

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE
COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**SMA 169 - Equações Diferenciais Parciais
(graduação)**

Eugenio Massa

25 de junho de 2022

Estas notas são escritas para ajudar no curso de graduação do ICMC-USP, SMA 169 - Equações Diferenciais Parciais. Elas são uma revisão e adaptação de notas anteriores ([Mas]) para o curso de EDP de doutorado.

As notas pretendem cobrir quase inteiramente a ementa do curso, mesmo que nem sempre entrarão em todos os detalhes (não dispensando então a frequência nas aulas nem o estudo individual).

No final são citadas as principais referências usadas. Note-se porém que muitas vezes a notação ou até alguns detalhes, foram trocados com respeito às referências para obter uma melhor clareza (pelo menos na minha opinião) e para ter uniformidade de notação ao longo das notas.

Agradeço se me enviarem comentários ou correções, no endereço eugenio@icmc.usp.br

Sumário

1	Equações diferenciais parciais em geral	7
1.1	Introdução	7
1.1.1	Notação de multi-índices	7
1.1.2	Definição de EDP, solução, tipo de não linearidade	8
1.1.3	O princípio de sobreposição	9
1.1.4	Tipos de problemas - boa posição	10
1.1.5	O método de separação das variáveis	10
1.1.6	Alguns exemplos interessantes	13
1.2	Problema de Cauchy	15
1.3	O Teorema de Cauchy-Kowalevski	17
1.4	Referências	18
2	Equações de Primeira Ordem	19
2.1	O método das características	21
2.1.1	O caso linear e semilinear	21
2.1.2	O caso quasilinear	24
2.1.3	O teorema de existência e unicidade	25
2.1.4	Comentários sobre o método das características	26
2.2	Eq. de transporte e conservação	27
2.2.1	Eq. de transporte	27
2.2.2	Eq. de conservação	28
2.3	Referências	29
3	Classificação de Equações (de Segunda Ordem)	31
3.1	Mudanças de variáveis	31
3.2	Equações lineares de segunda ordem em duas variáveis	32
3.2.1	Argumento via álgebra linear	35
3.3	Equações lineares de segunda ordem em n variáveis	36
3.3.1	O caso a coeficientes variáveis	38
3.4	Classificação para equações não lineares	39
3.5	Equações lineares de segunda ordem em duas variáveis	40
3.5.1	O caso hiperbólico $\Delta > 0$	42
3.5.2	O caso parabólico $\Delta = 0$	43

3.5.3	O caso elíptico $\Delta < 0$	44
3.5.4	Alguns exemplos	44
3.6	Propagação de singularidades em problemas hiperbólicos.	45
3.7	Referências	48
4	Modelagem de alguns problemas físicos	49
4.1	Algumas ferramentas e fórmulas	49
4.2	Equação da onda	50
4.2.1	Tipos de problemas - onda	50
4.2.2	Modelagem - onda	51
4.3	Equação do Calor	53
4.3.1	Tipos de problemas - calor	53
4.3.2	Modelagem - calor/difusão	54
4.4	Equações com o Laplaciano	55
4.4.1	Tipos de problemas - Laplaciano	56
4.5	Alguns outros modelos	57
5	Ondas e difusão	59
5.1	Energias	60
5.1.1	Unicidade para os problemas mistos	61
5.1.2	Unicidade para a onda em \mathbb{R}^n	62
5.2	Solução IVP em uma dimensão	64
5.2.1	A equação da onda em uma dimensão	64
5.2.2	A equação do calor homogênea em uma dimensão	67
5.2.3	O caso não homogêneo	71
5.2.4	Comparação Onda Calor em \mathbb{R}	72
5.3	Método de reflexão, problemas em semirretas e em segmentos	73
5.3.1	Problemas em semirretas	73
5.3.2	Problemas em segmentos	75
5.3.3	Casos não homogêneos	76
5.3.4	Casos com condição de borda não homogênea	76
5.4	Princípio do Máximo para o calor	77
5.5	Problemas mistos via separação de variáveis	79
5.5.1	Aplicando séries de Fourier	81
5.6	Apêndice do Capítulo: Séries de Fourier	83
5.6.1	Limites, derivadas e integrais de séries	83
5.6.2	Séries trigonométricas	84
5.6.3	Teoria L^2	86
5.6.4	Convergência pontual e uniforme	86
5.6.5	Escritura complexa	88
5.7	Referências	88

6	O Laplaciano	89
6.1	Laplaciano em diferentes coordenadas	90
6.1.1	Equação de Laplace em coordenadas polares	92
6.1.2	Equação de Laplace no círculo	93
6.2	Princípio de máximo	95
6.3	Identidade de Lagrange Green e consequências	97
6.4	Princípio de Dirichlet	99
6.5	Propriedade do valor médio para funções harmônicas	100
6.6	Soluções fundamentais	104
6.6.1	Função de Green	107
6.6.2	Interpretação eletrostática	109
6.6.3	Solução do problema de Dirichlet num semiespaço	109
6.6.4	Solução do problema de Dirichlet numa bola	111
6.7	Solução em domínios mais gerais	112
6.7.1	Método de Perron	112
6.7.2	Métodos variacionais	113
7	Ondas e difusão em \mathbb{R}^n	115
7.1	A equação da onda em dimensão três	115
7.1.1	O caso com n ímpar maior	118
7.2	A equação da onda em dimensão dois	118
7.2.1	O caso com n par maior	120
7.3	A solução da equação não homogênea	120
7.4	Comentários sobre a solução da eq. da onda	122
7.5	A equação do calor em dimensão maior	124
7.6	Problemas mistos via separação de variáveis	125
8	Distribuições e transformada de Fourier	133
8.1	Distribuições em \mathbb{R}	133
8.2	Distribuições em \mathbb{R}^n	135
8.3	Distribuições em Ω	136
8.4	Exemplos e aplicações	136
8.4.1	Laplaciano	136
8.4.2	Calor	137
8.4.3	Onda	138
8.5	Transformada de Fourier	139
8.5.1	Definição	139
8.5.2	Algumas propriedades	140
8.5.3	Exemplos e mais propriedades:	140
8.5.4	Transformadas “generalizadas”	141
8.5.5	Transformada em \mathbb{R}^n	142
8.6	Aplicações da transformada de Fourier	142
8.6.1	Equação do calor	142

8.6.2	Equação da onda	143
8.6.3	Laplaciano	144
8.7	Referências	144
Bibliografia		145
Índice remissivo		146

Capítulo 1

Equações diferenciais parciais em geral

1.1 Introdução

1.1.1 Notação de multi-índices

Para tornar mais fácil trabalhar com muitas derivadas parciais, adotaremos a notação de multi-índices, que introduzimos nesta seção.

Um **multi-índice** será um elemento do *conjunto de multi-índices*:

$$MI_n = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Usaremos a notação e_i para denotar o multi-índice $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ com 1 na i -ésima posição.

Definimos:

- *Módulo* do multi-índice $\alpha \in MI_n$: $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
- *Fatorial* do multi-índice $\alpha \in MI_n$: $\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!$.
- *Potência* de um vetor elevado a um multi-índice:
dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in MI_n$, $x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$.
- *Operador de derivação* com multi-índice: dada $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (suficientemente regular para não importar a ordem de derivação): $\partial^\alpha u := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$, onde $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Observação 1.1. Para simplificar a notação, omitiremos o índice n e assumiremos os multi-índices em MI_n sempre que n for fixado.

Também usaremos a notação $u_x, u_{xy}, u_{x_i x_j}, \dots$ para as derivadas parciais de u com respeito às variáveis indicadas, ∇u para o vetor gradiente e ∂_{x_i} ou ∂_i para os operadores de derivação. ◁

COMPLEMENTOS.

Para $k \in \mathbb{N}$, definimos

- $A_n(k) = \{\alpha \in MI_n; |\alpha| \leq k\}$;
- $N_n(k) \in \mathbb{N}$ a cardinalidade de $A_n(k)$;
- dados $A \subseteq A_n(k)$ e a família indexada de objetos $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$, denotaremos por $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ um vetor de $\text{card}(A)$ entradas contendo os elementos do conjunto numa ordem convencional.

Observação 1.2. Para simplificar a notação, omitiremos o índice n e assumiremos os multi-índices em MI_n sempre que n for fixado, assim escreveremos apenas $|\alpha| \leq k$ em vez que $\alpha \in A_n(k)$.

Também usaremos a notação $u_x, u_{xy}, u_{x_i x_j}, \dots$ para as derivadas parciais de u com respeito às variáveis indicadas, ∇u para o vetor gradiente e ∂_{x_i} ou ∂_i para os operadores de derivação. \triangleleft

A seguir lembramos algumas fórmulas em notação de multi-índice, que serão usadas no texto (verifique-as!).

Polinômio de Leibnitz:

$$\text{para } x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)^k = \sum_{\substack{\alpha \in MI_n \\ |\alpha|=k}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha. \quad (1.1)$$

Série de Taylor de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em vizinhança de x_0 :

$$S_{x_0}(x) = \sum_{\alpha \in MI_n} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

1.1.2 Definição de equação diferencial parcial e de solução, tipo de não linearidade

Definição 1.3. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, uma **equação diferencial parcial de ordem k** é uma equação da forma

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0, \quad (1.2)$$

onde $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}$ sendo D_F um aberto em $\Omega \times \mathbb{R}^m$, sendo m o número de $\alpha \in MI_n$ com $|\alpha| \leq k$.

Definição 1.4. Uma função $u : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ (sendo $\Omega' \subseteq \Omega$) é uma **solução clássica** de (1.2), quando

- as $\partial^\alpha u$ existem para todo α de módulo até k ; (às vezes pediremos também $u \in \mathcal{C}^k(\Omega')$),
- a equação (1.2) está bem definida e satisfeita em Ω' , isto é,

$$F(x, (\partial^\alpha u(x))_{|\alpha| \leq k}) = 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega'.$$

Além da ordem, uma classificação importante para distinguir as propriedades das equações é a baseada no **tipo de não linearidade**: a equação (1.2) é dita:

- **linear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x),$$

onde a_α e f podem depender de $x \in \Omega$ apenas;

- **linear a coeficientes constantes**, se é linear e os a_α não dependem de x ;
- **semilinear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u + G(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}) = 0 :$$

isto é, é linear pelo menos nos termos de grau máximo;

- **quasilinear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}) \partial^\alpha u + H(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}) = 0 :$$

isto é, os coeficientes a_α com $|\alpha| = k$ dependem de $x \in \Omega$ e de $(\partial^\beta u)_{|\beta|<k}$, mas não de $(\partial^\beta u)_{|\beta|=k}$;

- **totalmente não-linear**, quando nenhum dos casos anteriores ocorre.

Exemplo 1.5. Os exemplos a seguir mostram equações dos vários tipos, incluindo algumas das equações mais importantes que estudaremos.

- 1) $\sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_i u = 0$: linear de primeira ordem.
- 2) $\Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u = 0$ (**equação de Laplace**), $\partial_t^2 u - c^2 \Delta_x u = 0$ (**equação da onda**), $\partial_t u - k \Delta_x u = 0$ (**equação do calor**): lineares a coeficientes constantes de segunda ordem.
- 3) $\sum_{i=1}^n x_i \partial_i \partial_{(n+1-i)} u = \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2$: semilinear de segunda ordem.
- 4) $u_y^2 u_{xx} = x + u^2 + \sqrt{u_y}$: quasilinear de segunda ordem.
- 5) $u_{yy}(u_x + u_{yy}) = u$: totalmente não-linear de segunda ordem.
- 6) $u_t + a(x) \cdot \nabla_x u = f(x)$: equação de **transporte linear** com fonte: primeira ordem linear.
- 7) $u_t + a(x, u) \cdot \nabla_x u = 0$: equação de **transporte quasilinear**: primeira ordem quasilinear.
- 8) $|\nabla u| = 1$: equação da **ótica geométrica**: primeira ordem totalmente não linear.

★

1.1.3 O princípio de sobreposição

Uma característica fundamental das equações lineares é o seguinte **princípio de sobreposição**. Seja

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \partial^\alpha u = 0$$

uma equação linear homogênea:

- se v, w são soluções da equação linear homogênea $\mathcal{L}u = 0$ então $av + bw$ também é, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
- se v é solução de uma equação linear homogênea $\mathcal{L}u = 0$ e w é solução de $\mathcal{L}u = f(\mathbf{x})$; então $v + w$ também é solução de $\mathcal{L}u = f(\mathbf{x})$,
- se v é solução $\mathcal{L}u = f(\mathbf{x})$, e w é solução de $\mathcal{L}u = g(\mathbf{x})$, então $av + bw$ é solução de $\mathcal{L}u = af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})$.

Observação 1.6. Lembre e compare com o análogo princípio em EDOs e em Álgebra Linear. \triangleleft

1.1.4 Tipos de problemas - boa posição

Em geral não consideraremos apenas o problema de encontrar soluções da equação, mas o de encontrar as soluções que satisfaçam também um oportuno conjunto de condições adicionais (exatamente como é feito com as EDOs, quando procuramos a solução de um certo problema de Cauchy).

Estaremos interessados em estudar o tipo de condições necessárias para obtermos existência, unicidade e dependência contínua dos dados (definição de **problema bem posto segundo Hadamard**). Também, quando possível, procuraremos estudar as propriedades qualitativas das soluções (já que em geral não será possível calculá-las explicitamente).

Veremos que de alguma maneira (mas com certos cuidados e nem para todo tipo de EDP) as soluções de uma equação diferencial parcial de ordem k em \mathbb{R}^n dependem de k funções arbitrárias em $n - 1$ variáveis (no caso de EDOs isso significa k constantes arbitrárias).

Veremos porém que as condições “boas” não serão sempre as mesmas, e dependerão do tipo de equação.

Frequentemente as condições com boas propriedades matemáticas serão também as que têm um significado físico no problema real modelado, e vice-versa. Por isso será sempre importante não perder de vista os problemas físicos correspondentes.

De fato, a motivação para procurar problemas bem postos no sentido definido acima é também relacionada com a física. Se imaginamos de querer prever ou calcular a solução de um problema real precisamos primeiro saber que ela existe, mas também que temos os dados suficientes para identificar ela (isto é que estes dados nos deem uma única solução). Enfim, como os dados reais nunca são conhecidos com precisão, precisamos saber que um pequeno erro nos dados produzirá um pequeno erro no cálculo da solução (dependência contínua dos dados), ou a solução calculada, apesar de existente, única e correta, não terá nenhum interesse prático.

1.1.5 O método de separação das variáveis

O método de separação das variáveis em EDP só tem o mesmo nome do método das EDO, mas está baseado em um raciocínio diferente, descrito a seguir:

- 1) fazemos o chute que a solução tenha uma forma *a variáveis separadas*, por exemplo $u(x, y) = X(x)Y(y)$: o produto de uma função so da x com uma só da y (às vezes o chute será diferente, por exemplo $u(x, y) = X(x) + Y(y)$);
- 2) substituímos o chute na equação;
- 3) manipulamos a equação até chegar numa igualdade do tipo

$$F(D^i X(x)|_{i \leq k}) = G(D^i Y(y)|_{i \leq k}) :$$

isso implica que os dois lados da igualdade devem ser constantes (um não depende de x e outro não depende de y), obtemos então duas EDOs: $F = \lambda$ e $G\lambda$, que resolveremos com métodos de EDOs.

Observe que apenas estamos chutando que existam soluções na forma dada. Pode ser que o chute não seja bom e que não encontremos nada. Mesmo assim a equação poderá ter soluções de outra forma.

Se a equação for linear e homogênea, poderemos também obter mais soluções sobrepondo diferentes soluções a variáveis separadas (veremos isso na Seção 5.5).

Vamos ver o método aplicado no exercício a seguir.

Exercício 1.7.

Seja $f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)$. Use separação de variáveis para resolver os seguintes problemas para o Laplaciano, a Equação da Onda e a Equação do Calor:

$$(L) \begin{cases} u_{yy} + u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x, 0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (O) \begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x, 0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} u_y - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solução:

Começamos pela equação (L). Substituindo o chute $u(x, y) = X(x)Y(y)$ na equação obtemos

$$X(x)Y''(y) + X''(x)Y(y) = 0.$$

Supondo $X \neq 0$ e $Y \neq 0$ ¹ podemos dividir e rearrumar, obtendo

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} := \lambda \tag{1.3}$$

onde chamamos de λ o valor constante de ambos os lados.

¹A posteriori poderemos verificar que as soluções obtidas satisfazem a equação mesmo quando se anulam.

Considerando as condições adicionais temos também que

$$X(x)Y(0) = 0, \quad X(x)Y'(0) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx);$$

deduzimos que $X(x) \neq 0$, logo $Y(0) = 0$; além disso, podemos impor $Y'(0) = 1$ e teremos $X(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)$.

Como X deve satisfazer

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

deduzimos que $\lambda = n^2$.

Para a incógnita $Y(y)$ temos então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} Y'' = n^2 Y, \\ Y(0) = 0, \\ Y'(0) = 1, \end{cases}$$

cuja solução é $Y(y) = \frac{1}{n} \sinh(ny)$. Concluimos

$$u(x, y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sin(nx) \sinh(ny).$$

Podemos repetir o raciocínio para (O), sendo que teremos, no lugar de (1.3), a seguinte

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} := \lambda; \quad (1.4)$$

obteremos no final $Y(y) = \frac{1}{n} \sin(ny)$, concluindo

$$u(x, y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sin(nx) \sin(ny).$$

Enfim, para o caso de (C), temos

$$-\frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} := \lambda \quad (1.5)$$

e desta vez podemos por $Y(0) = 1$ chegando ao problema de Cauchy (de primeira ordem)

$$\begin{cases} Y' = -n^2 Y, \\ Y(0) = 1, \end{cases}$$

cuja solução é $Y(y) = e^{-n^2 y}$. Concluimos

$$u(x, y) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx) e^{-n^2 y}.$$

Resumindo, as três soluções são:

$$(L) \quad u(x, y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sin(nx) \sinh(ny)$$

$$(O) \quad u(x, y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sin(nx) \sin(ny)$$

$$(C) \quad u(x, y) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx) e^{-n^2 y}$$

Observe que nos três casos obtivemos a existência de uma solução. Além disso, pelos teoremas sobre EDOs, a solução é também única (mas apenas na famílias das soluções a variáveis separadas, poderiam existir mais soluções de forma diferente). Isso inclusive mostra que a escolha da condição diferente em (C) fazia sentido, de fato a EDO resultante para Y era de ordem um e só admitiria uma condição inicial.

Quanto à dependência contínua dos dados, a questão é mais complexa.

Observe que quando $n \rightarrow \infty$, o dado e todas suas derivadas tendem uniformemente a zero ($|e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)| \leq e^{-\sqrt{n}}$ e $e^{-\sqrt{n}} n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$).

No caso (O), a solução também tende uniformemente a zero com todas suas derivadas.

No caso (C), o mesmo acontece se consideramos $y > 0$, enquanto a solução explode para $y < 0$, pois para um $y < 0$ fixado $e^{-n^2 y - \sqrt{n}} n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

No caso (L), a solução explode para todo $y \neq 0$ (lembre que $2\sinh(t) \simeq \pm e^{|t|}$ para $t \rightarrow \pm\infty$).

Esta observação mostra que o problema apresentado não é bem posto para o Laplaciano nem para o calor com $y < 0$, enquanto poderia ser bem posto para a onda e para o calor com $y > 0^2$.

Fisicamente isso significa que nos problemas representados pelo Laplaciano não faz sentido impor valor e derivada da solução numa mesma curva. Nos problemas representados pela equação da onda, por outro lado, é lógico impor a posição e a velocidade a um instante fixado (em (O) e (C) a variável y tem significado de tempo) e é possível calcular a solução tanto no passado quanto no futuro. No caso do calor o certo é impor o valor (temperatura) apenas, em um certo instante, mas será possível apenas prever o futuro e não o passado. ★

1.1.6 Alguns exemplos interessantes

Exemplo 1.8.

$$1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2$$

A solução geral é $u(x, y) = f(y)$. Isso pode ser visto integrando em segmentos horizontais:

$$\int_{x_0}^x u_x(\xi, y) d\xi = 0$$

logo $u(x, y) = u(x_0, y)$.³

²Lembre porém que apenas consideramos aqui soluções a variáveis separadas... poderiam ainda existir soluções de forma diferente que explodem... o que de fato acontece no caso (C).

³Pensando em primitivas se $u_x = 0$ então u é constante com respeito a x , o que significa que a constante pode variar com y .

Note que se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, então $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, mas a equação faz sentido e está satisfeita mesmo se f for menos regular.

Consideremos as seguintes condições:

- $u(0, y) = \varphi(y).$

a solução (única) é $u(x, y) = \varphi(y).$

Observe que ao longo do eixo y (onde é posta a condição) u e $u_y = \varphi'(y)$ podem ser determinados pela condição e u_x pela equação.

- $u(x, 0) = \psi(x).$

a condição $u(x, 0) = \psi(x)$ é compatível com a equação apenas se $\psi(x) = c$ constante. Neste caso $u(x, y) = f(y)$ desde que $f(0) = c$. Portanto, pode ter nenhuma ou infinitas soluções, ou seja, o problema é mal posto.

Note que ao longo do eixo x (onde é posta a condição) $u = \psi$ e $u_x = \psi'$ são sobredeterminados, enquanto u_y é indeterminado.

2) $\partial_{xy}^2 u = 0$, com $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2).$

A solução geral é $u(x, y) = f(x) + g(y)$, de fato

$$u_x(x, y) = C(x) + \int_{y_0}^y u_{xy}(x, t) dt = C(x)$$

$$u(x, y) = D(y) + \int_{x_0}^x u_x(t, y) dt = D(y) + \int_{x_0}^x C(t) dt.$$

Consideremos as seguintes condições iniciais:

- $u(0, y) = \varphi(y)$ e $u_x(0, y) = \psi(y).$

Como $u_{xy} = 0$, então a solução só existe se $\psi(y) = c$ constante. Se for assim, o problema tem infinitas soluções da forma $u(x, y) = \varphi(y) + f(x)$, onde $f'(0) = c$ e $f(0) = 0$.

Observe que u , u_x , u_y , u_{xy} e u_{yy} podem ser determinados sobre o eixo y pelas condições, mas u_{xx} é indeterminado e u_{xy} é imposto também pela equação;

- neste exemplo não adianta trocar x e y : o caso $u(x, 0) = \varphi(x)$ e $u_y(x, 0) = \psi(x)$ é análogo ao anterior;

- $u(x, x) = \varphi(x)$ e $u_x(x, x) = \psi(x).$

Como a solução geral é $u(x, y) = f(x) + g(y)$, então $u(x, x) = f(x) + g(x) = \varphi(x)$ e $u_x(x, x) = f'(x) = \psi(x)$. Assim, $f(x) = C + \Psi(x)$ (onde $\Psi(x) = \int_0^x \psi(t) dt$) e $g(x) = \varphi(x) - (C + \Psi(x))$, ou seja, $u(x, y) = \Psi(x) - \Psi(y) + \varphi(y)$: existe uma única solução.

Note que neste exemplo, sobre a reta (x, x) , podemos calcular as quantidades u , u_x e u_y , e duas relações entre u_{xx} , u_{xy} e u_{yy} pelas condições, assim a equação fecha o problema e permite determinar as seis quantidades.



Observação 1.9. Repare como nos exemplos anteriores os dados consistiam em uma ou duas funções de uma variável. Como eram problemas de primeiro ou segunda ordem em \mathbb{R}^2 , isso é coerente com a afirmação da solução depender de k funções de $n - 1$ variáveis. A única exceção, na qual voltaremos, é o problema (C) do exemplo 1.7. \triangleleft

1.2 Problema de Cauchy

Definição 1.10. Dadas a equação (1.2), uma hipersuperfície S em \mathbb{R}^n de codimensão 1 e k funções $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1} : S \rightarrow \mathbb{R}$, chamamos **problema de Cauchy para a equação (1.2)** o problema de encontrar uma solução de (1.2) definida numa vizinhança V_S de S e que satisfaça

$$\partial_\nu^i u = \phi_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k-1, \quad \text{em } S$$

onde ν é o vetor normal a S .

Chamaremos de **dados de Cauchy** as funções ϕ_i e de **superfície dos dados** a superfície S .

O exemplo 1.8 visto anteriormente mostra que nem sempre temos existência e unicidade para este problema.

Para simplificar a exposição, vamos supor que S seja o hiperplano em \mathbb{R}^n dado por $S = \{x_n = 0\}$ ⁴. Teremos então um problema de Cauchy da forma

$$\begin{cases} F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0 \\ \partial_{x_n}^i u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \text{em } S \quad (i = 0, 1, \dots, k-1). \end{cases} \quad (1.6)$$

Para distinguir as componentes, escreveremos $\alpha \in MI_n$ na forma (β, j) com $\beta \in MI_{n-1}$ e $j \in \mathbb{Z}$. Note-se que se $|\alpha| \leq k$ e $\alpha \neq (0, 0, \dots, 0, k)$, então podemos calcular $\partial^\alpha(u)(x, 0)$ em S , apenas dos dados de Cauchy, de fato, $\partial^{(\beta, j)}(u)(x, 0) = \partial^\beta \varphi_j(x)$. Apenas $\partial^{(0, k)}(u)(x, 0)$, entre todas as derivadas de ordem até k , não pode ser calculada dos dados de Cauchy. Como vimos no exemplo 1.8, *uma condição natural* para que possamos esperar de resolver (1.6) é que $\partial^{(0, k)}(u)(x, 0) = \partial_{x_n}^k u$ possa ser calculada em vizinhança de S usando a equação, isto é, que ela apareça explicitamente na equação.

No caso em que S é uma hipersuperfície mais geral, os dados de Cauchy fixam em S todas as derivadas nas direções tangentes e normais, até a ordem k , exceto a ∂_ν^k . Neste caso a análoga da condição acima pode ser enunciada pedindo que a derivada normal k -ésima $\partial_\nu^k u$ possa ser calculada, usando a equação e os dados, pelo menos localmente em vizinhança de S .

⁴Na verdade podemos sempre pensar de transformar localmente uma superfície regular neste hiperplano.

Definição 1.11. Diremos que o problema de Cauchy é **não-característico** num ponto $x_0 \in S$ quando a equação, em x_0 , pode ser resolvida com respeito à derivada $\partial_\nu^k u$; será **característico** neste ponto, quando não é possível.

O problema é **não-característico** se for não-característico em todo ponto de S .

Exemplo 1.12.

1) Seja $L = \partial_1$ em \mathbb{R}^n . Então um problema de Cauchy posto sobre uma hipersuperfície S é não-característico se a normal a S possui sempre uma componente na direção x_1 , já que apenas ∂_1 é explícito na equação, enquanto $\partial_2, \dots, \partial_n$ não aparecem.

2) Seja $L = \partial_1 \partial_2$ em \mathbb{R}^2 . Como vimos no exemplo 1.8, combinando a equação com as informações dos dados podemos calcular a derivada normal, exceto se a normal é na direção dos eixos coordenados. Portanto, um problema é não-característico desde que a normal à hipersuperfície S nunca é horizontal e nem vertical.

3) Consideremos agora sempre $S = \{y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, cuja normal é o vetor e_y alinhado com o eixo y .

