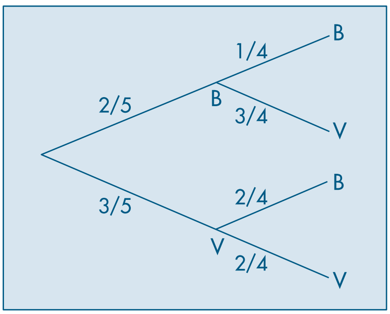
Exemplo 6.3. Voltemos à situação do Exemplo 5.10, em que consideramos duas extrações, sem reposição, de uma urna contendo duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Definamos a v.a. X: número de bolas vermelhas obtidas nas duas extrações. Obtemos a Tabela 6.5 e a Figura 6.4.

Tabela 6.5: Extrações sem reposição de urna com duas bolas brancas e três bolas vermelhas.

Resultados	Probabilidades	X
BB	1/10	0
BV	3/10	1
VB	3/10	1
VV	3/10	2

Fonte: Figura 6.4.

Figura 6.4: Diagrama em árvore para o Exemplo 6.3.



Vemos, pois, que a cada resultado do experimento está associado um valor da v.a. X, a saber, 0, 1 ou 2.

Temos que $X = 0$, com probabilidade 1/10, pois $X = 0$ se, e somente se, ocorre o resultado BB; $X = 1$ com probabilidade 3/10 + 3/10 = 6/10, pois $X = 1$ se, e somente se, ocorrem os resultados BV ou VB, que são mutuamente exclusivos; finalmente, $X = 2$ com probabilidade 3/10, pois $X = 2$ se, e somente se, ocorre o resultado VV. Resumidamente,

$$p(0) = P(X = 0) = P(BB) = 1/10,$$
$$p(1) = P(X = 1) = P(BV \text{ ou } VB) = 6/10,$$
$$p(2) = P(X = 2) = P(VV) = 3/10.$$

Na Tabela 6.6 apresentamos a distribuição de probabilidades da v.a. X.

Tabela 6.6: Distribuição de probabilidades da v.a. X = número de bolas vermelhas.

x	$p(x)$
0	1/10
1	6/10
2	3/10

Fonte: Tabela 6.5.

Exemplo 6.4. Retomemos o Exemplo 5.3, em que consideramos o lançamento de uma moeda duas vezes. Definamos a v.a. Y: número de caras obtidas nos dois lançamentos. Temos, então:

$$p(0) = P(Y = 0) = P(RR) = 1/4,$$
$$p(1) = P(Y = 1) = P(CR \text{ ou } RC) = 1/4 + 1/4 = 1/2,$$
$$p(2) = P(Y = 2) = P(CC) = 1/4.$$

Na Tabela 6.7 e Figura 6.5 temos esquematizado o que ocorre e na Tabela 6.8 apresentamos a distribuição de probabilidades de Y.

Tabela 6.7: Lançamento de duas moedas.

Resultados	Probabilidades	Y
CC	1/4	2
CR	1/4	1
RC	1/4	1
RR	1/4	0

Fonte: Figura 6.5.

Figura 6.5: Diagrama em árvore para o Exemplo 6.4.

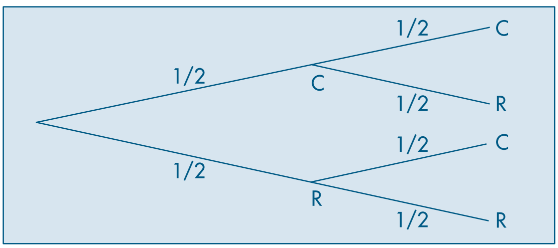


Tabela 6.8: Distribuição da v.a. Y = número de caras.

y	$p(y)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

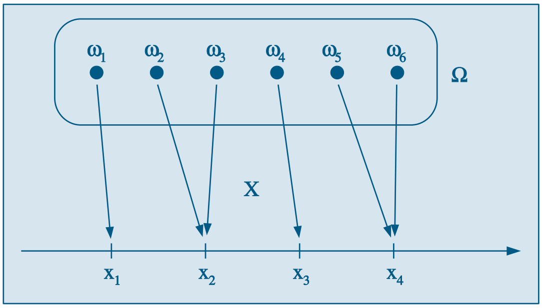
Fonte: Tabela 6.7.

Dos exemplos apresentados, vemos que, a cada ponto do espaço amostral, a variável sob consideração associa um valor numérico, o que corresponde em Matemática ao conceito de função, mais precisamente, a uma função definida no espaço amostral Ω e assumindo valores reais.

Definição. Uma função X, definida no espaço amostral Ω e com valores num conjunto enumerável de pontos da reta é dita uma variável aleatória discreta.

Esquematicamente, teremos a situação da Figura 6.6.

Figura 6.6: Definição de uma v.a.



Vimos, também, como associar a cada valor x_i da v.a. X sua probabilidade de ocorrência. Ela é dada pela probabilidade do evento A de Ω, cujos elementos correspondem ao valor x_i (veja Figuras 6.2 e 6.3). Matematicamente, podemos escrever

$$P(X = x_i) = P(A),$$

onde

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \subset \Omega$$

é tal que $X(\omega_i) = x_i$, se $\omega_i \in A$ e $X(\omega_i) \neq x_i$, se $\omega_i \in A^c$.

Definição. Chama-se função de probabilidade da v.a. discreta X, que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, a função $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, \ldots\}$, que a cada valor de x_i associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, \ i = 1, 2, \ldots$$

Problemas

1. Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas. Retire três bolas, sem reposição, e defina a v.a. X igual ao número de bolas pretas. Obtenha a distribuição de X.
2. Repita o problema anterior, mas considerando extrações com reposição.
3. Suponha que uma moeda perfeita é lançada até que cara apareça pela primeira vez. Seja X o número de lançamentos até que isso aconteça. Obtenha a distribuição de X. (Observe que, nesse problema, pelo menos teoricamente, X pode assumir um número infinito de valores.) Veja também o Problema 55.
4. Uma moeda perfeita é lançada quatro vezes. Seja Y o número de caras obtidas. Calcule a distribuição de Y.
5. Repita o problema anterior, considerando agora que a moeda é viciada, sendo a probabilidade de cara dada por p, $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$.
6. Generalize o Problema 5, para n lançamentos da moeda.

6.3 Valor Médio de uma Variável Aleatória

Vamos introduzir o conceito de valor médio por meio do seguinte exemplo.

Exemplo 6.5. Uma pergunta que logo ocorreria ao empresário do Exemplo 6.1 é qual o lucro médio por conjunto montado que ele espera conseguir. Da Tabela 6.3, observamos que 56% das montagens devem produzir um lucro de 15 reais, 23% um lucro de dez reais, e assim por diante. Logo, o lucro esperado por montagem será dado por

$$\text{lucro médio} = (0{,}56)(15) + (0{,}23)(10) + (0{,}02)(5) + (0{,}19)(-5) = 9{,}85.$$

Isto é, caso sejam verdadeiras as suposições feitas para determinar a distribuição da v.a., o empresário espera ter um lucro de 9,85 reais por conjunto montado.

Definição. Dada a v.a. X discreta, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_n$, chamamos valor médio ou esperança matemática de X ao valor

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{6.1}$$

A expressão (6.1) é semelhante àquela utilizada para a média, introduzida no Capítulo 3, onde no lugar das probabilidades p_i tínhamos as freqüências relativas f_i. A distinção entre essas duas quantidades é que a primeira corresponde a valores de um modelo teórico pressuposto, e a segunda, a valores observados da variável. Como p_i e f_i têm a mesma interpretação, todas as medidas e gráficos discutidos no Capítulo 2, baseados na distribuição das f_i, possuem um correspondente na distribuição de uma v.a. Além do valor médio, ou simplesmente *média*, definido acima, podemos considerar também outras medidas de posição e variabilidade, como a mediana e o desvio padrão. Veja a seção 6.8 para a definição da mediana de uma v.a. discreta. Vamos considerar agora a definição de variância.

Definição. Chamamos de *variância* da v.a. X o valor

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i. \tag{6.2}$$

O desvio padrão de X, DP(X), é definido como a raiz quadrada positiva da variância.

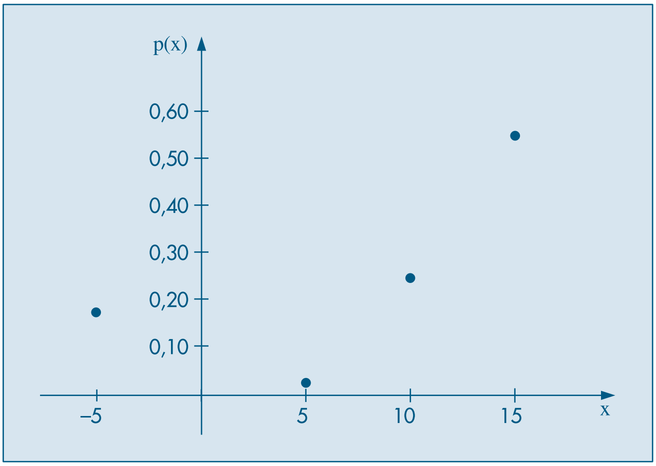
Exemplo 6.6. Deixamos a cargo do leitor verificar que, no caso do problema do empresário, teremos:

(i) Var(X) = 57,23;

(ii) $DP(X)$ = 7,57;

(iii) gráfico de (x, $p(x)$): Figura 6.7.

Figura 6.7: Gráfico de $p(x)$: distribuição da v.a. X = lucro por montagem.



Observação. Até agora, consideramos o caso em que a v.a. X pode assumir um número *finito* de valores. Mas uma v.a. discreta X pode assumir um número *infinito*, porém *enumerável*, de valores, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, com probabilidades $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, tal que cada $p_i > 0$ e a soma de todos os p_i seja 1, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Veja o Problema 3. Nesse caso, a definição de esperança deve ser modificada. A soma na expressão (6.1) é uma "soma infinita", que temos de supor que seja "convergente".

Problemas

7. Obtenha a média e a variância da v.a. X dos Problemas 1 e 2.

8. Obter a média e a variância da v.a. Y do Problema 4.

6.4 Algumas Propriedades do Valor Médio

Retomemos o Exemplo 6.1 para ilustrar algumas propriedades da média de uma v.a.

Exemplo 6.7. Suponha que todos os preços determinados pelo empresário do Exemplo 6.1 estivessem errados. Na realidade, todos os valores deveriam ser duplicados, isto é, custos e preços de venda. Isso corresponde à transformação $Z = 2X$. As probabilidades associadas à v.a. Z serão as mesmas da v.a. X, pois cada valor de X irá corresponder a um único valor de Z. Na Tabela 6.9 temos a distribuição de Z.

O valor médio da v.a. Z é obtido por

$$E(Z) = \sum z_i p(z_i) = \sum (2x_i)p(x_i) = 19{,}70.$$

Suponha, agora, que queiramos a distribuição da v.a. $W = X^2$. Baseados na Tabela 6.3, obtemos a Tabela 6.10.

Tabela 6.9: Distribuição da variável aleatória $Z = 2X$.

x	$z = 2x$	$p(z) = p(x)$	$z \cdot p(z)$
15	30	0,56	16,80
10	20	0,23	4,60
5	10	0,02	0,20
–5	–10	0,19	–1,90
Total	—	1,00	19,70

Fonte: Tabela 6.3.

Tabela 6.10: Distribuição da variável aleatória $W = X^2$.

w	$p(w)$	$w \cdot p(w)$
225	0,56	126,00
100	0,23	23,00
25	0,21	5,25
Total	1,00	154,25

Fonte: Tabela 6.3.

Observe que o evento $\{W = 25\}$ ocorre quando $\{X = 5$ ou $X = -5\}$, portanto $P(W = 25) = P(X = 5) + P(X = -5) = 0{,}02 + 0{,}19 = 0{,}21$. Segue-se que a média de W é

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum w_i p(w_i) = (225)(0{,}56) + (100)(0{,}23) + (25)(0{,}21) \\ &= (225)(0{,}56) + (100)(0{,}23) + \{(25)(0{,}02) + (25)(0{,}19)\} \\ &= \sum x_i^2 p(x_i) = 154{,}25. \end{aligned}$$

Quanto às esperanças de Z e W, transformadas de X, é fácil ver que elas podem ser escritas através da f.p. de X.

Definição. Dada a v.a. discreta X e a respectiva função de probabilidade $p(x)$, a esperança matemática da função $h(X)$ é dada por

$$E[h(X)] = \sum h(x_i)p(x_i). \tag{6.3}$$

As seguintes propriedades podem ser facilmente demonstradas (veja o Problema 45):

(a) Se $h(X) = aX + b$, onde a e b são constantes, então

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \tag{6.4}$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X). \tag{6.5}$$

(b) $\text{Var}(X) = E(X^2) - [(E(X)]^2 = \sum x_i^2 p(x_i) - [\sum x_i p(x_i)]^2.$ (6.6)

A fórmula (6.6) deve ser usada para facilitar o cálculo da variância.

Observação. A propriedade (6.4) não vale, em geral, para funções não-lineares. Veja o Problema 58.

Exemplo 6.8. Usando os resultados dos exemplos 6.5 e 6.7, obtemos

$$\text{Var}(X) = 154{,}25 - (9{,}85)^2 = 57{,}23.$$

Observação. Usaremos os símbolos abaixo para indicar a média e a variância de uma v.a. X:

$$E(X) = \mu(X),$$
$$\text{Var}(X) = \sigma^2(X),$$

ou, simplesmente, μ e σ^2, respectivamente, se não houver possibilidade de confusão.

6.5 Função de Distribuição Acumulada

No Capítulo 2 demos a definição de função de distribuição acumulada ou empírica para um conjunto de n observações. O equivalente teórico para variáveis aleatórias é definido a seguir.

Definição. Dada a variável aleatória X, chamaremos de função de distribuição acumulada (f.d.a.), ou simplesmente função de distribuição (f.d.) $F(x)$ à função

$$F(x) = P(X \leqslant x). \tag{6.7}$$

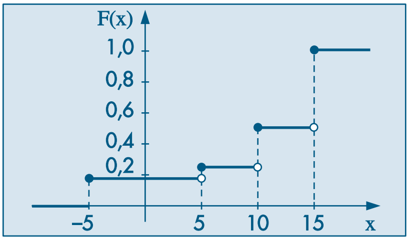
Observe que o domínio de F é todo o conjunto dos números reais, ao passo que o contradomínio é o intervalo [0,1].

Exemplo 6.9. Voltando ao problema do empresário e usando a f.p. de X definida na Tabela 6.3, a f.d.a. de X será dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -5 \\ 0{,}19, & \text{se } -5 \leqslant x < 5 \\ 0{,}21, & \text{se } 5 \leqslant x < 10 \\ 0{,}44, & \text{se } 10 \leqslant x < 15 \\ 1, & \text{se } x \geqslant 15, \end{cases}$$

cujo gráfico está na Figura 6.8.

Figura 6.8: f.d.a. para a v.a. X = lucro por montagem.



Observe que $P(X = x_i)$ é igual ao salto que a função $F(x)$ dá no ponto x_i; por exemplo, $P(X = 10) = 0{,}23 = F(10) - F(10-)$. De modo geral, $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i-)$, onde lembramos que $F(a-) = \lim_{x \to a_-} F(x)$. Observe, também, que o conhecimento de $F(x)$ é equivalente ao conhecimento da f.p. de X.

Problemas

9. No Problema 1, obtenha as distribuições das v.a. $3X$ e X^2.

10. Considere o lançamento de três moedas. Se ocorre o evento CCC, dizemos que temos uma *seqüência*, ao passo que se ocorre o evento CRC temos *três seqüências*. Defina a v.a. X = número de caras obtidas e Y = número de seqüências, isso para cada resultado possível. Assim, $X(CRR) = 1$ e $Y(CRR) = 2$. Obtenha as distribuições de X e Y. Calcule $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$ e $\text{Var}(Y)$.

11. Suponha que a v.a. V tem a distribuição seguinte:

v	0	1
$p(v)$	q	$1-q$

Obtenha $E(V)$ e $\text{Var}(V)$.

12. Seja X com distribuição dada abaixo; calcule $E(X)$. Considere a v.a. $(X-a)^2$ e calcule $E(X-a)^2$ para $a = 0$, 1/4, 1/2, 3/4, 1. Obtenha o gráfico de $E(X-a)^2 = g(a)$. Para qual valor de a, $g(a)$ é mínimo?

x	0	1	2
$p(x)$	1/2	1/4	1/4

13. Um vendedor de equipamento pesado pode visitar, num dia, um ou dois clientes, com probabilidade de 1/3 ou 2/3, respectivamente. De cada contato, pode resultar a venda de um equipamento por \$50.000,00 (com probabilidade 1/10) ou nenhuma venda (com probabilidade 9/10). Indicando por Y o valor total de vendas diárias desse vendedor, escreva a função de probabilidade de Y e calcule o valor total esperado de vendas diárias.

14. Calcule a variância da v.a. Y definida no Problema 13.

15. Obter a *f.d.a.* para a v.a. V do Problema 11. Faça seu gráfico.

16. Calcule a *f.d.a.* da v.a. Y do Problema 10 e faça seu gráfico.

17. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade.

t	2	3	4	5	6	7
$p(t)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

(*a*) Calcule o tempo médio de processamento.

Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de \$2,00, mas, se ele processa a peça em menos de seis minutos, ganha \$0,50 em cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em quatro minutos, recebe a quantia adicional de \$1,00.

(*b*) Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. G: quantia em \$ ganha por peça.

18. Sabe-se que a v.a. X assume os valores 1, 2 e 3 e que sua *f.d.a.* $F(x)$ é tal que

$$F(1) - F(1-) = 1/3,$$
$$F(2) - F(2-) = 1/6,$$
$$F(3) - F(3-) = 1/2.$$

Obtenha a distribuição de X, a *f.d.a.* $F(x)$ e os gráficos respectivos.

19. Obtenha a *f.d.a.* $F(t)$ da v.a. T do Problema 17.

6.6 Alguns Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias Discretas

Algumas variáveis aleatórias adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos. Portanto, um estudo pormenorizado dessas variáveis é de grande importância para a construção de modelos probabilísticos para situações reais e a conseqüente estimação de seus parâmetros. Para algumas dessas distribuições existem tabelas que facilitam o cálculo de probabilidades, em função de seus parâmetros. Nesta seção iremos estudar alguns desses modelos, procurando enfatizar as condições em que eles aparecem, suas funções de probabilidade, parâmetros e como calcular probabilidades.

6.6.1 Distribuição Uniforme Discreta

Este é o caso mais simples de v.a. discreta, em que cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade.

Definição. A v.a. discreta X, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_k$, tem *distribuição uniforme* se, e somente se,

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p = \frac{1}{k}, \tag{6.8}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

É fácil verificar que

$$E(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i, \tag{6.9}$$

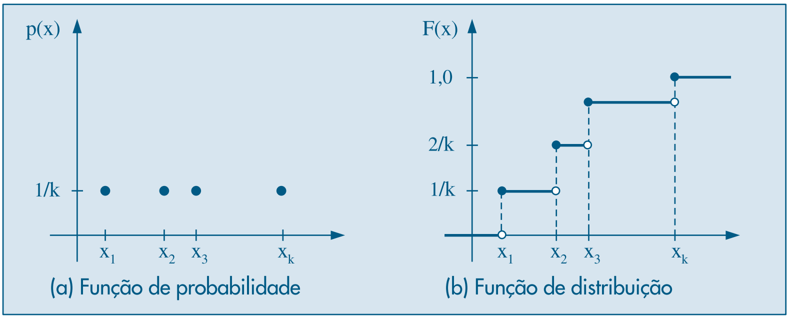
$$\text{Var}(X) = \frac{1}{k}\left\{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{k}\right\}, \tag{6.10}$$

e que a função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \sum_{(x_i \leqslant x)} \frac{1}{k} = \frac{n(x)}{k}, \tag{6.11}$$

onde $n(x)$ é o número de $x_i \leqslant x$ (veja a Figura 6.9).

