

A Física do Spin - 4300227

2ª lista

1) Mostre que os autovalores de S_y são também $\pm\hbar/2$, e determine seus autovetores, $|S_y, \pm\rangle$, onde $|S_y, \pm\rangle$ representa o autovetor com auto-valor $\pm\hbar/2$.

$$(\text{Resp.: } |S_y, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |S_y, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix})$$

2) Um elétron se encontra num estado de spin dado por:

$$|\chi\rangle = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine a constante de normalização A . (Resp.: $A=1/5$)
b) Ache os valores esperados de S_x , S_y e S_z . (Resp.: $\langle S_x \rangle = 0$, $\langle S_y \rangle = -12\hbar/25$, $\langle S_z \rangle = -7\hbar/50$)
c) Qual a probabilidade de numa medida de S_y encontrarmos $\hbar/2$? (Resp.: $P_+ = 1/50$)
d) Qual a probabilidade de numa medida de S_y encontrarmos $-\hbar/2$? Verifique que a soma dessas probabilidades é 1. (Resp.: $P_- = 49/50$)
e) Qual a probabilidade de numa medida de S_z encontrarmos $\hbar/2$, e qual a probabilidade de numa medida de S_z encontrarmos $-\hbar/2$? (Resp.: $P_+ = 9/25$, $P_- = 16/25$)
f) Mostre que em termos dos autovetores de S_z , $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, $|\chi\rangle$ pode ser escrito como:

$$|\chi\rangle = a_+ |\uparrow\rangle + a_- |\downarrow\rangle,$$

onde $a_+ = \frac{3i}{5}$ e $a_- = \frac{4}{5}$. Dessa relação fica evidente que as respostas do item anterior são: $P_+ = |a_+|^2 = 9/25$ e $P_- = |a_-|^2 = 16/25$

- g) Mostre que $|\chi\rangle$ é autovetor de S^2 . Determine o autovalor e explique.
h) Se numa medida de S_z se obtém $\hbar/2$, em que estado o sistema se encontra logo após a medida? (Resp.: $|\uparrow\rangle$)
i) Se imediatamente após essa medida de S_z se mede S_y , quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades? (Resp.: $\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ com probabilidade $1/2$ para ambos)
j) Se nessa medida de S_y se obteve $\hbar/2$ e se imediatamente após essa medida se mede novamente S_z , quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades? (Resp.: $\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ com probabilidade $1/2$ para ambos)

3) Os operadores H e A , para um determinado sistema de três níveis, são representados pelas seguintes matrizes

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

onde ω e λ são números reais positivos.

- a) Mostre que esses operadores não são compatíveis.
b) Mostre que H e A são observáveis.

c) Determine os autovalores e autovetores normalizados de H : $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$.

$$(\text{Resp.: } |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \hbar\omega; \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = 2\hbar\omega; \quad |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = -\hbar\omega)$$

d) Determine os autovalores e autovetores normalizados de A : $A|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle$.

$$(\text{Resp.: } |\alpha_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = 2\lambda; \quad |\alpha_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \lambda; \quad |\alpha_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = -\lambda)$$

e) Se numa medida de H se obtem $\hbar\omega$, em que estado o sistema se encontra logo após a medida? (Resp.: $|\psi_1\rangle$)

f) Se imediatamente após essa medida de H se mede A , quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades? (Resp.: λ ou $-\lambda$ com probabilidade $1/2$ para ambos)

g) Se numa medida de A se mede 2λ e se imediatamente após essa medida se mede novamente H , quais valores podem ser obtidos e quais as probabilidades? (Resp.: sómente $-\hbar\omega$ com probabilidade 1)

4) Considere um espaço de dimensão dois, e sejam A , B dois operadores hermitianos nesse espaço. Se os autovalores e autovetores desses operadores são:

$$A|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle, \quad B|\phi_i\rangle = b_i|\phi_i\rangle, \quad i = 1, 2.$$

Na base de B temos: $|\psi_1\rangle = (3|\phi_1\rangle + 4|\phi_2\rangle)/5$, $|\psi_2\rangle = (4|\phi_1\rangle - 3|\phi_2\rangle)/5$.

a) Se numa medida de A se obtem a_1 , em que estado o sistema se encontra logo após a medida?

b) Em que estado o sistema se encontrava antes dessa medida?

c) Se imediatamente após a medida de A se mede B , quais valores podem ser obtidos e quais probabilidades?

d) Se imediatamente após a medida de B se mede novamente A , qual a probabilidade de se medir a_1 ? (Resp.: ~ 0.64) Como voce interpreta esse resultado?

e) Os operadores A , B são compatíveis?

f) Determine o valor médio de B no estado $|\psi_1\rangle$. (Resp.: $\frac{1}{25}(9b_1 + 16b_2)$)