Como já vimos S é característica pela equação $\partial_x u = 0$, não-característica para a equação $\partial_y u = 0$, e também é característica para $\partial_{xy} u = 0$. Também é não característica para as equações $u_{xx} - u_{yy} = 0$ (onda) e $u_{xx} - u_{yy} = 0$ (Laplaciano), já que u_{yy} é explícita na equação, enquanto é característica para a equação $u_{xx} - u_y = 0$ (calor), já que u_{yy} não aparece na equação.

4) Generalizando o ponto anterior, seja $S = \{x_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, cuja normal é o vetor e_n alinhado com o eixo x_n .

Então S é característica para as equações $\partial_{x_i} u = 0$ se $i \neq n$, e para a equação do calor $u_{x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} = 0$.

Por outro lado, S é não-característica para a equação $\partial_{x_n} u = 0$, para a equação da onda $u_{x_n x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} = 0$ e também para a equação com Laplaciano $\Delta u = 0$.

★

Observação 1.13. No exemplo anterior, a caracteristicidade ou não-caracteristicidade do problema dependia apenas da relação entre a equação e a hipersuperfície S . Isso é típico dos problemas lineares. Veremos no exemplo seguinte que nos problemas não lineares também pode depender do dato imposto.

Exemplo 1.14. Consideremos os seguintes Problemas de Cauchy:

$$a) \begin{cases} uu_x + u_y = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad b) \begin{cases} uu_x + u_y = 0 \\ u(0, y) = \psi(y) \end{cases} .$$

No caso (a) a derivada normal à curva dos dados é u_y , que pode evidentemente ser explicitada da equação, logo se trata de um problema não-característico.

No caso (b) a derivada normal à curva dos dados é u_x : como a equação é quase-linear, o coeficiente de u_x depende da incógnita. Em particular o coeficiente é u , que em S assume o valor ψ . Logo o problema será não-característico desde que $\psi(x) \neq 0$ (onde $\psi(x) = 0$ a derivada u_x não pode ser obtida da equação).

★

1.3 O Teorema de Cauchy-Kowalevski

Teorema 1.15. (Cauchy-Kowalevski) *Se no Problema*

$$\begin{cases} F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0 \\ \partial_\nu^i u = \varphi_i \end{cases} \quad \text{em } S \quad (i = 0, 1, \dots, k-1), \quad (1.7)$$

os dados φ_j e a superfície S são analíticos em vizinhança de $x_0 \in S$, a função F é analítica em vizinhança destes dados e a condição de não-caracteristicidade está satisfeita em $x_0 \in S$, então existe uma vizinhança de x_0 na qual o problema possui exatamente uma solução analítica.

Observação 1.16 (Comentários sobre o Teorema 1.15).

- A prova do teorema pode ser vista em [Mas]. Depois de reduzir o problema a um sistema de primeira ordem equivalente, mostra-se como obter os coeficientes da série de potências para a solução em termos dos coeficientes das séries que definem os dados do problema. Enfim, é preciso mostrar, estimando os coeficientes, que a série da solução converge em uma pequena bola.
- O teorema 1.15 também vale para u vetorial (sistemas) ou a valores complexos.
- O teorema considera apenas uma vizinhança de um ponto x_0 , mas se as condições estiverem satisfeitas em toda S podemos facilmente estender o resultado a uma vizinhança de S , já que a solução é única em vizinhança de cada ponto e será então a mesma na intersecção de duas delas, podendo assim ser estendida à reunião de todas estas vizinhanças.
- O teorema, pelo menos no âmbito dos problemas de Cauchy analíticos e não-característicos e considerando apenas as soluções analíticas, nos mostra que para ter existência e unicidade é necessário prescrever condições sobre a solução na forma de k funções de $n - 1$ variáveis (os dados de Cauchy em S).

- O teorema tem algumas fortes limitações práticas.
 - No caso de problema analítico, nos dá existência e unicidade, mas apenas de soluções analíticas, não excluindo a existência de outras soluções menos regulares (não analíticas). Existe porém um resultado, o Teorema de Holmgren, que diz que no caso linear existe apenas a solução analítica.
 - Fornece existência, unicidade e uma fórmula para calcular a série de Taylor da solução, mas poucas informações qualitativas podem ser deduzidas da série. Por exemplo, o teorema se aplica da mesma maneira aos problemas (L) e (O) do exercício 1.7, não distinguindo o fato que o primeiro é mal posto. Além disso, o algoritmo de cálculo dos coeficientes é computacionalmente muito pesado, então pouco útil.
 - O resultado é apenas local, no sentido que temos existência numa vizinhança de S mas nenhuma informação sobre eventual existência global, ou sobre eventual perda de analiticidade longe de S .
 - Existem problemas de grande interesse físico que não são problemas de Cauchy, como por exemplo o problema de Dirichlet para o Laplaciano e o problema de valores iniciais para a equação do calor (em particular, o problema (C) do exercício 1.7 não é um problemas de Cauchy).
 - O fato de ser limitado a dados analíticos limita a importância nas aplicações do teorema, já que as funções analíticas são um conjunto muito pequeno dentro do conjunto onde faz sentido procurar soluções das EDPs, e é suficiente uma pequena perturbação para perder a analiticidade de uma função, de maneira que o estudo da dependência contínua dos dados perde de significado. Além disso, as funções analíticas têm a propriedade que a função inteira depende apenas dos valores num pequeno aberto, o que não é natural em certos fenômenos físicos nos quais as informações viajam com velocidade finita.
- O teorema é muito geral, no sentido que não faz distinções sobre a ordem ou o tipo de equação (por exemplo elipticidade, tipo de não-linearidade, etc..). Isso pode ser uma vantagem, mas também justifica as limitações que enumeramos acima: para obter resultados melhores precisaremos analisar separadamente os diferentes tipos de equações.

<

1.4 Referências

Para complementar os assuntos deste capítulo, além da referência [Str08], pode consultar [Fol95, páginas 30..54], [Joh82, Gar64] e as notas [Mas].

Capítulo 2

Equações de Primeira Ordem

Neste capítulo consideraremos equações de primeira ordem e procuraremos obter resultados mais completos com respeito aos do capítulo anterior. Em particular, procuraremos condições para garantir existência, unicidade e dependência contínua dos dados da solução de um problema de Cauchy (sem precisar analiticidade dos dados) e procuraremos uma fórmula para expressar a solução.

Vejam os exemplos simples

Exemplo 2.1. • Já vimos no exemplo 1.8 como encontrar a integral geral de $u_x = 0$ em \mathbb{R}^2 : descobrimos que a solução é constante nas retas horizontais.

Pela mesma técnica, podemos calcular a integral geral de $u_x = f(x, y)$:

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \int_{x_0}^x f(\xi, y) d\xi :$$

percebemos que agora ao longo das retas horizontais a solução pode ser calculada integrando a f .

Consideremos a equação $u_x = u$: como ainda a y não aparece na equação, podemos usar técnicas de EDOs, obtendo

$$\int_{x_0}^x \frac{u_x}{u}(\xi, y) d\xi = \int_{x_0}^x 1 d\xi$$

e logo $\ln\left(\frac{u(x, y)}{u(x_0, y)}\right) = x - x_0$, ou seja,

$$u(x, y) = u(x_0, y)e^{x-x_0} .$$

Mesmo se a equação fosse semilinear, por exemplo $u_x = u^2$, poderíamos usar o mesmo método.

- Considerando a equação $3u_x + 4u_y = 0$ temos duas opções.

- Fazendo uma oportuna mudança de variáveis que leve a direção do vetor $(3, 4)$ na direção do eixo x , obteremos a equação $u_x = 0$, que já resolvemos.
- Observando que o lado esquerdo da equação tem a forma da derivada de uma composição, podemos escrever $\gamma(t) = (x_0 + 3t, y_0 + 4t)$, obtendo

$$\frac{d}{dt}(u \circ \gamma(t)) = 3u_x(\gamma(t)) + 4u_y(\gamma(t)) = 0;$$

interpretamos que a solução u será constante ao longo das retas paralelas ao vetor $(3, 4)$.

Se por exemplo queremos resolver o problema com a condição $u(x, 0) = \phi(x)$, precisaremos escolher x_0, y_0 na forma $(x_0, 0)$ e obteremos

$u(x_0 + 3t, 0 + 4t) = \phi(x_0)$, e pondo $x = x_0 + 3t$, $y = 4t$ chegaremos a

$$u(x, y) = \phi(x - 3y/4).$$

Observe que no lugar de pôr a condição na reta de equação $y = 0$, poderíamos escolher outras curva. O único cuidado que precisa tomar é que essa curva nunca tenha o vetor $(3, 4)$ por vetor tangente (neste caso o problema seria característico neste ponto).

- Considerando a equação $u_x + xu_y = 0$ podemos, em analogia com a solução acima, pensar que a equação está dizendo que u é constante na direção do vetor $(1, x)$. A diferença é que agora este vetor depende do ponto, mas se encontrarmos uma curva $\gamma(t)$ tangente em cada ponto ao campo $(1, x)$, poderemos dizer que a solução é constante ao longo desta curva.

Como as curvas integrais deste campo são as parábolas de eq. $y = x^2/2 + c$, podemos por exemplo resolver o problema $u(0, y) = \phi(y)$ obtendo que $u(t, c + t^2/2) = \phi(c)$ e logo (verifique)

$$u(x, y) = \phi(y - x^2/2).$$

★

No exemplo acima, o que vimos é que a EDP de primeira ordem acaba se transformando em uma família de EDOs ao longo de oportunas curvas. Quais sejam estas curvas está determinado pelos coeficientes das derivadas de ordem 1, enquanto eventuais termos que dependem só do ponto ou de u apenas entrarão no problema na hora de integrar as EDOs obtidas. Veremos isso melhor em seguida, mas é por este motivo que a classificação do tipo de não-linearidade feita na seção 1.1.2 está baseada mesmo na forma dos coeficientes dos termos de grau máximo.

2.1 O método das características

2.1.1 O caso linear e semilinear

A forma mais geral para uma EDP semilinear de primeira ordem em \mathbb{R}^n é

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) \partial_{x_i} u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u); \quad (2.1)$$

pondo os coeficientes a_i num vetor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever (2.1) na forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u). \quad (2.2)$$

A equação será linear se $F(\mathbf{x}, u)$ é da forma $f(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$, mas veremos que isso influi muito pouco no que faremos, então trabalharemos diretamente no caso semilinear.

Observe que (2.2) fixa $\mathbf{a}(x) \cdot \nabla u = F$: ela *prescreve como varia u na direção \mathbf{a}* .

Consideremos o problema (de Cauchy) de determinar a solução que tenha valor prescrito numa hipersuperfície regular S dada parametricamente como $S = \{\mathbf{x} = g(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \omega\}$ onde $g : \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo $\omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u). \\ u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \text{em } S \quad (2.3)$$

Para este problema, a condição de não-caracteristicidade consistirá em pedir que o vetor \mathbf{a} em S não seja tangente à S , ou seja $\nu \cdot \mathbf{a} \neq 0$ onde ν é a normal a S (quando não for assim, a equação estará vinculando a derivada do dado e deixando livre a derivada em direção normal).

Como a equação (2.2) prescreve como varia u na direção \mathbf{a} , podemos dividir o problema em duas partes.

- Primeiro calculamos as linhas integrais do campo vetorial $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ que saem dos pontos de S , isto é, para cada $\mathbf{s} \in \omega$, resolvemos o sistema de EDOs em \mathbb{R}^n

$$\mathbf{x}'_{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\mathbf{s}}(t)), \quad \mathbf{x}_{\mathbf{s}}(0) = g(\mathbf{s}) : \quad (2.4)$$

a solução $\mathbf{x}_{\mathbf{s}}(t)$ é uma curva em forma paramétrica em \mathbb{R}^n , que sai do ponto $g(\mathbf{s})$, e cujo vetor tangente $\mathbf{x}'_{\mathbf{s}}(t)$ coincide com o campo $\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\mathbf{s}}(t))$ em todo ponto.

Chamaremos estas curvas curvas características da equação.

COMPLEMENTOS.

Observe que se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto e a função $\mathbf{a} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe \mathcal{C}^1 (e logo localmente Lipschitz), sabemos da teoria das EDOs que por todo ponto $\mathbf{x}_0 = g(\mathbf{s}) \in S$ passa uma única solução; além disso, $\mathbf{a}(\mathbf{x}_0)$ será tangente a esta curva em \mathbf{x}_0 . Se S é não-característica, então a curva obtida não será tangente a S e logo $\mathbf{x}_{\mathbf{s}}(t) \notin S$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ e algum $\varepsilon > 0$.

Além disso, a solução de (2.4) depende continuamente dos dados iniciais. Assim, se S é de classe \mathcal{C}^1 , as curvas $\{\mathbf{x}_{\mathbf{s}}(t) : \mathbf{s} \in \omega, t \in (-\varepsilon(x_0), \varepsilon(x_0))\}$ preenchem uma vizinhança de S .

- Fixado $\mathbf{x}_0 = g(\mathbf{s})$ e calculada a curva característica $\mathbf{x}_s(t)$, podemos tentar calcular a solução u ao longo dela: de fato, se u for uma solução de classe \mathcal{C}^1 de (2.2), então, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u(\mathbf{x}_s(t))] &= \nabla u(\mathbf{x}_s(t)) \cdot \mathbf{x}'_s(t) = \nabla u(\mathbf{x}_s(t)) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}_s(t)) \\ &= F(\mathbf{x}_s(t), u(\mathbf{x}_s(t))) : \end{aligned} \quad (2.5)$$

se $\mathbf{x}_s(t)$ é conhecida então esta é apenas uma simples EDO e permite calcular u conhecendo a condição inicial $u(\mathbf{x}_0)$.

Em particular, definindo $v_s(t) := u(\mathbf{x}_s(t))$ podemos calcular v_s com a EDO adicional

$$v'_s(t) = F(\mathbf{x}_s(t), v_s(t)), \quad v_s(0) = \varphi(g(\mathbf{s})). \quad (2.6)$$

Essas considerações nos levam ao chamado **método das características**, que consiste em encontrar uma vizinhança de S , de forma que possamos cobrir esta vizinhança com as curvas $\{\mathbf{x}_s(t); \mathbf{s} \in \omega\}$ e resolver (2.5) ao longo delas: dessa maneira a solução do problema de Cauchy (2.3) pode ser procurada resolvendo, para cada $\mathbf{s} \in \omega$, o **Sistema característico**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_s(t)), & \mathbf{x}_s(0) = g(\mathbf{s}), \\ \frac{d}{dt}v_s(t) = F(\mathbf{x}_s(t), v_s(t)), & v_s(0) = \varphi(g(\mathbf{s})), \end{cases} \quad (2.7)$$

obtendo a solução u ao longo das curvas características:

$$u(\mathbf{x}_s(t)) = v_s(t).$$

A solução explícita $u(\mathbf{x})$ deverá enfim ser obtida calculando \mathbf{s}, t em função de \mathbf{x} .

Observação 2.2. Observe que por enquanto apenas mostramos que dada uma solução de (2.3) de classe \mathcal{C}^1 então a função $u(x_s(t))$ satisfaz (2.5), desde que x_s satisfaça (2.4).

No teorema 2.6 veremos que de fato a solução obtida de (2.7) é realmente uma solução de (2.3). \triangleleft

Observação 2.3. Como nas EDOs, a existência da solução está garantida apenas em uma vizinhança de S . De fato, como acontece nas EDOs, uma ou mais das incógnitas pode divergir impedindo de continuar a solução além de um certo ponto.

Veremos na observação 2.7 outros motivos pelos quais a solução pode deixar de existir, que não se aplicam ao caso semilinear. \triangleleft

Observação 2.4. Destacamos que o sistema (2.7) é “triangular a blocos”, no sentido que a primeira equação (vetorial de dimensão n) pode ser resolvida independentemente da segunda, e sua solução pode depois ser substituída na segunda.

Exemplo 2.5. a)

$$\begin{cases} u_x + u_y = u \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

Neste caso podemos parametrizar a superfície como $S = \{(s, 0); s \in \mathbb{R}\}$, o vetor normal é $\nu = (0, 1)$ e $\mathbf{a}(x, y) = (1, 1)$, assim $\nu \cdot \mathbf{a} = 1$ e o problema é não-característico.

O sistema característico será

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_s(t) = 1, & x_s(0) = s, \\ \frac{d}{dt}y_s(t) = 1, & y_s(0) = 0, \\ \frac{d}{dt}v_s(t) = v_s(t), & v_s(0) = 1. \end{cases}$$

Efetuada os cálculos obteremos

$$\begin{cases} x_s(t) = t + s, \\ y_s(t) = t, \\ v_s(t) = e^t : \end{cases}$$

a candidata a ser solução será e^t ao longo de cada reta $(t + s, t)$; eliminando os parâmetros obtemos $(t = y, s = x - y)$, logo

$$u(x, y) = e^y.$$

Observamos que neste caso as *curvas características* são as retas de equação $y = x - s$, ($s \in \mathbb{R}$).

b)

$$\begin{cases} u_x + u_y = u \\ u(x, -x) = 1. \end{cases}$$

Agora podemos parametrizar a superfície como $S = \{(s, -s); s \in \mathbb{R}\}$, o vetor normal é $\nu = (1, 1)/\sqrt{2}$ e ainda o problema é não-característico.

O sistema característico mudará apenas pela condição $y_s(0) = -s$, assim obteremos

$$\begin{cases} x_s(t) = t + s, \\ y_s(t) = t - s, \\ v_s(t) = e^t : \end{cases}$$

eliminando os parâmetros obtemos $(2t = x + y, 2s = x - y)$, logo

$$u(x, y) = e^{\frac{x+y}{2}}.$$

As *curvas características* são ainda as mesmas retas (apenas muda a parametrização delas).

- c) Enfim, no caso da condição inicial ser dada por $u(x, x) = 1$, teremos um problema característico pois $\nu = (1, -1)/\sqrt{2}$ é ortogonal a \mathbf{a} ; de fato não podemos resolver o problema pois se escrevermos o sistema característico obteríamos sempre a mesma reta (a curva característica $x = y$) com valores de v contraditórios (a única curva característica que corta a reta dos dados é a própria reta).

★

2.1.2 O caso quasilinear

Consideremos agora o caso quasilinear

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \partial_{x_i} u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u); \quad (2.8)$$

pondo de novo os coeficientes a_i num vetor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ obtemos

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})). \quad (2.9)$$

Observe-se que agora a condição de não-caracteristicidade é $\mathbf{a}(\mathbf{x}, u) \cdot \nu \neq 0$: isso ainda significa que \mathbf{a} não pode ser tangente à superfície dos dados, mas conforme vimos no capítulo anterior, ela dependerá não apenas da superfície mas também do dado de Cauchy, já que \mathbf{a} depende de u .

COMPLEMENTOS.

Podemos dar uma interpretação geométrica da equação construindo o vetor $\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, F) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e pondo (2.9) na forma

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, u) \cdot (\nabla u(\mathbf{x}), -1) = 0; \quad (2.10)$$

se considerarmos a superfície em \mathbb{R}^{n+1} que representa o gráfico da solução $u(\mathbf{x})$, o vetor $(\nabla u(\mathbf{x}), -1)$ será um vetor perpendicular a este gráfico no ponto $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ (de fato, o plano π tangente em $(\mathbf{x}_0, u(\mathbf{x}_0))$ será $\nabla u(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - (\pi(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_0)) = 0$), logo a equação pode ser interpretada geometricamente dizendo que o vetor $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente ao gráfico. No caso em duas variáveis, mais fácil de visualizar, isso significa encontrar uma superfície em \mathbb{R}^3 que é sempre tangente ao campo $\tilde{\mathbf{a}}$. Um problema de Cauchy para (2.10) significará encontrar a superfície que passa por uma curva dada.

Usando esta interpretação geométrica, podemos esperar obter informações sobre as soluções estudando as linhas integrais do campo vetorial $\tilde{\mathbf{a}}(x, v)$ em \mathbb{R}^{n+1} , o que nos leva ao método descrito abaixo.

Podemos resolver o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{x}, u) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u). \\ u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \text{em } S, \quad (2.11)$$

análogo a (2.3) mas para equação quase-linear (2.8), usando o mesmo método das características descrito antes.

A diferença é que neste caso o sistema característico resulta acoplado pois \mathbf{a} depende também da solução:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_s(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_s(t), v_s(t)), & \mathbf{x}_s(0) = g(\mathbf{s}), \\ \frac{d}{dt} v_s(t) = F(\mathbf{x}_s(t), v_s(t)), & v_s(0) = \varphi(g(\mathbf{s})), \end{cases} \quad (2.12)$$

(compare com (2.7)). Por consequência, o sistema precisa ser resolvido de uma vez só, não sendo mais possível determinar \mathbf{x}_s a priori e depois calcular v_s integrando uma única EDO.

Observe que, neste caso, as curvas características não são mais uma propriedade da equação, mas podem ser diferentes para diferentes soluções da mesma equação.¹

¹Em alguns livros, para as equações de primeira ordem, é usada uma definição diferente: as linhas integrais do campo \mathbf{a} (em \mathbb{R}^n), que aqui chamamos curvas características, são ditas projeções características, enquanto são ditas “curvas características” as linhas integrais do campo $\tilde{\mathbf{a}}$ (em \mathbb{R}^{n+1}). Veja estas definições em [Mas]. A definição usada aqui é mais coerente com a noção de curvas características que é comum para equações de ordem superior.

2.1.3 O teorema de existência e unicidade

O método descrito permite demonstrar o seguinte Teorema

Teorema 2.6. *Se no problema (2.11) S é uma superfície de classe \mathcal{C}^1 , a, F, φ são funções reais de classe \mathcal{C}^1 e a condição de não-caracteristicidade está satisfeita, então existe uma vizinhança $N(S)$ tal que existe uma única solução $u \in \mathcal{C}^1(N(S))$ do problema. Além disso, a solução depende com continuidade dos dados.*

Tal solução pode ser calculada resolvendo o sistema característico na forma (2.12) e obtendo u em função de x eliminando os parâmetros.

Demonstração do teorema 2.6. A demonstração pode ser vista em [Mas].

Ela está baseada no fato que o sistema de EDOs sempre possui solução pelo menos local. Além disso, pela dependência contínua dos dados das EDOs, pode ser provado que, quando vale a condição de não caracteristicidade, o mapa $\mathbf{x}_s(t)$ define localmente uma mudança de variáveis $(\mathbf{s}, t) \rightarrow \mathbf{x}$ regular e invertível, que logo permite de obter a expressão de $u(\mathbf{x})$, daquela de $v_s(t)$.

Enfim, como temos uma fórmula de resolução (o sistema característico) e como sabemos que as soluções deste sistema dependem com continuidade dos dados, podemos concluir **dependência contínua dos dados** também para (2.11). \square

Observação 2.7. Como descrito, a condição de não-caracteristicidade é usada para garantir a invertibilidade do mapa M que leva os parâmetros (\mathbf{s}, t) no ponto \mathbf{x} : isso significa que as curvas características definem um novo sistema de coordenadas, em particular, significa que estas curvas não se entrecruzam nem deixam buracos numa vizinhança de S .

Não podemos garantir porém que o mapa M seja invertível globalmente, isto é, as curvas características poderiam, a uma certa distância de S , começar a cruzar², e a solução obtida pelo sistema característico parar de fazer sentido: de fato, se duas características cruzam significa que a solução num ponto deveria assumir, em geral, dois valores diferentes: um calculado ao longo de uma característica e o outro pela outra. Também uma característica poderia voltar a cruzar a superfície depois de se afastar dela. \triangleleft

Exemplo 2.8. a) Considere o problema

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1 \\ u(s, s) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Então $\mathbf{a} = (u, 1) = (0, 1)$ e o problema é sempre não-característico ($\nu = (1, -1)$). Parametrizando $S = \{(s, s); s \in \mathbb{R}\}$ o sistema característico resulta

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_s = v_s, & x_s(0) = s, \\ \frac{d}{dt}y_s = 1, & y_s(0) = s, \\ \frac{d}{dt}v_s = 1, & v_s(0) = 0. \end{cases}$$

²Cuidado, as linhas integrais do sistema completo não podem cruzar-se pelos teoremas de EDOs, mas as \mathbf{x}_s são apenas suas projeções no espaço das primeira n incógnitas, logo poderiam cruzar-se.

Logo obtemos

$$\begin{cases} \Rightarrow & x_s(t) = \frac{t^2}{2} + s; \\ y_s(t) = t + s; \\ v_s(t) = t. \end{cases}$$

Eliminando os parâmetros ($x - y = t^2/2 - t \rightarrow t = 1 \pm \sqrt{1 + 2x - 2y}$, mas como $x = y \Rightarrow t = 0$ é apenas $t = 1 - \sqrt{1 + 2x - 2y}$) obtemos nossa solução

$$u(x, y) = 1 - \sqrt{1 + 2x - 2y}. \quad (2.14)$$

Observe que as curvas características (fazer o desenho) são parábolas de equação $x - s = (y - s)^2/2$, $s \in \mathbb{R}$: elas não cruzam para valores pequenos do parâmetro t (perto da reta $y = x$), mas são todas tangentes à reta $y = x + 1/2$ para o valor do parâmetro $t = 1$: a partir deste ponto a solução construída via características para de fazer sentido (vemos em (2.14) que u não é derivável sobre esta reta e não faz mais sentido acima dela).

b) Se considerarmos a condição $u(s, s) = 1$ o problema (2.13) tornar-se-ia característico pois $\mathbf{a} = (u, 1) = (1, 1) \perp \nu$. De fato, resolvendo o sistema característico, obtêm-se as curvas características $x - s = (y - s)^2/2 + y - s$, $s \in \mathbb{R}$, que são todas tangentes à reta $y = x$ e estão no semiplano $y \leq x$, logo não preenchem uma vizinhança da reta, e se cruzam entre elas em qualquer vizinhança (fazer o desenho).

Observe-se que no caso (a) temos ainda existência de uma solução numa oportuna vizinhança de S , como garantido pelo teorema 2.6, mas a solução pode ser estendida apenas até a reta $y = x + 1/2$ (exclusive), pois depois de tanger esta reta as curvas características voltam atrás e começam a cruzar outras.

Observe-se também que, as curvas características obtidas no caso (a) e no caso (b) não são as mesmas, pois o problema é quasilinear. ★

2.1.4 Comentários sobre o método das características

Observação 2.9. • Com respeito ao teorema de Cauchy-Kowalevski, que nos fornece existência e unicidade quando tudo é analítico, o teorema 2.6 precisa de uma regularidade bem menor (\mathcal{C}^1 apenas) e fornecem muita mais informação sobre a solução: em particular uma fórmula quase explícita (é suficiente saber integrar um sistema de EDOs, o que inclusive pode ser feito numericamente de maneira aproximada) e dependência contínua dos dados.

- O resultado do teorema é apenas local: fornece solução perto de S mas não diz até onde a sol pode ser estendida; vimos de fato no exemplo 2.8 que a uma certa distância de S as curvas características começavam a cruzar-se, implicando que o mapa $(s, t) \mapsto x$ não é mais injetora. Além desta possibilidade pode acontecer, como nas EDOs, que a solução divirja a infinito a uma certa distância de S (veja por exemplo o caso da equação $u_x = u^2$).