Figura 6.9: Distribuição uniforme discreta.



Exemplo 6.10. Seja X a v.a. que indica o "número de pontos marcados na face superior de um dado", quando ele é lançado. Obtemos na Tabela 6.11 a distribuição de X. Temos, também,

$$E(X) = 1/6\ \{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\} = 21/6 = 3{,}5,$$
$$\text{Var}(X) = 1/6\ \{(1 + 4 + \ldots + 36) - (21)^2/6\} = 35/12 = 2{,}9.$$

Tabela 6.11: Número de pontos no lançamento de um dado.

x	1	2	3	4	5	6	Total
$p(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1,0

6.6.2 Distribuição de Bernoulli

Muitos experimentos são tais que os resultados apresentam ou não uma determinada característica. Por exemplo:

(1) uma moeda é lançada: o resultado ou é cara, ou não (ocorrendo, então, coroa);

(2) um dado é lançado: ou ocorre face 5 ou não (ocorrendo, então, uma das faces 1, 2, 3, 4 ou 6);

(3) uma peça é escolhida ao acaso de um lote contendo 500 peças: essa peça é defeituosa ou não;

(4) uma pessoa escolhida ao acaso dentre 1.000 é ou não do sexo masculino;

(5) uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade e verifica-se se ela é favorável ou não a um projeto municipal.

Em todos esses casos, estamos interessados na ocorrência de *sucesso* (cara, face 5 etc.) ou *fracasso* (coroa, face diferente de 5 etc.). Essa terminologia (sucesso e fracasso) será usada freqüentemente.

Para cada experimento acima, podemos definir uma v.a. X, que assume apenas dois valores: 1, se ocorrer sucesso, e 0, se ocorrer fracasso. Indicaremos por p a probabilidade de sucesso, isto é, $P(\text{sucesso}) = P(S) = p$, $0 < p < 1$.

Definição. A variável aleatória X, que assume apenas os valores 0 e 1, com função de probabilidade $(x, p(x))$ tal que

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - p,$$
$$p(1) = P(X = 1) = p,$$

é chamada *variável aleatória de Bernoulli.*

Então, segue-se facilmente que

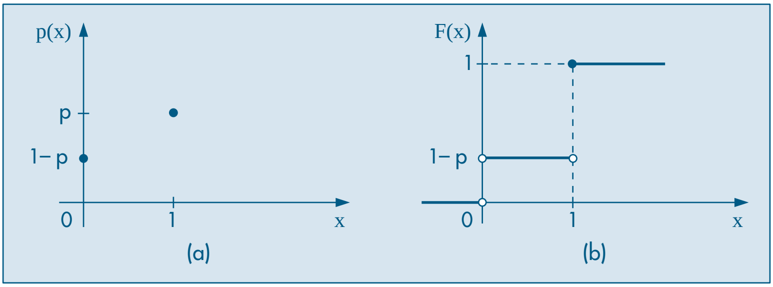
$$E(X) = p; \tag{6.12}$$

$$\operatorname{Var}(X) = p - p^2 = p(1 - p), \tag{6.13}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - p, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Na Figura 6.10 temos representadas as f.p. e f.d.a. de X.

Figura 6.10: Distribuição de Bernoulli (a) f.p. (b) f.d.a.



Exemplo 6.11. Vamos supor o caso do experimento (2). Supondo o dado perfeito, teremos $P(X = 0) = 5/6$, $P(X = 1) = 1/6$,

$$E(X) = 1/6, \text{Var}(X) = (1/6)\,(5/6) = 5/36.$$

Observação. Experimentos que resultam numa v.a. de Bernoulli são chamados *ensaios de Bernoulli*. Usaremos a notação

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

para indicar uma v.a. com distribuição de Bernoulli com parâmetro p.

6.6.3 Distribuição Binomial

Imagine, agora, que repetimos um ensaio de Bernoulli n vezes, ou, de maneira alternativa, obtemos uma amostra de tamanho n de uma distribuição de Bernoulli. Suponha ainda que as repetições sejam *independentes*, isto é, o resultado de um ensaio não tem influência nenhuma no resultado de qualquer outro ensaio. Uma amostra particular será constituída de uma seqüência de sucessos e fracassos, ou, alternativamente, de uns e zeros. Por exemplo, repetindo um ensaio de Bernoulli cinco vezes ($n = 5$), um particular resultado pode ser $FSSFS$ ou a quíntupla ordenada (0, 1, 1, 0, 1). Usando a notação da seção 6.6.2, com $P(S) = p$, a probabilidade de tal amostra será

$$(1 - p)pp(1 - p)p = p^3(1 - p)^2.$$

O número de sucessos nessa amostra é igual a 3, sendo 2 o número de fracassos. Considere agora as seguintes situações, obtidas de (1) a (5) da seção anterior:

(1’) uma moeda é lançada três vezes; qual é a probabilidade de se obter duas caras?

(2’) um dado é lançado cinco vezes; qual é a probabilidade de se obter face 5 no máximo três vezes?

(3') dez peças são extraídas, ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças; qual é a probabilidade de que todas sejam defeituosas, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas?

(4') cinco pessoas são escolhidas ao acaso entre 1.000; qual é a probabilidade de que duas sejam do sexo masculino?

(5') sabe-se que 90% das pessoas de uma cidade são favoráveis a um projeto municipal. Escolhendo-se 100 pessoas ao acaso entre os moradores, qual é a probabilidade de que pelo menos 80 sejam favoráveis ao projeto?

Observe que, nos casos (4') e (5'), o fato de estarmos extraindo indivíduos de um conjunto muito grande implica que podemos supor que as extrações sejam praticamente independentes.

Exemplo 6.12. Consideremos a situação (1'), supondo que a moeda seja "honesta", isto é, $P(\text{sucesso}) = P(\text{cara}) = 1/2$. Indiquemos o sucesso (cara) por S e fracasso (coroa), por F. Então, estamos interessados na probabilidade do evento

$$A = \{SSF, SFS, FSS\},$$

ou, em termos da notação anterior, na probabilidade de

$$A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

É claro que $P(A) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$ e, devido à independência dos ensaios,

$$P(SSF) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(SFS) = P(FSS),$$

e, portanto,

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

Se a probabilidade de sucesso for p, $0 < p < 1$, e $P(F) = 1 - p = q$, então

$$P(SSF) = p \times p \times q = p^2 \times q = P(SFS) = P(FSS),$$

de modo que

$$P(A) = 3p^2q.$$

Uma característica interessante dos experimentos considerados é que estamos interessados apenas no *número total* de sucessos e não na ordem em que eles ocorrem. Podemos construir a Tabela 6.12 para $n = 3$ lançamentos da moeda, com $P(S) = p$, $P(F) = 1 - p = q$, a partir da Figura 6.11.

Figura 6.11: Probabilidades binomiais para $n = 3$ e $P(S) = p$.

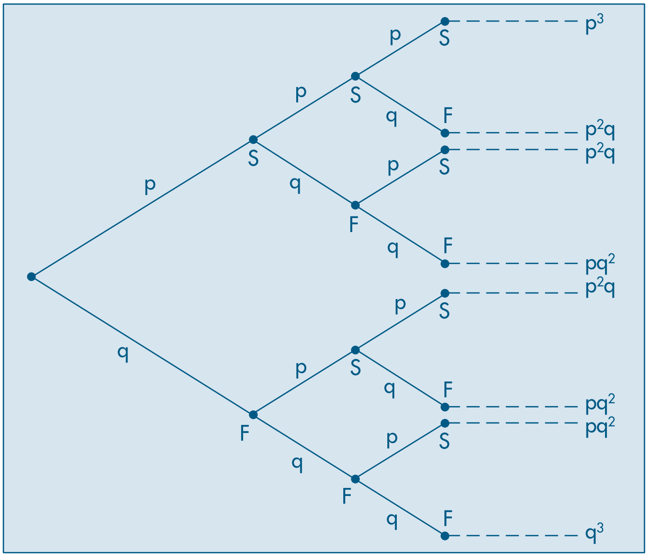


Tabela 6.12: Probabilidades binomiais para $n = 3$ e $P(S) = p$.

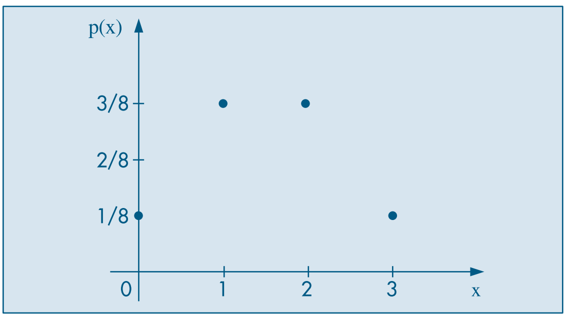
Número de sucessos	Probabilidades	$p = 1/2$
0	q^3	1/8
1	$3pq^2$	3/8
2	$3p^2q$	3/8
3	p^3	1/8

Fonte: Figura 6.11.

Vamos designar por X o número total de sucessos em n ensaios de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, $0 < p < 1$. Os possíveis valores de X são 0, 1, 2, ..., n e os pares $(x, p(x))$, onde $p(x) = P(X = x)$, constituem a chamada *distribuição binomial*.

Para o exemplo (1') acima, $n = 3$ e $p = 1/2$, obtemos a distribuição dada pela primeira e terceira colunas da Tabela 6.12 e o gráfico da Figura 6.12.

Figura 6.12: Gráfico da f.p. $p(x)$ para $n = 3$ e $p = 1/2$.



Obtenhamos, agora, $P(X = k)$, ou seja, numa seqüência de n ensaios de Bernoulli, a probabilidade de obter k sucessos (e portanto $n - k$ fracassos), $k = 0,1,2, ..., n$, com $P(S) = p$, $P(F) = 1 - p = q$. Uma particular seqüência é

$$SSS \ldots SFF \ldots F,$$

onde temos k sucessos seguidos por $n - k$ fracassos. A probabilidade de tal seqüência é

$$p^k(1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}, \tag{6.14}$$

devido à independência dos ensaios. Mas *qualquer* seqüência com k sucessos e $n - k$ fracassos terá a mesma probabilidade (6.14). Portanto resta saber quantas seqüências com a propriedade especificada podemos formar. É fácil ver que existem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

tais seqüências, de modo que

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.15}$$

As probabilidades (6.15) também serão indicadas por $b(k; n, p)$ e, quando a v.a. X tiver distribuição binomial com parâmetros n e p, escreveremos

$$X \sim b(n, p).$$

Exemplo 6.13. Vamos considerar a situação (3′) acima. Temos $n = 10$ ensaios de Bernoulli, cada um com $P(S) = P(\text{peça defeituosa}) = p = 0{,}1$. Se X indicar o número de peças defeituosas na amostra, queremos calcular $P(X = 10) = b(10; 10, 1/10)$. Por (6.15), obtemos

$$P(X = 10) = \binom{10}{10}(1/10)^{10}(9/10)^0 = (1/10)^{10} = 1/10^{10}.$$

A média e a variância de uma v.a. binomial, com parâmetros n e p são dadas, respectivamente, por

$$E(X) = np, \tag{6.16}$$

$$\mathrm{Var}(X) = npq. \tag{6.17}$$

Veja o Problema 41 e as seções 8.3 e 8.4.

Para o Exemplo 6.13 temos

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{10} = 1,$$

$$\mathrm{Var}(X) = 10 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{10}.$$

As probabilidades binomiais $b(k; n, p)$ são facilmente calculadas em programas estatísticos, como o Minitab e o SPlus, ou planilhas, como o Excel, ou então são dadas por tabelas especialmente construídas, para diferentes valores de n e p. A Tabela I fornece essas probabilidades para valores de $n = 2, 3, ..., 19$ e alguns valores de p.

Exemplo 6.14. Usando (6.15) e a Tabela I, ou com a ajuda de um computador, obtemos

$$b(17;\ 20;\ 0{,}9) = \binom{20}{17}(0{,}9)^{17}\ (0{,}1)^{3} = 0{,}19.$$

No Capítulo 7 e seção 6.6.5 abaixo veremos duas maneiras de calcular valores aproximados para as probabilidades binomiais para n grande.

Para finalizar, vamos formalizar os principais pontos apresentados nesta seção.

Definição. Chama-se de *experimento binomial* ao experimento

(a) que consiste em n ensaios de Bernoulli;
(b) cujos ensaios são independentes; e
(c) para o qual a probabilidade de sucesso em cada ensaio é sempre igual a p, $0 < p < 1$.

Definição. A variável aleatória X, correspondente ao número de sucessos num experimento binomial, tem distribuição binomial $b(n, p)$, com função de probabilidade

$$b(k;\ n,\ p) = P(X = k|n,\ p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},\quad k = 0,\ 1,\ ...,\ n. \tag{6.18}$$

Na seção 6.9 veremos como podemos obter os valores $b(k;\ n,\ p)$, para n e p dados, usando um pacote estatístico.

6.6.4 Distribuição Hipergeométrica

Essa distribuição é adequada quando consideramos extrações casuais feitas *sem reposição* de uma população dividida segundo dois atributos. Para ilustrar, considere uma população de N objetos, r dos quais têm o atributo A e $N - r$ têm o atributo B. Um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, sem reposição. Estamos interessados em calcular a probabilidade de que esse grupo contenha k elementos com o atributo A. Pode-se ver facilmente, utilizando o princípio multiplicativo, que essa probabilidade é dada por

$$p_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \tag{6.19}$$

onde $\max(0,\ n - N + r) \leqslant k \leqslant \min(r,\ n)$.

Os pares (k, p_k) constituem a *distribuição hipergeométrica de probabilidades*. Se definirmos a v.a. X como sendo o número de elementos na amostra que têm o atributo A, então $P(X = k) = p_k$.

Exemplo 6.15. Em problemas de controle de qualidade, lotes com N itens são examinados. O número de itens com defeito (atributo A), r, é desconhecido. Colhemos uma amostra de n

itens e determinamos k. Somente para ilustrar, suponha que num lote de $N = 100$ peças, $r = 10$ sejam defeituosas. Escolhendo $n = 5$ peças sem reposição, a probabilidade de não se obter peças defeituosas é

$$p_0 = \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \simeq 0{,}584,$$

enquanto a probabilidade de se obter pelo menos uma defeituosa é

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_5 = 1 - p_0 \simeq 0{,}426.$$

Pode-se demonstrar que a v.a. X definida acima tem esperança e variância dadas por

$$E(X) = np, \tag{6.20}$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p)\,\frac{N-n}{N-1}, \tag{6.21}$$

respectivamente, onde $p = r/N$ é a probabilidade de se obter uma peça defeituosa numa única extração. Se N for grande, quando comparado com n, então extrações com ou sem reposição serão praticamente equivalentes, de modo que as probabilidades dadas por (6.19) serão aproximadamente iguais às dadas pela fórmula (6.15), isto é, $p_k \simeq b(k;\, n,\, p)$. Do mesmo modo, os resultados (6.20) e (6.21) serão aproximadamente iguais aos valores correspondentes da distribuição binomial (note que $N - n \simeq N - 1$, se $n << N$). Denotaremos uma v.a. com distribuição hipergeométrica por

$$X \sim \text{hip}(N,\, r,\, n).$$

6.6.5 Distribuição de Poisson

A Tabela I fornece os valores de $b(k;\, n,\, p)$ para $n = 2, \ldots, 19$. Para n grande e p pequeno, podemos aproximar essas probabilidades por

$$\frac{e^{-np}(np)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.22}$$

As probabilidades (6.22), calculadas agora para todos os valores inteiros não negativos $k = 0, 1, 2, \ldots$, constituem a chamada *distribuição de Poisson*, tabelada na Tabela II, para alguns valores de $\lambda = np$. A aproximação

$$b(k;\, n,\, p) \simeq \frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \tag{6.23}$$

é boa se n for grande e p pequeno e de tal sorte que $np \leqslant 7$. Ver o Problema 43 para uma sugestão de como provar (6.23).

As probabilidades dadas por (6.23) podem, também, ser obtidas em aplicativos estatísticos ou planilhas, assim como a binomial.

Exemplo 6.16. Consideremos aproximar $b(2;\ 1.000,\ 0{,}0001)$, usando (6.23). Temos que $np = 0{,}1$, logo

$$b(2;\ 1.000,\ 0{,}0001) \simeq \frac{e^{-0{,}1}(0{,}1)^2}{2!} = 0{,}0045.$$

Observemos que as probabilidades (6.23) estão definidas para qualquer inteiro não negativo k. Contudo, observando a Tabela II, vemos que essas probabilidades decaem à medida que k cresce e, normalmente, são desprezíveis para k maior do que 5 ou 6.

A distribuição de Poisson é largamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem num intervalo de tempo, ou superfície ou volume. São exemplos:

(a) número de chamadas recebidas por um telefone durante cinco minutos;
(b) número de falhas de um computador num dia de operação; e
(c) número de relatórios de acidentes enviados a uma companhia de seguros numa semana.

De modo geral, dizemos que a v.a. N tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$ se

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.24}$$

É fácil verificar que $E(N) = \mathrm{Var}(N) = \lambda$ (veja o Problema 46); logo, λ representa o número médio de eventos ocorrendo no intervalo considerado.

Uma suposição que se faz usualmente em relação à distribuição de Poisson é que a probabilidade de se obter mais de um evento num intervalo muito pequeno é desprezível.

Exemplo 6.17. Uma situação prática de interesse na qual a distribuição de Poisson é empregada diz respeito à desintegração de substâncias radioativas. Considere o urânio 238 (U^{238}), por exemplo. Cada núcleo de U^{238} tem uma probabilidade muito pequena, $4{,}9 \times 10^{-18}$ de se desintegrar, emitindo uma partícula α, em um segundo. Considere, agora, um número grande n de núcleos e a v.a. N = número de núcleos que se desintegram. Admitindo-se que a desintegração de um núcleo não afeta a probabilidade de desintegração de qualquer outro núcleo (independência), a v.a. N tem uma distribuição binomial, com parâmetros n e p, este dado pelo valor acima. Logo, estamos numa situação em que podemos usar (6.23), ou seja, aproximar probabilidades binomiais por probabilidades de Poisson.

Em 0,30 mg de U^{238} temos aproximadamente $n = 7{,}6 \times 10^{17}$ átomos (Helene e Vanin, 1981), logo $\lambda = np \approx 3{,}7$ e

$$P(N = k) \approx \frac{e^{-3{,}7}(3{,}7)^k}{k!},\ k = 0, 1, \ldots$$

Por exemplo, $P(N = 0) = 0{,}025$ e $P(N = 2) = 0{,}169$. Pode-se ver que $P(N \geqslant 19)$ é muito pequena, menor do que 10^{-6}.