- Mais uma vez o teorema 2.6 mostra que, sob oportunas hipóteses, para ter existência e unicidade precisa por uma condição na forma de uma (isto é, $k = 1$) função de $n - 1$ variáveis.
- O sistema característico também mostra claramente como os dados influenciam a solução: uma vez calculada a solução podemos desenhar as curvas características: o valor de φ num ponto $x_0 \in S$ afeta apenas os pontos ao longo da curva que passa por x_0 ; reciprocamente, o valor de u num ponto x depende apenas de φ calculado no ponto x_0 de S que está na mesma curva característica de x .

Podemos então definir:

- Dada uma porção $\Sigma \subseteq S$, chamaremos **região de influência** de Σ a região em Ω na qual a solução depende dos dados em Σ .
- Dada uma porção $\Theta \subseteq \Omega$, chamaremos **domínio de dependência** de Θ a porção de S da qual depende a solução em Θ .

Logo para as equações de primeira ordem, a região de influência de Σ será a reunião de todas as curvas características que passam por Σ , enquanto a o domínio de dependência de Θ será a porção de Σ cruzada pelas curvas características que passam por Θ .

Observe que ambas as noções dependem apenas da equação só no caso semilinear (quando as curvas características podem ser calculadas a priori): no caso geral elas dependerão também da solução considerada, podendo ser diferentes em correspondência de outra solução.

2.2 Eq. de transporte e conservação

2.2.1 Eq. de transporte

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (2.15)$$

a solução é $u(x, t) = f(x - ct)$:

f está sendo transportado com velocidade uniforme c .

No problema

$$\begin{cases} u_t + c(x, t)u_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x); \end{cases} \quad (2.16)$$

podemos obter as curvas características e descobrimos que agora

f é transportado com velocidade variável, ao longo das características.

Observe que por causa da variabilidade da velocidade a solução $u(x, t)$ a um instante fixado t não é mais apenas uma translação de f , mas o sinal inicial será também deformado.

Os dois problemas acima modelam **problemas de transporte**: a quantidade u é transportada inalterada por um meio cuja velocidade é $c(x, t)$: por exemplo, u poderia representar a temperatura em um rio que escorre com velocidade $c(x, t)$.

De fato, calculando as trajetórias das partículas do meio, soluções do problema de EDO $x'(t) = c(x(t), t)$, $x(0) = x_0$, podemos impor que $u(x(t)) = \text{const}$, logo $[u(x(t))]' = u_x x' + u_t = u_x c + u_t = 0$.

Observação 2.10. Observe-se que, como já vimos acontecer no exemplo 1.8-1), com esta interpretação do problema físico associado à equação, faria sentido inclusive considerar uma condição inicial irregular, por exemplo uma distribuição de temperatura descontínua: a resolução do sistema característico mostraria que a descontinuidade é transportada ao longo da curva característica correspondente. Obviamente neste caso a EDP não seria satisfeita ao longo da descontinuidade. \triangleleft

2.2.2 Eq. de conservação

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + (c(x, t)u)_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x); \end{cases} \quad (2.17)$$

Observe que podemos reescrever a equação como

$$u_t + c(x, t)u_x = -c_x(x, t)u; \quad (2.18)$$

neste caso ao longo das característica u não é mais constante.

Este problema modela um **problema de conservação**: a incógnita u representa a concentração (linear) de uma substância física conservada, que é transportada por um meio cuja velocidade é c . Desta forma a equação (2.18) mostra que

a substância é diluída ou concentrada durante o transporte, conforme as características se afastam ($u_x > 0$) ou se juntam ($u_x < 0$).

O modelo pode ser obtido pelo seguinte raciocínio. Fixado um intervalo $[a, b]$, a quantidade de substância em $[a, b]$ é $Q(t) = \int_a^b u(x, t) dx$, por ser conservada, $Q(t)$ só pode variar por estar saindo ou entrando substância dos extremos do intervalo, isto é,

$$Q'(t) = (uc)(a, t) - (uc)(b, t),$$

já que o fluxo de substância que passa por um ponto será a concentração multiplicada pela velocidade.

Se todas as funções envolvidas são regulares, trocando derivada por integral e usando o T. Fund. do Calculo obtemos

$$\int_a^b u_t dx = - \int_a^b (uc)_x dx$$

e valendo isso para todo intervalo $[a, b]$ concluímos que $u_t + (uc)_x = 0$.

Observação 2.11. Neste modelo, podemos inclusive pensar que a velocidade c de transporte dependa de u ; o resultado será então uma equação quase-linear. Por exemplo, a escolha $c = u/2$ leva à **equação de Burger**

$$u_t + (u^2/2)_x = u_t + uu_x = 0.$$

◁

Observação 2.12. No caso com mais variáveis espaciais, indicando com t o tempo e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o ponto no espaço, as eq. desta seção tornam-se

- $u_t + \mathbf{c} \cdot \nabla_x u = 0$: transporte com velocidade (vetorial) constante \mathbf{c} ;
- $u_t + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_x u = 0$: transporte com velocidade (vetorial) $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$;
- $u_t + \text{div}_x(\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)u) = u_t + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_x u + u \text{div}_x \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) = 0$: conservação com velocidade (vetorial) $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$: podemos ver aqui que o que faz a substância diluir ou concentrar é o divergente do campo \mathbf{c} .

◁

2.3 Referências

Para complementar os assuntos deste capítulo, além da referência [Str08], pode consultar [Fol95, páginas 34..39], [Joh82, Gar64, Eva98] e as notas [Mas].

Capítulo 3

Classificação de Equações (de Segunda Ordem)

Como comentamos no final do capítulo 1, precisamos distinguir os diferentes tipos de equações para poder adaptar a técnica de resolução.

3.1 Mudanças de variáveis

Consideremos uma mudança de variáveis $\mathbf{w} = G(\mathbf{x})$, onde

$$G : \Omega(\subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega'(\subseteq \mathbb{R}^n) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} = G(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

é suficientemente regular, bijetora e satisfaz $\det J_G \neq 0$ em Ω , sendo J_G a matriz Jacobiana

$$J_G = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Indicaremos os operadores de derivação com respeito aos dois vetores de variáveis por

$$\partial_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} := [\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}] \text{ e } \partial_{\mathbf{w}} = [\partial_{w_1}, \dots, \partial_{w_n}].$$

Dada uma função $u(\mathbf{x})$, definamos

$$v(\mathbf{w}) := u(G^{-1}(\mathbf{w})); \quad u(\mathbf{x}) = v(G(\mathbf{x})) :$$

pela regra da cadeia em notação matricial, temos

$$J_u(\mathbf{x}) = J_{v \circ G}(\mathbf{x}) = J_v(G(\mathbf{x})) J_G(\mathbf{x}),$$

logo $\nabla u(\mathbf{x}) = \nabla v(\mathbf{w}) J_G(\mathbf{x})$ e assim

$$\partial_{\mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{w}} J_G; \quad \partial_{\mathbf{w}} = \partial_{\mathbf{x}} J_G^{-1}. \quad (3.2)$$

No caso de mudanças lineares, podemos escrever $G(\mathbf{x}) = J\mathbf{x}$ onde J (invertível) é a matriz da transformação e é também o Jacobiano em todos os pontos.

Observe que podemos também obter (3.2) pela fórmula escrita por componentes

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^n J_{i,j} \partial_{w_i} .$$

Exemplo 3.1. Uma rotação em \mathbb{R}^2 é uma mudança de variáveis linear dada por

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

Usando o visto nesta seção (em particular a equação (3.2)), obtemos

$$[\partial_x, \partial_y] = [\partial_\xi, \partial_\eta] \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = [\cos \theta \partial_\xi + \sin \theta \partial_\eta, -\sin \theta \partial_\xi + \cos \theta \partial_\eta] .$$

Vejam como o Laplaciano transforma baixo esta iteração (aqui abreviamo $C = \cos \theta$, $S = \sin \theta$):

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = (C\partial_\xi + S\partial_\eta)^2 + (-S\partial_\xi + C\partial_\eta)^2 = \partial_\xi^2 + \partial_\eta^2 .$$

Descobrimos que *o Laplaciano é invariante por rotações*.

Consideremos agora o operador da Onda:

$$\partial_x^2 - \partial_y^2 = (C\partial_\xi + S\partial_\eta)^2 - (-S\partial_\xi + C\partial_\eta)^2 = (C^2 - S^2)(\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2) + 4CS\partial_\xi\partial_\eta .$$

Vemos então que o operador da *Onda não é invariante por rotações*. Vemos também que *a rotação de 45° transforma $\partial_x^2 - \partial_y^2$ em $2\partial_\xi\partial_\eta$* .

Como vimos no exemplo 1.8, a integral geral de $v_{\xi\eta} = 0$ é $v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, logo deduzimos que *a integral geral de $u_{xx} - u_{yy} = 0$ é*

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

(f, g funções arbitrárias).

★

3.2 Equações lineares de ordem dois em duas variáveis (coeficientes constantes)

Considere a equação diferencial linear em duas variáveis:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g , \quad (3.3)$$

onde pelo menos os coeficientes a, b, c são constantes.

Supondo $a \neq 0$, podemos tentar “completar o quadrado”, isto é, escrever (3.3) como (apenas escrevendo os termos de ordem 2)

$$a \left[u_{xx} + 2\frac{b}{a}u_{xy} + \frac{b^2}{a^2}u_{yy} + \left(\frac{ac - b^2}{a^2} \right) u_{yy} \right] + \dots,$$

ou seja,

$$a \left[\left(\partial_x + \frac{b}{a}\partial_y \right)^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a^2} \right) \partial_y^2 \right] u + \dots$$

Percebemos que seria útil fazer uma mudança de variáveis de forma que as derivações com respeito às novas variáveis correspondam a $(\partial_x + \frac{b}{a}\partial_y)$ e a um múltiplo de ∂_y , isto é, queremos

$$[\partial\xi, \partial\eta] = [\partial_x + \frac{b}{a}\partial_y, \delta\partial_y] = [\partial_x, \partial_y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & \delta \end{bmatrix}.$$

Isto nos leva então (veja (3.2)) à mudança linear

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \frac{b}{a}\xi + \delta\eta \end{bmatrix},$$

que transforma (3.3) na equação

$$u_{\xi\xi} + \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{ac - b^2}{a^2} \right) u_{\eta\eta} + \dots$$

Observe que escolhendo oportunamente $\delta \neq 0$, podemos fixar o módulo do coeficiente de $u_{\eta\eta}$, mas não seu sinal, já que na equação aparece δ^2 .

Definição 3.2. Considerando o discriminante $\Delta = b^2 - ac$, dizemos que a equação (3.3) é:

(H) **Hiperbólica** se $\Delta = b^2 - ac > 0$: pode ser transformada em $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \dots$

(E) **Elíptica** se $\Delta = b^2 - ac < 0$: pode ser transformada em $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots$

(P) **Parabólica** se $\Delta = b^2 - ac = 0$: pode ser transformada em $u_{\xi\xi} + \dots$

Provamos então o seguinte Teorema:

Teorema 3.3. Toda equação em duas variáveis, de segunda ordem, linear a coeficientes constantes da forma (3.3) pode ser reduzida a uma onde os termos de grau dois estão numa das três **formas canônicas** da Definição 3.2, através de uma mudança de variáveis linear.

Observe que inicialmente assumimos $a \neq 0$, mas o Teorema vale até se $a = 0$: de fato, se $a = b = 0$ temos apenas a derivada u_{xy} , e sabemos que isso equivale à eq. da Onda, através de uma rotação de 45° ; no caso $a=0, c \neq 0$, a mudança que troca x e y entre si nos leva ao caso já tratado $a \neq 0$.

Veremos no Teorema 3.15 que um resultado parecido ao do Teorema 3.3 vale também com coeficientes variáveis.

Exemplo 3.4. • Consideremos a equação

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0.$$

Observemos que pondo $a = 1, b = 3, c = 9$ obtemos $b^2 - ac = 0$, logo a equação é *parabólica*.

Procedendo como acima, podemos fatorar

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = (\partial_x + 3\partial_y)^2 u = 0,$$

o que nos sugere pôr $\partial_\xi = \partial_x + 3\partial_y, \partial_\eta = \partial_y$, que corresponde (veja (3.2)) à mudança de variável $x = \xi, y = 3\xi + \eta$, que podemos facilmente inverter, obtendo $\xi = x, \eta = y - 3x$.

Nas novas variáveis a equação é apenas $v_{\xi\xi} = 0$, cuja integral geral é $v(\xi, \eta) = f(\eta) + \xi g(\eta)$ com f, g arbitrárias.

Concluimos que a integral geral da equação inicial é

$$u(x, y) = f(y - 3x) + xg(y - 3x)$$

(verifique derivando!).

• Consideremos a equação

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0.$$

Observemos que pondo $a = 1, b = 3, c = 5$ obtemos $b^2 - ac = 4$, logo a equação é *hiperbólica*.

Procedendo como acima, podemos fatorar

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = (\partial_x + 3\partial_y)^2 u - (2\partial_y)^2 u = 0,$$

o que nos sugere pôr $\partial_\xi = \partial_x + 3\partial_y, \partial_\eta = 2\partial_y$, que corresponde (veja (3.2)) à mudança de variável $x = \xi, y = 3\xi + 2\eta$, que podemos facilmente inverter, obtendo $\xi = x, \eta = (y - 3x)/2$.

Nas novas variáveis a equação é $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0$, cuja integral geral é $v(\xi, \eta) = f(\eta + \xi) + g(\eta - \xi)$ com f, g arbitrárias.

Concluimos que a integral geral da equação inicial é

$$u(x, y) = \tilde{f}(y - 5x) + \tilde{g}(y - x)$$

(verifique derivando!).

- Consideremos a equação

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0.$$

Observemos que pondo $a = 1$, $b = 3$, $c = 13$ obtemos $b^2 - ac = -4$, logo a equação é *elíptica*.

Procedendo como acima, podemos fatorar

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 13u_{yy} = (\partial_x + 3\partial_y)^2 u + (2\partial_y)^2 u = 0,$$

o que nos sugere pôr de novo $\partial_\xi = \partial_x + 3\partial_y$, $\partial_\eta = 2\partial_y$, obtendo a mesma transformação do exemplo anterior.

Nas novas variáveis a equação é $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0$. Algumas soluções fáceis desta equação são $\xi\eta$ e $\xi^2 - \eta^2$. Obtemos delas as soluções

$$u(x, y) = x(y - 3x)/2, \quad u(x, y) = (y - 3x)^2/4 - x^2$$

(verifique derivando!).

★

Observação 3.5. • Para a eq. *elíptica*, *qualquer curva é não característica*. De fato a derivada segunda nas direções dos eixos está explícita na equação, e pela invariância por rotações qualquer outra derivada segunda também pode ser obtida.

- a eq. *parabólica*, não vincula a derivada segunda na direção da nova variável que não aparece na forma canônica: logo *curvas com normal nesta direção serão características*.
- a eq. *hiperbólica*, não vincula as derivadas segundas nas direções das novas variáveis que deixam a eq na forma com apenas a derivada cruzada (veja isso no exemplo 1.8-2) : logo *curvas com normal nestas direções serão características*.

Veja mais sobre isso nas definições 3.20 e 3.23 e na observação 3.21. ◁

3.2.1 Argumento via álgebra linear

O Teorema 3.3 pode ser provado também pelo seguinte argumento de álgebra linear.

Escrevamos $a\partial_{xx} + 2b\partial_{xy} + c\partial_{yy}$ como $\partial_{\mathbf{x}}\mathcal{A} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$ onde $\partial_{\mathbf{x}} = [\partial_x, \partial_y]$ e $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Dada a mudança de variáveis linear $\mathbf{w} = (z, w) = J\mathbf{x}$, temos $\partial_{\mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{w}}J$.

Logo $\partial_{\mathbf{x}}\mathcal{A} \cdot \partial_{\mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{w}}J\mathcal{A}J^t \cdot \partial_{\mathbf{w}}$, isto é, a matriz $\tilde{\mathcal{A}}$ correspondente à \mathcal{A} nas novas variáveis é

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = J\mathcal{A}J^t.$$

Sabemos da álgebra linear que dada uma matriz 2x2 simétrica A , sempre existe uma matriz M ortonormal tal que $MAM^t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, onde λ_1, λ_2 são os autovalores de A . Logo M define uma mudança de variáveis que leva a equação numa forma sem a $u_{\xi\eta}$.

Alternativamente, renormalizando as linhas de M , podemos obter os termos diagonais sendo apenas 1, -1 ou 0. Logo M define uma mudança de variáveis que leva a equação numa das três formas canônicas da Definição 3.2.

Observe que

$$-\tilde{\Delta} = AC - B^2 = \det(\tilde{\mathcal{A}}) = \det(\mathcal{A})\det(J)^2 = (-\Delta)\det(J)^2 :$$

o sinal do determinante é invariante por mudanças de variáveis; além disso, sabemos que o sinal do determinante é positivo quando os autovalores têm o mesmo sinal (caso E), negativo quando têm sinais opostos (caso H) e zero quando um autovalor é nulo (caso P).

Observação 3.6. Os nomes dados aos três tipos de equação dizem respeito à forma quadrática associada à matriz \mathcal{A} , cujas curvas de nível definem, respectivamente, hipérbolas, elipses ou parábolas. \triangleleft

3.3 Equações lineares de segunda ordem em n variáveis

A classificação da Definição 3.2 é específica para a equação (3.3), isto é, para o caso de segunda ordem em duas variáveis. Para uma equação linear a coeficientes constantes de ordem dois em *mais de duas variáveis*, podemos fazer uma classificação usando o método da seção 3.2.1: se a parte de ordem máximo pode ser escrita como

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \partial^\alpha u, \quad (3.4)$$

podemos escrever formalmente o operador correspondente a (3.4) como $\partial_{\mathbf{x}}\mathcal{A} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$ onde agora $\partial_{\mathbf{x}} = [\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}]$ e

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2a_{2e_1} & a_{e_1+e_2} & \dots & a_{e_1+e_n} \\ a_{e_1+e_2} & 2a_{2e_2} & \dots & a_{e_2+e_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e_1+e_n} & a_{e_2+e_n} & \dots & 2a_{2e_n} \end{bmatrix}.$$

De novo, a matriz simétrica constante \mathcal{A} pode ser diagonalizada por uma matriz M ortonormal, isto é, existe uma mudança de variáveis linear tal que a nova matriz $\tilde{\mathcal{A}}$ seja diagonal, e ainda re-escalando e reordenando as variáveis podemos mudar o módulo (mas não o sinal) dos coeficientes, chegando à matriz $\tilde{\mathcal{A}}_{x_0}$ na forma a blocos

$$\tilde{\mathcal{A}}_{x_0} = \begin{bmatrix} I_{N_p} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{N_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{N_z} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde I_{N_p} , I_{N_n} e 0_{N_z} são, respectivamente, matriz identidade de dimensão o número de autovalores positivos, de dimensão o número de autovalores negativos e matriz nula de

dimensão o número de autovalores nulos. Esta matriz corresponde então às formas canônicas que podemos escrever como

$$\Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \Delta_{\mathbf{y}}u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \dots = 0, \quad (3.6)$$

onde escrevemos as variáveis separando as primeiras N_p componentes no vetor \mathbf{x} , as seguintes N_n no vetor \mathbf{y} e as últimas N_z em \mathbf{z} .

Em conclusão mostramos o seguinte resultado, que é a versão em qualquer número de variáveis do Teorema 3.3.

Teorema 3.7. *Toda equação de segunda ordem linear a coeficientes constantes pode ser reduzida à forma (3.6), onde os termos de grau dois aparecem sem derivadas cruzadas e com coeficientes 0, 1 ou -1 , através de uma mudança de variáveis linear.*

Podemos usar a forma (3.5) para catalogar as equações:

Definição 3.8. *A equação correspondente a (3.4) diz-se:*

1. **elíptica** se $\tilde{\mathcal{A}} = \pm I$ (isto é, se N_p ou N_n é n e os outros zero: os autovalores de \mathcal{A} não são nulos e têm todos o mesmo sinal); Observe que neste caso \mathcal{A} é definida positiva (ou negativa).

2. **hiperbólica** se

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} I_{N_p} & \\ & -I_{N_n} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

com $N_p, N_n > 0$, isto é, os autovalores de \mathcal{A} não são nulos mas tem sinais diferentes;

3. **parabólica** se $\det \tilde{\mathcal{A}} = 0$, isto é, existem autovalores nulos ($N_z > 0$).

Distinguiremos também os seguintes casos entre as hiperbólicas:

- **normalmente hiperbólica** se $N_p = 1$ ou $N_n = 1$, desta maneira a forma canônica será do tipo $\partial_{xx}u(x, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}}u(x, \mathbf{y}) + \dots = 0$ (equação da onda);
- **ultrahiperbólica** se $N_p, N_n > 1$: este caso é muito difícil e sobre ele existem poucos resultados, mas também não existem problemas físicos modelados por equações deste tipo.

Entre as parabólicas, se $N_z = 1$ e N_n (ou N_p) é nulo, isto é, se a forma canônica é do tipo $\Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, z) + \dots = 0$, ainda distinguimos o caso $\Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, z) + u_z + \dots = 0$, que é do tipo *da equação do calor*, e o caso onde nem u_z aparece na equação, que será então *degenerada*, no sentido que é como se a variável z fosse apenas um parâmetro. Sobre outros tipos de parabólicas (por exemplo, $u_t = u_{xy}$) quase não existem resultados nem aplicações físicas.

Definição 3.9. Chamaremos **hipersuperfície característica** (ou **curva característica** se $n = 2$, ou **superfície característica** se $n = 3$) da equação, qualquer hipersuperfície de codimensão 1 que seja característica em todo ponto.

Observação 3.10. Ainda podemos observar o seguinte:

- para a eq. **elíptica**, qualquer hipersuperfície é não característica. Isso pode ser visto pelo mesmo raciocínio feito em duas variáveis: de fato, como a matriz associada ao Laplaciano é a matriz identidade, qualquer mudança de variáveis definida por uma matriz ortonormal (rotações, reflexões...) o deixa invariado.
- para a eq. **parabólica e hiperbólica** sempre *existem hipersuperfícies características*.

No caso em duas variáveis, por cada ponto passam duas curvas características no caso hiperbólico, uma no caso parabólico e nenhuma no caso elíptico. \triangleleft

Exemplo 3.11. Seja $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_{zz} = u_x - u_y - u_z$.

A matriz correspondente é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo o polinômio característico é: $p(\lambda) = (1 - \lambda)^3 - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1)$ cujas raízes são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$. Assim a equação é de tipo parabólico e em novas variáveis poderá ser escrita na forma $u_{xx}(x, y, z) + 2u_{yy}(x, y, z) + \dots = 0$.

3.3.1 O caso a coeficientes variáveis

A classificação feita para o caso a coeficientes constantes pode ser estendida ao caso linear (ou semilinear) em que os coeficientes dos termos de ordem 2 dependem do ponto.

Neste caso consideramos em cada ponto a matriz $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ e a classificação poderá então variar de ponto a ponto. Observe porém que a transformação linear obtida apenas por a equação na forma canônica no ponto correspondente (veja mais sobre isso na observação 3.18). Mesmo assim, classificando a equação e calculando a mudança de variáveis podemos identificar eventuais direções nas quais a equação não determina a derivada segunda, permitindo individuar eventuais superfícies características. Apenas no caso em duas variáveis é possível (como veremos no Teorema 3.15) pôr a equação na forma canônica em todo um aberto, através de uma mudança de variáveis não linear.

Exemplo 3.12. Seja $yu_{xx} + u_{yy} + 2zu_{yz} = 0$.

A matriz correspondente é

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix},$$

logo o polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda - y)(1 - \lambda)\lambda - z^2(y - \lambda)$, cujas raízes são: $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4z^2}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4z^2}}{2}$. Assim temos dois casos:

Caso I. Se $yz = 0$ então $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$ e a equação é parabólica (planos $y = 0$ e $z = 0$).

Caso II. Se $y \neq 0$ e $z \neq 0$, tem-se $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$, uma vez que $\sqrt{1 + 4z^2} > 1$, assim a equação é hiperbólica.

★

3.4 Classificação para equações não lineares

No caso de equações não lineares a classificação dependerá, em geral, não apenas da equação mas também da solução considerada.

- O caso *semilinear* é análogo ao linear, já que a classificação depende apenas dos termos de grau máximo, que neste caso são lineares.
- No caso *quasilinear*, a estrutura dos termos de grau máximo é parecida ao caso linear, mas com coeficientes que dependem das derivadas de ordem menor. Por isso não é em geral possível classificar a equação a priori, mas se fixarmos uma solução, então substituindo tal solução nos coeficientes podemos considerá-los dependentes apenas do ponto e classificar a equação como no caso linear. Teremos então casos de equações que são de tipo diferente em correspondência de diferentes soluções (veja o exemplo abaixo).

Exemplo 3.13.

– A equação (quase linear)

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} + c^2u_{yy} = 0, \quad (3.8)$$

onde $c > 0$ é um parâmetro, é elíptica se $|u_x| < c$, parabólica se $|u_x| = c$ e hiperbólica se $|u_x| > c$.

Por exemplo, em correspondência da solução $u(x, y) = \lambda x$ será elíptica se $|\lambda| < c$, parabólica se $|\lambda| = c$ e hiperbólica se $|\lambda| > c$.

Esta equação é um modelo simplificado (velocidade predominantemente horizontal) para o escoamento de um fluido compressível, onde a velocidade do fluido é $V = \nabla u$ e c é a velocidade do som.

A versão mais completa dessa equação é

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (c^2 - u_y^2)u_{yy} = 0 : \quad (3.9)$$

neste caso $\Delta = c^2(|V|^2 - c^2)$.

Em ambos os casos, onde o escoamento é supersônico a equação é hiperbólica enquanto onde é subsônico ela é elíptica.

- **COMPLEMENTOS.**

No caso *totalmente não linear*, podemos classificar a equação em correspondência de uma certa solução linearizando a equação: consideremos por exemplo

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = F(x, y, v, p, q, r, s, t) = 0. \quad (3.10)$$

Seja u a solução considerada e $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ outra função incógnita: aproximamos

$$\begin{aligned} F(x, y, u + \varepsilon, (u + \varepsilon)_x, (u + \varepsilon)_y, (u + \varepsilon)_{xx}, (u + \varepsilon)_{xy}, (u + \varepsilon)_{yy}) &\simeq \\ &\simeq F + F_v\varepsilon + F_p\varepsilon_x + F_q\varepsilon_y + F_r\varepsilon_{xx} + F_s\varepsilon_{xy} + F_t\varepsilon_{yy} \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde F e suas derivadas são sempre calculadas em $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$: (3.11) é agora uma equação linear para ε : classificaremos a equação original em correspondência da sua solução u usando esta equação para ε : logo a equação será elíptica, parabólica ou hiperbólica se $F_s^2 - 4F_rF_t$ for, respectivamente, negativo, nulo ou positivo.

Exemplo 3.14. O carácter da equação $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = C$ (totalmente não-linear) depende de C : de fato, usando a notação introduzida acima, $F_s = -2s$, $F_r = t$, $F_t = r$ e logo $F_s^2 - 4F_rF_t = 4s^2 - 4tr = -4C$: é elíptica se $C > 0$, hiperbólica se $C < 0$ e parabólica se $C = 0$.

Se considerarmos a equação $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = u$ então o carácter dependeria da solução, mudando em função do sinal dela.

★

3.5 Equações em duas variáveis a coeficientes variáveis

Nesta seção vamos considerar o caso da equação de segunda ordem linear em duas variáveis, a coeficientes variáveis: considere a equação (3.3) onde agora os coeficientes a, b, c podem depender de x e y , com regularidade pelo menos \mathcal{C}^1 .

Retomando a notação da Seção 3.1 para uma mudança de variáveis $\mathbf{w} = G(\mathbf{x})$ genérica, e considerando agora a matriz dependente do ponto $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, podemos obter a matriz $\tilde{\mathcal{A}}$ correspondente à \mathcal{A} nas novas variáveis como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = J_G \mathcal{A} J_G^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 & az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y \\ az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y & aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

assim, os novos coeficientes são

$$A = az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2, \quad (3.13)$$

$$B = az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y, \quad (3.14)$$

$$C = aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2. \quad (3.15)$$

Ainda vale que

$$-\tilde{\Delta} = AC - B^2 = \det(\tilde{\mathcal{A}}) = \det(\mathcal{A})\det(J_G)^2 = (-\Delta)\det(J_G)^2 = (ac - b^2)(z_xw_y - z_yw_x)^2,$$

ou seja, *o sinal do determinante é invariante por mudanças de variáveis* (lembre que $\det(J_G) \neq 0$).

O objetivo desta seção é mostrar que

Teorema 3.15. *Se na equação (3.3), a, b, c dependem de x, y , não são todos nulos e a eq. é do mesmo tipo (H, E ou P) em todo um aberto, então pode (pelo menos localmente) ser transformada, através de uma mudança de variáveis, numa nova equação onde os termos de grau dois estão na forma correspondente.*

Observação 3.16. Se os coeficientes são contínuos é claro que se uma equação é elíptica ou hiperbólica em um ponto então o será em toda uma vizinhança dele, mas isso poderia ser falso no caso parabólico, por isso precisamos assumir explicitamente que o tipo seja constante num aberto.

Também poderia não existir uma única mudança de variáveis que sirva para um certo aberto dado, mas sempre podemos encontrar um aberto menor no qual obter a forma canônica (veja no exemplo 3.22). \triangleleft

Observação 3.17. A equação (3.12) mostra como transformam, na mudança de variáveis, os coeficientes dos termos de grau máximo da equação. As fórmulas envolvem apenas os coeficientes a, b, c da equação e as entradas de J_G , e são análogas às fórmulas obtidas quando G é linear.

Precisa destacar que os termos de grau menor transformam de uma forma mais complicada, pois surgem tanto termos envolvendo derivadas de J_G , quanto termos que envolvem os mesmos coeficientes a, b, c relativos às derivadas segundas.

Podemos ver isso no seguinte exemplo em uma variável: considere a equação $3u''(x) = 1$: se $u(x) = v(g(x))$ então $u'(x) = v'(g(x))g'(x)$ e

$$3u''(x) = 3v''(g(x))(g'(x))^2 + 3v'(g(x))g''(x) = 1 :$$

vemos que na equação para v , o coeficiente de v'' mudou apenas por ser multiplicado por $(g')^2$ no ponto correspondente, mas apareceu um novo termo contendo v' e uma derivada segunda da transformação g , mesmo que na equação original não tivesse nenhum termo de ordem 1. Obviamente, no caso em que $g = ax$ é linear apenas obtemos

$$3u''(x) = 3v''(g(x))(g'(x))^2 = 3v''(g(x))a^2 = 1 .$$

\triangleleft

Observação 3.18. O Teorema 3.15 generaliza o Teorema 3.3 para o caso de coeficientes variáveis.

Infelizmente não existe uma análoga generalização para o caso em mais de duas variáveis (Teorema 3.7), isto é, não é possível em geral obter uma mudança de variáveis que nos leve à forma (3.6) em todo um aberto quando os coeficientes são variáveis: de fato, para fazer isso precisaríamos satisfazer as $n(n-1)/2$ relações que põem a zero os coeficiente fora da diagonal da matriz $\tilde{\mathcal{A}}$ e mais outras relações de normalização, para pôr $\tilde{\mathcal{A}}$ na forma (3.5), mas temos apenas as n componentes da mudança de variável para escolher: com $n = 2$ isso será suficiente, mas para $n > 2$ não mais.

Observação 3.19. Observe que o método da álgebra linear usado anteriormente não serve a provar o Teorema 3.15, pois mesmo encontrando em cada ponto uma matriz $M(\mathbf{x})$

que diagonalize $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, nada garante que exista uma mudança de variáveis que tenha esta $M(\mathbf{x})$ por Jacobiano em cada ponto. Por isso precisaremos trabalhar de maneira diferente. \triangleleft

3.5.1 O caso hiperbólico $\Delta > 0$

Quando $\Delta > 0$ mostraremos que é sempre possível levar a equação à forma $u_{zw} + \dots = 0$, onde no lugar dos pontinhos haverá apenas termos de ordem menor que dois.

Para ter a forma procurada precisamos impor $A = C = 0$ em (3.12); podemos assumir sem perda de generalidade (pelo menos localmente) que $a \neq 0$, pois a e c podem ser trocadas trocando as variáveis entre elas e se fossem ambas nulas já teríamos terminado.

Como por hipótese $\Delta = b^2 - ac > 0$, a equação $A = 0$ fatora:

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = a(z_x - \lambda_1z_y)(z_x - \lambda_2z_y) = 0,$$

onde $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ (em geral dependendo de (x, y)).

Como a estrutura da equação $C = 0$ é idêntica, ela fatora da mesma maneira e temos então duas equações independentes para determinar z e w :

$$(z_x - \lambda_1z_y) = 0, \quad (3.16)$$

$$(w_x - \lambda_2w_y) = 0. \quad (3.17)$$

Precisamos então resolver estas duas equações de primeira ordem, o que será sempre possível impondo arbitrariamente dois problemas de Cauchy não-característicos e pelos quais $z_y \neq 0$ e $w_y \neq 0$: por exemplo impondo os dados $z(k, y) = y$ e $w(k, y) = y$ ao longo de uma reta vertical $x = k$ que corte o aberto considerado.

Pela teoria do capítulo 2, sabemos que uma solução \mathcal{C}^1 existe em vizinhança desta reta. Desta maneira obtemos, localmente, a transformação $(z, w) = G(x, y)$. Observe-se que $\frac{z_x}{z_y} = \lambda_1 \neq \lambda_2 = \frac{w_x}{w_y}$ e então a transformação obtida satisfaz $\det(J_G) \neq 0$.

Definição 3.20. *As curvas $z = \text{const}$ e $w = \text{const}$ são ditas **curvas características** da equação; as novas variáveis z e w são ditas **coordenadas características** (as que põe a equação na forma canônica).*

Observação 3.21. As curvas características são de fato características no sentido do capítulo 1, isto é, um problema de Cauchy posto ao longo de uma dessas curvas seria característico. Podemos ver isso pensando que quando estamos em coordenadas características faltam da equação tanto u_{zz} quanto u_{ww} , que são exatamente as derivadas segundas na direção perpendicular às curvas de nível de z e w . \triangleleft

Pelas contas feitas, passando às variáveis características, a equação se torna (considerando que, como visto na observação 3.17, os termos de grau menor mudam de maneira complicada, e poderiam inclusive aparecer mesmo não tendo na equação original) $Bu_{zw} + \dots = 0$, e como $B \neq 0$ (se fosse nulo teríamos $\Delta = 0$) podemos corta-lo obtendo a forma canônica de (H) $u_{zw} + \dots = 0$ (ou a equivalente $u_{zz} - u_{ww} + \dots = 0$ aplicando uma ulterior rotação de 45°).

Exemplo 3.22.

- Se a equação é $u_{xy} = 0$ obviamente já estamos em coordenadas características, de fato (3.16-3.17) seriam $z_x = 0$ e $w_y = 0$ e logo as curvas características seriam $y = \text{const}$ e $x = \text{const}$
- Se a equação é $u_{xx} - u_{yy} = 0$ então (3.16-3.17) tornam-se

$$\begin{aligned}(z_x - z_y) &= 0, \\ (w_x + w_y) &= 0,\end{aligned}$$

logo $z = x + y$ e $w = x - y$ e as curvas características serão $x = \pm y$.

- Se a equação é $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$ (hiperbólica em cada quadrante aberto de \mathbb{R}^2) então (3.16-3.17) tornam-se

$$\begin{aligned}(xz_x - yz_y) &= 0, \\ (xw_x + yw_y) &= 0.\end{aligned}$$

Neste caso não conseguiremos uma única mudança de variáveis explícita, no primeiro quadrante podemos usar os problemas de Cauchy $z(x, 1) = x$ e $w(x, 1) = x$ para obter explicitamente as coordenadas características $z = xy$ e $w = x/y$.

A curvas características serão as hipérbolas $xy = \text{const}$ e as semiretas $y/x = \text{const}$.

★

3.5.2 O caso parabólico $\Delta = 0$

Quando $\Delta = 0$ em todo um aberto, mostraremos que é sempre possível levar a equação à forma $u_{ww} + \dots = 0$, onde no lugar dos pontinhos haverá apenas termos de ordem menor.

Sem perda de generalidade, podemos de novo supor $a \neq 0$, pois $a = c = 0$ implicaria $b = 0$. Argumentando como no caso hiperbólico chegamos a fatorar a equação $A = 0$ na forma

$$a(z_x - \lambda_1 z_y)^2 = 0 :$$

isso nos permite calcular z como anteriormente resolvendo (3.16), mas com respeito ao caso hiperbólico não podemos impor $C = 0$ para determinar w pela equação $a(w_x - \lambda_1 w_y)^2 = 0$ pois assim w não resultaria independente de z .

Verifiquemos porém que qualquer escolha para w , desde que seja independente de z , leva a equação na forma canônica para (P): de fato, uma vez que $A = 0$ e $\Delta = 0$ necessariamente $B = 0$, logo obtemos a forma $Cu_{ww} + \dots = 0$, e como $C \neq 0$ (se fosse nulo a equação não seria realmente de segunda ordem) podemos corta-lo obtendo a forma canônica de (P) $u_{ww} + \dots = 0$.

No caso parabólico definimos

Definição 3.23. As curvas $z = \text{const}$ (apenas) são ditas **curvas características** da equação; de novo as novas variáveis z e w são ditas **coordenadas características**.

Observe que de fato na forma canônica u_{ww} aparece explicitamente, logo as curvas $w = \text{const}$ são não-características, enquanto u_{zz} não pode ser determinada pela equação.

Exemplo 3.24. Considere a equação $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ (parabólica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$): a equação para as características torna-se $(xz_x + yz_y)^2 = 0$, dando (para $y > 0$) $z = x/y$ (as curvas características são todas as semiretas pela origem); podemos escolher $w = x^2 + y^2$ (assim $z_x w_y - w_x z_y = 2\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) \neq 0$) obtendo a forma canônica $u_{ww} = 0$. Observe que de fato esta equação diz exatamente que a derivada segunda em direção radial é nula. ★

3.5.3 O caso elíptico $\Delta < 0$

No caso elíptico $\Delta < 0$ precisaríamos levar a equação à forma $u_{zz} + u_{ww} + \dots = 0$, onde no lugar dos pontinhos haverá apenas termos de ordem menor, isto é impor $A = C$ e $B = 0$.

Infelizmente neste caso as equações obtidas não fatoram como nos casos anteriores, de maneira que será necessário obter contemporaneamente as duas **coordenadas características** (as que põe a equação na forma canônica) através de uma equação bem mais complicada. Neste caso como já vimos não existem **curvas características**.

Na prática, no caso elíptico o problema de transformar a equação na sua forma canônica resulta tão complicada quanto o problema original, logo não é uma técnica útil.

3.5.4 Alguns exemplos

Exemplo 3.25 (Equação de Tricomi). A equação

$$u_{yy} - y u_{xx} = 0 \tag{3.18}$$

é chamada **Equação de Tricomi**, e é um modelo importante por ser o mais fácil exemplo de uma equação que muda de tipo: de fato $b^2 - ac = y$ e portanto

- para $y > 0$, tem-se $b^2 - ac > 0$ assim a equação é hiperbólica (as duas famílias de curvas características são dadas por $3x \pm 2y^{\frac{3}{2}} = \text{const}$),
- para $y < 0$, tem-se $b^2 - ac < 0$ assim a equação é elíptica,
- para $y = 0$, tem-se $b^2 - ac = 0$ assim a equação é parabólica.

A equação (3.18) pode ser posta nas respectivas formas canônicas nos casos (a) e (b), mas o caso parabólico não pode ser levado na forma canônica pois encontra-se apenas sobre a reta $y = 0$ e não num aberto. ★

3.6 Propagação de singularidades em problemas hiperbólicos.

Nesta seção procuraremos estudar se e como singularidades podem propagar na solução de uma EDP.

Definição 3.26. *Fixemos primeiro a seguinte notação: suponhamos que uma superfície γ divida o conjunto Ω em duas regiões Ω_l e Ω_r e que seja dada uma função $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que seja contínua tanto em Ω_l como em Ω_r e tal que suas restrições $z_l = z|_{\Omega_l}$ e $z_r = z|_{\Omega_r}$ sejam estendíveis por continuidade até $\overline{\Omega_l}$ e $\overline{\Omega_r}$, respectivamente (admitiremos então z_l, z_r definidas em $\overline{\Omega_l}$ e $\overline{\Omega_r}$, respectivamente).*

Dado $\mathbf{p} \in \gamma$, denotamos por $[[z]](\mathbf{p})$ o salto de z no ponto \mathbf{p} , isto é

$$[[z]](\mathbf{p}) = z_r(\mathbf{p}) - z_l(\mathbf{p}).$$

Aqui consideraremos o problema em duas variáveis: seja γ uma curva de equação $x = \xi(y)$ que divida o conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ em duas regiões Ω_l e Ω_r .

O Lema abaixo mostra de que forma podem saltar as derivadas de uma função contínua.

Lema 3.27. *Dada uma função $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que seja contínua em Ω e de classe \mathcal{C}^1 tanto em $\overline{\Omega_l}$ como em $\overline{\Omega_r}$, vale*

$$[[z_x]](\xi(y), y) \xi'(y) + [[z_y]](\xi(y), y) = [[z_x]] \xi' + [[z_y]] = 0 \quad (3.19)$$

ao longo de γ .

Demonstração. Sejam $z_{l,r} := z|_{\overline{\Omega_{l,r}}}$ as restrições de z aos dois conjuntos $\overline{\Omega_{l,r}}$. Pela continuidade de z temos $z_r(\xi(y), y) - z_l(\xi(y), y) = [[z]](\xi(y), y) = 0$; como por hipótese as duas funções são deriváveis até a curva γ , podemos derivar esta identidade obtendo

$$((z_r)_x \xi' + (z_r)_y) - ((z_l)_x \xi' + (z_l)_y) = ((z_r)_x - (z_l)_x) \xi' + ((z_r)_y - (z_l)_y) = [[z_x]] \xi' + [[z_y]] = 0.$$

Observe que (3.19) pode ser escrita como $[[\nabla z]] \cdot \tau = 0$, onde $\tau = (\xi', 1)$ é tangente a γ : apenas a componente normal a γ do gradiente pode saltar, já que a componente tangente depende de $z|_\gamma$. \square

Consideremos agora a equação linear de ordem dois

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (3.20)$$

onde os coeficientes dependem apenas de (x, y) e são contínuos.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e u_l e u_r suas restrições a Ω_l e Ω_r , respectivamente. Suponhamos que u_l e u_r sejam soluções de (3.20) e tais que suas derivadas até a ordem dois possam ser prolongadas até γ . Como u é $\mathcal{C}^1(\Omega)$ temos que $[[u]] = [[u_x]] = [[u_y]] = 0$ sobre γ .

Subtraindo a equação (3.20) calculada dos dois lados de γ obtemos (lembrando que os

coeficientes são contínuos) $a \llbracket u_{xx} \rrbracket + 2b \llbracket u_{xy} \rrbracket + c \llbracket u_{yy} \rrbracket = 0$.

Juntando esta equação às obtidas aplicando o lema 3.27 às quantidades u_x e u_y obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a \llbracket u_{xx} \rrbracket + 2b \llbracket u_{xy} \rrbracket + c \llbracket u_{yy} \rrbracket = 0 \\ \xi' \llbracket u_{xx} \rrbracket + \llbracket u_{xy} \rrbracket = 0 \\ \xi' \llbracket u_{xy} \rrbracket + \llbracket u_{yy} \rrbracket = 0 \end{cases}, \quad (3.21)$$

cujo determinante é

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \xi' & 1 & 0 \\ 0 & \xi' & 1 \end{vmatrix} = a - 2b\xi' + c(\xi')^2;$$

isso significa que u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} também serão contínuas (saltos nulos) a menos que este determinante seja zero.

Como vimos na seção 3.5, as curvas características são as curvas de nível de funções $z(x, y)$ que satisfazem $az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = 0$; se tal curva é escrita na forma $x = \xi(y)$, então vale $[z(\xi(y), y)]' = z_x\xi' + z_y = 0$, logo $\xi' = -z_y/z_x$. Substituindo isso descobrimos que a condição $a - 2b\xi' + c(\xi')^2 = 0$ equivale a pedir que γ seja uma curva característica.

Deduzimos que *pode ter um salto entre as derivadas segundas das duas soluções só se ξ' anula o determinante, isto é, se γ é curva característica.*

No caso da equação ser elíptica não poderá ter descontinuidade.

Juntando as últimas duas equações do sistema (3.21) podemos também ver que os saltos nas derivadas segundas não serão independentes mas deverão satisfazer a condição

$$\llbracket u_{yy} \rrbracket = - \llbracket u_{xy} \rrbracket \xi' = \llbracket u_{xx} \rrbracket (\xi')^2. \quad (3.22)$$

Como (3.19), esta relação simplesmente afirma o fato óbvio que só pode ter salto na derivada segunda normal a γ , pois a continuidade de u , u_x e u_y implica que também serão contínuas suas derivadas tangenciais.

Observação 3.28. Mais uma vez o que obtivemos foi que os dados (neste caso função e derivada, já que o operador é de ordem dois) ao longo de uma curva característica não são suficientes para determinar a derivada de ordem máximo na direção normal.

Observação 3.29. Observe que quanto feito até aqui não diz respeito a soluções clássicas de (3.20) em Ω , já que não estamos pedindo que as derivadas segundas de u existam ao longo de γ (apenas seus limites dos dois lados), o que obtivemos foi uma condição necessária que deve ser satisfeita quando dos dois lados da curva γ há soluções da equação, mesmo sem pedirmos nada ao longo da curva.

Repetindo as contas acima, podemos considerar o caso de uma solução (clássica) em $\mathcal{C}^2(\Omega)$ de (3.20), que seja de classe \mathcal{C}^3 em Ω_l e Ω_r e tenha salto nas derivadas terceiras ao longo de γ , supondo agora também que os coeficientes da equação sejam de classe \mathcal{C}^1 .

Derivando a equação obtemos $au_{xxx} + 2bu_{xxy} + cu_{xyy} + \dots = 0$, onde no lugar dos pontos teremos termos de grau menor, incluindo também os que saem da derivação dos coeficientes. Como as derivadas até as primeiras dos coeficientes e as até as segundas da u são contínuas,

fazendo a diferença entre os dois lados de γ obtemos $a \llbracket u_{xxx} \rrbracket + 2b \llbracket u_{xxy} \rrbracket + c \llbracket u_{xyy} \rrbracket = 0$; do lema 3.27 aplicado às derivadas segundas obtemos relações entre os saltos, chegando ao sistema

$$\begin{cases} a \llbracket u_{xxx} \rrbracket + 2b \llbracket u_{xxy} \rrbracket + c \llbracket u_{xyy} \rrbracket = 0 \\ \xi' \llbracket u_{xxx} \rrbracket + \llbracket u_{xxy} \rrbracket = 0 \\ \xi' \llbracket u_{xxy} \rrbracket + \llbracket u_{xyy} \rrbracket = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

análogo ao (3.21), mostrando que também **um salto nas derivadas terças de uma solução \mathcal{C}^2 só é possível ao longo de uma curva característica** e o salto será apenas entre as derivadas na direção normal (observe que $\llbracket u_{yyy} \rrbracket$ não aparece no sistema mas também depende dos outros saltos: $\llbracket u_{xyy} \rrbracket \xi' + \llbracket u_{yyy} \rrbracket = 0$). Em particular, **nenhum salto em nenhuma derivada é possível para uma equação elíptica**.

Generalizando podemos afirmar o seguinte:

Proposição 3.30. *Seja $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ ($k \geq 2$) uma solução de (3.20) e u_l, u_r suas restrições a Ω_l e Ω_r , respectivamente. Suponhamos que u_l e u_r sejam de classe \mathcal{C}^{k+1} e suas derivadas até a ordem $k+1$ possam ser prolongadas até γ . Suponhamos também que os coeficientes da equação sejam de classe \mathcal{C}^{k-1} .*

Então um salto na derivada $k+1$ -ésima de u só é possível ao longo de uma curva característica e o salto será apenas entre as derivadas na direção normal.

Observação 3.31. No caso de uma equação quasilinear (na qual então os coeficientes de L dependem de u e ∇u) ainda podemos pensar da seguinte maneira: uma solução da equação pode sempre ser vista como uma solução de uma equação linear $\tilde{L}u = \tilde{g}$ cujos coeficientes sejam os obtidos substituindo u e ∇u nos coeficientes de (3.20).

Logo, eventuais discontinuidades nas derivadas segundas poderão estar apenas ao longo das curvas características de \tilde{L} , isto é das curvas características de (3.20) em correspondência da solução u (observe que se os coeficientes de L são contínuos e u é \mathcal{C}^1 então os coeficientes de \tilde{L} também resultarão contínuos).

Analogamente podemos fazer com discontinuidades em derivadas de ordem maior.

Exemplo 3.32. Um exemplo simples de soluções com singularidades pode ser obtido tomando uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , tendo um salto na derivada terceira na origem (por exemplo $f(x) = |x|^3$): então $f(x+t) + f(x-t)$ é uma solução de $u_{xx} - u_{tt} = 0$, tendo singularidades (na derivada terceira) ao longo das reta características $x = \pm t$.

Tomando $g(x) = x|x|$, temos $g(x-t)$ solução clássica da eq. de primeira ordem $u_x + u_t = 0$, tendo singularidades (na derivada segunda) ao longo da reta característica $x = t$. ★

3.7 Referências

Para complementar os assuntos deste capítulo, além da referência [Str08], pode consultar [Gar64, páginas 57..90], [CH89, páginas 154..163.] e as notas [Mas].

Capítulo 4

Modelagem de alguns problemas físicos

4.1 Algumas ferramentas e fórmulas

Vemos lembrar algumas ferramentas matemáticas que precisaremos usar. Todos conhecemos o **Teorema fundamental do cálculo integral**: dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , vale

$$\int_a^b f' dx = [f]_a^b.$$

O análogo em dimensão maior é o **Teorema do divergente**:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{f}) dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{f} \cdot \nu) dS,$$

onde $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, tanto \mathbf{f} quanto Ω são pelo menos de classe \mathcal{C}^1 e ν é a normal externa a $\partial\Omega$.

Das fórmulas acima deduzimos também as fórmulas de **Integração por partes**

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg',$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{f})g dV = \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{f} \cdot \nu) dS - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla g,$$

onde $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ também é \mathcal{C}^1 ; em particular, se $f, g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe \mathcal{C}^2 ,

$$\int_a^b f''g = [f'g]_a^b - \int_a^b f'g',$$

$$\int_{\Omega} (\Delta f)g dV = \int_{\partial\Omega} g(\nabla f \cdot \nu) dS - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g.$$

Outra fórmula importante nos fornece a *derivada de uma integral em domínio variável*: no caso de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrada em uma bola de raio variável temos

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{B_{g(t)}(\mathbf{x})} f dV \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^{g(t)} d\tau \int_{\partial B_{\tau}(\mathbf{x})} f dS \right) = g'(t) \int_{\partial B_{g(t)}(\mathbf{x})} f dS, \quad (4.1)$$

onde indicamos por $B_\rho(\mathbf{x})$ a bola aberta em \mathbb{R}^n de raio ρ e centro \mathbf{x} .

4.2 Equação da onda

Já vimos a equação da onda na forma

$$\square u := u_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}}u = F(\mathbf{x}, t), \quad (\text{eq-O})$$

onde $u = u(\mathbf{x}, t)$ e \mathbf{x} é um vetor em \mathbb{R}^n : geralmente interpretamos t como o tempo e diremos então que (eq-O) é a equação da onda em dimensão (espacial) n .

Quando não especificado, assumiremos os operadores ∇ , Δ e div agindo apenas nas variáveis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

O operador $\square = \partial_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}}$ é dito **operador de D'Alembert**.

Um modelo físico que esta equação representa é o de um corpo elástico em \mathbb{R}^n que vibra: se $n = 1$ representará uma varinha, se $n = 2$ uma chapa e se $n = 3$ um sólido. Também o caso $n = 2$ pode representar ondas que propagam na superfície de um líquido e o caso $n = 3$ a vibração do ar (som) ou do campo eletromagnético (luz ou ondas eletromagnéticas).

4.2.1 Tipos de problemas - onda

Para a equação da onda, em geral considera-se um problema de Cauchy (dito neste caso de **problema de valores iniciais em \mathbb{R}^n**) da forma

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}}u = F(\mathbf{x}, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (\text{PVI-O})$$

Outro problema de interesse é o **problema misto em Ω** (de valores iniciais e de fronteira): seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto conexo limitado e regular, de borda $\partial\Omega$ e normal exterior ν : o **problema misto em Ω** é

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}}u = F(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) & \text{em } \bar{\Omega}, \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) & \text{em } \bar{\Omega}, \\ u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) & \text{em } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (P\Omega\text{-O})$$

onde a condição em $\partial\Omega$ $u = g$ (de tipo Dirichlet) pode ser substituída por outras: veja mais detalhes na seção 4.4.1 e na observação 4.10.

4.2.2 Modelagem - onda

Nesta seção veremos como a equação da onda aparece em alguns problemas físicos.

Modelo 4.1. [Vibração de uma varinha] Vejamos como chegamos a (eq-O) modelando um corpo elástico em dimensão um: considere um corpo unidimensional (por exemplo uma varinha de metal); se $u(x, t)$ representa o deslocamento (na direção do eixo do corpo) no instante t de uma partícula que a repouso estaria no ponto x , fixada uma porção $[a, b]$ do corpo,

– o *momento linear* desta porção será $\int_a^b \rho(x)u_t(x, t) dx$, onde ρ é a densidade (linear) de massa;

– se T é a *tração* que age nos extremos a e b então a força resultante será $T(b, t) - T(a, t)$;

– se F é uma *força de volume* que age sobre o corpo então a força resultante aplicada a $[a, b]$ será $\int_a^b F(x, t) dx$.

Aplicando o *teorema do momento linear* (se tudo é regular podemos ‘passar a derivada dentro da integral’), temos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x)u_t(x, t) dx = \int_a^b \rho(x)u_{tt}(x, t) dx = T(b, t) - T(a, t) + \int_a^b F(x, t) dx$$

e usando o teorema fundamental do cálculo $T(b, t) - T(a, t) = \int_a^b T_x(x, t) dx$ obtemos

$$\int_a^b [\rho u_{tt} - T_x - F] dx = 0.$$

Como isso vale para toda porção $[a, b]$ do corpo (e assumimos a integranda contínua) chegamos à equação

$$\rho u_{tt} - T_x = F, \quad \forall x, t. \quad (4.2)$$

Enfim, a lei constitutiva que liga a deformação com os esforços trocados entre duas porções contíguas de material é do tipo $T = ku_x$ (esticando a varinha ($u_x > 0$) teremos tração positiva, isto é, uma força na direção que sai do corpo).