Seria interessante avaliar se a distribuição de Poisson realmente é um modelo razoável para essa situação. Um experimento devido a Rutherford e Geiger (veja Feller, 1964, pág. 149, para a referência completa sobre esse experimento) de fato comprova essa adequação. Eles observaram os números de partículas α emitidas por uma substância radioativa em $n = 2.608$ intervalos de 7,5 segundos. A Tabela 6.13 apresenta os números n_k de intervalos de 7,5 segundos contendo k partículas. Uma estimativa de λ = número médio de partículas emitidas durante um intervalo de 7,5 segundos é dada por

$$\lambda = \frac{\sum kn_k}{n} = \frac{10.094}{2.608} = 3{,}87.$$

As probabilidades de Poisson são dadas por

$$p_k = \frac{3{,}87^k e^{-3{,}87}}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Segue-se que np_k é o número esperado de intervalos contendo k partículas, e esses valores também estão apresentados na Tabela 6.13. Vemos que há uma boa coincidência entre os valores das duas colunas. Um teste formal pode ser feito para verificar a adequação da distribuição de Poisson. Veja o Capítulo 14, Exemplo 14.5.

Tabela 6.13: Freqüências observadas e esperadas para o Exemplo 6.17.

k	n_k	np_k
0	57	54,399
1	203	210,523
2	383	407,361
3	525	525,496
4	532	508,418
5	408	393,515
6	273	253,817
7	139	140,325
8	45	67,882
9	27	29,189
$\geqslant 10$	16	17,075
	2.608	2.608,000

Se considerarmos ocorrências de eventos em intervalos de tempo de comprimento t, no lugar de intervalo unitário de tempo, basta ajustar o parâmetro λ na fórmula (6.24). Vejamos um exemplo.

Exemplo 6.18. Um telefone recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obter a probabilidade de que o telefone não receba chamadas durante um intervalo de um minuto.

Segue-se que $\lambda = 5$ e

$$P(N = 0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0{,}0067.$$

Por outro lado, se quisermos a probabilidade de obter no máximo duas chamadas em quatro minutos, teremos $\lambda = 20$ chamadas em quatro minutos, logo

$$P(N \leqslant 2) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) = e^{-20}\,(1 + 20 + 200) = 221e^{-20},$$

que é um número muito próximo de zero.

Esse exemplo nos mostra que a probabilidade de k ocorrências num intervalo fixo de comprimento t pode ser escrita como

$$P(N = k) = \frac{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.25}$$

onde λ representa o número médio de ocorrências naquele intervalo. Denotaremos uma v.a. N com distribuição de Poisson de parâmetro λ por

$$N \sim \text{Pois}(\lambda).$$

Apresentamos, na Tabela 6.14, um resumo das distribuições discretas estudadas neste capítulo. Para cada uma temos a fórmula que dá a probabilidade de assumir cada valor, os possíveis valores, os parâmetros que caracterizam cada distribuição, a média e a variância. Incluímos, também, a distribuição geométrica, tratada no Problema 55.

Tabela 6.14: Modelos para variáveis discretas.

Modelo	$P(X = x)$	Parâmetros	$E(X)$, Var(X)
Bernoulli	$p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0, 1$	p	$p,\ p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x},\ x = 0, \ldots, n$	n, p	$np,\ np(1-p)$
Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, \ldots$	λ	λ, λ
Geométrica	$p(1-p)^{x-1},\ x = 1, 2, \ldots$	p	$\frac{1}{p},\ \frac{(1-p)}{p^2}$
Hipergeométrica	$\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ a \leqslant x \leqslant b^{(1)}.$	N, r, n	$\frac{nr}{N},\ n\left(\frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)}$

(1) $a = \max(0, n - N + r)$, $b = \min(r, n)$.

Problemas

20. Para os exercícios (a) a (e) abaixo, considere o enunciado:
    Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para essas dê os respectivos campos de definição e função de probabilidade. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão.

(a) De uma urna com dez bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.
(b) Refaça o problema anterior, mas dessa vez as n extrações são sem reposição.
(c) Temos cinco urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final.
(d) Vamos realizar uma pesquisa em dez cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.
(e) Em uma indústria existem 100 máquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

21. Se $X \sim b(n, p)$, sabendo-se que $E(X) = 12$ e $\sigma^2 = 3$, determinar:
(a) n
(b) p
(c) $P(X < 12)$
(d) $P(X \geqslant 14)$
(e) $E(Z)$ e $\text{Var}(Z)$, onde $Z = (X - 12)/\sqrt{3}$
(f) $P(Y \geqslant 14/16)$, onde $Y = X/n$
(g) $P(Y \geqslant 12/16)$, onde $Y = X/n$

22. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:
(a) dez ou mais chamadas;
(b) menos que nove chamadas;
(c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

23. Num certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um por 2.000 pés. Qual a probabilidade de que um rolo com 2.000 pés de fita magnética tenha:
(a) nenhum corte?
(b) no máximo dois cortes?
(c) pelo menos dois cortes?

24. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.

25. Examinaram-se 2.000 ninhadas de cinco porcos cada uma, segundo o número de machos. Os dados estão representados na tabela abaixo.

Nº de Machos	Nº de Ninhadas
0	20
1	360
2	700
3	680
4	200
5	40
Total	2.000

(a) Calcule a proporção média de machos.

(b) Calcule, para cada valor de X, o número de ninhadas que você deve esperar se $X \sim b(5, p)$, onde p é a proporção média de machos calculada em (a).

26. Se X tem distribuição binomial com parâmetros $n = 5$ e $p = 1/2$, faça os gráficos da distribuição de X e da f.d.a. $F(x)$.

27. Considere, agora, $n = 5$ e $p = 1/4$. Obtenha o gráfico da distribuição de X. Qual a diferença entre esse gráfico e o correspondente do Problema 26? O que ocasionou a diferença?

28. Refaça o Problema 26, com $n = 6$ e $p = 1/2$.

6.7 O Processo de Poisson

No Exemplo 6.17 acima vimos uma aplicação importante da distribuição de Poisson ao problema da desintegração radioativa. Lá tratamos da emissão de partículas alfa em intervalos de 7,5 segundos. Ou seja, estamos contando o número de ocorrências de um evento ao longo do tempo. Na realidade, consideramos o que se chama um *processo estocástico*. Designando-se por N_t o número de partículas emitidas no intervalo $[0, t)$, obteremos o que se chama de *processo de Poisson*, para todo $t \geqslant 0$. Nesta seção iremos partir de algumas suposições que consideramos plausíveis sobre tal processo e mostrar que a distribuição da variável aleatória N_t, para cada $t = 0$, é dada pela fórmula (6.25).

As suposições que iremos admitir como válidas são as seguintes.

(S1) $N_0 = 0$, ou seja, o processo começa no instante zero com probabilidade um: $P(N_0 = 0) = 1$.

(S2) Os números de eventos em intervalos de tempo disjuntos são v.a. independentes. Considere $0 < t < t + s$, N_t como antes e $N_{t+s} - N_t$ o número de eventos no intervalo $[t, t + s)$. Então, estamos supondo que as v.a. N_t e $N_{t+s} - N_t$ são independentes. Dizemos que o processo tem *incrementos independentes*.

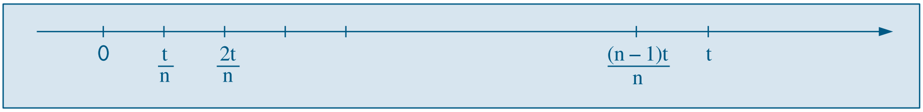
(S3) Considere os intervalos $[0, t)$ e $[s, s + t)$, de mesmo comprimento t e as v.a. N_t como antes e M_t = número de eventos no intervalo $[s, s + t)$. Então, para todo $s > 0$, as v.a. N_t e M_t têm a mesma distribuição de probabilidades. Ou seja, a distribuição do número de eventos ocorridos num intervalo depende somente do comprimento do intervalo, e não de sua localização. Dizemos que o processo tem *incrementos estacionários*.

(S4) Para h suficientemente pequeno, $P(N_h = 1) \approx \lambda h$, com $\lambda > 0$, constante. Ou seja, num intervalo pequeno, a probabilidade de ocorrência de um evento é proporcional ao comprimento do intervalo.

(S5) Para h como em (S4), $P(N_h \geqslant 2) \approx 0$. Isso nos diz que a probabilidade de se ter dois ou mais eventos num intervalo suficientemente pequeno é desprezível.

Considere o intervalo $[0, t)$ e o divida em subintervalos de comprimento t/n, como na Figura 6.13.

Figura 6.13: Divisão de intervalo $[0, t)$ em subintervalos de comprimentos t/n.



Chamemos de Y a v.a. que dá os números de subintervalos com um evento. Então, Y é uma v.a. com distribuição binomial, de parâmetros n (número total de subintervalos) e $p = P$ (um evento) $= \lambda(t/n)$. Para n grande, usando a aproximação da seção anterior, temos que essa variável pode ser aproximada por uma v.a. com distribuição de Poisson com parâmetro $np = n\lambda(t/n) = \lambda t$. Note que aqui usamos as suposições S2 (cada subintervalo contém um evento, independentemente dos demais intervalos) e S3 (com a mesma probabilidade).

Pela suposição S5, a probabilidade de que cada subintervalo contenha dois ou mais eventos tende a zero, quando n cresce. Logo, N_t é uma v.a. com distribuição de Poisson, com parâmetro λt.

Uma prova um pouco mais rigorosa, usando derivadas, pode ser dada. Veja Meyer (1965).

6.8 Quantis

No Capítulo 3 estudamos os quantis associados a um conjunto de dados. Esses poderiam ser chamados de quantis empíricos, pois podemos agora considerar quantis associados à distribuição de uma v.a. discreta, os quais poderíamos denominar quantis teóricos.

Definição. O valor $Q(p)$ satisfazendo

$$P(X \leqslant Q(p)) \geqslant p \text{ e } P(X \geqslant Q(p)) \geqslant 1 - p, \tag{6.26}$$

para $0 < p < 1$, é chamado o *p-quantil* de X.

A interpretação do p-quantil é similar à que foi dada no caso de um conjunto de dados: $Q(p)$ é o valor tal que a soma das probabilidades dos valores menores do que ele, é p. Então, por que não defini-lo por $F(Q(p)) = P(X \leqslant Q(p)) = p$, onde $F(x)$ é a f.d.a. de X? A resposta será dada acompanhando os exemplos a seguir.

Para determinados valores de p teremos, como antes, denominações especiais. Por exemplo:

$Q_1 = Q(0{,}25)$: primeiro quartil
$Q_2 = Q(0{,}5)$: mediana ou segundo quartil
$Q_3 = Q(0{,}75)$: terceiro quartil.

Vejamos o caso da mediana, $Q(0{,}5) = Md$. Por (6.26) devemos ter

$$P(X \leqslant Md) \geqslant 0{,}5 \text{ e } P(X \geqslant Md) \geqslant 0{,}5. \tag{6.27}$$

Suponha a v.a. X com a distribuição:

x	0	1
$p(x)$	1/3	2/3

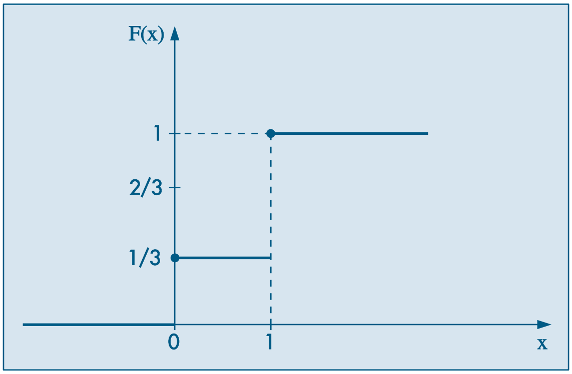
Então $Md = 1$, pois $P(X \leqslant 1) = 1/3 + 2/3 = 1 > 1/2$ e $P(X \geqslant 1) = P(X = 1) = 2/3 > 1/2$.

Na Figura 6.14 temos a f.d.a. de X. Sabemos que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/3, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

de modo que não existe algum valor x tal que $F(x) = 0{,}5$, o que ilustra por que não podemos definir a mediana por meio de $F(Md) = 0{,}5$.

Figura 6.14: f.d.a. da v.a. X



Por outro lado, considere a v.a. Y com a distribuição da tabela abaixo:

Y	–1	0	1
$p(y)$	1/4	1/4	1/2

Então, qualquer valor Md entre 0 e 1 é uma mediana, pois

$$P(Y \leqslant Md) = P(Y = -1) + P(Y = 0) = 1/2 \geqslant 1/2 \text{ e}$$
$$P(Y \geqslant Md) = P(Y = 1) = 1/2 \geqslant 1/2.$$

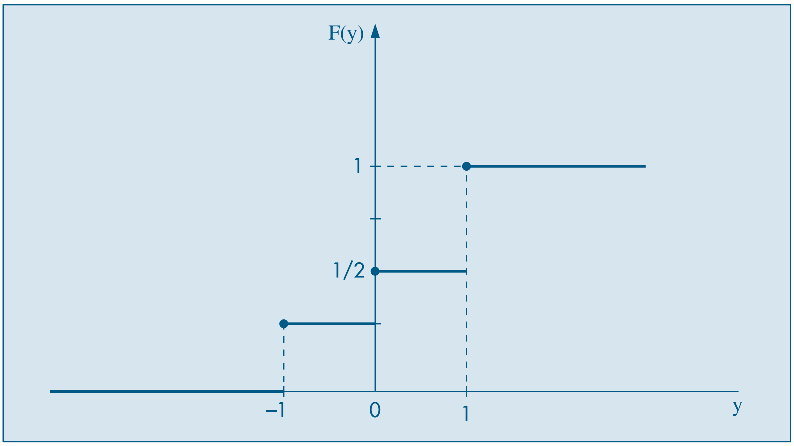
A f.d.a. de Y está na Figura 6.15. Observe que 0 e 1 também são medianas. Observe, também, que $Q(0{,}75) = 1$, pois

$$P(X \leqslant 1) = 1 \geqslant p = 0{,}75,$$

$$P(X \geqslant 1) = 0{,}5 \geqslant 1 - p = 0{,}25.$$

Novamente, não há nenhum valor de y tal que $F(y) = 0{,}75$. Mostre que $Q(0{,}90)$ também é igual a 1.

Figura 6.15: f.d.a. da v.a. Y



6.9 Exemplos Computacionais

Usando programas e planilhas computacionais é possível gerar probabilidades e probabilidades acumuladas para os modelos mais importantes discutidos neste capítulo. Por exemplo, o Minitab usa os comandos PDF para gerar probabilidades e CDF para gerar probabilidades acumuladas (f.d.a.).

Exemplo 6.19. Temos, no Quadro 6.1, as probabilidades $P(X = x)$ e $P(X \leqslant x)$ para uma v.a. $X \sim b(14;\ 0{,}3)$, ou seja, $n = 14$ e $p = P(\text{sucesso}) = 0{,}3$.

Quadro 6.1 Probabilidades binomiais geradas pelo Minitab.

```
MTB > PDF;                                    MTB > CDF;
SUBC> Binomial 14 0.3.                        SUBC> Binomial 14 0.3.
Probability Density Function                  Cumulative Distribution Function
Binomial with n = 14 and p = 0.300000         Binomial with n = 14 and p = 0.300000
   x    P(X = x)      x    P(X = x)               x    P(X <= x)      x    P(X <= x)
   0     0.0068       7     0.0618                0     0.0068        6     0.9067
   1     0.0407       8     0.0232                1     0.0475        7     0.9685
   2     0.1134       9     0.0066                2     0.1608        8     0.9917
   3     0.1943      10     0.0014                3     0.3552        9     0.9983
   4     0.2290      11     0.0002                4     0.5842       10     0.9998
   5     0.1963      12     0.0000                5     0.7805       11     1.0000
   6     0.1262
```

Ainda, usando o Minitab, temos no Quadro 6.2 as probabilidades e probabilidades acumuladas para uma v.a. com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 5{,}2$.

Quadro 6.2 Probabilidades de Poisson geradas pelo Minitab.

MTB > PDF;
SUBC> Poisson 5.2.
Probability Density Function
Poisson with mu = 5.20000

x	P(X = x)	x	P(X = x)
0	0.0055	9	0.0423
1	0.0287	10	0.0220
2	0.0746	11	0.0104
3	0.1293	12	0.0045
4	0.1681	13	0.0018
5	0.1748	14	0.0007
6	0.1515	15	0.0002
7	0.1125	16	0.0001
8	0.0731	17	0.0000

MTB > CDF;
SUBC> Poisson 5.2.
Cumulative Distribution Function
Poisson with mu = 5.20000

x	P(X <= x)	x	P(X <= x)
0	0.0055	9	0.9603
1	0.0342	10	0.9823
2	0.1088	11	0.9927
3	0.2381	12	0.9972
4	0.4061	13	0.9990
5	0.5809	14	0.9997
6	0.7324	15	0.9999
7	0.8449	16	1.0000
8	0.9181		

Na planilha Excel podem ser usadas funções específicas dentro da categoria Estatística. Por exemplo, para cálculos com a distribuição binomial, usar a função DISTRBINOM; para a distribuição de Poisson, usar a função POISSON.

6.10 Problemas e Complementos

29. Um florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa \$0,50 e que ele vende a \$1,50 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não é vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses compram em um dia casualmente escolhido. O florista descobriu que a função de probabilidade de X é dada pela tabela abaixo.

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Quantas flores deveria o florista ter em estoque a fim de maximizar a média (valor esperado) do seu lucro?

30. As cinco primeiras repetições de um experimento custam \$10,00 cada. Todas as repetições subseqüentes custam \$5,00 cada. Suponha que o experimento seja repetido até que o primeiro sucesso ocorra. Se a probabilidade de sucesso de uma repetição é igual a 0,9, e se as repetições são independentes, qual é o custo esperado da operação?

31. Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:
    (a) nenhum defeituoso?
    (b) exatamente um defeituoso?
    (c) exatamente dois defeituosos?
    (d) não mais do que dois defeituosos?

32. Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% das peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?

33. Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:
    (a) exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade;
    (b) não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade; e
    (c) pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade.

34. O número de petroleiros que chegam a uma refinaria em cada dia ocorre segundo uma distribuição de Poisson, com $\lambda = 2$. As atuais instalações podem atender, no máximo, a três petroleiros por dia. Se mais de três aportarem num dia, o excesso é enviado a outro porto.
    (a) Em um dia, qual a probabilidade de se enviar petroleiros para outro porto?
    (b) De quanto deverão ser aumentadas as instalações para permitir atender a todos os navios que chegarem pelo menos em 95% dos dias?
    (c) Qual o número médio de petroleiros que chegam por dia?

35. Na tabela abaixo, X significa número de filhos homens em famílias com 12 filhos. Calcule para cada valor da variável o número de famílias que você deveria esperar se $X \sim b(12; 0{,}5)$.

X	Nº observado de famílias
0	6
1	29
2	160
3	521
4	1.198
5	1.921
6	2.360
7	2.033
8	1.398
9	799
10	298
11	60
12	7
Total	10.690

Você acha que o modelo binomial é razoável para explicar o fenômeno?

36. Houve uma denúncia por parte dos operários de uma indústria de que, toda vez que ocorria um acidente em uma seção da indústria, ocorriam outros em outras seções mais ou menos no mesmo horário. Em outras palavras, os acidentes não estavam ocorrendo ao acaso. Para verificar essa hipótese, foi feita uma contagem do número de acidentes por hora durante um certo número de dias (24 horas por dia). Os resultados da pesquisa foram apresentados no quadro a seguir.

Nº de acidentes por hora	Nº de horas
0	200
1	152
2	60
3	30
4	13
5	9
6	7
7	5
8	4

(a) Calcule o número médio de acidentes por hora nessa amostra.

(b) Se o número de acidentes por hora seguisse uma distribuição de Poisson, com média igual à que você calculou, qual seria o número esperado de dias com $0, 1, 2, \ldots$ etc. acidentes?

(c) Os dados revelam que a suspeita dos operários é verdadeira?

37. Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1.000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% com defeito. Normalmente, cada caixa é vendida por \$13,50. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se a caixa não tiver parafusos defeituosos, ele paga \$20,00; um ou dois defeituosos, ele paga \$10,00; três ou mais defeituosos, ele paga \$8,00. Qual alternativa é a mais vantajosa para o fabricante? Justifique.

38. Uma certa região florestal foi dividida em 109 quadrados para estudar a distribuição de *Primula Simenses Selvagem*. *A priori*, supomos que esse tipo distribua-se aleatoriamente na região. O quadro abaixo indica o número de quadrados com X *Primula Simenses*; o número médio de plantas por quadrado foi de 2,2.

X plantas por quadrado	Nº de quadrados com X plantas
0	26
1	21
2	23
3	14
4	11
5	4
6	5
7	4
8	1
acima de 8	0

(a) Se as plantas realmente se distribuem aleatoriamente na região, qual a probabilidade de encontrarmos pelo menos duas *Primulas*?

(b) Dê as freqüências esperadas para os valores de $X = 0$, $X = 1$ e $X = 2$.

(c) Apenas comparando os resultados de *(b)* com as freqüências observadas, qual a conclusão a que você chegaria?

(d) Quais as causas que você daria para a conclusão?

39. Uma fábrica produz válvulas, das quais 20% são defeituosas. As válvulas são vendidas em caixas com dez peças. Se uma caixa não tiver nenhuma defeituosa, seu preço de venda é \$10,00; tendo uma, o preço é \$8,00; duas ou três, o preço é \$6,00; mais do que três, o preço é \$2,00. Qual o preço médio de uma caixa?

40. Um industrial fabrica peças, das quais 1/5 são defeituosas. Dois compradores A e B, classificaram as partidas adquiridas em categorias I e II, pagando \$1,20 e \$0,80 respectivamente do seguinte modo:

    Comprador A: retira uma amostra de cinco peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como II.

    Comprador B: retira amostra de dez peças; se encontrar mais que duas defeituosas, classifica como II.

    Em média, qual comprador oferece maior lucro?

41. Se $X \sim b(n, p)$, prove que $E(X) = np$ e $\text{Var}(X) = npq$.
    (Sugestão: calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$ para $n = 1, 2, \ldots$ etc.)

42. Aceitação de um lote. Suponha que um comprador queira decidir se vai aceitar ou não um lote de itens. Para isso, ele retira uma amostra de tamanho n do lote e conta o número x de defeituosos. Se $x \leqslant a$, o lote é aceito, e se $x > a$, o lote é rejeitado; o número a é fixado pelo comprador. Suponha que $n = 19$ e $a = 2$. Use a Tabela I a fim de encontrar a probabilidade de aceitar o lote, ou seja, $P(X \leqslant 2)$ para as seguintes proporções de defeituosos no lote:

    (a) $p = 0{,}10$ (b) $p = 0{,}20$ (c) $p = 0{,}05$

43. Prove que, quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mas de tal sorte que $np \to \lambda$, temos

$$\binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \to \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}.$$

    Sugerimos que você use o fato: $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$ quando $n \to \infty$.

44. Suponha que X seja uma v.a. discreta, com f.p. $p(x) = 2^{-x}$, $x = 1, 2, \ldots$ Calcule:

    (a) $P(X \text{ ser par})$ (b) $P(X \leqslant 3)$ (c) $P(X > 10)$

45. Prove (6.4), (6.5) e (6.6).

46. Prove que $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$, se a $P(X = k)$ for dada por (6.24).

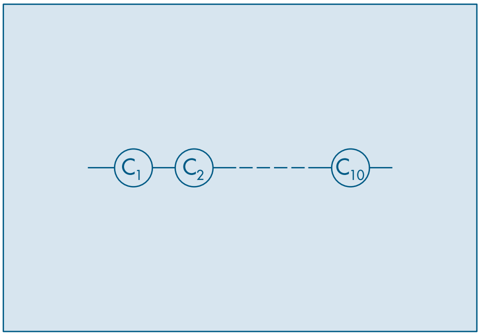
47. Prove a relação (6.19).

48. Num teste tipo certo/errado, com 50 questões, qual é a probabilidade de que um aluno acerte 80% das questões, supondo que ele as responda ao acaso?

49. Repita o Problema 48, considerando cinco alternativas para cada questão.

50. Em um experimento binomial com três provas, a probabilidade de exatamente dois sucessos é 12 vezes a probabilidade de três sucessos. Encontre p.

51. No sistema abaixo, cada componente tem probabilidade p de funcionar. Supondo independência de funcionamento dos componentes, qual a probabilidade de:



(a) o sistema funcionar?
(b) o sistema não funcionar?
(c) exatamente dois componentes funcionarem?
(d) pelo menos cinco componentes funcionarem?

52. Prove que

$$b(k+1; n, p) = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \cdot b(k; n, p).$$

53. Encontre a mediana da v.a. Z com distribuição

Z	0	1	2	3
$p(Z)$	1/4	1/4	1/4	1/4

54. Encontre os quantis de ordens $p = 0{,}25,\ 0{,}60,\ 0{,}80$ da v.a. Z do exercício 53.

55. Distribuição Geométrica. Suponha que, ao realizar um experimento, ocorra o evento A com probabilidade p ou não ocorra A (ou seja, ocorre A^c com probabilidade $1-p$). Repetimos o experimento de forma independente até que o evento A ocorra pela primeira vez.

Seja X = número de repetição do experimento até que se obtenha A pela primeira vez. Então,

$$P(X = j) = (1-p)^{j-1}.\ p, \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

pois se $X = j$, nas primeiras $j-1$ repetições A não ocorre, ocorrendo na j-ésima.

(a) Prove que $\sum_{j=1}^{\infty} P(X=j) = 1$.

(b) Mostre que $E(X) = 1/\mathrm{p}$ e $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/\mathrm{p}^2$.

[Sugestão: $E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p(X=j) = p \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot (1-p)^{j-1} = p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^j$, com $1-p=q$.]

(c) Se s e t são inteiros positivos, então

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

Essa propriedade nos diz que a distribuição geométrica não tem memória. Essa propriedade é compartilhada pela distribuição exponencial, a ser estudada no Capítulo 7.

56. (Meyer, 1965). O custo de realização de um experimento é \$1.000,00. Se o experimento falha, um custo adicional de \$300,00 tem de ser imposto. Se a probabilidade de sucesso em cada prova é 0,2, se as provas são independentes e continuadas até a ocorrência do primeiro sucesso, qual o custo esperado do experimento?

57. Distribuição de Pascal. Considere a mesma situação experimental do Problema 55, só que agora o experimento é continuado até que o evento A ocorra pela r-ésima vez. Defina a v.a. Y = número de repetições necessárias para que A ocorra exatamente r vezes. Note que, se $r = 1$, obtemos a distribuição geométrica. Mostre que

$$P(Y = j) = \binom{j-1}{r-1} p^r q^{j-r}, \ j = r, \ r+1, \ldots$$

58. A Desigualdade de Jensen. Vimos, na fórmula (6.4), que se $h(x) = ax + b$, então $E[h(X)] = h[E(X)]$, ou seja, $E(aX + b) = aE(X) + b$.
Esta fórmula pode não valer se $h(x)$ não for linear. O que vale é o seguinte resultado, denominado Desigualdade de Jensen. Se $h(x)$ for uma função convexa e X uma v.a., então

$$E[h(X)] \geqslant h[E(X)],$$

com igualdade se e somente se h for linear (ou se a variância de X for zero).
Por exemplo, se $h(x) = x^2$, então $E(X^2) \geqslant [E(X)]^2$, do que decorre que $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \geqslant 0$.
Lembremos que uma função h é convexa se $h((x+y)/2) \leqslant (h(x)+h(y))/2$, para todo par x, y no domínio de h. Em termos geométricos, h é convexa se o ponto médio da corda que une dois pontos quaisquer da curva representando h está acima da curva. A função h é côncava se $-h$ for convexa. Por exemplo, $\log x$ é uma função côncava.

59. Use o problema anterior para verificar as relações entre:
(a) $E(e^X)$ e $e^{E(X)}$;
(b) $E(\log X)$ e $\log [E(X)]$, para $X > 0$;
(c) $E(1/X)$ e $1/E\{X)$, para $X \neq 0$.

Capítulo 7

Variáveis Aleatórias Contínuas

7.1 Introdução

Neste capítulo iremos estudar modelos probabilísticos para variáveis aleatórias contínuas, ou seja, variáveis para as quais os possíveis valores pertencem a um intervalo de números reais. A definição dada no capítulo anterior, para v.a. discreta, deve ser modificada como segue.

Definição. Uma função X, definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é dita uma *variável aleatória contínua*.

No Capítulo 2 vimos alguns exemplos de variáveis contínuas, como o salário de indivíduos, alturas etc. A característica principal de uma v.a. contínua é que, sendo resultado de uma mensuração, o seu valor pode ser pensado como pertencendo a um intervalo ao redor do valor efetivamente observado. Por exemplo, quando dizemos que a altura de uma pessoa é 175 cm, estamos medindo sua altura usando cm como unidade de medida e portanto o valor observado é, na realidade, um valor entre 174,5 cm e 175,5 cm.

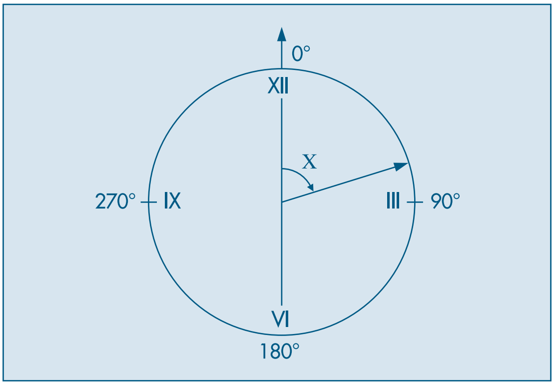
Vejamos um exemplo para motivar a discussão que se segue.

Exemplo 7.1. O ponteiro dos segundos de um relógio mecânico pode parar a qualquer instante, devido a algum defeito técnico, ou término da bateria, e vamos indicar por X o ângulo que esse ponteiro forma com o eixo imaginário passando pelo centro do mostrador e pelo número XII, conforme mostra a Figura 7.1.

Tabela 7.1: Distribuição uniforme discreta.

x	0°	6°	12°	18°	...	348°	354°
$p(x)$	1/60	1/60	1/60	1/60	...	1/60	1/60

Figura 7.1: Ilustração de uma v.a. X discreta.

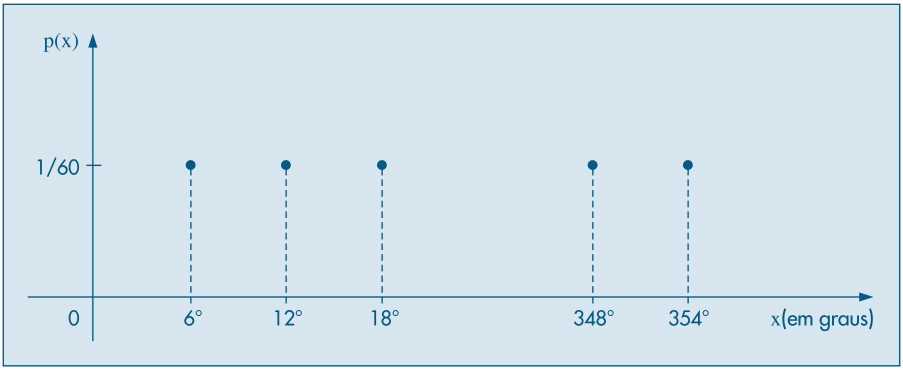


Medindo esse ângulo X em graus e lembrando que:

(i) o ponteiro deve dar 60 "saltos" (ele dá um salto em cada segundo) para completar uma volta;

(ii) acreditamos que o ponteiro tenha probabilidade igual de parar em qualquer ponto, então, a v.a. X tem distribuição uniforme discreta, com função de probabilidade dada pela Tabela 7.1 e representada graficamente na Figura 7.2.

Figura 7.2: Distribuição uniforme discreta.



Considerando esse mesmo problema com um relógio elétrico, para o qual o ponteiro dos segundos move-se *continuamente*, necessitamos de um outro modelo para representar a v.a. X. Primeiro, observamos que o conjunto dos possíveis valores de X não é mais um conjunto discreto de valores, pois X pode assumir qualquer valor do intervalo $[0,360) = = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leqslant x < 360\}$. Em segundo lugar, como no caso do relógio mecânico, continuamos a acreditar que não exista uma região de preferência para o ponteiro parar. Como existem infinitos pontos nos quais o ponteiro pode parar, cada um com igual probabilidade, se fôssemos usar o mesmo método usado para a v.a. discreta uniforme, cada ponto teria probabilidade de ocorrer igual a zero. Assim não tem muito sentido falar na probabilidade de que o ângulo X seja igual a certo valor, pois essa probabilidade sempre será igual a zero. Entretanto, podemos determinar a probabilidade de que X esteja compreendido entre dois valores quaisquer. Por exemplo, usando a Figura 7.1 como referência, a probabilidade de o ponteiro parar no intervalo compreendido entre os números XII e III é 1/4, pois esse intervalo corresponde a 1/4 do intervalo total.

Podemos, pois, escrever

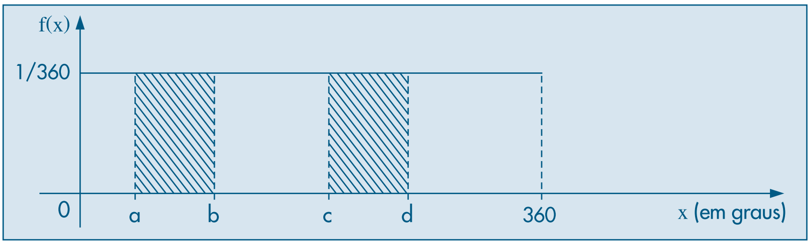
$$P(0^o \leqslant X \leqslant 90^o) = \frac{1}{4}.$$

Do mesmo modo, a probabilidade $P(120^o \leqslant X \leqslant 150^o) = 1/12$. Por menor que seja o intervalo, sempre poderemos calcular a probabilidade de o ponteiro parar num ponto qualquer desse intervalo. E é fácil verificar que, nesse caso, dados dois números a e b, tais que $0^o \leqslant a < b < 360^o$, a probabilidade de $X \in [a, b)$ é

$$P(a \leqslant X < b) = \frac{b-a}{360^o}$$

Através da divisão do intervalo $[0^o, 360^o)$ em pequenos subintervalos, podemos construir um histograma para as probabilidades da v.a. X (como fizemos para v.a contínuas no Capítulo 2). Ou ainda, como naquele capítulo, fazendo esses intervalos tenderem a zero, podemos construir o histograma alisado da v.a. X, apresentado na Figura 7.3.

Figura 7.3: Histograma alisado: distribuição uniforme contínua.



O histograma alisado da Figura 7.3 corresponde à seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0^o \\ 1/360, & \text{se } 0^o \leqslant x < 360^o \\ 0, & \text{se } x \geqslant 360^o. \end{cases}$$

Como vimos na construção de histogramas, a área correspondente ao intervalo $[a, b)$ (hachurada na Figura 7.3) deve indicar a probabilidade de a variável estar entre a e b. Matematicamente, isso é expresso por meio da integral da função entre a e b; então,

$$P(a \leqslant X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{360}\, dx = \frac{b-a}{360},$$

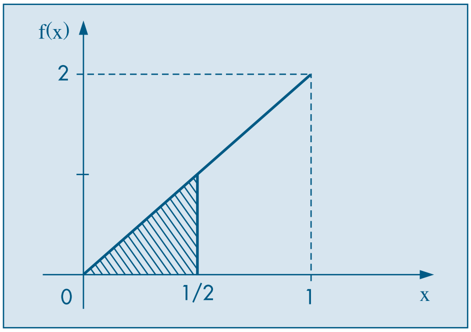
pois a integral definida de uma função entre dois pontos determina a área sob a curva representativa da função, compreendida entre esses dois pontos.

A função $f(x)$ é chamada *função densidade de probabilidade* (f.d.p.) da v.a. X.

Podemos construir modelos teóricos para variáveis aleatórias contínuas, escolhendo adequadamente as funções densidade de probabilidade. Teoricamente, qualquer função f, que seja não negativa e cuja área total sob a curva seja igual à unidade, caracterizará uma v.a. contínua.

Exemplo 7.2. Se $f(x) = 2x$, para $0 \leqslant x \leqslant 1$, e zero fora desse intervalo, vemos que $f(x) \geqslant 0$, para qualquer x, e a área sob o gráfico de $f(x)$ é unitária (verifique na Figura 7.4). Logo, a função f pode representar a função densidade de uma v.a. contínua X.

Figura 7.4: f.d.p. da v.a. X do Exemplo 7.2.



Para esse caso, $P(0 \leqslant X \leqslant 1/2)$ é igual à área do triângulo de base 1/2 e altura 1, hachurado na Figura 7.4; logo, a probabilidade em questão é

$$P(0 \leqslant X \leqslant 1/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{1}{4}.$$

Observamos, então, que a probabilidade de essa v.a. assumir um valor pertencente ao intervalo [0, 1/2) é menor que a probabilidade de a variável assumir um valor pertencente ao intervalo [1/2, 1).

A comparação das funções densidade dos dois últimos exemplos ajuda a entender seu significado. No primeiro exemplo, consideremos dois intervalos, $I_1 = [a, b)$ e $I_2 = [c, d)$, contidos no intervalo [0,360), com a mesma amplitude ($b - a = d - c$); então,

$$P(X \in I_1) = P(X \in I_2).$$

O mesmo não acontece no segundo exemplo: dados dois intervalos de mesma amplitude, aquele mais próximo de 1 irá apresentar maior probabilidade. Ou seja, a probabilidade de que a v.a. X assuma um valor num intervalo de amplitude fixa depende da posição do intervalo; existem regiões com maior *chance* de ocorrer, e o que determina esse fato é a função densidade de probabilidade. Portanto, a f.d.p. é um indicador da concentração de "massa" (probabilidade) nos possíveis valores de X. Convém ressaltar ainda que $f(x)$ não representa a probabilidade de ocorrência de algum evento. A área sob a curva entre dois pontos é que irá fornecer a probabilidade.

Problemas

1. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, \ x \geqslant 0 \\ 0, \ x < 0, \end{cases}$$

(a) Mostre que esta é uma f.d.p.
(b) Calcule a probabilidade de $X > 10$.

2. Uma v.a. X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Cx, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ C(1-x), & 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Qual valor deve ter a constante C?
(b) Faça o gráfico de $f(x)$.
(c) Determine $P(X \leqslant 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leqslant X \leqslant 3/4)$.

3. Suponha que estamos atirando dardos num alvo circular de raio 10 cm, e seja X a distância do ponto atingido pelo dardo ao centro do alvo. A f.d.p. de X é

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0, & \text{para os demais valores.} \end{cases}$$

(a) Qual a probabilidade de acertar o centro do alvo, se esse for um círculo de 1 cm de raio?
(b) Mostre que a probabilidade de acertar qualquer círculo concêntrico é proporcional à sua área.

4. Encontre o valor da constante c se

$$f(x) = \begin{cases} c/x^2, & x \geqslant 10 \\ 0, & x < 10 \end{cases}$$

for uma densidade. Encontre $P(X > 15)$.