Inserindo isso em (4.2) obtemos

$$\rho u_{tt} - k u_{xx} = F;$$

re-escalando é sempre possível obter a equação em (eq-O). ★

Podemos chegar à mesma equação também considerando as vibrações transversais de uma corda esticada ou de uma membrana, mas apenas quando tais vibrações são suficientemente pequenas para podermos descartar termos não lineares de ordem menor.

Modelo 4.2. [Corda vibrante] Vejamos como chegamos a (eq-O) modelando uma corda que vibra transversalmente.

Seja agora $u(x, t)$ o deslocamento (na direção transversal) no instante t de uma partícula que a repouso estaria no ponto x . Fixada uma porção $[a, b]$ da corda,

- o *momento linear (transversal)* desta porção será $\int_a^b \rho(x)u_t(x, t) dx$, onde ρ é a densidade (linear) de massa;
- se T é a *tensão* (que agora consideramos constante) da corda, ela age nos extremos a e b na direção tangente à corda, logo sua componente transversal é (aproximadamente) Tu_x , e a força resultante será $T[u_x(b, t) - u_x(a, t)]$;
- se F é uma *força (transversal) de volume* que age sobre o corpo então a força resultante aplicada a $[a, b]$ será $\int_a^b F(x, t) dx$.

Aplicando o teorema do momento linear, temos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x)u_t(x, t) dx = \int_a^b \rho(x)u_{tt}(x, t) dx = Tu_x(b, t) - Tu_x(a, t) + \int_a^b F(x, t) dx$$

e usando o teorema fundamental do cálculo $u_x(b, t) - u_x(a, t) = \int_a^b u_{xx}(x, t) dx$ obtemos

$$\int_a^b [\rho u_{tt} - Tu_{xx} - F] dx = 0.$$

Como isso vale para toda porção $[a, b]$ do corpo chegamos à equação

$$\rho u_{tt} - Tu_{xx} = F, \quad \forall x, t. \quad (4.3)$$

★

Modelo 4.3. [Membrana vibrante] De forma parecida podemos modelar uma membrana que vibra transversalmente: recortando uma porção Ω da membrana temos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})u_t(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})u_{tt}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = T \int_{\partial\Omega} \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \cdot \nu dS + \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

onde agora ρ é a densidade superficial da membrana, T sua tensão (suposta constante) e $T\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \cdot \nu$ representa a componente transversal da tensão ao longo do recorte $\partial\Omega$ (T age em direção perpendicular ao corte, no plano tangente à membrana). Aplicando o Teor. do divergente $T \int_{\partial\Omega} \nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) \cdot \nu dS = T \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ e logo obtemos

$$\int_{\Omega} [\rho(\mathbf{x})u_{tt}(\mathbf{x}, t) - T\Delta_{\mathbf{x}}u - F] d\mathbf{x} = 0.$$

Como isso vale para toda porção Ω da membrana chegamos à equação

$$\rho u_{tt} - T\Delta_{\mathbf{x}}u = F, \quad \forall x, t. \quad (4.4)$$

★

Modelo 4.4. [Campo eletro-magnético no vácuo] As equações dos campos elétrico e magnético no vácuo podem ser obtidas diretamente das equações de Maxwell: estas são, no vácuo (isto é, quando não tem carga elétrica nem correntes)

$$\operatorname{div}(E) = 0 \quad \operatorname{div}(B) = 0 \quad (4.5)$$

$$\operatorname{rot}(E) = -B_t \quad \operatorname{rot}(B) = E_t/c^2, \quad (4.6)$$

onde E é o campo elétrico, B o campo magnético e c a velocidade da luz. Derivando a última equação e substituindo as outras obtemos

$$E_{tt}/c^2 = \operatorname{rot}(B_t) = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = \Delta E + \nabla(\operatorname{div}(E)) = \Delta E.$$

Concluimos que o campo elétrico (e analogamente o campo magnético) no vácuo satisfazem a equação da onda. ★

As condições de Cauchy que aparecem em (PVI-O) representam, nos modelos de corpo vibrante, velocidade e posição de cada ponto do corpo no instante $t = 0$ (isto é, as normais condições iniciais dos problemas da mecânica). No caso do campo eletromagnético representam o estado inicial de E e de B (de fato, pela última eq. de Maxwell, E_t corresponde a B).

Por outro lado, o modelo de corda ou membrana vibrante (guitarra ou tambor) é posto naturalmente na forma de (PΩ-O), em um domínio limitado com condição de borda fixada ($g \equiv 0$).

Observação 4.5. Como vimos, a equação da onda em \mathbb{R}^3 modela tanto as vibrações de um gas como as do campo eletro-magnético em \mathbb{R}^3 , isto é, os fenômenos de *propagação do som e da luz*.

4.3 Equação do Calor

Vimos também a equação do calor

$$u_t - \Delta_{\mathbf{x}}u = F(\mathbf{x}, t), \quad (\text{eq-C})$$

onde ainda $u = u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$: como no caso da onda geralmente t representa o tempo e diremos então que (eq-C) é a equação do calor em dimensão n .

Um modelo físico que esta equação representa é o da difusão de uma substância ou da transmissão do calor num corpo em \mathbb{R}^n : se $n = 1$ representará uma varinha, se $n = 2$ uma placa e se $n = 3$ um sólido.

4.3.1 Tipos de problemas - calor

Consideraremos em geral, para a equação do calor, um problema (dito **de valores iniciais em \mathbb{R}^n**) da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{\mathbf{x}}u = F(\mathbf{x}, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (\text{PVI-C})$$

Também podemos considerar o **problema misto em Ω** (de valores iniciais e de fronteira), em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto conexo limitado e regular, de borda $\partial\Omega$ e normal exterior ν :

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{\mathbf{x}}u = F(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) & \text{em } \bar{\Omega}, \\ u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) & \text{em } \partial\Omega \times (0, T); \end{cases} \quad (\text{P}\Omega\text{-C})$$

veja na seção 4.4.1 outras possíveis condições em $\partial\Omega$ e seu significado físico.

4.3.2 Modelagem - calor/difusão

Nesta seção veremos como a equação do calor aparece em alguns problemas físicos.

Modelo 4.6. [Calor/difusão]

Vejamos como chegamos a (eq-C) modelando a difusão de um poluente num meio.

Se $u(\mathbf{x}, t)$ representa a concentração de um poluente no instante t e no ponto \mathbf{x} , fixada uma porção V de volume,

– a derivada da quantidade de poluente em V será $\frac{d}{dt} \int_V u(\mathbf{x}, t) dV = \int_V u_t(\mathbf{x}, t) dV$;

– se o fluxo de poluente através ∂V é o vetor Q , então a quantidade de poluente que sai de V é $\int_{\partial V} (Q \cdot n) dS$;

– se F representa uma fonte de poluente, então o poluente produzido em V será $\int_V F dV$.

Impondo então que a variação da quantidade de poluente deve igualar a quantidade produzida menos a quantidade que sai, obtemos

$$\int_V u_t(\mathbf{x}, t) dV = \int_V F dV - \int_{\partial V} (Q \cdot \nu) dS$$

e usando o teorema da divergência

$$\int_V [u_t - F + \text{div}_{\mathbf{x}}(Q)] dV = 0;$$

como isso vale para toda porção V do corpo chegamos à equação

$$u_t + \text{div}_{\mathbf{x}}(Q) = F, \quad \forall x, t. \quad (4.7)$$

Enfim, modelamos a difusão do poluente por $Q = -k\nabla u$ (o poluente difunde na direção em que a sua concentração diminui): inserindo isso em (4.7) obtemos

$$u_t - k \text{div}_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}}u) = u_t - k\Delta_{\mathbf{x}}u = F;$$

o parâmetro k pode ser posto igual a 1 re-escalando.

O mesmo modelo pode ser obtido pensando na **condução do calor**: neste caso $u(\mathbf{x}, t)$ representa a temperatura, supondo unitário o calor específico $\int_V u(\mathbf{x}, t) dV$ é a quantidade de calor (energia térmica) em V , e logo sua derivada será devida a eventuais fontes de calor F e ao fluxo de calor pela borda Q , que também será modelado por $Q = -k\nabla u$ (o calor vai na direção em que a temperatura diminui).

A condição $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ representa então nestes modelos a distribuição de temperatura ou concentração no instante $t = 0$. ★

Observação 4.7. A equação (eq-C) é uma aproximação: vale na hipótese de átomos pontiformes e supõe que a velocidade de propagação do calor seja infinita (gas ideal). Observe-se também que a equação é invariante com respeito ao valor da incógnita: isso, no caso do calor, não é coerente com a física pois sabemos que a temperatura é uma quantidade limitada por baixo: a aproximação tornar-se-á ruim para temperaturas perto do zero absoluto. \triangleleft

4.4 Equações com o Laplaciano

O operador Laplaciano é invariante por rotações e por translações, logo aparecerá em modelos físicos de fenômenos que possuem simetrias deste tipo (de fato apareceu tanto na equação da onda quanto na do calor, agindo sobre as variáveis espaciais).

Ele aparecerá sozinho quando consideramos o problema de *determinar o estado do sistema ao equilíbrio* para um problema modelado através da equação do calor (ou da onda), isto é, impondo que a solução não dependa do tempo.

Outra situação onde surge uma equação com o Laplaciano é quando buscamos uma *onda estacionária*, isto é, uma solução da eq. da onda¹ na forma $u(\mathbf{x}, t) = \sin(\omega t)v(\mathbf{x})$, na qual o perfil espacial da onda v é fixo e apenas pulsa no tempo com frequência angular ω . Substituindo na equação da onda obtemos $0 = u_{tt} - \Delta u = -\omega^2 \sin(\omega t)v(\mathbf{x}) - \sin(\omega t)\Delta v(\mathbf{x})$ e logo v satisfaz a equação

$$-\Delta v = \omega^2 v. \quad (4.8)$$

Modelo 4.8. [Campos irrotacionais] Outro caso no qual obtemos o operador Laplaciano é quando temos um problema para um campo vetorial V (em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3) do tipo

$$\begin{cases} \operatorname{div} V = f, \\ \operatorname{rot} V = 0; \end{cases} \quad (4.9)$$

de fato, a segunda equação implica que (pelo menos localmente) existe um potencial para V , isto é, $V = \nabla u$, e a primeira equação torna-se $\Delta u = f$.

Dois exemplos deste tipo são:

– quando V é o **campo eletrostático** e f a representa a carga elétrica; de fato, as equações de Maxwell completas são

$$\operatorname{div}(E) = \rho/\varepsilon_0 \quad \operatorname{div}(B) = 0 \quad (4.10)$$

$$\operatorname{rot}(E) = -B_t \quad \operatorname{rot}(B) = (j/\varepsilon_0 + E_t)/c^2 : \quad (4.11)$$

já vimos que quando assumimos ρ (densidade de carga) e j (densidade de corrente) nulas obtemos o sistema (4.5-4.6) do qual deduzimos a equação da onda; assumindo estacionariedade (derivadas temporais nulas) as equações para E e para B desacoplam e obtemos

¹Ondas estacionárias também podem ser consideradas para a eq. de Schrödinger na forma $u(\mathbf{x}, t) = \exp(i\omega t)v(\mathbf{x})$, obtendo ainda uma equação com o operador Laplaciano.

o sistema (4.9) para o campo eletrostático E : em particular o potencial eletrostático Φ satisfaz a equação $\Delta\Phi = \rho/\varepsilon_0$.

– quando V representa o **escoamento estacionário irrotacional e incompressível de um fluido** (neste caso f representa eventuais fontes ou "poços" de fluido). ★

4.4.1 Tipos de problemas - Laplaciano

Já vimos no exercício 1.7 que o problema de Cauchy para o Laplaciano é mal posto. Além disso, não se conhecem problemas físicos para o operador Laplaciano pelos quais tenha sentido impor um problema de Cauchy.

Os problemas físicos que envolvem o operador Laplaciano são tipicamente do tipo descrito abaixo.

Definição 4.9. • O problema de determinar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{PD})$$

é dito **problema de Dirichlet** para o Laplaciano.

• O problema de determinar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u_\nu(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{PN})$$

onde u_ν é a derivada na direção ν da normal externa de $\partial\Omega$, é dito **problema de Neumann** para o Laplaciano.

• O problema de determinar $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \alpha(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + u_\nu(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{PR})$$

é dito **problema de Robin** para o Laplaciano.

Exemplos físicos dos problemas acima são os seguintes:

- a **distribuição de temperatura ao equilíbrio** num corpo com fontes de calor f e **temperatura fixada na fronteira** g satisfaz o problema de Dirichlet (PD). Analogamente, **o potencial eletrostático em Ω se a distribuição de carga em Ω é f e $\partial\Omega$ é um condutor** (logo o potencial é constante em $\partial\Omega$) satisfaz (PD) com $g = c$.
- Nos dois casos acima, quando em vez de ter temperatura fixada em $\partial\Omega$ temos **fluxo de calor fixado** (por exemplo nulo, no caso de corpo isolado termicamente) ou quando a componente normal do **campo elétrico** ($E = \nabla u$) **é conhecida** em $\partial\Omega$, satisfazem o problema de Neumann (PN).

- Ainda no problema da temperatura, quando o corpo *troca calor com o exterior* o fluxo de calor (derivada da temperatura) é proporcional à diferença de temperatura com respeito à temperatura externa, logo surge um problema de tipo Robin (PR).
- Considerando o modelo do **escoamento irrotacional e incompressível**, a velocidade é o gradiente da solução, assim a condição de tipo Neumann aparece numa superfície através da qual o fluido entra com uma certa velocidade (que será zero no caso de uma *parede que o fluido não pode atravessar*). Neste caso é muito importante também o **problema exterior**, no qual a região Ω é todo \mathbb{R}^n menos uma região que representa um obstáculo ao escoamento.

Veremos que uma condição necessária para o problema de Neumann (PN) ter solução é $\int_{\Omega}(-f) = \int_{\partial\Omega} h$: isto traduz correspondentes condições físicas: no caso do corpo isolado significa que para existir uma solução de equilíbrio a soma (com sinal) das fontes de calor internas ao corpo deve corresponder ao calor que sai da fronteira; no caso do escoamento incompressível, significa que a soma das fontes de fluido deve igualar o fluxo de fluido que sai da região (conservação da massa).

Observação 4.10. No caso da vibração de um corpo, modelada pela equação da onda, uma condição de tipo Dirichlet representa fronteira fixada, a de tipo Neumann representa fronteira livre (sem forças aplicadas) e a de tipo Robin representa um caso intermédio onde o deslocamento da fronteira implica numa força proporcional aplicada (apoio elástico).

Tanto no caso do calor quanto da onda, o significado físico do coeficiente α na condição de Robin implica que $\alpha \geq 0$: para o calor significa que o calor flui em direção oposta ao gradiente de temperatura, para a onda significa que a força aplicada na fronteira se opõe ao movimento. ◁

4.5 Alguns outros modelos

- Outro problema representado por (PD), com $f = 0$, considera $u(\mathbf{x})$ sendo o valor esperado de $g(P(\mathbf{x}))$ onde $P(\mathbf{x})$ é o primeiro ponto onde uma partícula que sai de \mathbf{x} com moto Browniano toca $\partial\Omega$.
- Considere a equação quasilinear (3.8) do exemplo 3.13

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} + c^2u_{yy} = 0;$$

observe que neste modelo x, y são ambas variáveis espaciais.

Fazendo uma linearização perto da solução $u = Vx$, pondo $\varepsilon = u - Vx$ obtemos

$$(c^2 - V^2)\varepsilon_{xx} + c^2\varepsilon_{yy} = 0 :$$

se $|V| > c$ reescalando obtemos a equação da onda

$$-\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0,$$

que logo modela **pequenas perturbações da solução supersónica** Vx .

Da mesma forma, se $|V| < c$ reescalando obtemos a equação com Laplaciano

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0,$$

que logo modela **pequenas perturbações da solução subsónica** Vx .

Vale destacar que as duas equações obtidas possuem propriedades bem diferentes, inclusive precisarão de tipos diferentes de dados para obter boa posição.

Capítulo 5

Ondas e difusão

Neste capítulo estudaremos e compararemos a equação da onda e a equação do calor.

Começemos com algumas observações gerais, sobre as duas equações (eq-O) e (eq-C) e os problemas (PVI) e (P Ω) a elas associados associados (veja páginas 50 e 53).

- Como vimos no capítulo 3, a equação (eq-O) é sempre (normalmente) *hiperbólica*, enquanto a equação (eq-C) é sempre *parabólica*.

O Problema (PVI-O) é um Problema de Cauchy não característico, enquanto (PVI-C) é um problema de tipo diferente. De fato, observe que a superfície $t = 0$ é característica para a equação (não podemos obter u_{tt} da equação) e que em (PVI-C) não fixamos u_t . O fato de fixar apenas u é porém coerente com o fato que a equação é de primeira ordem na variável t .

- **Reversibilidade do tempo**

- Fazendo a troca de variável $t \mapsto -t$ em (PVI-O) a equação continua a mesma e apenas muda o sinal de ψ . Por isso podemos estudar o problema (PVI-O) apenas para $t \geq 0$, pois o comportamento para $t \leq 0$ será análogo.

Fisicamente este fato significa que *o tempo é reversível para os fenômenos descritos pela equação da onda*: conhecendo u e u_t para $t = 0$ os problemas de calcular o estado futuro e o estado passado são análogos.

- A mesma troca de variável em (PVI-C) muda o sinal na equação, que se torna $u_t + \Delta_x u = F$; logo os problemas com $t > 0$ e com $t < 0$ são diferentes, de fato, lembre que já vimos no exercício 1.7 que para o problema do calor com $t < 0$ não tem dependência contínua dos dados.

Fisicamente este fato significa que *o tempo não é reversível para os fenômenos descritos pela equação do calor* (segunda lei da termodinâmica): dado $u(x, 0)$ pode existir uma solução para $t > 0$ e não existir para $t < 0$. (veremos isso melhor nas observações 5.17-5.18).

Por outro lado, a equação do calor é invariante com respeito a transformações do tipo $(x, t) \mapsto (ax, a^2t)$ i.é, que mantêm a razão $|x|^2/t$.

5.1 Energias

Nesta seção veremos alguns resultados obtidos com argumentos que usam alguma noção de energia.

Teorema 5.1. *Considere uma solução de (PΩ-O) com $F \equiv 0$ e $g \equiv 0$.*

Então a quantidade

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla_x u|^2)$$

é conservada no tempo (o mesmo vale se $u_n = 0$ em $\partial\Omega$ no lugar de $u = 0$).

Neste caso E representa a **energia total** contida no sistema:

- em cinética mais energia elástica no caso de vibrações de corpos
- energia eletromagnética no caso do campo eletromagnético

Teorema 5.2. *Considere uma solução de (PΩ-C) com $F \equiv 0$ e $g \equiv 0$.*

Então as quantidades

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2, \quad E_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

são não crescentes no tempo:

$$E_0'(t) = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq 0, \quad E_1'(t) = - \int_{\Omega} u_t^2 \leq 0$$

(o mesmo vale se $u_n = 0$ em $\partial\Omega$ no lugar de $u = 0$).

Repare que o Teorema acima de novo mostra como o tempo não pode ser invertido na equação do calor, já que estas energias não podem ser crescentes.

Observação 5.3. Enquanto a energia introduzida para a eq. da onda tem um significado físico claro, de energia total (cinética mais elástica) do corpo, as duas "energias" usadas para a eq. do calor são mais para se considerar como artifícios matemáticos, sem um claro significado físico. De certa forma ambas medem a deviação com respeito à solução constante (ou nula), o que é razoável para um fenômeno de difusão, que tende a homogeneizar a distribuição da quantidade u ◁

Prova do Th. 5.1. Seja

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_t^2(\cdot, t) + |\nabla u(\cdot, t)|^2] :$$

ela está bem definida se Ω é limitado e a solução é C^2 .

Calculemos

$$\frac{d}{dt} E = \frac{2}{2} \int_{\Omega} [u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t] : \tag{5.1}$$

integrando por partes, isto é, usando o fato que $\operatorname{div}(u_t \nabla u) = u_t \Delta u + \nabla u_t \cdot \nabla u$ e depois aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_{\Omega} u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t = \int_{\Omega} u_t (u_{tt} - \Delta u) + \int_{\partial\Omega} u_t \nabla u \cdot \nu;$$

substituindo a equação $u_{tt} - \Delta u = 0$ e como a condição $u = 0$ em $\partial\Omega$ para todo t , implica que também $u_t = 0$, concluímos que $E'(t) = 0$.

O mesmo vale se $u_n = 0$ em $\partial\Omega$ □

Prova do Th. 5.2. Os argumentos são parecidos aos do Th. 5.1.

Calculemos

$$\frac{d}{dt} E_1 = \frac{2}{2} \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla u_t]. \quad (5.2)$$

Procedendo como antes obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t = \int_{\Omega} u_t (-\Delta u) + \int_{\partial\Omega} u_t \nabla u \cdot \nu;$$

substituindo a equação $u_t = \Delta u$ e usando a condição de fronteira concluímos $E'_1(t) = -\int_{\Omega} u_t^2 \leq 0$.

De forma parecida,

$$\frac{d}{dt} E_0 = \frac{2}{2} \int_{\Omega} [u_t u], \quad (5.3)$$

substituindo a equação e integrando por partes obtemos

$$\frac{d}{dt} E_0 = \frac{2}{2} \int_{\Omega} [u \Delta u] = -\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot \nu; \quad (5.4)$$

de novo o termo de borda é nulo e logo temos $E'_0(t) = -\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq 0$. □

5.1.1 Unicidade para os problemas mistos

Os Teoremas 5.1 5.2 podem ser usados para obter um resultado de unicidade para os problemas (PΩ-O) e (PΩ-C).

Teorema 5.4. *Se v, w são ambas soluções clássicas de (PΩ-O) ou de (PΩ-C), então $v \equiv w$. O mesmo vale com a condição em $\partial\Omega$ de tipo Neumann no lugar da de Dirichlet.*

Isso significa que *apenas uma solução dos problemas considerados pode existir.*

Demonstração. Usando a linearidade, se v, w satisfazem (PΩ-O) com os mesmos dados F, ψ, ϕ, g , então $d := v - w$ satisfaz (PΩ-O) com $F, \psi, \phi, g \equiv 0$.

Logo a energia $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (d_t^2 + |\nabla_x d|^2)$ associada à solução d satisfaz $E(0) = 0$. Pelo teorema 5.1 isso implica $E(t) = 0$ para todo $t > 0$.

Como E é uma soma de quadrados deduzimos que $d_t, \nabla d \equiv 0$ para todo $t > 0$, mas junto com $d(x, 0) = 0$ isso implica que $d \equiv 0$, ou seja $v \equiv w$.

No caso do calor podemos proceder da mesma forma: a energia $E_0(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^2$ associada à solução d satisfaz $E(0) = 0$ e pelo teorema 5.2 isso implica $E(t) = 0$ para todo $t > 0$ (como $E_0 \geq 0$ por definição não poderá decrescer). Disso deduzimos facilmente que $d \equiv 0$, ou seja $v \equiv w$.

O resultado pode ser obtido também através da energia E_1 . \square

Exercício 5.5. Analise, usando o método da energia, o problema misto para onda e calor com condição na borda de tipo Robin.

- No caso do calor, para que α podemos dizer que a energia E_0 decresce?
- No caso da onda, corrija a definição de energia para incluir a energia elástica acumulada na borda, para que ainda seja constante.
- Quando podemos dizer que a solução é única?

5.1.2 Unicidade para a onda em \mathbb{R}^n

Nesta seção veremos um importante teorema, que implica na unicidade da solução do problema (PVI-O). Para começar, definimos:

- Cone do passado do ponto (x_0, t_0) a região

$$CP_{x_0, t_0} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \leq t_0 - |x - x_0|\}$$

- Cone do futuro do ponto (x_0, t_0) a região

$$CF_{x_0, t_0} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq t_0 + |x - x_0|\}$$

Teorema 5.6. Se $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, com $n \geq 1$, e satisfaz

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 & \text{em } \overline{B_R(x_0)} \end{cases} \quad (5.5)$$

com $R \leq T$, então $u \equiv 0$ em todo $CP_{x_0, R}$.

Demonstração. Seja

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{B_{R-t}(x_0)} [u_t^2(\cdot, t) + |\nabla u(\cdot, t)|^2] :$$

esta é a "energia" associada à solução na bola $B_{R-t}(x_0)$ no instante t . Está bem definida já que B é limitada e a solução é \mathcal{C}^2 .

Calculemos

$$\frac{d}{dt} E = \frac{2}{2} \int_{B_{R-t}(x_0)} [u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t] - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{R-t}(x_0)} [u_t^2 + |\nabla u|^2] , \quad (5.6)$$

onde o último termo nasce do fato que o domínio de integração diminui com t (veja a equação (4.1)).

Integrando por partes, isto é, usando o fato que $\operatorname{div}(u_t \nabla u) = u_t \Delta u + \nabla u_t \cdot \nabla u$ e depois aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_{B_{R-t}(x_0)} u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t = \int_{B_{R-t}(x_0)} u_t (u_{tt} - \Delta u) + \int_{\partial B_{R-t}(x_0)} u_t \nabla u \cdot \nu.$$

Estimando o termo de borda com $|u_t \nabla u \cdot \nu| \leq |u_t| |\nabla u| \leq \frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2)$ vemos que, junto com o termo de borda em (5.6), dá uma contribuição não positiva, logo

$$\frac{d}{dt} E = \int_{B_{R-t}(x_0)} \underbrace{u_t (u_{tt} - \Delta u)}_{=0} + \frac{1}{2} \int_{\partial B_{R-t}(x_0)} u_t \nabla u \cdot n - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{R-t}(x_0)} u_t^2 + |\nabla u|^2 \leq 0. \quad (5.7)$$

Como E é uma quantidade não negativa por definição e $E(0) = 0$ pela condição inicial, deduzimos de (5.7) que $E(t) \equiv 0$, logo $u_t, \nabla u \equiv 0$ e u é constante em C ; enfim, esta constante é 0 usando de novo a condição inicial. \square

Observação 5.7. O teorema 5.6 implica nos seguintes importantes resultados.

- O problema (PVI-O) possui no máximo uma **única solução**: de fato, como o problema é linear, se existissem duas soluções u, v , então $u - v$ deveria satisfazer o problema homogêneo (5.5), para qualquer T, R, x_0 , logo seria nula.
- A solução de (PVI-O) num ponto (x, t) depende apenas dos dados ϕ, ψ na bola $B_t(x)$ e de F no cone do passado de vértice (x, t) : de fato, usando ainda a linearidade, se os dados para u e v coincidem nestas regiões então $u - v$ deve ser zero em (x, t) , mesmo se fora do cone os dados diferem (observe que na demonstração do teorema usamos que $F = 0$ apenas no cone, não em todo $\mathbb{R}^n \times [0, T]$).
Vice-versa, os dados no ponto $(x_0, 0)$ influenciam apenas o cone do futuro de vértice $(x_0, 0)$ e F no ponto (x, t) influencia apenas o cone do futuro de vértice (x, t) .
Com isso caracterizamos a **região de influência** e o **domínio de dependência** para a equação da onda.