7.2 Valor Médio de uma Variável Aleatória Contínua

Do que foi visto até aqui, deduz-se que qualquer função $f(\cdot)$, não-negativa, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

define uma v.a. contínua X, ou seja, cria um modelo teórico para as freqüências relativas de uma v.a. contínua. A área compreendida entre dois valores, a e b, da abscissa x, sob a curva representativa de $f(x)$, dá a probabilidade (proporção teórica) da variável pertencer ao intervalo limitado pelos dois valores. Usando o conceito de integral, podemos escrever

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{7.1}$$

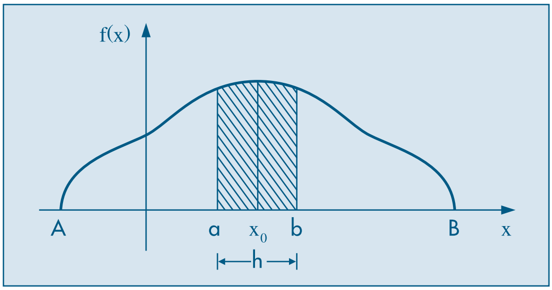
Vejamos agora como podemos definir a esperança (valor médio ou média) de uma v.a. contínua. Para isso, usaremos um artifício semelhante àquele usado na seção 3.1 para calcular a média das variáveis quantitativas, com os dados agrupados em classes. Lá substituímos todos os valores de um intervalo (classe) por um único valor aproximado (o ponto médio do intervalo), e agimos como se a variável fosse do tipo discreto. Aqui iremos repetir esse artifício.

Consideremos a v.a. X com função densidade $f(x)$ e dois pontos a e b, bem próximos, isto é, $h = b - a$ é pequeno, e consideremos x_0 o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Observando a Figura 7.5 é fácil verificar que

$$P(a \leqslant X \leqslant b) \simeq h\, f(x_0), \tag{7.2}$$

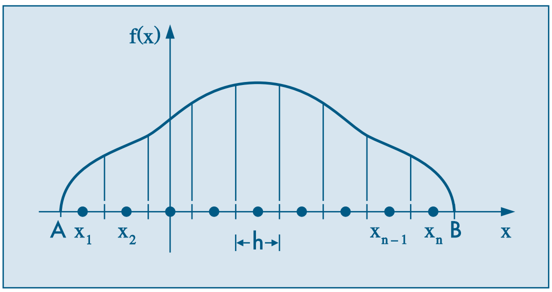
o que significa aproximar a área da parte hachurada pelo retângulo de base h e altura $f(x_0)$. É fácil ver que a aproximação melhora com h tendendo a zero.

Figura 7.5: Área hachurada representa $P(a \leqslant X \leqslant b)$.



Dividamos agora o intervalo $[A, B]$, onde $f(x) > 0$, em n partes de amplitudes iguais a $h = (B - A)/n$ (Figura 7.6) e consideremos os pontos médios desses intervalos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Figura 7.6: Partição do intervalo $[A, B]$.



Consideremos a v.a. Y_n, assumindo os valores $x_1, ..., x_n$ com as probabilidades

$$p_i = P(Y_n = x_i) \simeq f(x_i)h.$$

Dessa maneira, e de acordo com a definição de esperança, temos

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \approx \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(x_i)h,$$

que será uma aproximação da esperança $E(X)$. Para determinar $E(X)$ com maior precisão, podemos aumentar o número de intervalos, diminuindo sua amplitude h. No limite, quando $h \to 0$, teremos o valor de $E(X)$. Definamos, pois,

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(x_i)h. \tag{7.3}$$

Mas da definição de integral (veja Morettin *et al.*, 2005), temos que, se o limite (7.3) existe, ele define a integral de $x\, f(x)$ entre A e B, isto é,

$$E(X) = \int_A^B x f(x)dx. \tag{7.4}$$

Exemplo 7.3. Continuando com o Exemplo 7.2, observamos que, dividindo o intervalo [0, 1] em n subintervalos, teremos $h = 1/n$, $x_i = (2i - 1)/2n$ e $f(x_i) = (2i - 1)/n$, $i = 1, 2,..., n$. Portanto,

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i-1}{2\,n}\right)\left(\frac{2i-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^3} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2$$

$$= \frac{1}{2n^3} \left\{\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}\right\} = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right),$$

na qual usamos o conhecido resultado que dá a soma dos quadrados dos primeiros n números ímpares. Logo,

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3}.$$

O mesmo resultado é obtido diretamente da relação (7.4):

$$E(X) = \int_0^1 (x)(2x)dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 7.4. No caso do relógio elétrico do Exemplo 7.1, obtemos

$$E(X) = \int_0^{360} x \frac{1}{360}\, dx = \left[\frac{1}{360}\, \frac{x^2}{2}\right]_0^{360} = 180,$$

que é o valor esperado devido à distribuição uniforme das freqüências teóricas.

Como a função $f(x)$ é sempre não-negativa, podemos escrever a esperança como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{7.5}$$

A extensão do conceito de variância para v.a. contínuas é feita de maneira semelhante e o equivalente à expressão (6.2) é

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx. \tag{7.6}$$

Exemplo 7.5. Para os dois exemplos vistos anteriormente, teremos:

(i) Para o caso do relógio,

$$\mathrm{Var}(X) = \int_0^{360} (x - 180)^2 \frac{1}{360} dx = \frac{1}{360}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{360x^2}{2} + 180^2 x\right]_0^{360} = 10.800;$$

(ii) Para o Exemplo 7.2,

$$\mathrm{Var}(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{9} + \frac{2x^2}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Como no caso de v.a. discretas, o desvio padrão de uma v.a. contínua X é definido como

$$DP(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}, \tag{7.7}$$

que é dado na mesma unidade de medida do que X. Deixamos a cargo do leitor a verificação de que o seguinte resultado vale, como conseqüência de (7.6):

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{7.8}$$

Como frisamos no Capítulo 6, freqüentemente usaremos outros símbolos para indicar os parâmetros discutidos, a saber:

$$E(X) = \mu(X),$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X),$$
$$DP(X) = \sigma(X),$$

ou simplesmente μ, σ^2 e σ, respectivamente, se não houver possibilidade de confusão.

7.3 Função de Distribuição Acumulada

Dada uma v.a. X com função densidade de probabilidade $f(x)$, podemos definir a sua função de distribuição acumulada, $F(x)$, do mesmo modo como foi definida no Capítulo 6:

$$F(x) = P(X \leqslant x), -\infty < x < \infty. \tag{7.9}$$

De (7.1) segue-se que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt, \tag{7.10}$$

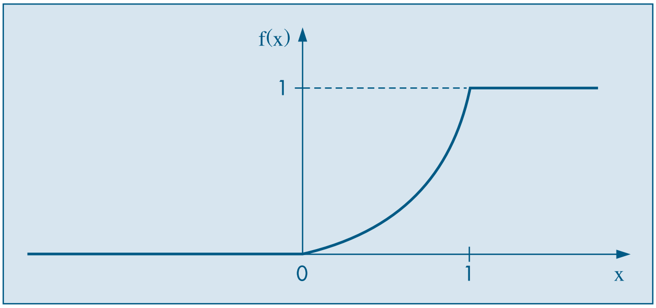
para todo real x.

Exemplo 7.6. Retomemos o Exemplo 7.2. Temos

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x 2t dt = x^2, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ \int_0^1 2t dt + \int_1^x 0 dt = 1, & \text{se } x \geqslant 1. \end{cases}$$

O gráfico de $F(x)$ está na Figura 7.7.

Figura 7.7: f.d.a. da v.a. X do Exemplo 7.6.



De (7.9), vemos que $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, para todo x real; além disso, $F(x)$ é não-decrescente e possui as duas seguintes propriedades:

(i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

No Exemplo 7.6 temos, efetivamente, $F(x) = 0$, para $x < 0$ e $F(x) = 1$, para $x \geqslant 1$.

Para v.a. contínuas, o seguinte resultado é importante.

Proposição 7.1. Para todos os valores de x para os quais $F(x)$ é derivável temos

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Vamos usar esse resultado no exemplo a seguir.

Exemplo 7.7. Suponha que

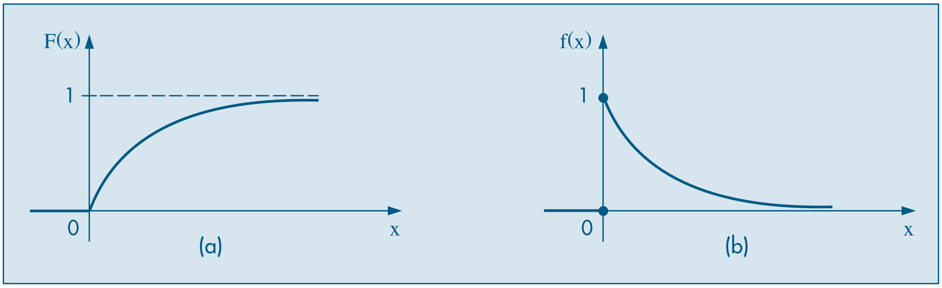
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

seja a f.d.a. de uma v.a. X. Então,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Na Figura 7.8 temos os gráficos dessas duas funções. Veremos que f(x) é um caso especial da densidade exponencial, a ser estudada na seção 7.4.3.

Figura 7.8: Distribuição exponencial ($\beta = 1$) (a) f.d.a. (b) f.d.p.



Se a e b forem dois números reais quaisquer,

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a). \tag{7.11}$$

Esse resultado não será afetado se incluirmos ou não os extremos a e b na desigualdade entre parênteses.

Problemas

5. Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da v.a. X do Problema 2.

6. Determine a esperança e a variância da v.a. cuja f.d.p. é

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

7. Calcule a média da v.a. X do Problema 4.

8. A v.a. contínua X tem f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Se b for um número que satisfaz $-1 < b < 0$, calcule $P(X > b \mid X < b/2)$.
   (b) Calcule $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

9. Certa liga é formada pela mistura fundida de dois metais. A liga resultante contém certa porcentagem de chumbo, X, que pode ser considerada uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \frac{3}{5}\, 10^{-5}\, x(100 - x),\ 0 \leqslant x \leqslant 100.$$

   Suponha que L, o lucro líquido obtido na venda dessa liga (por unidade de peso), seja dado por $L = C_1 + C_2X$. Calcule $E(L)$, o lucro esperado por unidade.

10. A demanda diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 2x/3, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ -x/3 + 1, & \text{se } 1 \leqslant x < 3 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3. \end{cases}$$

(a) Qual a probabilidade de se vender mais do que 150 kg, num dia escolhido ao acaso?
(b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?
(c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

11. Suponha que X tenha f.d.p. $f(x)$ do Problema 1. Calcule $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

12. Seja X com densidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2), & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a média e a variância de X.

7.4 Alguns Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias Contínuas

De modo geral, podemos dizer que as v.a. cujos valores resultam de algum processo de mensuração são v.a. contínuas. Alguns exemplos são:

(a) o peso ou a altura das pessoas de uma cidade;
(b) a demanda diária de arroz num supermercado;
(c) o tempo de vida de uma lâmpada;
(d) o diâmetro de rolamentos de esferas; e
(e) erros de medidas em geral, resultantes de experimentos em laboratórios.

Dada uma v.a. contínua X, interessa saber qual a f.d.p. de X. Alguns modelos são freqüentemente usados para representar a f.d.p. de v.a. contínuas. Alguns dos mais utilizados serão descritos a seguir e, para uniformizar o estudo desses modelos, iremos em cada caso analisar:

(a) definição;
(b) gráfico da f.d.p.;
(c) momentos: $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$;
(d) função de distribuição acumulada (f.d.a.).

Outros modelos serão apresentados na seção 7.7.

7.4.1 O Modelo Uniforme

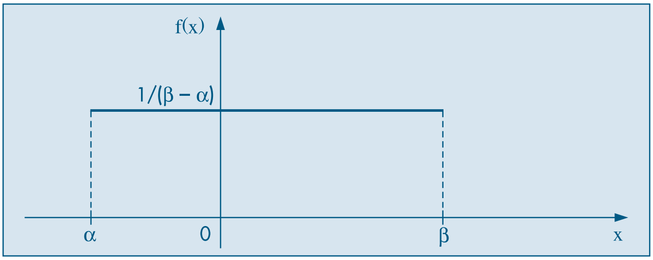
O modelo uniforme é uma generalização do modelo estudado no Exemplo 7.1 e é o modelo mais simples para v.a. contínuas.

(a) **Definição.** A v.a. X tem distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ se sua f.d.p. é dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \text{se } \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{7.12}$$

(b) **Gráfico.** A Figura 7.9 representa a função dada por (7.12).

Figura 7.9: Distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.



(c) **Momentos.** Pode-se mostrar (veja o Problema 29) que

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \tag{7.13}$$

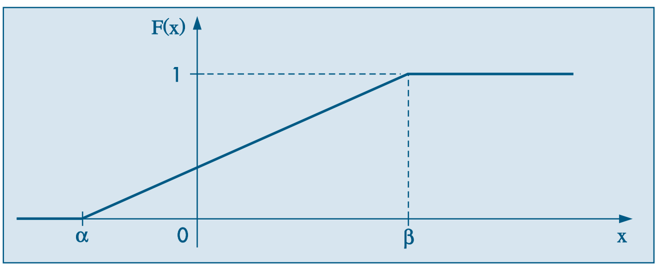
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}. \tag{7.14}$$

(d) **F.d.a.** A função de distribuição acumulada da uniforme é fácil de ser encontrada (veja o Problema 29):

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{se } \alpha \leqslant x < \beta \\ 1, & \text{se } x \geqslant \beta, \end{cases} \tag{7.15}$$

cujo gráfico está na Figura 7.10.

Figura 7.10: f.d.a. de uma v.a. uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.



Assim, para dois valores quaisquer c e d, $c < d$, teremos

$$P(c < X \leqslant d) = F(d) - F(c),$$

que é obtida facilmente de (7.15).

Usaremos a notação

$$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$$

para indicar que a v.a. X tem distribuição uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Exemplo 7.8. Um caso particular bastante interessante é aquele em que $\alpha = -1/2$ e $\beta = 1/2$. Indicando essa v.a. por U, teremos

$$f(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1/2 \leqslant u \leqslant 1/2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nessa situação temos que

$$E(U) = 0, \text{Var}(U) = 1/12$$

e a f.d.a. é dada por

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u < -1/2 \\ u + 1/2, & \text{se } -1/2 \leqslant u < 1/2 \\ 1, & \text{se } u > 1/2. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$P(-1/4 \leqslant \mathrm{U} \leqslant 1/4) = F_U(1/4) - F_U(-1/4) = 1/2.$$

Se quiséssemos facilitar o nosso trabalho, poderíamos tabelar os valores da f.d.a para essa variável U. Devido à simetria da área em relação a $x = 0$, poderíamos construir uma tabela indicando a função $G(u)$, tal que

$$G(u) = P(0 \leqslant U \leqslant u)$$

para alguns valores de u (veja o Problema 30).

Dada uma v.a. uniforme X qualquer, com parâmetros α e β, podemos definir a v.a. U como

$$U = \frac{X - \dfrac{\beta + \alpha}{2}}{\beta - \alpha}. \tag{7.16}$$

Segue-se que a transformação (7.16) leva uma uniforme no intervalo $[\alpha, \beta]$ numa uniforme no intervalo $[-1/2, 1/2]$ e para dois números quaisquer c e d, com $c < d$,

$$P(c < X \leqslant d) = F(d) - F(c) = P\left(\frac{c - \dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\beta - \alpha} < U \leqslant \frac{d - \dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right) = F_U\left(\frac{d - \dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right) - F_U\left(\frac{c - \dfrac{\beta+\alpha}{2}}{\beta - \alpha}\right).$$

Artifícios semelhantes a esse são muito úteis na construção de tabelas e programas para cálculos de probabilidades referentes a famílias de modelos.

Um outro caso importante é para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Um número aleatório é um valor gerado de uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo [0, 1]. Veja Capítulo 9.

7.4.2 O Modelo Normal

Vamos introduzir, agora, um modelo fundamental em probabilidades e inferência estatística. Suas origens remontam a Gauss em seus trabalhos sobre erros de observações astronômicas, por volta de 1810, donde o nome de distribuição *gaussiana* para tal modelo.

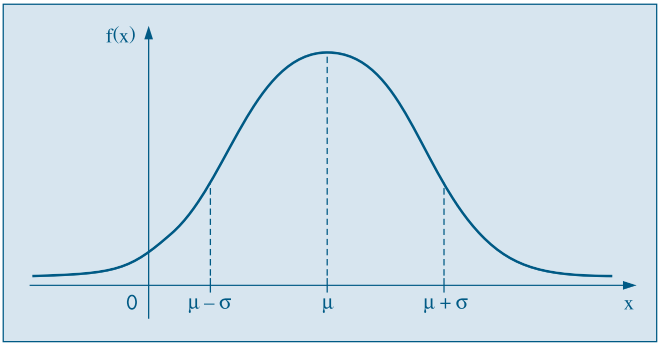
(a) **Definição.** Dizemos que a v.a. X tem *distribuição normal* com parâmetros μ e σ^2, $-\infty < \mu < +\infty$ e $0 < \sigma^2 < \infty$, se sua densidade é dada por

$$f(x;\ \mu,\ \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},\quad -\infty < x < \infty. \tag{7.17}$$

Claramente, $f(x;\ \mu,\ \sigma^2) \geqslant 0$, para todo x e pode-se provar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ \mu,\ \sigma^2)\, dx = 1$. Veja o Problema 60.

(b) **Gráfico.** A Figura 7.11 ilustra uma particular *curva normal*, determinada por valores particulares de μ e σ^2.

Figura 7.11: f.d.p. de uma v.a. normal com média μ e desvio padrão σ.



(c) **Momentos.** Pode-se demonstrar que (veja o Problema 32):

$$E(X) = \mu, \tag{7.18}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2. \tag{7.19}$$

Além disso, $f(x;\ \mu;\ \sigma^2) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$, $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x;\ \mu,\ \sigma^2)$, $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x;\ \mu,\ \sigma^2)$, e o valor máximo é $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. A densidade $f(x;\ \mu,\ \sigma^2)$ é simétrica em relação à reta $x = \mu$, isto é,

$$f(\mu + x;\ \mu,\ \sigma^2) = f(\mu - x;\ \mu,\ \sigma^2), \tag{7.20}$$

para todo x real.

Para simplificar a notação, denotaremos a densidade da normal simplesmente por $f(x)$ e escreveremos, simbolicamente,

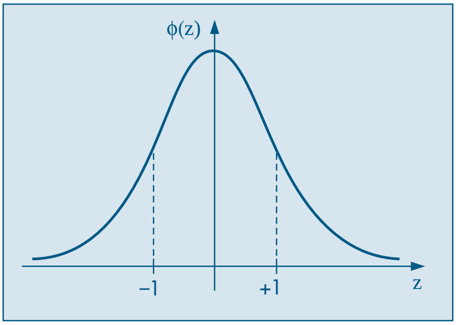
$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, temos uma distribuição *padrão* ou *reduzida*, ou brevemente $N(0,1)$. Para essa a função densidade reduz-se a

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < \infty. \tag{7.21}$$

O gráfico da normal padrão está na Figura 7.12.

Figura 7.12: f.d.p. de uma v.a. normal padrão: $Z \sim N(0, 1)$.



Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então a v.a. definida por

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}, \tag{7.22}$$

terá média zero e variância 1 (prove esses fatos). O que não é tão fácil mostrar é que Z também tem distribuição normal. Isso não será feito aqui.

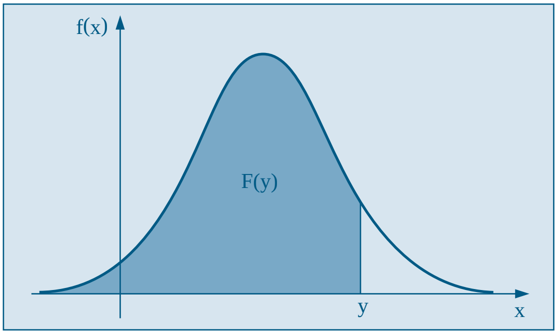
A transformação (7.22) é fundamental para calcularmos probabilidades relativas a uma distribuição normal qualquer.

(d) **F.d.a.** A f.d.a. $F(y)$ de uma v.a. normal X, com média μ e variância σ^2 é obtida integrando-se (7.17) de $-\infty$ até y, ou seja,

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x; \mu, \sigma^2)dx, \quad y \in I\!R. \tag{7.23}$$

A integral (7.23) corresponde à área, sob $f(x)$, desde $-\infty$ até y, como ilustra a Figura 7.13.

Figura 7.13: Representação gráfica de F(y) como área.

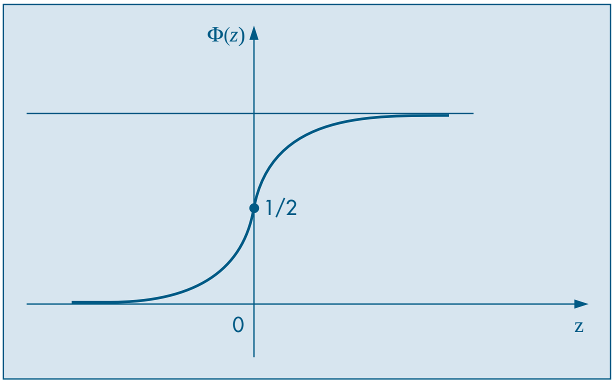


No caso específico da normal padrão, utilizamos a seguinte notação, que é universal:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \phi(z)dz = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2}\, dz. \tag{7.24}$$

O gráfico de $\Phi(z)$ é ilustrado na Figura 7.14.

Figura 7.14: f.d.a. da normal padrão.

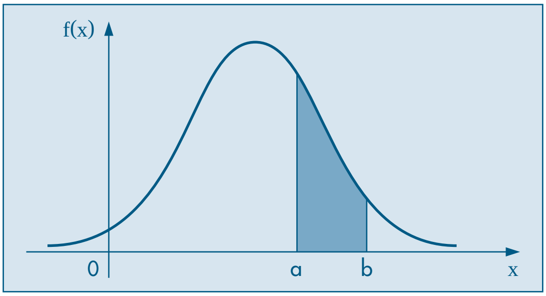


Suponha, então, que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e que queiramos calcular

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx, \tag{7.25}$$

onde $f(x)$ é dada por (7.17). Ver Figura 7.15.

Figura 7.15: Ilustração gráfica da $P(a \leqslant X \leqslant b)$ para uma v.a. normal.



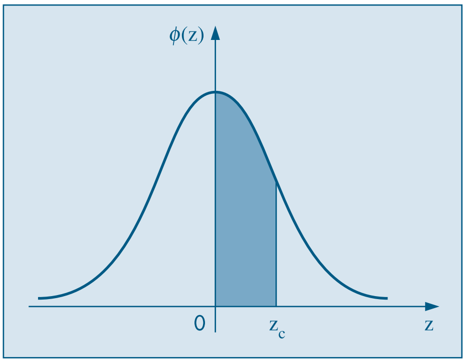
A integral (7.25) não pode ser calculada analiticamente, e portanto a probabilidade indicada só poderá ser obtida, aproximadamente, por meio de integração numérica. No entanto, para *cada* valor de μ e *cada* valor de σ, teríamos de obter $P(a < X < b)$ para diversos valores de a e b. Essa tarefa é facilitada através do uso de (7.22), de sorte que somente é necessário construir uma tabela para a distribuição normal padrão.

Vejamos, então, como obter probabilidades a partir da Tabela III. Essa tabela dá as probabilidades sob uma curva normal padrão, que nada mais são do que as correspondentes áreas sob a curva. A Figura 7.16 ilustra a probabilidade fornecida pela tabela, a saber,

$$P(0 \leqslant Z \leqslant z_c),$$

onde $Z \sim N(0,1)$.

Figura 7.16: $P(0 \leqslant Z \leqslant z_c)$ fornecido pela Tabela III.



Se tomarmos, por exemplo, $z_c = 1{,}73$, segue-se que

$$P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) = 0{,}4582.$$

Calculemos mais algumas probabilidades (Figura 7.17):

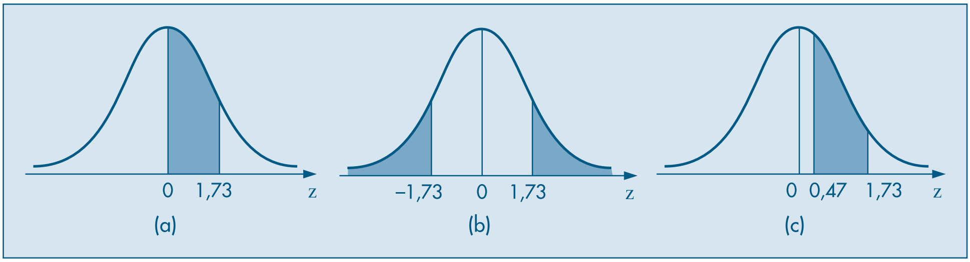
(a) $P(-1{,}73 \leqslant Z \leqslant 0) = P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) = 0{,}4582$, devido à simetria da curva.

(b) $P(Z \geqslant 1{,}73) = 0{,}5 - P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) = 0{,}5 - 0{,}4582 = 0{,}0418$, pois $P(Z \geqslant 0) = 0{,}5 = P(Z \leqslant 0)$.

(c) $P(Z < -1{,}73) = P(Z > 1{,}73) = 0{,}0418$.

(d) $P(0{,}47 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) = P(0 \leqslant Z \leqslant 1{,}73) - P(0 \leqslant Z \leqslant 0{,}47) =$ $= 0{,}4582 - 0{,}1808 = 0{,}2774$.

Figura 7.17: Ilustração do cálculo de probabilidades para a $N(0,1)$.



Suponha, agora, que X seja uma v.a. $N(\mu, \sigma^2)$, com $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 16$, e queiramos calcular $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$. Utilizando (7.22), temos

$$P(2 \leqslant X \leqslant 5) = P\left(\frac{2-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{2-3}{4} \leqslant Z \leqslant \frac{5-3}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{4} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

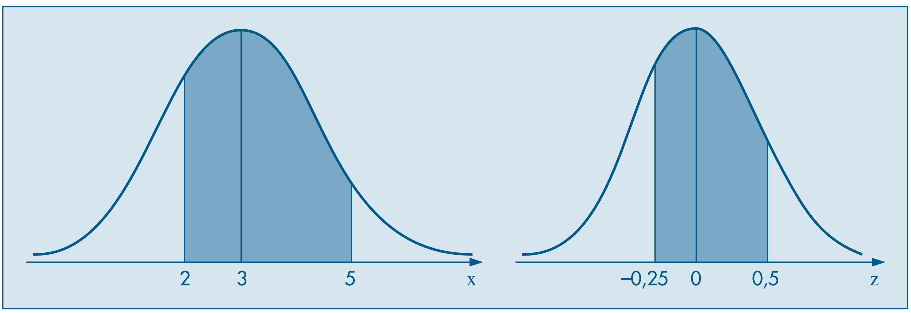
Portanto, a probabilidade de que X esteja entre 2 e 5 é igual à probabilidade de que Z esteja entre $-0{,}25$ e $0{,}5$ (Figura 7.18). Utilizando a Tabela III, vemos que

$$P(-0{,}25 \leqslant Z \leqslant 0{,}5) = 0{,}0987 + 0{,}1915 = 0{,}2902,$$

ou seja,

$$P(2 \leqslant X \leqslant 5) = 0{,}2902.$$

Figura 7.18: Ilustração do cálculo de $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ para a v.a. $N(3, 16)$.



Exemplo 7.9. Os depósitos efetuados no Banco da Ribeira durante o mês de janeiro são distribuídos normalmente, com média de \$10.000,00 e desvio padrão de \$1.500,00. Um depósito é selecionado ao acaso dentre todos os referentes ao mês em questão. Encontrar a probabilidade de que o depósito seja:

(a) \$10.000,00 ou menos;

(b) pelo menos \$10.000,00;

(c) um valor entre \$12.000,00 e \$15.000,00;

(d) maior do que \$20.000,00.

Temos que $\mu = 10.000$ e $\sigma = 1.500$. Seja a v.a. X = depósito.

(a) $P(X \leqslant 10.000) = P\left(Z \leqslant \dfrac{10.000 - 10.000}{1.500}\right) = P(Z \leqslant 0) = 0{,}5.$

(b) $P(X \geqslant 10.000) = P(Z \geqslant 0) = 0{,}5.$

(c) $P(12.000 < X < 15.000) = P\left(\dfrac{12.000 - 10.000}{1.500} < Z < \dfrac{15.000 - 10.000}{1.500}\right)$

$= P(4/3 < Z < 10/3) = P(1{,}33 < Z < 3{,}33) = 0{,}09133.$

(d) $P(X > 20.000) = P\left(Z > \dfrac{20.000 - 10.000}{1.500}\right) = P(Z > 6{,}67) \simeq 0.$

7.4.3 O Modelo Exponencial

Outra distribuição importante e que tem aplicações em confiabilidade de sistemas, assunto de que já tratamos brevemente no Capítulo 5, é a exponencial.

(a) **Definição.** A v.a. T tem *distribuição exponencial* com parâmetro $\beta > 0$ se sua f.d.p. tem a forma

$$f(t;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}\, e^{-t/\beta}, & \text{se } t \geqslant 0 \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases} \tag{7.26}$$

Escreveremos, brevemente,

$$T \sim \operatorname{Exp}(\beta).$$

(b) **Gráfico.** O gráfico de $f(t;\beta) = f(t)$ está ilustrado na Figura 7.8 (b), com $\beta = 1$.

(c) **Momentos.** Usando integração por partes, pode-se demonstrar que (veja o Problema 41):

$$E(T) = \beta, \tag{7.27}$$

$$\operatorname{Var}(T) = \beta^2. \tag{7.28}$$

Exemplo 7.10. O tempo de vida (em horas) de um transistor pode ser considerado uma v.a com distribuição exponencial com $\beta = 500$. Segue-se que a vida média do transistor é $E(T) = 500$ horas e a probabilidade de que ele dure mais do que a média é

$$P(T > 500) = \int_{500}^{\infty} f(t)dt = 1/500 \int_{500}^{\infty} e^{-t/500}\, dt$$

$$= 1/500\, [-500e^{-t/500}]_{500}^{\infty} = e^{-1} = 0{,}3678.$$

(d) **F.d.a.** Usando a definição (7.10), obtemos

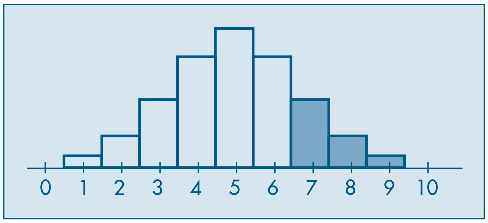
$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-t/\beta}, & \text{se } t \geqslant 0. \end{cases} \qquad (7.29)$$

O gráfico de $F(t)$ está na Figura 7.8 (a), com $\beta = 1$.

7.5 Aproximação Normal à Binomial

Suponha que a v.a. Y tenha uma distribuição binomial com parâmetros $n = 10$ e $p = 1/2$ e queiramos calcular $P(Y \geqslant 7)$. Embora seja uma v.a. discreta, vimos no Capítulo 2 que é possível representá-la por meio de um histograma, como na Figura 7.19. Vemos que $P(Y = 7)$ é igual à área do retângulo de base unitária e altura igual a $P(Y = 7)$, similarmente para $P(Y = 8)$ etc. Logo, $P(Y \geqslant 7)$ é igual à soma das áreas dos retângulos hachurados na Figura 7.19.

Figura 7.19: $(P(Y \geqslant 7)$ para $Y \sim b(10, 1/2)$.



A idéia é aproximar tal área pela área sob uma curva normal, à *direita* de 6,5. Qual curva normal? Parece razoável considerar aquela normal de média

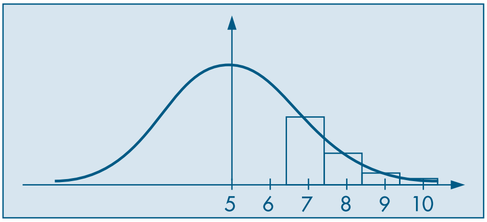
$$\mu = np = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

e variância

$$\sigma^2 = np(1-p) = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2{,}5.$$

Veja a Figura 7.20.

Figura 7.20: Aproximação de $P(Y \geqslant 7)$ pela área sob a $N(5;\,2{,}5)$.



Chamando X tal variável, com distribuição normal,

$$P(Y \geqslant 7) \simeq P(X \geqslant 6{,}5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{6{,}5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(Z \geqslant \frac{6{,}5-5}{\sqrt{2{,}5}}\right) = P(Z \geqslant 0{,}94) = 0{,}174,$$

onde Z é, como sempre, $N(0,\,1)$. Utilizando a Tabela I, vemos que a probabilidade verdadeira é 0,172.

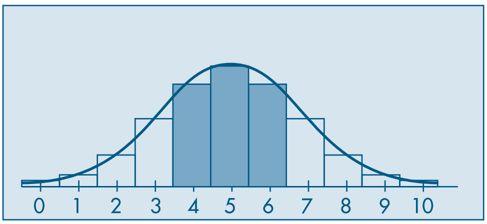
Vamos calcular agora $P(3 < Y \leqslant 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6)$. Vemos, através da Figura 7.21, que a aproximação a ser feita deve ser

$$P(3 < Y \leqslant 6) \simeq P(3{,}5 \leqslant X \leqslant 6{,}5) = P\left(\frac{3{,}5-5}{1{,}58} \leqslant Z \leqslant \frac{6{,}5-6}{1{,}58}\right)$$

$$= P(-0{,}94 \leqslant Z \leqslant 0{,}94) = 0{,}653,$$

ao passo que a probabilidade verdadeira é 0,656.

Figura 7.21: Aproximação de $P(3 < Y \leqslant 6)$.



A justificativa formal de tal aproximação é dada pelo chamado Teorema Limite Central, que será visto no Capítulo 10. A aproximação é boa quando $np > 5$ e $n(1-p) > 5$.

Problemas

13. A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Suponha que T seja considerada uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo (150, 300). Suponha que o custo para produzir um galão de petróleo

seja C_1 reais. Se o óleo for destilado a uma temperatura inferior a 200°, o produto obtido é vendido a C_2 reais; se a temperatura for superior a 200°, o produto é vendido a C_3 reais.

(a) Fazer o gráfico da f.d.p. de T.

(b) Qual o lucro médio por galão?

14. Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

(a) $P(8 < X < 10)$,

(b) $P(9 \leqslant X \leqslant 12)$,

(c) $P(X > 10)$,

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$.

15. Para $X \sim N(100, 100)$, calcule:

(a) $P(X < 115)$,

(b) $P(X \geqslant 80)$,

(c) $P(|X - 100| \leqslant 10)$,

(d) o valor a, tal que $P(100 - a \leqslant X \leqslant 100 + a) = 0{,}95$.

16. Para a v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, encontre:

(a) $P(X \leqslant \mu + 2\sigma)$,

(b) $P(|X - \mu| \leqslant \sigma)$,

(c) o número a tal que $P(\mu - a\sigma \leqslant X \leqslant \mu + a\sigma) = 0{,}99$,

(d) o número b tal que $P(X > b) = 0{,}90$.

17. As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média 170 cm e desvio padrão 5 cm.

(a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165 cm?

(b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?

18. As vendas de determinado produto têm distribuição aproximadamente normal, com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

19. Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

20. O diâmetro X de rolamentos esféricos produzidos por uma fábrica tem distribuição $N(0{,}6140; (0{,}0025)^2)$. O lucro T de cada rolamento depende de seu diâmetro. Assim,

$T = 0{,}10$, se o rolamento for bom $(0{,}610 < X < 0{,}618)$;

$T = 0{,}05$, se o rolamento for recuperável $(0{,}608 < X < 0{,}610)$ ou $(0{,}618 < X < 0{,}620)$;

$T = -0{,}10$, se o rolamento for defeituoso $(X < 0{,}608 \text{ ou } X > 0{,}620)$.

Calcule:

(a) as probabilidades de que os rolamentos sejam bons, recuperáveis e defeituosos.

(b) $E(T)$.

21. Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em 1.000 horas) que possa ser considerado uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leqslant 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

22. Seja Y com distribuição binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0{,}4$. Determine a aproximação normal para:
(a) $P(3 < Y < 8)$, (b) $P(Y \geqslant 7)$, (c) $P(Y < 5)$.

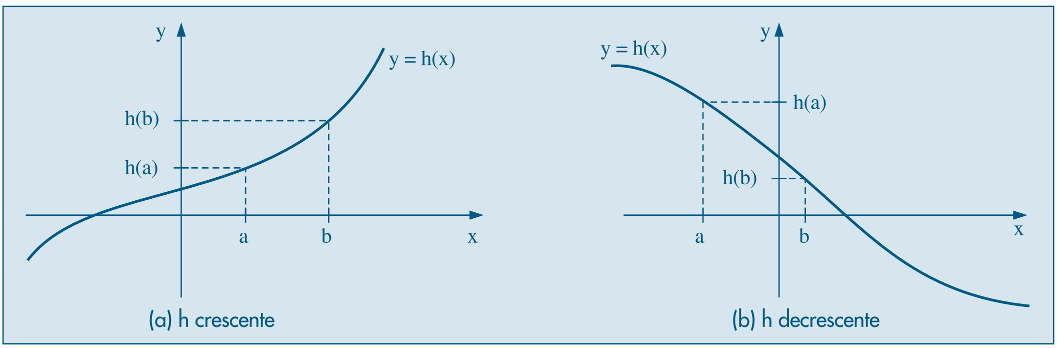
23. De um lote de produtos manufaturados, extraímos 100 itens ao acaso; se 10% dos itens do lote são defeituosos, calcule a probabilidade de 12 itens serem defeituosos. Use também a aproximação normal.

24. A confiabilidade de um mecanismo eletrônico é a probabilidade de que ele funcione sob as condições para as quais foi planejado. Uma amostra de 1.000 desses itens é escolhida ao acaso e os itens são testados, obtendo-se 30 defeituosos. Calcule a probabilidade de se obter pelo menos 30 itens defeituosos, supondo que a confiabilidade de cada item é 0,95.