Este fato significa que, nas soluções da equação da onda, **a velocidade de propagação das informações é finita** (o ponto x só pode ser influenciado pelos dados no ponto x_0 depois de um certo tempo). Em particular, quando a equação esta na forma $u_{tt} - c^2 \Delta_x u = F$, o parâmetro c indica a velocidade máxima de propagação da informação.

- Outra consequência da finitude da velocidade de propagação é que se ϕ, ψ e F possuem *suporte compacto*¹, então a solução $u(\cdot, t)$ também terá suporte compacto para todo $t > 0$, de fato, uma vez que $|\mathbf{x}|$ é suficientemente grande para que o cone do passado de vértice (x, t) não intercepte os suportes dos dados, teremos $u(x, t) = 0$.

¹ $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tem suporte compacto quando existe um compacto (fechado e limitado) C contido em Ω , tal que $f \equiv 0$ no complementar de C .

Neste caso podemos definir a **energia** da solução

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [u_t^2(\cdot, t) + |\nabla u(\cdot, t)|^2],$$

pois uma vez fixado $T > 0$, se $t \in [0, T]$ a integral coincide com a integral em B_R para R suficientemente grande para que a solução seja zero em $B_R^c \times [0, T]$, logo podemos calcular (o termo de borda será nulo)

$$\frac{d}{dt} E = \int_{\mathbb{R}^n} [u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t] = \int_{\mathbb{R}^n} u_t \underbrace{(u_{tt} - \Delta u)}_{=F}. \quad (5.8)$$

Concluimos que se $F = 0$ e ϕ, ψ têm suporte compacto então E é uma quantidade conservada. Por outro lado, esta energia poderá variar em consequência do trabalho das forças F .

◁

5.2 Solução IVP em uma dimensão

5.2.1 A equação da onda em uma dimensão

Nesta seção consideramos (PVI-O) quando $n = 1$ e com o parâmetro c^2 que representa a velocidade de propagação das ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (5.9)$$

Veremos várias maneiras de resolver este problema.

Dedução 5.8. (Fórmula de D'Alembert - $F = 0$).

Mostremos uma maneira de resolver (5.9) no caso homogêneo ($F = 0$), baseada na fatoração do operador como $u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u$.

Pondo $v := (\partial_t - c\partial_x)u$ obtemos a equação de primeira ordem

$$\begin{cases} v_t + cv_x = 0, \\ v(x, 0) = \psi(x) - c\phi'(x), \end{cases}$$

cuja solução é $v(x, t) = (\psi - c\phi')(x - ct) := a(x - ct)$; logo temos a equação de primeira ordem para u

$$\begin{cases} u_t - cu_x = a(x - ct), \\ u(x, 0) = \phi(x); \end{cases}$$

resolvendo via características

$$\begin{cases} x'_s(\tau) = -c, & x_s(0) = s, & \rightarrow x = s - c\tau, \\ t'_s(\tau) = 1, & t_s(0) = 0, & \rightarrow t = \tau, \\ u'_s(\tau) = a(x - ct), & u_s(0) = \phi(s), & \rightarrow u'_s(\tau) = a(s - 2c\tau), \end{cases}$$

logo $u_s(t) = \phi(s) + \int_0^t a(s - 2c\tau)d\tau$ dando

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \int_0^t a(x + ct - 2c\tau)d\tau = \phi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} a(\xi)d\xi;$$

como $a = \psi - c\phi'$ temos

$$u(x, t) = \phi(x + ct) - \phi(x + ct)/2 + \phi(x - ct)/2 + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi \quad (5.10)$$

$$= \frac{\phi(x + ct) + \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi. \quad (5.11)$$

★

Exercício 5.9. Obtenha a fórmula de D'Alambert com $F = 0$ da seguinte forma:

1. como $F = 0$, a solução deve ter a forma $f(x + ct) + g(x - ct)$, uma vez que as coordenadas características são $x + ct$ e $x - ct$ (lembre a solução de $u_{xy} = 0$ do exemplo 1.8);
2. descubra as funções incógnitas f, g impondo as condições iniciais. ★

Dedução 5.10. (Fórmula de D'Alambert - completa).

Seja T o cone do passado do ponto (x_0, t_0) intersectado com o semiplano $t \geq 0$, ou seja, o triângulo de vértices $(x_0 - ct_0, 0)$, (x_0, t_0) , $(x_0 + ct_0, 0)$.

Consideremos

$$\iint_T F = \iint_T (u_{tt} - c^2 u_{xx}) :$$

pondo $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -rot_{x,t}(u_t, c^2 u_x)$ obtemos

$$\iint_T F = \oint_{\partial T} u_t dx + c^2 u_x dt;$$

separando os três segmentos:

- $(x_0 - ct_0, 0) \mapsto (x_0, t_0)$: $dx = cdt$ logo $u_t dx + c^2 u_x dt = cu_t dt + cu_x dx = c du$ e obtemos $c u(x_0, t_0) - c u(x_0 - ct_0, 0) = c u(x_0, t_0) - c \phi(x_0 - ct_0)$;

- $(x_0, t_0) \mapsto (x_0 + ct_0, 0)$: $dx = -cdt$ logo $u_t dx + c^2 u_x dt = -cu_t dt - cu_x dx = -c du$ e obtemos $cu(x_0, t_0) - c\phi(x_0 + ct_0)$; ²
- $(x_0 + ct_0, 0) \mapsto (x_0 - ct_0, 0)$: $dt = 0$ logo $u_t dx + c^2 u_x dt = u_t dx = \psi dx$ e obtemos $-\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi$.

Em conclusão

$$\iint_T F = 2cu(x_0, t_0) - c\phi(x_0 - ct_0) - c\phi(x_0 + ct_0) - \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi.$$

Reordenando, dividindo por $2c$ e explicitando a integral dupla como integral iterada, obtemos a fórmula (5.12) abaixo. ★

A solução completa será então

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + ct) + \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi, s) d\xi; \quad (5.12)$$

esta fórmula é dita **fórmula de D´Alambert**.

Observação 5.11. Da fórmula de D´Alambert podemos obter várias informações.

- Para ter solução de (5.9) de classe \mathcal{C}^2 **os dados deverão ser pelo menos $\phi \in \mathcal{C}^2$, $\psi \in \mathcal{C}^1$ e $F \in \mathcal{C}^1$** . Analogamente, dados $\phi \in \mathcal{C}^k$, $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}$ e $F \in \mathcal{C}^{k-1}$ implicarão em solução de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 2$).
- **A solução no ponto (x, t) depende**
 - de ϕ apenas nos dois pés das características por (x, t) ,
 - de ψ ao longo do segmento entre estes dois pontos,
 - de F no triângulo de vértice (x, t) que as duas características definem com a reta $t = 0$ (cone do passado).

Observe que, com respeito ao resultado que deduzimos do teorema 5.6, temos a informação adicional que $u(x, t)$ depende do valor de ϕ apenas nos extremos do segmento e não do segmento inteiro.

²Vejamus esta conta nos detalhes: seja $\gamma(\tau) = (x_0 + c\tau, t_0 - \tau)$, $\tau \in [0, t_0]$ a parametrização do segmento, assim $\gamma'(\tau) = (c, -1)$. Logo $\int_\gamma u_t dx + c^2 u_x dt = \int_0^{t_0} (c^2 u_x(\gamma(\tau)), u_t(\gamma(\tau))) \cdot (-1, c) d\tau = -\int_0^{t_0} c(u_x(\gamma(\tau)), u_t(\gamma(\tau))) \cdot (c, -1) d\tau = -\int_0^{t_0} c(u_x(\gamma(\tau)), u_t(\gamma(\tau))) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = -\int_0^{t_0} c \nabla_{x,t} u(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau = -\int_0^{t_0} c [u(\gamma(\tau))]\' d\tau = cu(\gamma(0)) - cu(\gamma(t_0))$.

- Uma vez que a solução é única pelo teorema 5.6 e que temos uma fórmula explícita, podemos deduzir da fórmula a **dependência contínua dos dados**. Logo, para o problema de Cauchy (5.9) com $\phi \in \mathcal{C}^2$, $\psi \in \mathcal{C}^1$ e $F \in \mathcal{C}^1$ existe uma única solução que depende com continuidade dos dados: **é um problema bem posto segundo Hadamard**. \triangleleft

Observação 5.12. A solução da equação da onda homogênea em dimensão um em coordenadas características $f(z) + g(w)$ mostra uma propriedade qualitativa das soluções: fixado um “retângulo característico” $[z_0, z] \times [w_0, w]$ vale

$$u(z, w) + u(z_0, w_0) = f(z) + g(w) + f(z_0) + g(w_0) = u(z, w_0) + u(z_0, w).$$

Traduzido nas coordenadas originais isso significa que dado um “quadrilátero característico” de vértices (consecutivos) A, B, C, D , isto é, sendo AB e CD paralelos às retas $x = ct$ e BC e DA paralelos às retas $x = -ct$, teremos

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D). \quad (5.13)$$

Esta fórmula pode ser útil no estudo das soluções, como veremos mais a frente.

clássicas, mas também permite uma definição de **solução generalizada**, de regularidade inferior, pedindo apenas que esteja satisfeita (5.13) em todo ponto. \triangleleft

Observação 5.13. Quando os dados não são suficientemente regulares para obter uma solução clássica, podemos ainda usar a fórmula de D’Alembert (5.12) para definir uma **solução generalizada para a equação da onda**. O mesmo podemos fazer usando a fórmula (5.13), pedindo apenas que ela esteja satisfeita em todo ponto. De fato ambas fórmulas não precisam da derivabilidade para serem aplicadas. \triangleleft

5.2.2 A equação do calor homogênea em uma dimensão

Consideremos (PVI-C) com $n = 1$ e $F = 0$:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad (5.14)$$

A seguir veremos como obter uma solução deste problema.

Dedução 5.14. (Solução do calor - $F = 0$).

Obteremos a solução de (5.14) em vários passos.

- Observemos primeiramente que são soluções da eq. $u_t - u_{xx} = 0$:
 - *translações* de soluções (se $u(x, t)$ é solução então, para todo $\xi, \tau \in \mathbb{R}$, a função $u(x - \xi, t - \tau)$ também é solução);

- *derivadas* de soluções, (se $u(x, t)$ é solução então, para todo $i, j \in \mathbb{N}$, a função $\partial_i^i \partial_x^j u(x, t)$, se bem definida, também é solução: é suficiente derivar a equação para ver isso);
 - *combinações lineares* de soluções, (se $u_i(x, t)$ são soluções então, para coeficientes c_i quaisquer, a função $\sum c_i u_i$ também é solução); logo também *integrais* de soluções (limite de somas), (se $u_\xi(x, t)$ são soluções para todo parâmetro $\xi \in C$ então, para coeficientes c_ξ quaisquer, a função $\int_C c_\xi u_\xi d\xi$, se bem definida, também é solução);
 - *composições de soluções com mapas da forma* $(x, t) \mapsto (ax, a^2t)$ com $a > 0$ (se $u(x, t)$ é solução então, para todo $a > 0$, a função $u(ax, a^2t)$ também é solução).
- En vista da última propriedade acima, procuramos uma solução na forma $Q(x, t) = q\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ (invariante com respeito às mapas mencionadas). Para que a condição inicial também seja invariante ao multiplicar a variável por uma constante, consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \text{Sc}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (5.15)$$

Calculamos, para $t > 0$

$$Q_t(x, t) = -\frac{x}{2t2\sqrt{t}} q' \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right), \quad Q_{xx}(x, t) = \frac{1}{4t} q'' \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right);$$

logo, denotando $r := \frac{x}{2\sqrt{t}}$,

$$-4t(Q_t(x, t) - Q_{xx}(x, t)) = 0 = 2rq'(r) + q''(r).$$

Integrando esta EDO obtemos $q'(r) = Ce^{-r^2}$ e $q(r) = A + B \text{Erf}(r)$, onde a função Erf é definida como

$$\text{Erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-\xi^2} d\xi :$$

observe que, como $\int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ex 6 pag. 52 livro [Str08]), os limites desta função (infinitas vezes derivável) a $\pm\infty$ são ± 1 .

- A condição inicial em (5.15) só poderá ser satisfeita no limite, já que a expressão para Q não tem sentido para $t = 0$; calculando

$$\lim_{t \searrow 0} Q(x, t) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} q(r) = A + B & \text{se } x > 0 \\ \lim_{r \rightarrow -\infty} q(r) = A - B & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

obtemos que para ter $\lim_{t \searrow 0} Q(x, t) = \text{Sc}(x)$ para todo $x \neq 0$, precisamos $A + B = 1/2$.

Em conclusão, a solução de (5.15) é (para $t > 0$)

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-r^2} dr = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-r^2} dr.$$

- Para obter uma solução do problema (5.14) vamos usar um pequeno truque: pelo teorema fundamental do cálculo, se ϕ é contínua e integrável em \mathbb{R} , vale

$$\phi(x) = D \left(\int_{-\infty}^x \phi(\xi) d\xi \right),$$

o que também pode ser escrito como

$$\phi(x) = D \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \operatorname{Sc}(x - \xi) d\xi \right) \quad (5.16)$$

(note que aqui não podemos passar a derivada para dentro já que Sc não é regular!).

Substituindo Sc com Q em (5.16), obtemos uma função definida assim:

$$u(x, t) := D_x \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) Q(x - \xi, t) d\xi \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) Q_x(x - \xi, t) d\xi, \quad (5.17)$$

observe que agora pudemos passar a derivada para dentro já que Q é derivável em x para todo $t > 0$. Concluindo os cálculos, definimos

$$\psi(x, t) := Q_x(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (5.18)$$

logo de (5.17) obtemos a seguinte solução para (5.14):

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \phi(\xi) d\xi. \quad (5.19)$$

A função u definida em (5.17)-(5.19) satisfaz a equação do calor: podemos ver isso por causa da observação feita no começo desta dedução: se trata da combinação (convolução) de transladadas da derivada de uma solução.

Além disso, fazendo o limite para $t \searrow 0$ em (5.17) reobtemos (5.16) e logo o limite coincide com o dado ϕ . ★

Observação 5.15. Q é uma solução da eq. do calor para todo $t > 0$, e seu limite para $t \searrow 0$ é $\operatorname{Sc}(x)$ para todo $x \neq 0$. É fácil ver que $Q(0, t) \equiv 1/2$, mas claramente não será possível prolongar Q até a origem de forma contínua. Porém, esta descontinuidade desaparece depois da integração da fórmula (5.19), permitindo de obter a solução regular u . ◁

Podemos prolongar a todo \mathbb{R}^2 a função ψ definida em (5.18), da seguinte forma:

$$\psi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{se } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Podemos verificar que esta ψ é singular na origem mas **está em $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e satisfaz a eq. do calor em todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$** (verifique que qualquer derivada de ψ com $t > 0$ e $x \neq 0$ tende a zero quando $t \searrow 0$). Além disso, para todo $t > 0$, a função $\psi(\cdot, t)$ é uma **gaussiana, de integral unitário, centrada em $x = 0$ e de variância $\sigma^2 = 2t$.**

A função ψ em (5.20) é dita **Solução fundamental** (ou função fonte), da eq. do calor, e é interpretada "fisicamente" como uma *solução gerada por uma distribuição de temperatura inicial concentrada no instante $t = 0$ e no ponto $x = 0$.*

Resumindo, este pique de temperatura concentrada gera uma distribuição de temperatura gaussiana, simétrica, de integral constante, centrada no ponto $x = 0$ e de variância que aumenta com o tempo (a temperatura se espalha).

A fórmula (5.19) foi deduzida e justificada supondo ϕ integrável em \mathbb{R} e contínua, mas a posteriori podemos verificar que a expressão (5.19) faz sentido e nos dá uma solução de (5.14) com hipóteses mais fracas: como ψ satisfaz a equação do calor e é C^∞ nas suas variáveis para $t > 0$, derivadas em x ou t podem entrar na integral mostrando que u é solução da equação e é também C^∞ , precisando pedir apenas que a integral faça sentido, o que vale até para ϕ não limitada com crescimento polinomial.

Por outro lado, o limite para $t \searrow 0$ pode ser computado diretamente quando ϕ é contínua e limitada (vale destacar que na verdade o correto seria mostrar que o limite em duas variáveis para $(x, t) \rightarrow (x_0, 0)$ é $\phi(x_0)$ e não apenas fazendo $t \searrow 0$ com x constante: esta conta é um pouco mais complicada e pode ser vista em [Mas]).

Em conclusão pode ser mostrado o seguinte Teorema (veja [Mas]).

Teorema 5.16. *Se $\phi \in C^0(\mathbb{R})$ e é limitada então definindo $u(x, t)$ como em (5.19), tem-se $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, $u_t - \Delta_x u = 0$ para todo $t > 0$, $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = \phi(x_0)$.*

Logo, (5.19) pode ser estendida por continuidade a uma solução $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ do problema (5.14).

Observação 5.17. O Teorema 5.16 mostra que, a diferença da equação da onda, a equação do calor apresenta uma **velocidade infinita de propagação das informações**³, de fato se considerarmos $0 \neq \phi \geq 0$ tendo suporte compacto, a solução (5.19) satisfará $u(x, t) > 0$ para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Outra diferença com respeito à equação da onda é o **efeito regularizante**: vimos que no caso da onda dados pouco regulares implicam em soluções pouco regulares. O Teorema 5.16 mostra que para a equação do calor acontece o contrário: é suficiente um dado contínuo para ter uma solução de classe C^∞ para todo $t > 0$.

³Claramente a velocidade infinita não acontece no problema físico real, mas é consequência das aproximações mencionadas na observação 4.7.

Observe emfim que para o problema de valores iniciais do calor não provamos a unicidade da solução (de fato não vale!). A solução (5.19) será então apenas uma das possíveis (mesmo que, por sorte, seja a única relevante nas aplicações físicas). Por consequência da falta de unicidade, também não podemos provar a dependência contínua dos dados. É porém verdade que a solução particular (5.19) depende com continuidade de ϕ . \triangleleft

Observação 5.18. Uma consequência desta propriedade regularizante é a impossibilidade, em geral, de resolver o problema (5.14) para tempos negativos: se $\phi(x) = u(x, 0)$ é apenas contínua, não pode ser parte da solução da equação do calor para tempos negativos. \triangleleft

5.2.3 O caso não homogêneo

Consideremos agora (PVI-C) com $n = 1$ mas com o termo de fonte F :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x, t), \\ u(x, 0) = \phi(x), \end{cases} \quad (5.21)$$

Como ideia para obter a solução completa podemos pensar na interpretação de ψ como solução gerada por uma distribuição de temperatura concentrada, pensando que também corresponderá à *solução gerada por uma fonte de calor puntiforme concentrada no instante $t = 0$ e no ponto $x = 0$* . Podemos então escrever a solução completa sobrepondo transladadas de ψ com pesos dados por F :⁴

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t - s) F(\xi, s) d\xi. \quad (5.22)$$

Que a fórmula acima seja realmente uma solução de (5.21) pode ser visto diretamente, de fato já sabemos que o primeiro termo satisfaz o problema com $F = 0$. Indicando com $w(x, t)$ o segundo termo, é imediato que $w(x, 0) \equiv 0$. Podemos calcular $w_t - w_{xx}$: como ψ satisfaz a eq. do calor homogênea, apenas sobrar o termo que vem do teorema fundamental do cálculo ao derivar com respeito a t que é extremo de integração:

$$\lim_{s \nearrow t} \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t - s) F(\xi, s) d\xi,$$

observe que precisamos escrever isso como limite já que a integral é imprópria no extremo t devido à singularidade de ψ .

⁴Observe que tomando a definição de ψ em (5.20), que está definida também quando a segunda variável é negativa, (5.22) pode também ser escrita como

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} ds \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t - s) F(\xi, s) d\xi.$$

Pondo $\theta = t - s$, o limite acima pode ser escrito como

$$\lim_{\theta \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, \theta) F(\xi, t - \theta) d\xi,$$

que (para F contínua) é análogo ao limite de (5.19) quando $t \searrow 0$, logo

$$w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) = F(x, t).$$

Da fórmula (5.22) podemos de novo observar a **velocidade infinita de propagação e a direção do tempo**: uma fonte de calor que aparece no instante T não pode influenciar os instantes anteriores mas influencia imediatamente o espaço todo a partir desse instante.

Observe que no caso de (5.22), **a regularidade da solução poderá não ser C^∞** (como era (5.19)): de fato não podemos simplesmente passar a derivação dentro da integral e usar a regularidade de ψ já que a integral dupla é sempre imprópria, envolvendo a singularidade de ψ .

5.2.4 Comparação Onda Calor em \mathbb{R}

Em resumo, vejamos algumas diferenças importantes entre as propriedades da equação da onda e do calor.

- **Na equação da onda**

- As informações propagam com **velocidade finita**, ao longo das **curvas características** $x = \pm ct$.
se ϕ, ψ tem suporte compacto $u(\cdot, t)$ também tem.
- A condição inicial é **transportada sem perda**.
- A solução tem **regularidade proporcional à regularidade de ϕ, ψ** .
- O **tempo é reversível**.
- Valem **unicidade e dependência contínua dos dados**.

- **Na equação do calor**

- As informações propagam com **velocidade infinita**.
Logo mesmo se ϕ tem suporte compacto $u(\cdot, t)$ não tem.
- A condição inicial **espalha, decai, disperde**.
- A solução (com $F = 0$) tem **regularidade C^∞ até com ϕ descontínua**.
- O **tempo não é reversível**: solução só para $t > 0$.
- Não valem unicidade e dependência contínua dos dados para o PVI. ◁

5.3 Método de reflexão, problemas em semirretas e em segmentos

5.3.1 Problemas em semirretas

Consideremos os problemas

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & t, x > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x > 0, \\ (D) \quad u(0, t) = 0, \quad \text{ou} \quad (N) \quad u_x(0, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t, x > 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x > 0, \\ (D) \quad u(0, t) = 0, \quad \text{ou} \quad (N) \quad u_x(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Mostremos como obter uma solução a partir de (5.12) e (5.19), aproveitando oportunas simetrias. A ideia é que resolvendo um problema em todo \mathbb{R} com condição inicial ímpar, a solução também será ímpar em x , e logo satisfará automaticamente a condição $u(0, t) = 0$. Da mesma forma, a solução de um problema em todo \mathbb{R} com condição inicial par será também par em x , e logo satisfará automaticamente a condição $u_x(0, t) = 0$.

Verifiquemos isso diretamente: dada uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sejam $f_i(x)$ e $f_p(x)$, respectivamente, a extensão ímpar e a extensão par de f , isto é,

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0, \\ -f(-x) & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0, \\ f(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Aplicando a fórmula (5.19) com condição inicial ϕ_i obtemos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t) \phi_i(\xi) d\xi; \quad (5.25)$$

podemos verificar que (5.25) satisfaz (5.24-D), em particular

$$u(0, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(-\xi, t) \phi_i(\xi) d\xi = 0,$$

já que, para todo t fixado, é a integral em \mathbb{R} do produto da função (par) ψ por uma função ímpar. ⁵

⁵Se quisermos uma fórmula explícita apenas em termos de uma integral contendo ϕ na semirreta $(0, \infty)$ podemos proceder assim:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t) \phi_i(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^0 \psi(x - \bar{\xi}, t) (-\phi(-\bar{\xi})) d\bar{\xi} + \int_0^{\infty} \psi(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi :$$

Fazendo o mesmo com ϕ_p definimos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t) \phi_p(\xi) d\xi$$

e podemos verificar, pela paridade de ψ e de ϕ_p , que

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(-x - \xi, t) \phi_p(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \psi(-x + \eta, t) \phi_p(-\eta) d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \eta, t) \phi_p(\eta) d\eta = u(x, t), \end{aligned}$$

logo u é par em x e assim $u_x(0, t) = 0$, sendo então uma solução de (5.24-N).⁶

Da mesma forma, pondo ϕ_i, ψ_i em (5.12) obtemos

$$u(x, t) = \frac{\phi_i(x + ct) + \phi_i(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_i(\xi) d\xi \quad (5.26)$$

que satisfaz (5.23-D) já que, por serem funções ímpares, temos

$$u(0, t) = \frac{\phi_i(ct) + \phi_i(-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{+ct} \psi_i(\xi) d\xi = 0.$$

Por outro lado, pondo ϕ_p, ψ_p em (5.12) obtemos uma solução para (5.23-N):

$$u(x, t) = \frac{\phi_p(x + ct) + \phi_p(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_p(\xi) d\xi;$$

calculando

$$u_x(x, t) = \frac{\phi'_p(x + ct) + \phi'_p(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} [\psi_p(\xi)]_{x-ct}^{x+ct}$$

mudando di variável ($\xi = -\bar{\xi}$) na primeira integral e juntando com a segunda obtemos

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [\psi(x - \xi, t) - \psi(x + \xi, t)] \phi(\xi) d\xi,$$

equivalente a (5.25).

⁶Para obter de novo uma integral apenas em $(0, \infty)$ calculamos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - \xi, t) \phi_p(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^0 \psi(x - \xi, t) \phi(-\xi) d\xi + \int_0^{\infty} \psi(x - \xi, t) \phi(\xi) d\xi$$

e logo

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [\psi(x - \xi, t) + \psi(x + \xi, t)] \phi(\xi) d\xi.$$

vemos que

$$u_x(0, t) = \frac{\phi'_p(ct) + \phi'_p(-ct)}{2} + \frac{1}{2c} [\psi_p(\xi)]_{-ct}^{+ct} = 0$$

já que ψ_p é par enquanto ϕ'_p é ímpar.

Observe que nos problemas (5.23)-(5.24), na origem há um ângulo na superfície dos dados e pode mudar o tipo de condição, o que implica que não poderemos esperar, em geral, uma solução regular, de fato mesmo se ϕ, ψ são regulares, suas extensões par ou ímpar poderiam não ser. Para a equação do calor isso apenas se refletirá em uma possível descontinuidade da solução na origem, enquanto para a equação da onda poderemos ter singularidades propagando (como vimos na seção 3.6) ao longo das características (note que a solução (5.26) foi deduzida da fórmula de D'alambert, logo será a-priori apenas uma solução generalizada e poderia não ser de classe C^2).

Um "condições de compatibilidade" que permitem que a solução com condição de Dirichlet seja clássica seriam $\phi(0) = \phi''(0) = \psi(0) = 0$ (elas implicam na existência das derivadas até a segunda de ϕ_i e até a primeira de ψ_i , na origem). Note que $\phi(0) = \psi(0) = 0$ significa $u(0, 0) = u_t(0, 0) = 0$ e logo são condições naturais já que $u(0, t) \equiv 0$ pela condição de borda. A condição $\phi''(0) = 0$, por outro lado, não tem motivação física, mostrando que em algumas situações é natural esperar o surgimento de uma singularidade na solução, que deverá então ser considerada em sentido generalizado (veja mais sobre este assunto na Seção 5.3.4).

Observando a solução da onda podemos ver que se $x > ct$, o cone do passado $CP(x, t)$ apenas contém valores de ϕ, ψ com $x > 0$: a solução aqui depende então apenas de ϕ, ψ e é análoga à solução que se teria para o problema posto na reta inteira. Vice-versa, se $x < ct$, uma parte da interseção de $CP(x, t)$ com a reta $t = 0$ está fora da semirreta, logo onde os dados são as extensões, e logo a solução aqui é influenciada da condição de borda. Em particular, a solução (5.26) dependerá de ϕ em $x + ct$, de $-\phi$ em $|x - ct|$ (o refletido de $x - ct$) e de ψ entre estes dois pontos.