7.6 Funções de Variáveis Contínuas

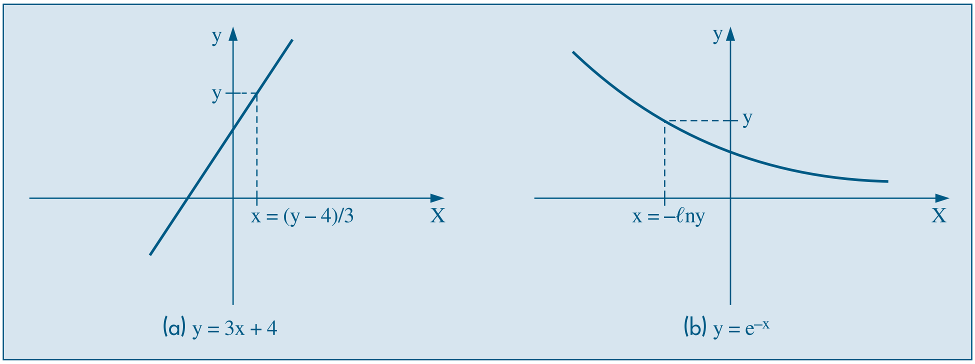
Vimos, no Capítulo 6, como obter a distribuição de uma v.a. $Y = h(X)$, se conhecermos a distribuição da v.a. discreta X. Vejamos, agora, o caso em que X é contínua. Suponhamos, primeiramente, que a função h seja estritamente monotônica, crescente ou decrescente. Neste caso, a inversa h^{-1} estará univocamente determinada e podemos obter $x = h^{-1}(y)$, para valores x e y das v.a. X e Y, respectivamente. Observando a Figura 7.22, vemos que, se a densidade de X, $f(x)$, digamos, for positiva no intervalo $a < x < b$, então a densidade de Y será positiva para $h(a) < y < h(b)$, se h for crescente, e para $h(b) < y < h(a)$, se h for decrescente.

Figura 7.22: Função de uma v.a.



Exemplo 7.11. Suponha X com a densidade do Exemplo 7.2 e considere $Y = 3X + 4$. Aqui, $y = h(x) = 3x + 4$, que é crescente (Figura 7.23 (a)).

Figura 7.23: Exemplos de funções de v.a. (a) Exemplo 7.11 (b) Exemplo 7.12.



Denotando a densidade de Y por $g(y)$, e como $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, $g(y) > 0$ para $4 < y < 7$.

Notemos que se podem obter probabilidades relativas a Y a partir da densidade de X. Por exemplo,

$$P(Y > 1) = P(3X + 4 > 1) = P(X > -1) = 1.$$

Vejamos como se pode obter $g(y)$. Denotemos por $G(y)$ a função de distribuição acumulada de Y. Da seção 7.3, sabemos que $G'(y) = g(y)$, para todo valor de y para o qual G for derivável. Então, temos

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P(3X + 4 \leqslant y) = P\left(X \leqslant \frac{y-4}{3}\right) = F\left(\frac{y-4}{3}\right),$$

onde estamos denotando por $F(\cdot)$ a função de distribuição acumulada de X. Usando a regra da cadeia para derivadas, temos

$$G'(y) = F'\left(\frac{y-4}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} f\left(\frac{y-4}{3}\right),$$

do que decorre

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}(y-4), & \text{se } 4 < y < 7 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 7.12. Suponha, agora, que X tenha densidade $f(x) = 3x^2/2$, $-1 < x < 1$ e que $Y = e^{-X}$. Segue-se que $h(x) = e^{-x}$ é uma função decrescente e $x = -\ell n(y)$ (Figura 7.23 (b)). Então,

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leqslant y) = P(e^{-X} \leqslant y) = P(X \geqslant -\ell n(y)) \\ &= 1 - P(X \leqslant -\ell n(y)) = 1 - F(-\ell n(y)), \end{aligned}$$

onde novamente F denota a f.d.a. de X. Derivando, obtemos a f.d.p. de Y,

$$g(y) = \frac{3}{2y} (\ell n(y))^2, \; e^{-1} < y < e.$$

O seguinte resultado generaliza esses dois exemplos.

Teorema 7.1. Se X for uma v.a. contínua, com densidade $f(x) > 0$, $a < x < b$, então $Y = h(X)$ tem densidade

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|, \tag{7.30}$$

supondo que h seja monotônica, derivável para todo x. Se h for crescente, $g(y) > 0$, $h(a) < y < h(b)$ e, se h for decrescente, $g(y) > 0$, $h(b) < y < h(a)$.

Prova. Basta notar que $G(y) = P(Y \leqslant y) = P(h(X) \leqslant y)$ e que essa probabilidade é igual a $P(X \leqslant h^{-1}(y)) = F(h^{-1}(y))$, se h for crescente, e igual a $1 - F(h^{-1}(y))$, se h for decrescente. Derivando $G(y)$ obtemos o resultado, notando que a derivada $(h^{-1}(y))' = dx/dy > 0$ se h for crescente, e negativa se h for decrescente.

Suponha, agora, que h não seja monotônica. Um caso de interesse que será usado mais tarde é $Y = h(X) = X^2$ (Figura 7.24). Temos

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

e derivando obtemos a densidade de Y,

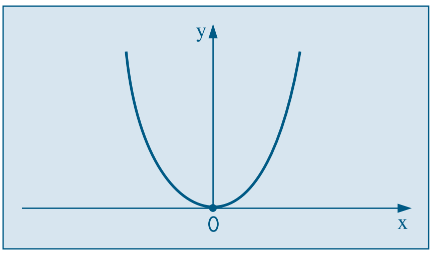
$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [\, f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})], \tag{7.31}$$

onde f é a densidade de X.

Se $f(x) = 1$, $0 < x < 1$ (X é uniforme no intervalo $[0, 1]$), então

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \; 0 < y < 1.$$

Figura 7.24: Ilustração de $Y = h(X) = X^2$.



Problemas

25. Considere a v.a. X do Problema 2 e $Y = X + 5$.
    (a) Calcule $P(Y \leqslant 5{,}5)$.
    (b) Obtenha a densidade de Y.
    (c) Obtenha a densidade de $Z = 2X$.
26. Suponha que a v.a. X tenha a densidade do Problema 8. Se $Y = 2X - 3/5$, obter a densidade de Y. Calcule $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$.
27. Suponha $X \sim \mathcal{U}[-1, 1]$. Calcule a densidade de $Y = X^2$ e de $W = |X|$.

7.7 Outros Modelos Importantes

Nesta seção vamos introduzir alguns modelos para v.a. contínuas que serão bastante utilizados na terceira parte deste livro. Juntamente com o modelo normal, esses modelos são úteis para as v.a. de interesse prático, que na maioria dos casos assumem valores positivos e tendem a ter distribuições assimétricas à direita.

7.7.1 A Distribuição Gama

Uma extensão do modelo exponencial é estudado a seguir.

Definição. A v.a. contínua X, assumindo valores positivos, tem uma distribuição gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se sua f.d.p. for dada por

$$f(x;\ \alpha,\ \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{7.32}$$

Em (7.32), $\Gamma(\alpha)$ é a *função gama*, importante em muitas áreas da Matemática, dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx,\ \alpha > 0. \tag{7.33}$$

Não é difícil ver que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\ \Gamma(\alpha - 1)$, se $\alpha = n$ for um inteiro positivo, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ e que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Veja o Problema 45.

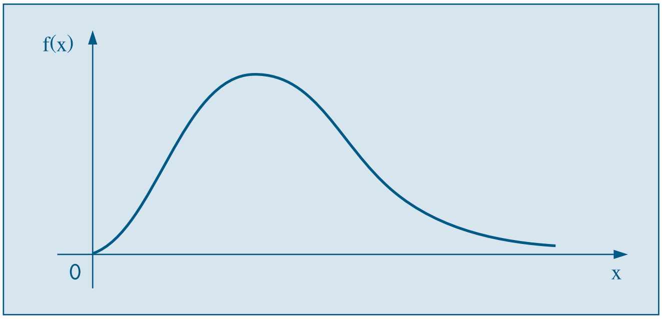
A Figura 7.25 ilustra a densidade (7.32) para $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Se $\alpha = 1$ obtemos a distribuição exponencial (7.26). Muitos casos de interesse têm α inteiro positivo.

Usaremos a notação

$$X \sim \text{Gama}(\alpha,\ \beta)$$

para designar uma v.a. com a distribuição dada por (7.32).

Figura 7.25: Gráfico da f.d.p. de uma distribuição gama, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.



Pode-se demonstrar que:

$$E(X) = \alpha\beta, \text{ Var}(X) = \alpha\beta^2. \tag{7.34}$$

7.7.2 A Distribuição Qui-Quadrado

Um caso especial importante do modelo gama é obtido fazendo-se $\alpha = \nu/2$ e $\beta = 2$, com $\nu > 0$ inteiro.

Definição. Uma v.a. contínua Y, com valores positivos, tem uma distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade (denotada $\chi^2(\nu)$), se sua densidade for dada por

$$f(y;\, \nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} y^{\nu/2-1} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases} \tag{7.35}$$

A Figura 7.26 ilustra os gráficos de (7.35) para $\nu = 1, 2, 3$. Segue-se de (7.34) que

$$E(Y) = \nu, \quad \text{Var}(Y) = 2\nu. \tag{7.36}$$

A distribuição qui-quadrado tem muitas aplicações em Estatística e, como no caso da normal, existem tabelas para obter probabilidades. A Tabela IV, fornece os valores de y_0 tais que $P(Y > y_0) = p$, para alguns valores de p e de ν. Ver Figura 7.27.

Figura 7.26: Gráficos da distribuição qui-quadrado c²(*n*).

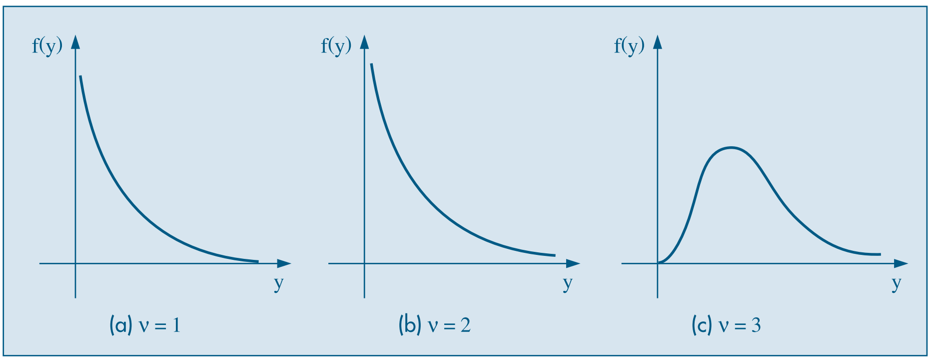
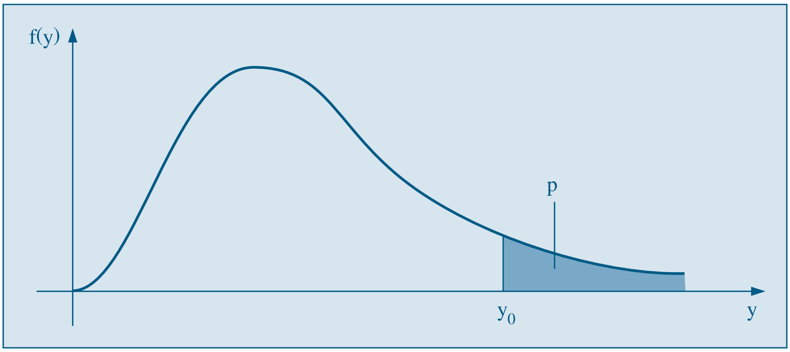


Figura 7.27: Valores tabelados da distribuição $\chi^2(\nu)$.



Exemplo 7.13. Usando a Tabela IV, para $\nu = 10$, observe que $P(Y > 2{,}558) = 0{,}99$, ao passo que $P(Y > 18{,}307) = 0{,}05$.

Para $\nu > 30$ podemos usar uma aproximação normal à distribuição qui-quadrado. Especificamente, temos o seguinte resultado: se Y tiver distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade, então a v.a.

$$Z = \sqrt{2Y} - \sqrt{2\nu - 1} \sim N(0{,}1).$$

Por exemplo, consultando a Tabela IV, temos que, se $\nu = 30$,

$$P(Y > 40{,}256) = 0{,}10,$$

enquanto que, usando a fórmula acima, temos que

$$z = \sqrt{2 \times 40{,}256} - \sqrt{59} = 1{,}292$$

e $P(Z > 1{,}292) = 0{,}099$, que resulta ser uma boa aproximação.

Exemplo 7.14. Considere $Z \sim N(0{,}1)$ e considere a v.a. $Y = Z^2$. De (7.31) temos que a densidade de Y é dada por

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [\phi(\sqrt{y}) + \phi(-\sqrt{y})], \; y > 0,$$

onde por $\phi(z)$ indicamos a densidade da $N(0{,}1)$. Resulta

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2},$$

e comparando com (7.35) vemos que $Y \sim \chi^2(1)$. Temos, aqui, um resultado importante: O quadrado de uma v.a. com distribuição normal padrão é uma v.a. com distribuição $\chi^2(1)$.

De um modo mais geral, uma v.a. x^2 (ν) *pode ser vista como a soma de* ν *normais padrões ao quadrado, independentes.*

7.7.3 A Distribuição *t* de Student

A distribuição t de Student é importante no que se refere a inferências sobre médias populacionais, tópico a ser tratado nos Capítulos 12 e 13. A obtenção da densidade está contida no teorema abaixo.

Teorema 7.1. Seja Z uma v.a. $N(0,1)$ e Y uma v.a. $\chi^2(\nu)$, com Z e Y independentes. Então, a v.a.

$$t = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}, \tag{7.37}$$

tem densidade dada por

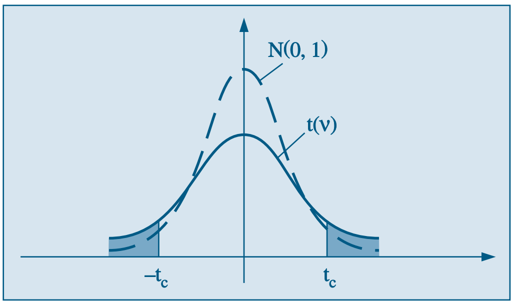
$$f(t;\, \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}}\,(1 + t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2},\ -\infty < t < \infty. \tag{7.38}$$

Diremos que tal variável tem uma *distribuição t de Student com ν graus de liberdade* e a indicaremos por $t(\nu)$. Pode-se provar que

$$E(t) = 0, \quad \mathrm{Var}(t) = \frac{\nu}{\nu - 2},\ \nu > 2, \tag{7.39}$$

e verificar que o gráfico da densidade de t aproxima-se bastante de uma $N(0,1)$ quando ν é grande. Veja a Figura 7.28.

Figura 7.28: A distribuição *t* de Student e a distribuição normal padrão.



Como essa distribuição é bastante utilizada na prática, existem tabelas fornecendo probabilidades relativas a ela. A Tabela V fornece os valores de t_c tais que

$$P(-t_c < t(\nu) < t_c) = 1 - p, \tag{7.40}$$

para alguns valores de p e de ν.

O nome *Student* vem do pseudônimo usado pelo estatístico inglês W. S. Gosset, que introduziu essa distribuição no início do século passado.

Exemplo 7.15. Se $\nu = 6$, então, usando a Tabela V, $P(-1{,}943 < t(6) < 1{,}943) = 0{,}90$, ao passo que $P(t(6) > 2{,}447) = 0{,}025$. Observe que, nessa tabela, há uma linha com $\nu = \infty$, que corresponde a usar os valores da $N(0,1)$. Para $n > 120$ essa aproximação é muito boa.

7.7.4 A Distribuição *F* de Snedecor

Vamos considerar agora uma v.a. definida como o quociente de duas variáveis com distribuição qui-quadrado.

O seguinte teorema, que não será demonstrado, resume o que nos vai ser útil.

Teorema 7.2. Sejam U e V duas v.a. independentes, cada uma com distribuição qui-quadrado, com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, respectivamente. Então, a v.a.

$$W = \frac{U/\nu_1}{V/\nu_2} \tag{7.41}$$

tem densidade dada por

$$g(w;\, \nu_1, \nu_2) = \frac{\Gamma((\nu_1+\nu_2)/2)}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{w^{(\nu_1-2)/2}}{(1+\nu_1 w/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}},\ w > 0. \tag{7.42}$$

Diremos que W tem *distribuição F de Snedecor, com* ν_1 *e* ν_2 *graus de liberdade*, e usaremos a notação $W \sim F(\nu_1, \nu_2)$. Pode-se mostrar que

$$E(W) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Var}(W) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2\,(\nu_2-4)}. \tag{7.43}$$

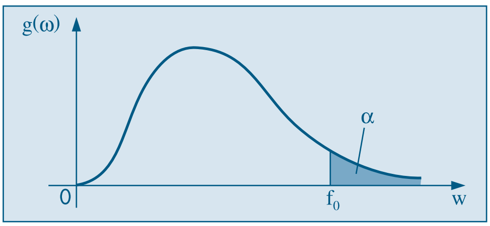
O gráfico típico de uma v.a. com distribuição F está na Figura 7.29. Na Tabela VI são dados os pontos f_0 tais que

$$P\{F(\nu_1, \nu_2) > f_0\} = \alpha,$$

para $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}025$ e alguns valores de ν_1 e ν_2. Para encontrar os valores inferiores, usa-se a identidade

$$F(\nu_1, \nu_2) = 1/F(\nu_2, \nu_1). \tag{7.44}$$

Figura 7.29: Gráfico de distribuição F.



Exemplo 7.16. Considere, por exemplo, $W \sim F(5, 7)$. Consultando a Tabela VI, $P(F > 3{,}97) = 0{,}05$ ou, então, $P(F \leqslant 3{,}97) = 0{,}95$. Digamos, agora, que desejamos encontrar o valor f_0 tal que $P(F < f_0) = 0{,}05$. Da igualdade (7.44) temos

$$0{,}05 = P\{F(5,7) < f_0\} = P\{1/F(7,5) < f_0\} = P\{F(7,5) > 1/f_0\},$$

e procurando na Tabela VI, para $F(7,5)$, obtemos $1/f_0 = 4{,}88$ e, portanto, $f_0 = 0{,}205$.

Na seção de Problemas e Complementos apresentamos algumas outras distribuições de interesse, como a log-normal, Pareto, Weibull e beta.

Na Tabela 7.2 mostramos os principais modelos para v.a. contínuas, incluindo: a densidade, o domínio dos valores, os parâmetros, a média e a variância.

Tabela 7.2: Modelos para variáveis contínuas.

Modelo	$f(x)$	Parâmetros	$E(X)$, Var(X)
Uniforme	$1/(\beta-\alpha),\ \alpha < x < \beta$	α, β	$(\alpha+\beta)/2,\ (\beta-\alpha)^2/12$
Exponencial	$1/\beta\ e^{-t/\beta},\ t > 0$	β	$\beta,\ \beta^2$
Normal	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\left\{\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, -\infty < x < \infty$	μ, σ	$\mu,\ \sigma^2$
Gama	$\beta^{-\alpha}/\Gamma(\alpha)\ x^{\alpha-1}\ e^{-x/\beta},\ x > 0$	$\beta > 0,\ \alpha > 0$	$\alpha\beta,\ \alpha\beta^2$
Qui-quadrado	$\dfrac{2^{-\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}\ y^{\nu/2-1}e^{-y/2},\ y > 0$	ν	$\nu,\ 2\nu$
t-Student	$\dfrac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\dfrac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, -\infty < t < \infty$	ν	$0,\ \nu/(\nu-2)$
F-Snedecor	$\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{(\nu_1+\nu_2)}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\dfrac{w^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{\left(1+\dfrac{\nu_1 w}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}},\ w > 0.$	$\nu_1,\ \nu_2$	$\dfrac{\nu_2}{\nu_2-2},\ \dfrac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$

7.8 Quantis

No Capítulo 6 definimos o p-quantil $Q(p)$ como o valor da v.a. discreta X satisfazendo as duas desigualdades de (6.26).