5.3.2 Problemas em segmentos

Podemos resolver também problemas em semirretas com diferentes extremos, simplesmente refletindo os dados de forma par ou ímpar com respeito ao extremo da semirreta.

Analogamente podemos resolver problemas em segmentos, repetindo o mesmo procedimento em ambos os extremos.

Por exemplo, para um problema como (5.23)-(5.24) com $x \in [a, b]$ e condições $u(a, t) = 0 = u_x(b, t)$, podemos primeiro refletir os dados de forma ímpar com respeito ao extremo a , e depois de forma par com respeito ao extremo b . Repetindo a função obtida de forma que se torne periódica, ela será então ímpar com respeito ao ponto a e par com respeito ao ponto b . Pondo as funções assim construídas nas fórmulas (5.12) ou (5.19) obteremos a solução no segmento.

5.3.3 Casos não homogêneos

- Se nos problemas (5.23)–(5.24) tivermos uma fonte F à direita da equação, podemos usar ainda a técnica de reflexão, usando as fórmulas para a solução da equação não homogênea em \mathbb{R} , depois de ter prolongado em x , de forma par ou ímpar segundo o caso, também a função F .

5.3.4 Casos com condição de borda não homogênea

- Se nos problemas (5.23)–(5.24) tivermos a condição de borda não homogênea $u(0, t) = h(t)$, podemos usar o seguinte truque (aqui descrito apenas para o caso do calor): definimos a nova incógnita $w(x, t) = u(x, t) - h(t)$, desta forma w satisfaz

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = -h'(t), & t, x > 0, \\ w(x, 0) = \phi(x) - h(0), & x > 0, \\ w(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (5.27)$$

que por ter a forma do caso anterior já sabemos resolver.

- Se nos problemas (5.23)–(5.24) tivermos a condição de borda não homogênea de tipo Neumann $u_x(0, t) = h(t)$, podemos usar a mudança $w(x, t) = u(x, t) - x h(t)$.
- No caso da onda podemos resolver os problemas acima de uma forma mais simples.

Vejam os por exemplo o cálculo da solução do problema (5.23) com $\phi = \psi = 0$ e condição de Dirichlet $u(0, t) = h(t)$. Observe que para obter a solução com $\phi, \psi \neq 0$ será suficiente adicionar a solução de (5.23), pelo princípio de sobreposição.

Como já comentamos, quando $x \geq ct$ a solução dependerá apenas das condições iniciais e logo será 0. Para calcular a solução com $x < ct$ desenhamos o quadrilátero característico com um vértice em (x, t) , outro em $(0, t - x/c)$ e os demais na característica $x = ct$. Como $u = 0$ nestes últimos dois, teremos $u(x, t) = u(0, t - x/c) = h(t - x/c)$. A solução completa é então

$$\begin{cases} h(t - x/c), & \text{se } x < ct, \\ 0, & \text{se } x \geq ct. \end{cases} \quad (5.28)$$

Neste caso a solução é de classe \mathcal{C}^2 (clássica) só se $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$.

Mais em geral, considerando todas as condições ϕ, ψ, h (regulares) juntas, precisará pedir

$$\begin{cases} u(0, 0) = h(0) = \phi(0), \\ u_t(0, 0) = h'(0) = \psi(0), \\ u_{tt}(0, 0) = u_{xx}(0, 0) = h''(0) = \phi''(0). \end{cases}$$

As primeiras duas condições são necessárias para não ter uma descontinuidade na origem (no modelo da corda, não estariam satisfeitas apenas se o extremo inicialmente na posição $\phi(0)$ com velocidade $\psi(0)$ fosse abruptamente deslocado ou acelerado). A condição $h''(0) = \phi''(0)$ é menos natural, ela serve para que a equação da onda esteja satisfeita perto da origem, mas não tem um motivo físico para valer: quando não estiver satisfeita, a solução (generalizada) terá singularidades na derivada segunda propagando ao longo da característica.

Também podemos usar este método para o **problema misto** (condições iniciais e de fronteira) em um segmento:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & \text{para } t > 0, x \in (a, b), \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{para } x \in (a, b), \\ u(a, t) = \alpha(t), \quad u(b, t) = \beta(t) & \text{para } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

Neste caso, primeiro calculamos a solução no triângulo de base $[a, b] \times \{0\}$ e lados característicos via fórmula de D'Alambert. Em seguida, calculamos a solução nos triângulos laterais, até o tempo $t_1 = (b - a)/2c$, usando a (5.13), tomando dois pontos na região já calculada e um terceiro nas bordas laterais. A partir deste ponto podemos usar u e u_t no tempo t_1 como nova condição inicial e continuando desta maneira pode ser calculada a solução para todo $t > 0$. Note que eventuais singularidades propagando nas características que passam pelos vértices $(a, 0)$ e $(b, 0)$, serão "refletidas" ao encontrar as bordas, gerando uma rede de singularidades.

Exercício 5.19. Obtenha a solução para o problema (5.23) com $\phi = \psi = 0$ e condição de Neumann $u_x(0, t) = h(t)$, seguindo os passos:

- verifique que u_x satisfaz o problema de Dirichlet com condição de borda h ;
- use a fórmula (5.28) para calcular u_x ;
- calcule u com uma oportuna integração;
- verifique o resultado diretamente.

★

Exercício 5.20. Resolva (5.29) com $[a, b] = [0, \pi]$, $\alpha \equiv \beta \equiv 0$, $\phi = \pi/2 - |x - \pi/2|$ e $\psi = 0$ (corda picada no meio) usando (5.13). Resolva também usando série de Fourier (veja na seção 5.5) e verifique que a série obtida converge à mesma solução. ★

5.4 Princípio do Máximo para o calor

Nesta seção veremos uma importante propriedade da equação do calor. Consideremos o problema misto para o calor (PΩ-C). Fixado um tempo $T > 0$, denotemos por $U_T =$

$\Omega \times (0, T)$, por $\Lambda_T = \Omega \times \{T\}$ e por $\Gamma_T = \partial U_T \setminus \Lambda_T$, isto é, separamos a borda de U_T nas duas componentes que incluem, respectivamente, a “tampa” superior, e tampa inferior junto com as bordas laterais; observe que as condições em (PΩ-C) são dadas exatamente em Γ_T , que é chamada de **fronteira parabólica de U_T** .

Um resultado importante para o estudo do problema (PΩ-C) é o seguinte **princípio do máximo**:

Teorema 5.21. *Se $u \in \mathcal{C}^2(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$ satisfaz $u_t - \Delta u \leq 0$ em U_T , então*

$$\max_{(x,t) \in \overline{U_T}} u(x,t) = \max_{(x,t) \in \Gamma_T} u(x,t). \quad (5.30)$$

Se $u_t - \Delta u \geq 0$ a afirmação (5.30) vale para os mínimos, e se $u_t - \Delta u = 0$ valem as duas.

Demonstração. Primeiro consideremos o caso $u_t - \Delta u < 0$: seja (x, t) um ponto no qual é atingido o máximo em $\overline{U_T}$:

- se $(x, t) \in U_T$ então necessariamente $u_t = 0$ e $\Delta u \leq 0$, contradição;
- se $(x, t) \in \Lambda_T$ então necessariamente $u_t \geq 0$ e $\Delta u \leq 0$, contradição.⁷

Logo necessariamente $(x, t) \in \Gamma_T$, isto é,

$$\max_{\overline{U_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u,$$

enquanto a relação $\max_{\overline{U_T}} u \geq \max_{\Gamma_T} u$ é imediata já que $\Gamma_T \subseteq \overline{U_T}$.

Agora consideremos o caso geral $u_t - \Delta u \leq 0$ e seja $v = u - kt$ com $k > 0$, assim

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - k < 0,$$

logo pela conta anterior $\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v$, logo

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\overline{U_T}} (v + kt) \leq (\max_{\overline{U_T}} v) + kT = (\max_{\Gamma_T} v) + kT \leq (\max_{\Gamma_T} u) + kT;$$

como T é fixado, fazendo $k \rightarrow 0$ obtemos $\max_{\overline{U_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u$ e de novo a desigualdade inversa é trivial.

Pela linearidade, podemos aplicar o resultado a $-u$ obtendo a afirmação para os mínimos. \square

Podemos deduzir do Teorema 5.21 os seguintes resultados de **unicidade e dependência contínua dos dados** para o problema (PΩ-C):

Teorema 5.22. *Se $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$ são soluções do problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, T), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = h & x \in \partial\Omega, t \in (0, T). \end{cases}$$

⁷Aqui para simplificar assumimos que u seja \mathcal{C}^2 até a tampa Λ_T , para poder avaliar u_t e Δu , e não apenas em U_T como na hipótese. No caso geral precisa mostrar o resultado em um conjunto menor $\overline{U_{T-\varepsilon}}$ e depois tomar limite para $\varepsilon \searrow 0$ usando a continuidade até Λ_T (veja em [Mas]).

com a mesma F e com dados, respectivamente, ϕ_1, h_1 e ϕ_2, h_2 , então

$$\max_{\bar{U}_T} |u_1 - u_2| \leq \max \{|\phi_1 - \phi_2|, |h_1 - h_2|\}.$$

Em particular, a solução é única.

Estes resultados valem também se substituirmos T por $+\infty$, isto é, para o problema (P Ω -C), já que valem para todo $T > 0$.

O resultado acima mostra que o problema de Dirichlet para a equação do calor (isto é, impondo o valor de u em toda ∂U_T) seria mal posto, já que são suficientes os dados em Γ_T para determinar unicamente a solução.

5.5 Problemas mistos via separação de variáveis

Se Ω é um segmento (fixaremos o caso $\Omega = (0, \pi)$), podemos tentar resolver a equação do calor ou da onda em $\Omega \times (0, \infty)$, com condições de fronteira de tipo Dirichlet e/ou Neumann (homogêneos) via separação de variáveis (veja na Seção 1.1.5). Procurando uma solução na forma $u(x, t) = T(t)X(x)$, obtemos, para $X, T \neq 0$,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ no caso do calor,} \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ no caso da onda.}$$

Como lado direito e esquerdo dependem cada um de uma das variáveis, necessariamente serão constantes. Isso nos leva a querer resolver, no caso com condição de Dirichlet, um problema na variável x na forma

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X & \text{em } (0, \pi), \\ X(0) = 0 = X(\pi), \end{cases} \quad (5.31)$$

onde λ é um parâmetro real.

O problema (5.31) é chamado *problema de autovalores*. Como as soluções da equação são da forma

$$\begin{cases} A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) & \text{se } \lambda > 0, \\ A \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B \sinh(\sqrt{-\lambda}x) & \text{se } \lambda < 0, \\ A + Bx & \text{se } \lambda = 0, \end{cases}$$

impondo $X(0) = 0$ obtemos $A = 0$, em seguida impondo $X(\pi) = 0$ descobrimos que isso só é possível com $B \neq 0$ se $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, ou seja se $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Logo as soluções não triviais correspondentes a $\lambda = n^2$ serão da forma $B \sin(nx)$.

Resolvendo agora $T' = -\lambda T$ obtemos soluções da forma $Ce^{-\lambda t}$, para o calor, enquanto para a onda resolvemos $T'' = -\lambda T$ obtendo soluções da forma $C \sin(\sqrt{\lambda}t) + D \cos(\sqrt{\lambda}t)$.

Obtivemos então soluções da equação do calor da forma

$$Ce^{-n^2 t} \sin(nx)$$

e soluções da equação da onda da forma

$$[C \sin(nt) + D \cos(nt)] \sin(nx).$$

Como os problemas são lineares, também combinações lineares de soluções são soluções. Chegamos então no seguinte resultado.

Se, no caso do calor, a condição inicial for

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(nx), \quad (5.32)$$

então a (única) solução será

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx). \quad (5.33)$$

No caso da onda, com condições

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(nx), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \sin(nx) \quad (5.34)$$

teremos a (única) solução

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[a_n \cos(nt) + \frac{b_n}{n} \sin(nt) \right] \sin(nx). \quad (5.35)$$

Por enquanto podemos pensar as somas acima como sendo finitas (N finito), mas veremos na Seção 5.5.1 que com oportunas hipóteses o método funciona também com séries ($N = \mathbb{N}$).

Das fórmulas acima podemos fazer algumas observações.

- Em (5.33), solução da eq. do calor, a amplitude de cada componente sinusoidal da condição inicial decresce com velocidade exponencial (dissipação), tanto mais rápido quanto maior é o parâmetro n .
- Em (5.35), solução da eq. da onda, a amplitude de cada componente oscila periodicamente com frequência proporcional a n .
- Podemos ver nas soluções do calor a validade do princípio de máximo, já que em vista do decaimento o máximo e o mínimo são sempre atingido em $t = 0$ ou nos extremos, enquanto nas soluções da onda, sendo periódicas, eles serão atingidos infinitas vezes também em pontos interiores.
- É interessante também observar, nas fórmulas acima, os *resultados de regularidade*:

- no caso do calor, uma condição inicial do tipo $\sin(x) + \sin(8x)$, dará a solução $e^{-t} \sin(x) + e^{-64t} \sin(8x)$: a componente de alta oscilação $\sin(8x)$ decairá muito rapidamente, assim que depois de pouco tempo a solução será quase idêntica à gerada pela condição inicial $\sin(x)$.
- no caso da onda, a mesma condição inicial (pondo $\psi = 0$) dará a solução $\cos(t) \sin(x) + \cos(8t) \sin(8x)$: a componente de alta oscilação $\sin(8x)$ não decai, ao contrario ela oscila com frequência alta, e a solução se repete periodicamente no tempo.

Podemos trabalhar da mesma forma também considerando condições de Robin ou de Neumann, e inclusive condições diferentes nos dois extremos: em cada caso teremos, no lugar de (5.31), um diferente problema de autovalores com suas soluções não triviais em correspondência de certos valores de λ .

No caso de **condições de Neumann**, as soluções não triviais em $[0, \pi]$ têm a forma $A \cos(nx)$, incluindo também o caso $n = 0$ em que a solução é uma constante.

Uma consequência interessante é a seguinte: com condições de Dirichlet, a solução do calor decai sempre pelo menos como e^{-t} , enquanto no caso de condições de Neumann, a condição inicial pode conter um adendo constante que não decairá, o que indica que o valor médio da solução é constante. Isso é lógico também pelo significado físico: no caso Dirichlet a borda é mantida a temperatura 0 e o calor pode fluir pelas bordas até uniformizar a temperatura em Ω , enquanto no caso Neumann a borda é isolada termicamente assim o calor pode apenas redistribuir-se em Ω .

5.5.1 Aplicando séries de Fourier

Nesta seção usaremos a teoria que está resumida na Apêndice do capítulo, seção 5.6.

Voltemos a considerar os problemas para onda e calor em $[0, \pi]$, com condição de Dirichlet. Dada uma função definida em $[0, \pi]$ podemos estendê-la de modo ímpar em $[-\pi, 0]$ e depois de modo 2π periódico a todo \mathbb{R} . Desta forma ela poderá ser associada a sua série de Fourier, que será uma série só de senos.

Se (5.32) (ou (5.34)) são as séries de Fourier dos dados, poderemos então tomar (5.33) (ou (5.35)) como candidatas soluções. Apenas faltará verificar a convergência apropriada.

Caso onda:

Suponha que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| + |b_n| < \infty$ (por exemplo isto pode ser garantido se $a_n, b_n \leq C/n^2$).

Então, pelo teste de Weierstrass, as (5.34) convergem uniformemente e (5.35) também. Porém, derivando k vezes termo a termo (em t ou em x) (5.35), obtemos uma série que poderia não convergir, já que não sabemos se $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^k |a_n|, \sum_{n \in \mathbb{N}} n^k |b_n| < \infty$, logo não podemos afirmar que (5.35) forneça uma solução clássica da eq. da onda, nem sequer que seja derivável.

Uma forma de garantir isso é assumir que as condições iniciais (5.34) satisfaçam a condição mais forte $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|) < \infty$: desta forma as séries das derivadas segundas

feitas derivando termo a termo serão uniformemente convergentes e logo (Teorema 5.27) convergirão às derivadas de (5.35), provando que esta última é uma função de classe \mathcal{C}^2 e que satisfaz a equação da onda (além das condições iniciais e na borda).

Observação 5.23. Sem assumir a condição acima, mas apenas a convergência de (5.34), podemos mostrar que (5.35) ainda é uma solução em sentido generalizado, de fato, apesar de não definir uma função \mathcal{C}^2 , podemos mostrar que ela satisfaz a fórmula de D’Alambert.

Vejamos isso assumindo $\psi = 0$: da fórmula de D’Alambert e substituindo (5.34) temos

$$2u(x, t) = \phi(x + t) + \phi(x - t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(n(x + t)) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(n(x - t)),$$

onde as séries convergem. Usando as formulas de adição da trigonometria $\sin(n(x \pm t)) = \sin(nx) \cos(nt) \pm \sin(nt) \cos(nx)$, obtemos a (5.35):

$$2u(x, t) = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(nx) \cos(nt).$$

◁

Caso calor:

No caso do calor, observe que fixado $\bar{t} > 0$ qualquer, podemos estimar

$$n^k e^{-n^2 t} \leq C/n^2, \quad \text{para todo } t \geq \bar{t},$$

onde C depende apenas de \bar{t} e de k .

Isto significa que a série das derivadas termo a termo de (5.33), de qualquer ordem em t e em x , será uniformemente convergente em $[0, \pi] \times [\bar{t}, \infty)$, e logo a função definida em (5.33) é de classe \mathcal{C}^∞ e satisfaz a equação do calor para todo $t > 0$ (note que apenas precisa assumir que a sequência dos coeficientes a_n seja limitada!).

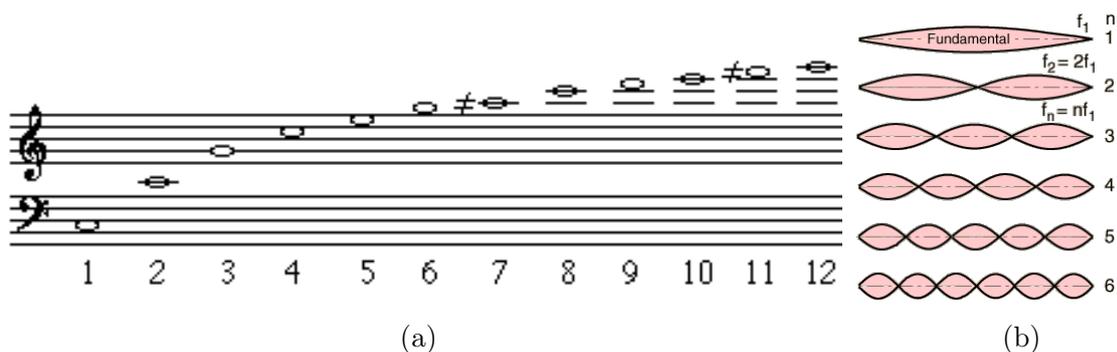
Observação 5.24. Neste resultado via séries, vimos de novo o efeito regularizante da eq. do calor, já que uma condição inicial pouco regular (com coeficientes que decrescem lentamente com n) produz uma solução infinitas vezes derivável para $t > 0$, em função dos termos $e^{-n^2 t}$ que aceleram o decrescimento dos coeficientes. Ao contrário, de novo a regularidade da solução da onda é proporcional à regularidade dos dados, já que os coeficientes da solução têm o mesmo andamento dos coeficientes dos dados. ◁

Aplicação 5.25. [Vibração de uma corda.]

A solução vista da equação da onda no segmento permite entender alguns aspectos da vibração de uma corda de guitarra.

Uma corda que em $t = 0$ tem velocidade nula e posição dada por $\sin(nx)$, vibrará com lei $u(x, t) = \cos(nt) \sin(nx)$.

A tonalidade do som depende da frequência: o caso $n = 1$ corresponderá ao som mais grave (harmônica fundamental), $n = 2$ a um som de frequência dupla (mesma nota mas

Figura 5.1: Harmônicas de D_{02} .

uma oitava acima), $n = 3$ será ainda mais agudo e $n = 4$ será de novo a nota fundamental mas duas oitavas acima. Na figura 5.1 são representadas as notas correspondentes às harmônicas de uma corda cujo som fundamental é D_{02} , junto com a forma da vibração das primeiras 6 harmônicas, correspondentes a $D_{02}, D_{03}, Sol_3, D_{04}, Mi_4, Sol_4$

Se a posição inicial da corda não é uma senoide (o que acontece quando se toca a guitarra), poderá ser escrita como uma sobreposição de sinusoides (série de Fourier). Por isso o som gerado será uma sobreposição dos sons descritos acima, produzindo o timbre característico da guitarra.

Se a mesma corda é tocada fixando o ponto médio (pondo o dedo na chave correspondente), a solução não poderá ter a componente fundamental $\sin(x)$ e logo o som terá a frequência fundamental dupla, produzindo a nota uma oitava mais alta.

Observe que se a corda fosse tocada pelo centro, a condição inicial seria simétrica e logo não conteria nenhuma componente de n par, resultando num som menos rico, enquanto tocando no quarto da corda todas as harmônicas tocam juntas.

Podemos também observar que, repetindo as contas com o parâmetro c^2 na equação, obteríamos soluções da forma

$$u(x, t) = \sum \left[a_n \cos(cnt) + \frac{b_n}{n} \sin(cnt) \right] \sin(nx),$$

o que nos mostra que a mesma condição inicial produzirá uma frequência de oscilação (nota) diferente, em função do parâmetro c , que como vimos na Dedução 4.2, depende da tensão e da densidade da corda (de fato, para acordar a guitarra precisamos modificar a tensão, e podemos ver que as cordas das notas mais graves são mais grossas).

5.6 Apêndice do Capítulo: Séries de Fourier

5.6.1 Limites, derivadas e integrais de séries

Lembramos a seguinte definição:

Definição: A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente⁸ em A à função $S(x)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} \left| S(x) - \sum_{n=1}^k f_n(x) \right| = 0.$$

Uma Condição para conv. uniforme (apenas suficiente, não necessária) é o chamado **Teste de Weierstrass**: se $\sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em A .

A convergência uniforme⁹ é importante pelo seu papel nos teoremas abaixo:

Teorema 5.26. *Suponha que a série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convirja **uniformemente** em A .*

1) *Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n = L_n$ então*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n \in \mathbb{R}.$$

2) *Se as f_n são contínuas em A então S é contínua em A .*

3) *Se as f_n são integráveis em $[a, b]$ então S é integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right),$$

além disso a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x f_n(x) dx \right)$ converge uniformemente a $\int_a^x S(x) dx$ em $[a, b]$.

Para derivar uma série, as hipóteses do teorema anterior não são suficientes, precisamos do seguinte:

Teorema 5.27. *Suponha que a série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, com f_n deriváveis, convirja em pelo menos um ponto em $[a, b]$, enquanto $D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge **uniformemente** em $[a, b]$.*

Então S é derivável e $S' = D$.

5.6.2 Séries trigonométricas

Precisaremos das seguintes identidades, sendo $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) = 0, & , \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) = 0, & \text{se } n \neq k, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \pi. \end{cases} \quad (5.36)$$

⁸Repare a diferença com a noção (mais fraca) de convergência pontual em A , onde pedimos que para cada $x \in A$ fixado, $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| S(x) - \sum_{n=1}^k f_n(x) \right| = 0$.

⁹Se no Teorema 5.26 a convergência fosse apenas pontual, os resultados poderiam ser falsos.

As relações (5.36) dizem que as funções

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.37)$$

formam uma **família ortonormal** com respeito ao produto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)$.

Definição 5.28. Chamamos **Polinômio trigonométrico de ordem k**

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Chamamos **Série trigonométrica (ou de Fourier)**

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \quad (5.38)$$

◁

Suponhamos agora que uma série trigonométrica S convirja uniformemente, então podemos integrar por séries (pelo Teorema 5.26) e usando as relações (5.36), obtemos as **Fórmulas de Euler - Fourier**:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) = a_0\pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos(nx) = a_n\pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin(nx) = b_n\pi. \end{cases} \quad (5.39)$$

Em vista disso, definimos:

Definição 5.29. Dada $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente integrável,¹⁰ chamamos **Série de Fourier de f** , a série trigonométrica S_f cujos coeficientes são calculados pelas (5.39) com f no lugar de S .

Vejam agora qual é a relação entre f e S_f . Observemos inicialmente que

- se f é par então $b_n = 0 \forall n$ (S_f é uma série de cossenos, logo é par);
- se f é ímpar então $a_n = 0 \forall n$ (S_f é uma série de senos, logo é ímpar);
- se f tem descontinuidades e S_f converge uniformemente, certamente $f \neq S_f$!

Apesar da última observação acima, fortunadamente, se f é regular, conseguiremos mostrar que $S_f \rightarrow f$.

¹⁰Mais em geral, num intervalo $[-L, L]$ as Fórmulas de Euler - Fourier tornam-se

$$\begin{cases} \frac{1}{L} \int_{-L}^L S(x) = a_0, \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L S(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = a_n, \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L S(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = b_n, \end{cases} \quad (5.40)$$

e a série se escreve

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right).$$

5.6.3 Teoria L^2

Um primeiro resultado sobre a convergência de S_f a f pode ser obtido considerando convergência no sentido integral: vale o seguinte Teorema.

Teorema 5.30. *Se f^2 é integrável em $[-\pi, \pi]$, S_f é sua série de Fourier e $(S_f)_k$ é a soma parcial de S_f para n até k , então*

1. $\sum a_n^2 + b_n^2$ converge e logo $a_n, b_n \rightarrow 0$;
2. $\int_{-\pi}^{\pi} (f - (S_f)_k)^2 \rightarrow 0$;
3. $\int_{-\pi}^{\pi} (f - (S_f)_k)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - (S_f)_k^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - T_k)^2$ para qualquer outro pol. trig. T_k de ordem k ;
4. $\int_{-\pi}^{\pi} (S_f)_k^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n^2 + b_n^2 \right) \nearrow \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right) = \int_{-\pi}^{\pi} (S_f)^2$.

Observe que o ponto (1) não garante a convergência uniforme (o teste de Weierstrass precisaria que $\sum |a_n| + |b_n|$ convergisse, que é uma condição mais forte).

O ponto (2) significa que $(S_f)_k \rightarrow f$ na métrica gerada pelo produto escalar $\langle f, g \rangle$, além disso, o ponto (3) diz que, nesta métrica, $(S_f)_k$ é o polinômio trigonométrico de ordem k mais perto de f .

O Teorema 5.30 é consequência do fato que o sistema (5.36) forma uma **base Hilbertiana**¹¹ no espaço $X = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f^2 < \infty \right\}$ dotado do produto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$.

As fórmulas (5.39) e (5.38) correspondem ao fato que dado o sistema $\{e_i\}$ ortonormal em X , se $f = \sum \alpha_i e_i$ então $\langle f, e_i \rangle = \alpha_i$, além disso (pontos 2 e 3 do Teorema) $\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$ é a projeção de f no subespaço gerado por e_1, \dots, e_k e converge a f quando $k \rightarrow \infty$.

5.6.4 Convergência pontual e uniforme

Vejamos agora alguns resultados sobre convergência pontual e uniforme de S_f .