No caso de uma v.a. contínua X, essa definição torna-se mais simples. Se $F(x)$ designar a f.d.a. de X, temos que as desigualdades em (6.26) ficam:

$$P(X \leqslant Q(p)) = F(Q(p)) \geqslant p \tag{7.45}$$

e

$$P(X \geqslant Q(p)) = 1 - P(X < Q(p)) = 1 - P(X \leqslant Q(p)) = 1 - F(Q(p)) \geqslant 1 - p. \tag{7.46}$$

Mas (7.46) pode ser reescrita como

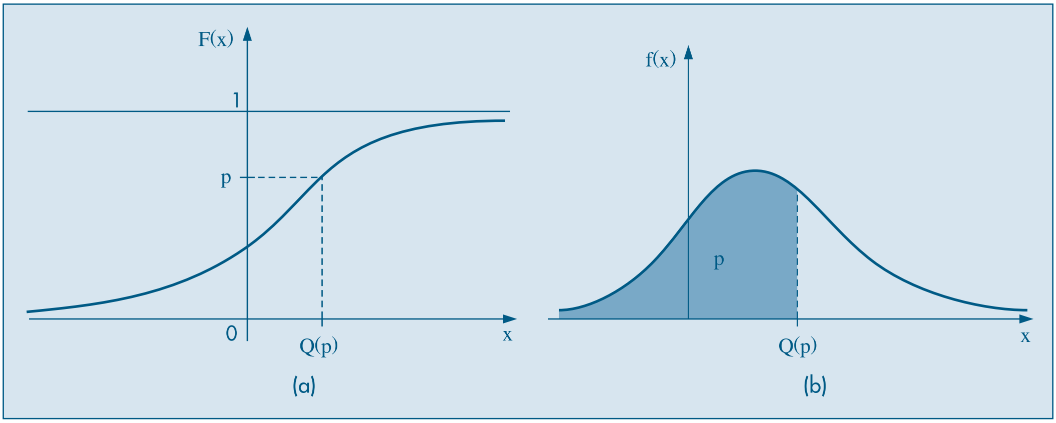
$$F(Q(p)) \leqslant p. \tag{7.47}$$

Portanto, de (7.45) e (7.47) chegamos à conclusão de que o p-quantil deve satisfazer

$$F(Q(p)) = p. \tag{7.48}$$

Graficamente, temos a situação ilustrada na Figura (7.30). Ou seja, para obter $Q(p)$, marcamos p no eixo das ordenadas, consideramos a reta horizontal pelo ponto $(0, p)$ até encontrar a curva de $F(x)$ e baixamos uma reta vertical até encontrar $Q(p)$ no eixo das abscissas. Analiticamente, temos de resolver a equação (7.48). Vejamos alguns exemplos.

Figura 7.30: Definição de Q(p) (a) f.d.a. (b) f.d.p.



Exemplo 7.17. Se $Z \sim N(0, 1)$, utilizando a Tabela III encontramos facilmente que

$Q(0, 5) = Q_2 = 0,$

$Q(0, 25) = Q_1 = -0{,}675,$

$Q(0, 30) = -0{,}52,$

$Q(0{,}75) = Q_3 = 0{,}675.$

Exemplo 7.18. Suponha que $Y \sim \text{Exp}(2)$. Se quisermos calcular a mediana, Q_2, teremos de resolver

$$\int_0^{Q_2} f(y)dy = 0{,}5,$$

ou seja,

$$1/2 \int_0^{Q_2} e^{-y/2}\, dy = 0{,}5.$$

Obtemos

$$1 - e^{-Q_2/2} = 0{,}5,$$

do que temos, finalmente, $Q_2 = -2\ell n(0{,}5) = 1{,}386$.

7.9 Exemplos Computacionais

Nesta seção final, vamos dar alguns exemplos de como obter probabilidades acumuladas para a normal e exponencial, usando o pacote Minitab. Isso também pode ser feito com outros pacotes ou planilhas, bem como considerar outras distribuições contínuas.

Considere a v.a. contínua X, com f.d.a. $F(x) = P(X \leqslant x)$. O problema é, dado x, calcular $F(x)$, ou dado $F(x)$, calcular x.

Exemplo 7.19. Suponha $X \sim N(10,\ 25)$. Para obter $F(x)$, para $x = 8{,}65$, usamos os comandos CDF e NORMAL do Minitab. Por outro lado, se $F(x) = 0{,}8269$, então obteremos x usando os comandos INVCDF e NORMAL. Veja o Quadro 7.1.

Quadro 7.1 Obtenção de x e $F(x)$ para a Normal. Minitab.

```
MTB > CDF 8.65;                              MTB > INVCDF 0.8269;
SUBC > NORMAL 10,25.                         SUBC > NORMAL 10,25.
Cumulative Distribution Function             Inverse Cumulative Distribution Function
Normal with mean = 10.0000 and standard      Normal with mean = 10.0000 and standard
deviation = 25.0000                          deviation = 25.0000
     x    P(X < = x)                         P(X < = x)    x
8.6500    0.4785                             0.8269        33.5496
```

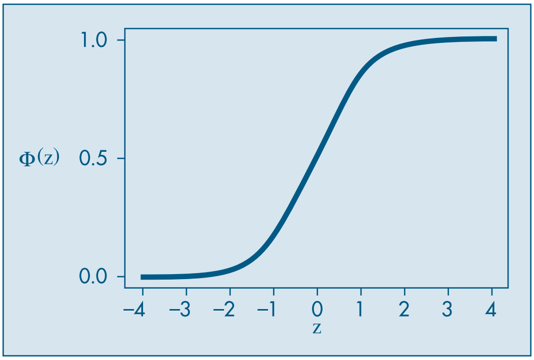
Exemplo 7.20. O Quadro 7.2 mostra cálculos similares para distribuição exponencial, com média 0,5, ou seja, parâmetro $\beta = 2$.

Quadro 7.2 Obtenção de x e $F(x)$ para a Exponencial. Minitab.

```
MTB > CDF 0.85;                              MTB > INVCDF 0.345;
SUBC> EXPONENCIAL 0.5.                       SUBC> EXPONENCIAL 0.5.
Cumulative Distribution Function             Inverse Cumulative Distribution Function
Exponential with mean = 0.500000             Exponential with mean = 0.500000
     x    P(X < = x)                         P(X < = x)    x
0.8500    0.8173                             0.3450        0.2116
```

Exemplo 7.21. Podemos, também, construir o gráfico de uma f.d.a, por meio de comandos do Minitab. Suponha que $Z \sim N(0,1)$. Como os valores de Z estão concentrados no intervalo [–4, 4], podemos considerar um vetor de valores z = [−4,0; −3,9; −3,8; ...; 3,8; 3,9; 4,0] e obter os valores da f.d.a. com o comando CDF. Depois, pedir para plotar os pares $(z_i, F(z_i))$. O gráfico está na Figura 7.31.

Figura 7.31: Gráfico da f.d.a. da $N(0, 1)$. Minitab.



7.10 Problemas e Complementos

28. Numa determinada localidade, a distribuição de renda (em reais) é uma v.a. X com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20}, & 2 < x \leqslant 6 \\ 0, & x < 0 \text{ ou } x > 6. \end{cases}$$

(a) Qual a renda média nessa localidade?
(b) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a $3.000,00?
(c) Qual a mediana da variável?

29. Se X tiver distribuição uniforme com parâmetros α e β, mostre que:

(a) $E(X) = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

(b) $\text{Var}(X) = (\beta - \alpha)^2/12$.

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 1, & x > \beta. \end{cases}$

30. Complete a tabela abaixo, que corresponde a alguns valores da função

$$G(u) = P(0 \leqslant U \leqslant u),$$

definida na seção 7.4.1, com U uma v.a. uniforme no intervalo (–1/2, 1/2).

Probabilidades p, tais que $p = P(0 \leqslant U \leqslant u)$

Primeira decimal de u	Segunda decimal de u				Primeira decimal de u
	0	1	...	9	
0,0					0,0
0,1					0,1
0,2					0,2
0,3					0,3
0,4					0,4
0,5					0,5

31. Dada a v.a. X, uniforme em $(5, 10)$, calcule as probabilidades abaixo, usando a tabela do problema anterior.
    (a) $P(X < 7)$
    (b) $P(8 < X < 9)$
    (c) $P(X > 8{,}5)$
    (d) $P(|X - 7{,}5| > 2)$

32. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, calcular $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

    [Sugestão: Fazendo a transformação de variáveis $x = \mu + \sigma t$, obtemos que $E(X) = \dfrac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt + \dfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}\,dt$. A primeira integral resulta μ (por quê?) e a segunda anula-se, pois o integrando é uma função ímpar. Para obter a variância, obtenha $E(X^2)$ por integração por partes.]

33. As notas de Estatística Econômica dos alunos de determinada universidade distribuem-se de acordo com uma distribuição normal, com média 6,4 e desvio padrão 0,8. O professor atribui graus A, B e C da seguinte forma:

Nota	Grau
$x < 5$	C
$5 \leqslant x < 7{,}5$	B
$7{,}5 \leqslant x \leqslant 10$	A

    Numa classe de 80 alunos, qual o número esperado de alunos com grau A? E com grau B? E C?

34. O peso bruto de latas de conserva é uma v.a. normal, com média 1.000 g e desvio padrão 20 g.
    (a) Qual a probabilidade de uma lata pesar menos de 980 g?
    (b) Qual a probabilidade de uma lata pesar mais de 1.010 g?

35. A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição normal, com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5.000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classe?

36. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1.000 cm^3 e o desvio padrão de 10 cm^3. Pode-se admitir que a variável volume seja normal.
   (a) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3?
   (b) Qual é a porcentagem das garrafas em que o volume líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões?
   (c) O que acontecerá com a porcentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja 1.200 cm^3 e o desvio padrão 20 cm^3?

37. O diâmetro de certo tipo de anel industrial é uma v.a. com distribuição normal, de média 0,10 cm e desvio padrão 0,02 cm. Se o diâmetro de um anel diferir da média em mais que 0,03 cm, ele é vendido por \$5,00; caso contrário, é vendido por \$10,00. Qual o preço médio de venda de cada anel?

38. Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de seis meses. Ela produz televisores do tipo A (comum) e do tipo B (luxo), com lucros respectivos de \$1.000,00 e \$2.000,00, caso não haja restituição, e com prejuízos de \$3.000,00 e \$8.000,00, se houver restituição. Suponha que o tempo para a ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma v.a. com distribuição normal, respectivamente, com médias 9 meses e 12 meses, e variâncias 4 meses^2 e 9 meses^2. Se tivesse de planejar uma estratégia de *marketing* para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

39. Determine as médias das v.a. X, Y e Z:
   (a) X uniforme em $(1, 3)$, $Y = 3X + 4$, $Z = e^X$.
   (b) X tem f.d.p. $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, $Y = X^2$, $Z = 3/(X + 1)^2$.

40. Suponha que X tenha distribuição uniforme em $[-a, 3a]$. Determine a média e a variância de X.

41. Se T tiver distribuição exponencial com parâmetro β, mostre que:
   (a) $E(T) = \beta$. (b) $\text{Var}(T) = \beta^2$.

42. Os dados a seguir representam uma amostra de firmas de determinado ramo de atividade de uma região. Foram observadas duas variáveis: faturamento e número de empregados.

Nº de empregados	Nº de empresas
0 ⊢ 20	35
20 ⊢ 50	75
50 ⊢ 100	45
100 ⊢ 200	30
200 ⊢ 400	15
400 ⊢ 800	8
> 800	2
Total	210

Faturamento	Nº de empresas
0 ⊢ 10	18
10 ⊢ 50	52
50 ⊢ 100	30
100 ⊢ 200	26
200 ⊢ 400	24
400 ⊢ 800	20
800 ⊢ 1600	16
1600 ⊢ 3200	14
3200 ⊢ 6400	6
> 6400	4
Total	210

(a) Calcule a média e a variância para cada variável.

(b) Supondo normalidade para cada uma dessas variáveis, com parâmetros estimados pela amostra, calcule os valores esperados para cada intervalo de classe e compare com o observado.

43. Suponha que a v.a. X tenha densidade $f(x) = 1$, para $0 < x < 1$ e igual a zero no complementar. Faça $Y = X^2$.

(a) Determine $F_Y(y) = P(Y \leqslant y)$, y real.

(b) Determine a f.d.p. de Y.

(c) Calcule $E(X^2)$, utilizando a f.d.p. de X.

(d) Calcule $E(Y)$, utilizando a f.d.p. de Y, e compare com (c).

44. Dada a v.a.

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x},$$

determine a média e a variância de Z, sabendo-se que a f.d.p. de X é

$$f(x) = e^{-x},\ x > 0.$$

45. (a) Prove que, se α for inteiro positivo, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$.

(b) Prove que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

(c) Calcule $\Gamma(1)$ e $\Gamma(1/2)$.

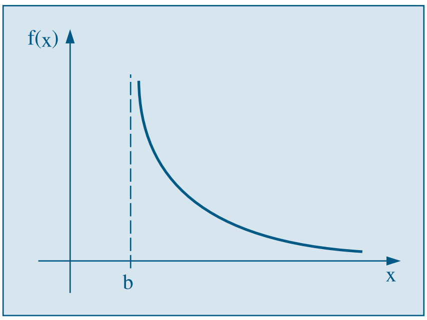
(d) Prove que a média e a variância de uma v.a. X com distribuição gama (densidade em (7.32)) são, respectivamente, $\alpha\beta$ e $\alpha\beta^2$.

46. Distribuição de Pareto. Esta é uma distribuição freqüentemente usada em Economia, em conexão com problemas de distribuição de renda.

Dizemos que a v.a. X tem *distribuição de Pareto* com parâmetros $\alpha > 0$, $b > 0$ se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha/b\ (b/x)^{\alpha+1}, & x \geqslant b \\ 0, & x < b. \end{cases}$$

Aqui, b pode representar algum nível mínimo de renda, x é o nível de renda e $f(x)\ \Delta x$ dá a proporção de indivíduos com renda entre x e $x + \Delta x$. O gráfico de $f(x)$ está na figura abaixo.



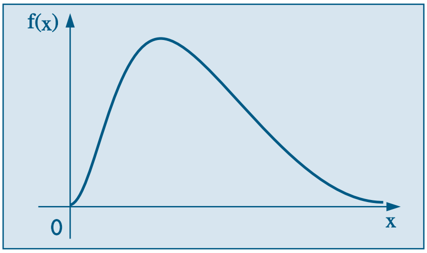
(a) Prove que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

(b) Mostre que, para $\alpha > 1$, $E(X) = \dfrac{\alpha b}{\alpha - 1}$ e para $\alpha > 2$, $\text{Var}(X) = \dfrac{\alpha b^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$.

47. Distribuição lognormal. Outra distribuição usada quando se têm valores positivos é a distribuição lognormal. A v.a. X tem distribuição lognormal, com parâmetros μ e σ^2, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$, se $Y = \ell n X$ tiver distribuição normal com média μ e variância σ^2. A f.d.p. de X tem a forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-1/2\left(\frac{\ell n x - \mu}{\sigma}\right)^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

O gráfico de $f(x)$ está na figura abaixo.



(a) Prove que $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$.

(b) Se $E(X) = m$, prove que $\text{Var}(X) = m^2(e^{\sigma^2} - 1)$.

48. Suponha que X tenha distribuição exponencial com parâmetro β. Prove que

$$\frac{P(X > t + x)}{P(X > x)} = P(X > t),\ \forall t, x \geqslant 0.$$

Essa propriedade nos diz que a distribuição exponencial não tem memória. Por exemplo, se X for a vida de um componente eletrônico, a relação acima diz que, se o componente durou até o instante x, a probabilidade de ele não falhar após o intervalo $t + x$ é a mesma de não falhar após o instante t. Nesse sentido, X "esquece" a sua idade, e a eventual falha do componente não resulta de uma deterioração gradual e sim de alguma falha repentina.

49. Se X for uma v.a. contínua, com f.d.p. $f(x)$, e se $Y = g(X)$ for uma função de X, então Y será uma v.a com

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

Suponha que X tenha densidade

$$f(x) = \begin{cases} (½)e^{x}, & x \leqslant 0 \\ (½)e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Obtenha $E(Y)$, se $Y = |X|$.

50. Se X for uniforme no intervalo $[0, 1]$, obtenha a média da v.a. $Y = (½)X^2$.

51. Distribuição de Weibull. Um modelo que tem muitas aplicações na *teoria da confiabilidade* é o modelo de Weibull, cuja f.d.p. é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

onde α e β são constantes positivas. A v.a. X pode representar, por exemplo, o tempo de vida de um componente de um sistema.
(*a*) Se $\beta = 1$, qual a f.d.p. resultante? (*b*) Obtenha $E(X)$ para $\beta = 2$.

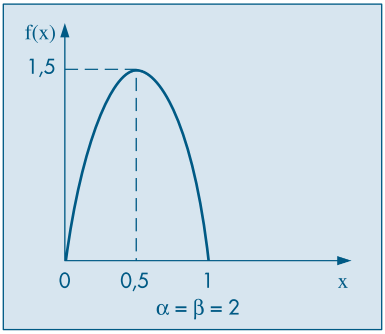
52. Distribuição Beta. Uma v.a. X tem distribuição beta com parâmetros $\alpha > 0$, $\beta > 0$, se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha, \beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Aqui, $B(\alpha, \beta)$ é a função beta, definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

É possível provar que $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$. A figura abaixo mostra a densidade da distribuição beta para $\alpha = \beta = 2$. Para esse caso, calcule $P(X \leqslant 0{,}2)$. Calcule a média e a variância de X para $\alpha = \beta = 2$.



53. Se na distribuição t de Student colocarmos $\nu = 1$, obteremos a *distribuição de Cauchy*,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Mostre que $E(X)$ não existe.

54. Obtenha o gráfico da f.d.a. de uma v.a. $T \sim \text{Exp}(0, 5)$, ou seja, $E(T) = 2$, considerando 20 valores de T e calculando os valores de $F(t)$, como na seção 7.9.

55. Idem, para 30 valores de uma uniforme no intervalo $[-1,1]$.

56. Obtenha os quantis $Q(0{,}1)$, Q_1, Q_2, Q_3, $Q(0{,}9)$ para uma v.a. $X \sim N(10; 16)$.

57. Resolva a mesma questão para uma v.a. $Y \sim \chi^2(5)$.

58. Para uma v.a. com distribuição qui-quadrado, com v graus de liberdade e v *par*, vale a seguinte fórmula:

$$P(\chi^2(v) > c) = e^{-c/2} \sum_{j=0}^{v/2-1} \frac{(c/2)^j}{j!}.$$

Calcule essa probabilidade para os seguintes casos e compare com os valores tabelados na Tabela IV:

(a) $v = 4$, $c = 9{,}488$; (b) $v = 10$, $c = 16$.

59. Usando a aproximação normal a uma variável qui-quadrado, calcular:

(a) $P(\chi^2(35) > 49{,}76)$; (b) o valor y tal que $P(\chi^2(40) > y) = 0{,}05$.

60. Se $X \sim N(\mu\,,\,\sigma^2)$, com densidade $f(x)$ dada por (7.17), provemos que a integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Como esta integral é sempre positiva, mostremos que $I^2 = 1$. Novamente, como no Problema 32, fazemos a transformação $x = \mu + \sigma t$ e obtemos $I^2 = \frac{1}{2\pi}\iint e^{-(t^2+s^2)/2} dsdt$, onde os limites de integração são $-\infty$ e ∞. Agora fazemos outra transformação, passando de coordenadas cartesianas para polares: $s = r\cos\theta$, $t = r \operatorname{sen}\theta$, de modo que $dsdt = r\,drd\theta$. Segue-se, integrando primeiro com relação a r e depois com relação a θ, que

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r drd\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [-e^{-r^2/2}]_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1.$$