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica e absolutamente integrável em $[-\pi, \pi]$, contínua (exceto talvez em um número finito de pontos de $[-\pi, \pi]$, nos quais devem existir finitos os limites laterais). Nesta situação valem os Teoremas abaixo:

Teorema 5.31. *(Convergência pontual)*

Se f é contínua em x_0 e existem finitas as derivadas laterais em x_0 então S_f converge a f em x_0 .

Teorema 5.32. *(Convergência uniforme local)*

Se f é derivável exceto em um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$), nos quais existem os limites laterais de f e de f' , então S_f converge a f uniformemente em qualquer intervalo fechado $[a, b]$ no qual f seja contínua.

¹¹O mesmo resultado vale para qualquer escolha de uma base hortonormal!

Teorema 5.33. (Convergência uniforme global)

Se f é contínua, e além disso é derivável exceto em um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$), nos quais existem as derivadas laterais, então S_f converge a f uniformemente.

No caso de função \mathcal{C}^2 o resultado de conv. uniforme é fácil de provar, e nos fornece também uma estimativa para os coeficientes:

Teorema 5.34. Seja $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, 2π periódica.

Então os coeficientes satisfazem

$$|a_n, b_n| \leq \frac{2|f''|_\infty}{n^2}$$

e logo $S_f \rightarrow f$ uniformemente em \mathbb{R} .

Demonstração. Temos

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Integrando por partes

$$\pi a_n = \left[f(x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx$$

onde o primeiro termo é zero pela periodicidade de f . Integrando por partes de novo (ainda o termo de borda será nulo)

$$\pi a_n = - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \frac{\cos(nx)}{n^2} dx;$$

estimando a integral, já que $|f''|_\infty$ será finita, obtemos

$$\pi a_n \leq \frac{2\pi|f''|_\infty}{n^2}.$$

A mesma conta pode ser feita para os b_n .

Com a estimativa dada a convergência uniforme é consequência do teste de Weierstrass. \square

Exemplo 5.35. Alguns exemplos de funções e as séries de Fourier correspondentes: (faça as contas!)

- $f = \operatorname{sgn}(x)$ em $[-\pi, \pi]$: $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$, isto é, $\frac{4}{n\pi}$ só para n ímpar.

Esta função tem descontinuidades em 0 e nos extremos $\pm\pi$. Pelo teorema 5.31 $S_f \rightarrow f$ pontualmente em todos os pontos exceto nas descontinuidades, onde a série converge ao ponto médio da descontinuidade que é 0. A convergência não pode ser uniforme em todo \mathbb{R} (de fato a série dos coeficientes $\frac{4}{n\pi}$ diverge), mas o será em fechados que não contenham os pontos de descontinuidade. .

- $f = |x|$ em $[-\pi, \pi]$: $b_n = 0$, $a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{n^2\pi} [\cos(n\pi) - 1]$, isto é, $-\frac{4}{n^2\pi}$ só para n ímpar.

Esta função é contínua e $S_f \rightarrow f$ uniformemente em \mathbb{R} , o que pode visto pelo Teorema 5.33 e também pelo teste de Weierstrass, já que a série dos coeficientes $\frac{4}{n^2\pi}$ converge.

- $f = x$ em $[-\pi, \pi]$: $a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi)$, isto é, $-(-1)^n \frac{2}{n}$.

Esta função tem descontinuidades nos extremos $\pm\pi$, logo um comportamento parecido à primeira.

- $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \sin^2(x)$ em $[-\pi, \pi]$: $S_f = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)(2n+1)(2n-3)}$.

Esta função é C^1 mas tem descontinuidades na derivada segunda. Logo a convergência é uniforme. Podemos ver que os coeficientes decaem mais rapidamente que nas séries anteriores.

5.6.5 Escrita complexa

Frequentemente é útil a seguinte forma alternativa de escrever a série de Fourier, em notação complexa.

Pondo

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-inx} = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2} & n > 0, \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0, \end{cases}$$

obtemos¹²

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

5.7 Referências

Para complementar os assuntos sobre séries de Fourier, além da referência [Str08], pode consultar [dF77, Cap.2,3].

¹²No caso em $[-L, L]$ seria

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L S(x) e^{-inx \frac{\pi}{L}},$$

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx \frac{\pi}{L}}.$$

Capítulo 6

O Laplaciano

Nesta seção estudaremos equações envolvendo o operador Laplaciano, em particular as equações

$$-\Delta u = f(x) \quad e \quad -\Delta u = 0; \quad (6.1)$$

a primeira é chamada **equação de Poisson**, enquanto sua versão homogênea é dita **equação de Laplace**. Observe que estas equações são comumente escritas com o sinal menos antes do operador: veremos mais tarde o porque.

Uma função $u \in C^2(\Omega)$ que satisfaz a equação de Laplace $-\Delta u = 0$ é dita **função harmônica**.

Já vimos no exercício 1.7 que o problema de Cauchy para o Laplaciano é mal posto. Neste caso, sendo o operador invariante, não muda nada trocando de superfície dos dados, como fizemos no exemplo 1.8 para a equação da onda. Inclusive não se conhecem problemas físicos para o operador Laplaciano pelos quais tenha sentido impor um problema de Cauchy. Por outro lado, como o operador é elíptico, não teremos nenhuma restrição quanto à orientação da superfície onde poremos dados. Por isso é viável pôr condições na borda de um aberto (fazendo isso com a onda, por exemplo, teria sempre algum ponto característico).

Como o tipo de problema físico no qual aparece o Laplaciano é o de encontrar a solução dentro de uma região conhecendo algum dato na fronteira, não terá utilidade procurar solução local, pois mesmo existindo uma solução perto da superfície esta poderá depois não poder "fechar" na região inteira. Por isso os problemas deste tipo são mais complicados e o problema da existência será bem mais crítico. Isso também é coerente com a interpretação física: no caso da onda e do calor o problema físico é o de prever a evolução de um sistema dada uma certa condição inicial: a variável tempo é distinta das outras e como vimos tem uma certa direção nas relações de influência: a solução em (x, t) depende apenas do passado. Nos problemas com o Laplaciano o que procuramos é uma solução de equilíbrio, logo todos os pontos influem sobre os outros, e nem sempre tem um motivo físico para ter certeza que uma solução exista.

O exercício a seguir nos mostra algumas propriedades que nos sugerem quais tipos de problema podem ser bem postos para o Laplaciano.

Exercício 6.1 (Laplaciano em um quadrado). Considere o Problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } Q = (0, \pi) \times (0, \pi), \\ u = 0 & \text{nos três lados } x = 0, y = 0 \text{ e } x = \pi. \end{cases} \quad (\text{P})$$

- a) Resolva o problema (P) por separação de variáveis. Repare que existem infinitas soluções (problema mal posto: faltam condições).
 - b) Adicione a (P) a condição $u_y(x, 0) = \sin(nx)$ (este seria um problema bem posto para a onda!). Repare que existe uma única solução (a var. sep.), mas ela torna-se sempre maior se $n \rightarrow \infty$ (problema mal posto: falta de dep. contínua dos dados)
 - c) Adicione a (P) a condição $u(x, \pi) = \sin(nx)$. Repare que existe uma única solução (a var. sep.), e $|u| \leq 1$ (problema aparentemente bem posto).
 - d) Adicione a (P) a condição $u_y(x, \pi) = \sin(nx)$. Repare que existe uma única solução (a var. sep.), e vale $|u|, |u_x|, |u_y| \leq 1$ e também $|u| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$ (problema aparentemente bem posto)
- Use os resultados anteriores para escrever a solução quando, nos casos b,c,d, a condição $\sin(nx)$ é substituída por uma função g desenvolvível em série de senos:

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

(calcule os coeficientes da série da possível solução em termos dos coeficientes b_n).

Justifique as seguintes afirmações:

- no caso (b) se $b_n \simeq \frac{1}{n^k} : k \in \mathbb{N}$ então a série para u não converge. Uma condição suficiente para garantir a convergência é $|b_n| \leq e^{-4n}$. (*Isso significa que precisa uma g muito regular para ter solução*)
- nos casos (c,d) se b_n é uma seq. limitada então a série para u converge uniformemente em qualquer compacto K contido em Q . Também a série das derivadas termo a termo de qualquer ordem converge uniformemente em K . Além disso, se $|b_n| \leq C/n^2$ então a série para u (ou para u_y) converge ao dato na borda de Q . (Isso significa que mesmo com g pouco regular a solução existe e é C^∞ em Q).

★

6.1 Laplaciano em diferentes coordenadas

Em vista da invariância com respeito a rotações, vejamos como podemos expressar o Laplaciano de uma função radial, ou em coordenadas polares.

Laplaciano em \mathbb{R}^n para função radial:Se $u(\mathbf{x}) = v(|\mathbf{x}|) = v(\rho)$ então

$$\Delta u = v_{\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho} v_{\rho}. \quad (6.2)$$

Demonstração. Seja

$$\rho = \sqrt{\sum x_i^2},$$

então

$$\rho_{x_i} = \frac{x_i}{\rho}, \quad \rho_{x_i x_i} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{x_i}{\rho} x_i = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x_i^2}{\rho^2}\right).$$

Calculemos então

$$u_{x_i}(\mathbf{x}) = v'(|\mathbf{x}|) \frac{x_i}{\rho},$$

$$u_{x_i x_i}(\mathbf{x}) = v''(|\mathbf{x}|) \frac{x_i^2}{\rho^2} + v'(|\mathbf{x}|) \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x_i^2}{\rho^2}\right),$$

somando nas n variáveis obtemos (6.2):

$$\Delta u(\mathbf{x}) = v''(|\mathbf{x}|) \sum \frac{x_i^2}{\rho^2} + v'(|\mathbf{x}|) \frac{1}{\rho} \sum \left(1 - \frac{x_i^2}{\rho^2}\right) = v''(|\mathbf{x}|) + v'(|\mathbf{x}|) \frac{1}{\rho} (n-1).$$

□

Laplaciano em \mathbb{R}^2 em coordenadas polares:Se $v(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ então

$$\Delta u = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta}. \quad (6.3)$$

Demonstração. Calculamos (abreviando $C_{\theta} = \cos \theta$, $S_{\theta} = \sin \theta$)

$$v_{\rho} = u_x C_{\theta} + u_y S_{\theta}, \quad (6.4)$$

$$v_{\rho\rho} = u_{xx} C_{\theta}^2 + 2u_{xy} C_{\theta} S_{\theta} + u_{yy} S_{\theta}^2, \quad (6.5)$$

$$v_{\theta} = \rho (-u_x S_{\theta} + u_y C_{\theta}), \quad (6.6)$$

$$v_{\theta\theta} = \rho^2 (u_{xx} S_{\theta}^2 - 2u_{xy} C_{\theta} S_{\theta} + u_{yy} C_{\theta}^2) + \rho (-u_x C_{\theta} - u_y S_{\theta}). \quad (6.7)$$

Como o conteúdo da primeira parentese em (6.7) somado com (6.5) dá Δu enquanto o conteúdo da segunda é o oposto de (6.4), obtemos (6.3). □

Laplaciano em \mathbb{R}^3 em coordenadas esféricas

Se $v(\rho, \theta, \varphi) = u(\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi))$ então

$$\Delta u = v_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}v_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left[v_{\varphi\varphi} + \cot(\varphi)v_{\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi}v_{\theta\theta} \right].$$

6.1.1 Equação de Laplace em coordenadas polares

Considerando a equação de Laplace $-\Delta u = 0$ e pondo $\rho = e^{-t}$ em (6.3), isto é, definindo $w(t, \theta) = v(e^{-t}, \theta) = u(e^{-t} \cos \theta, e^{-t} \sin \theta)$, temos

$$w_t = -v_{\rho}e^{-t}, \quad w_{tt} = v_{\rho\rho}e^{-2t} + v_{\rho}e^{-t} = v_{\rho\rho}\rho^2 + v_{\rho}\rho,$$

e então a equação para w torna-se

$$w_{tt} + w_{\theta\theta} = 0.$$

Separando variáveis, procuramos $w(t, \theta) = T(t)\Theta(\theta)$, obtendo, para $T, \Theta \neq 0$,

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda.$$

Isso nos leva a querer resolver o problema na variável θ , com a condição natural de 2π -periodicidade,

$$\begin{cases} -\Theta'' = \lambda\Theta & \text{em } (0, 2\pi), \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi), \end{cases} \quad (6.8)$$

onde λ é um parâmetro real. O problema de autovalores (6.8), parecido com (5.31), tem soluções apenas se $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sendo elas

$$\begin{cases} A & \text{se } n = 0, \\ A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta) & \text{se } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

As soluções correspondentes para T serão

$$\begin{cases} C + Dt = C - D \ln(\rho) & \text{se } n = 0, \\ Ce^{-nt} + De^{nt} = C\rho^n + D\rho^{-n} & \text{se } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Obtivemos então as seguintes famílias de funções harmônicas em duas variáveis (em coordenadas polares):

$$\begin{cases} 1, & \ln(\rho), \\ \rho^n \cos(n\theta), & \rho^n \sin(n\theta), \\ \rho^{-n} \cos(n\theta), & \rho^{-n} \sin(n\theta). \end{cases}$$

Alguns exemplos, escritos em coordenadas cartesianas, são

$$\begin{cases} 1, & \ln(\rho) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \\ \rho^2 \cos(2\theta) = x^2 - y^2, & \rho^2 \sin(2\theta) = 2xy, \\ \rho^{-2} \cos(2\theta) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \rho^{-2} \sin(2\theta) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \rho^4 \cos(4\theta) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2, & \rho^4 \sin(4\theta) = 4xy(x^2 - y^2). \end{cases}$$

Note que as funções correspondentes a $\ln(\rho)$ e a ρ^{-n} são definidas apenas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

6.1.2 Equação de Laplace no círculo

Trabalhando no círculo de raio 1, $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$, podemos eliminar as soluções singulares na origem (elas poderiam ser úteis em problemas externos). Sobrepondo as soluções que restam obtemos a série

$$v(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)], \quad (6.9)$$

que representa uma função harmônica em coordenadas polares.

Podemos calcular os valores de v e de sua derivada radial em $\rho = 1$:

$$v(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \quad (6.10)$$

$$v_\rho(1, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n \cos(n\theta) + n b_n \sin(n\theta). \quad (6.11)$$

Percebemos que $v(1, \theta)$ (o valor em $\partial\Omega$) é suficiente para determinar todos os coeficientes da solução. Isso significa que não poderemos impor também o valor da derivada normal, como seria o caso em um problema de Cauchy. Aparentemente o problema de Dirichlet é o que permite obter uma única solução.

Se considerarmos em vez o problema de Neumann, percebemos que $v_\rho(1, \theta)$ (o valor da derivada normal em $\partial\Omega$) tem necessariamente média nula (por ser expresso por uma série de Fourier sem o termo constante), e por outro lado vemos que ficará indeterminado o valor do coeficiente a_0 da solução (reveremos melhor este fato na Seção 6.3).

Em resumo,

- não é possível impor arbitrariamente u e u_ν em $\partial\Omega$,¹

¹Na verdade, poderíamos sim resolver um problema de Cauchy posto na circunferência (com dados regulares o teorema de Cauchy-Kowalevski garante isso), se incluíssemos também as harmônicas que descartamos: teríamos

$$v(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \alpha_0 \ln(\rho) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] + \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^{-n} [\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)]$$

- é possível impor arbitrariamente u (suficientemente regular) em $\partial\Omega$ e isso identifica uma única solução.²
- é possível impor u_ν (suficientemente regular) em $\partial\Omega$ desde que tenha média nula, e isso identifica a solução a menos de uma constante.

Este resultado nos mostra os típicos exemplos de problemas que consideramos para o operador Laplaciano: em vez de impor u e u_ν em $\partial\Omega$, o que dará em geral um problema sobredeterminado, imporemos apenas uma das duas (ou uma combinação das duas, como no ponto (d) do exercício 6.1). Como já vimos (veja no capítulo 4), os problemas físicos que envolvem o operador Laplaciano são tipicamente destes tipos.

Vamos usar agora a teoria das séries de Fourier para encontrar uma fórmula integral para a solução da eq. de Laplace no círculo.

Supondo que tenhamos as convergências necessárias, impondo $v(1, \theta) = g(\theta)$ e aplicando as fórmulas (5.39) à (6.10) obtemos os coeficientes da série e logo de (6.9)

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n \left[\left(\int_0^{2\pi} g(\xi) \cos(n\xi) d\xi \right) \cos(n\theta) + \left(\int_0^{2\pi} g(\xi) \sin(n\xi) d\xi \right) \sin(n\theta) \right]. \quad (6.12)$$

Juntando as integrais e aplicando propriedades trigonométricas temos

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n \left[\int_0^{2\pi} g(\xi) \cos(n\xi - n\theta) d\xi \right];$$

escrevendo $2 \cos(\alpha) = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\int_0^{2\pi} g(\xi) \rho^n [e^{ni(\xi-\theta)} + e^{-ni(\xi-\theta)}] d\xi \right];$$

enfim trocando integral e série, juntando inclusive com o primeiro termo

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) \left[1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} [\rho e^{i(\xi-\theta)}]^n + [\rho e^{-i(\xi-\theta)}]^n \right].$$

e logo

$$v(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + \alpha_n) \cos(n\theta) + (b_n + \beta_n) \sin(n\theta),$$

$$v_\rho(1, \theta) = \alpha_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} n(a_n - \alpha_n) \cos(n\theta) + n(b_n - \beta_n) \sin(n\theta),$$

que permitem determinar todos os coeficientes. A solução obtida porém não poderá em geral "fechar na origem" dando uma função $\mathcal{C}^2(\Omega)$, como comentamos no começo do capítulo.

²Observe um fenômeno parecido ao visto no exercício 6.1: se os coeficientes da série (6.10) são limitados, então tomando $r < 1$, os da série solução (6.9) decaem como r^n na bola B_r , produzindo uma série uniformemente convergente e infinitas vezes derivável.

Como a série de potências $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n = a/(1-a)$, pondo $\epsilon = e^{i(\xi-\theta)}$, o termo em colchetes torna-se $1 + \frac{\rho\epsilon}{1-\rho\epsilon} + \frac{\rho\epsilon^{-1}}{1-\rho\epsilon^{-1}} = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-\rho(\epsilon+\epsilon^{-1})}$, voltando a usar $\epsilon + \epsilon^{-1} = 2 \cos(\xi - \theta)$ obtemos finalmente

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos(\xi-\theta)} d\xi,$$

que expressa a função harmônica em $B_1(0)$ com dato g em $\partial B_1(0)$.

Esta fórmula pode ser reescrita da seguinte forma

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_1(0)} g(\mathbf{y}) \frac{1-|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} ds_{\mathbf{y}}, \quad (6.13)$$

já que o denominador é o quadrado da distância do ponto $\mathbf{x} = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ até o ponto \mathbf{y} na borda do círculo parametrizado por $\gamma(\xi) = (\cos(\xi), \sin(\xi))$.

A fórmula (6.13) é dita **fórmula integral de Poisson** (para o círculo em \mathbb{R}^2): fornece a função harmônica no círculo unitário cujos valores na fronteira são dados por g , ou seja, a solução do problema de Dirichlet³

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } B_1(0), \\ u = g & \text{em } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (6.14)$$

Veremos na seção 6.6.4 como obter uma fórmula análoga em mais de duas variáveis.

6.2 Princípio de máximo

Nas próximas seções consideraremos Ω sendo um **domínio**, isto é um conjunto aberto e conexo.

Definição 6.2. Dizemos que o operador L satisfaz o **princípio do máximo em Ω na versão fraca** se $Lu \leq 0$ em Ω implica

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{\partial \Omega} u(x). \quad (6.15)$$

Dizemos que o operador L satisfaz o **princípio do máximo em Ω na versão forte** se $Lu \leq 0$ em Ω implica que

$$\text{se } x_0 \in \Omega \text{ é tal que } u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \text{ então } u \text{ é constante em } \Omega. \quad (6.16)$$

³Reescalando, podemos obter uma fórmula análoga para um círculo de raio R :

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\xi - \theta)} d\xi,$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} g(\mathbf{y}) \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} ds_{\mathbf{y}}.$$

Observação 6.3. Quando L é linear, trocando u por $-u$ podemos sempre obter afirmações análogas afirmando que $Lu \geq 0$ implica $\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \min_{\partial\Omega} u(x)$ ou que se $x_0 \in \Omega$ é tal que $u(x_0) = \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$ então u é constante em Ω . \triangleleft

Para o operador Laplaciano temos o seguinte resultado:

Teorema 6.4. Se Ω é um domínio (conexo) limitado⁴, o operador $-\Delta$ satisfaz o princípio de máximo tanto na versão fraca quanto na versão forte, para funções em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, isto é, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ e $-\Delta u \leq 0$ implica (6.15) e (6.16).

Em particular, se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ é harmônica então valem (6.15), (6.16) e suas versões com mínimo enunciadas na observação 6.3.

Prova do princípio fraco. A prova é muito parecida à que fizemos para o caso do calor (Teorema 5.21).

Primeiro consideremos o caso $-\Delta u < 0$: se $x_0 \in \Omega$ é ponto de máximo então $\partial_{x_i}^2 u(x_0) \leq 0$ para todo i , logo $\Delta u(x_0) \leq 0$, levando a uma contradição. Portanto $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Agora consideremos o caso geral $-\Delta u \leq 0$ e seja $v = u + \varepsilon|x|^2$ com $\varepsilon > 0$; observemos que $|x|^2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta|x|^2 = 2n$. Assim temos

$$-\Delta v = -\Delta u - 2n\varepsilon < 0,$$

logo pela conta anterior $\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$, logo

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} (v) = \max_{\partial\Omega} (v) = \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon|x|^2) \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2.$$

Como $\bar{\Omega}$ é compacto, temos que $\max_{\partial\Omega} |x|^2$ é finito, logo fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$.

O princípio forte será provado na seção 6.5. \square

Exercício 6.5. Mostre, adaptando a demonstração anterior, que o operador elíptico $Lu = -\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i x_i} + \mathbf{b} \cdot \nabla u$ com os $a_i > 0$ satisfaz o princípio de máximo fraco. \star

Observação 6.6. No caso do problema de Dirichlet (PD) com condição de borda homogênea ($g = 0$), o princípio de máximo fraco implica que se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ é solução então

$$f \leq 0 \Rightarrow u \leq 0 \text{ em } \Omega \quad (\text{resp. } f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0 \text{ em } \Omega).$$

Aplicando a versão forte obtemos que

$$f \leq 0 \Rightarrow u < 0 \text{ ou } u \equiv 0 \text{ em } \Omega \quad (\text{resp. } f \geq 0 \Rightarrow u > 0 \text{ ou } u \equiv 0 \text{ em } \Omega).$$

⁴Para domínios não limitados ou quando não temos continuidade até a fronteira vale o seguinte: se Ω é um aberto conexo, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e $-\Delta u \leq 0$ em Ω , então vale a seguinte alternativa: ou u é constante, ou u não atinge seu supremo (que pode ser ∞) em Ω .

Este exemplo explica porque a equação com o Laplaciano é usualmente escrita com o menos antes do operador: assim o sinal de $-\Delta u$ no problema de Dirichlet homogêneo é o mesmo da solução u . \triangleleft

Uma consequência do princípio de máximo é o seguinte resultado, que é uma forma de **dependência contínua dos dados** para o problema de Dirichlet (PD):

Teorema 6.7. *Se $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ são soluções do problema de Dirichlet (PD) com a mesma f e com dados na fronteira, respectivamente, g_1 e g_2 , então $\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max |g_1 - g_2|$, isto é,*

$$|u_1 - u_2|_{\infty} \leq |g_1 - g_2|_{\infty}.$$

Demonstração. Por serem lineares, subtraindo os dois problemas obtemos que $\delta = u_1 - u_2$ será solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta \delta = 0 & \text{em } \Omega, \\ \delta = g_1 - g_2 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.17)$$

logo pelo princípio de máximo $\max_{\bar{\Omega}} \delta \leq \max(g_1 - g_2)$ e o mesmo vale para os mínimos. \square

Como corolário (pondo $g_1 = g_2$) podemos mostrar a **unicidade da solução do problema de Dirichlet** (PD) na classe (um pouco mais ampla da do teorema (6.10)) das funções $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$:

Corolário 6.8. *Se $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ são ambas soluções do problema de Dirichlet (PD) então $u = v$.*

6.3 Identidade de Lagrange Green e consequências

Nesta seção veremos as chamadas **identidades de Lagrange-Green**, contidas na proposição a seguir. Elas são consequência das fórmulas de integração por partes vistas na seção 4.1.

Proposição 6.9. *Dadas $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ com Ω um domínio limitado com borda regular⁵, se todas as integrais convergem, valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (v \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dV, \quad (\text{LG1})$$

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (v \nabla u - u \nabla v) \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS + \int_{\Omega} u \Delta v \, dV. \quad (\text{LG2})$$

Dois casos particulares importantes das equações acima são os seguintes

⁵O teorema é usualmente enunciado pedindo fronteira localmente \mathcal{C}^1 , mas pode ser estendido ao caso de fronteira Lipschitz, incluindo então o caso de (multi)retângulos.

- Pondo $v \equiv 1$ em (LG1) resulta:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS. \quad (6.18)$$

- Pondo $v = u$ em (LG1) resulta

$$\int_{\Omega} u \Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (u \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu} \, dS - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dV. \quad (6.19)$$

Vejamos algumas consequências.

- A equação (6.18) implica que para o problema de Neumann (PN) uma condição necessária é

$$\int_{\Omega} -f \, dV = \int_{\partial\Omega} h \, dS.$$

- Consideremos os problema de Dirichlet ou de Neumann homogêneos para a equação de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \begin{cases} u(x) = 0 \\ \text{ou} \\ u_{\boldsymbol{\nu}}(x) = 0 \end{cases} & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.20)$$

Por (6.19) obtemos, em ambos os casos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = 0,$$

o que implica $\nabla u(x) \equiv 0$ em Ω , logo $u = 0$ no caso Dirichlet, e $u = \text{const}$, no caso Neumann.

Usando a linearidade (se u, v satisfazem o mesmo problema então $u - v$ satisfaz (6.20)), o último resultado implica no seguinte teorema.

Teorema 6.10. *Se $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ são ambas soluções do problema de Dirichlet (PD) então $u = v$, se são soluções do problema de Neumann (PN), $u - v = \text{constante}$.*

Exercício 6.11. Mostre que a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ \begin{cases} u(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ u_{\boldsymbol{\nu}}(x) = h(x) \end{cases} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.21)$$

é única quando $\lambda < 0$.

Verifique que no caso particular $\Omega = [0, \pi]$, $\lambda = 1$ e condição de Dirichlet homogênea, a solução não é mais única.

Construa um contraexemplo análogo em dimensão dois em um retângulo. ★

Exercício 6.12. Mostre que a solução do problema de Robin (PR) é única para $\alpha > 0$. Procure um exemplo com $\alpha < 0$ para o qual não tenha unicidade. ★

6.4 Princípio de Dirichlet

Nesta seção veremos o **Princípio de Dirichlet**, que relaciona o Problema de Dirichlet (PD) a um problema de minimização de um funcional. Na seção 6.7.2 discutiremos brevemente outros métodos inspirados no princípio de Dirichlet.

Sejam Ω um domínio limitado e regular, g uma função contínua em $\partial\Omega$ e definamos

$$D_g = \{u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) : u = g|_{\partial\Omega}\},$$

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV.$$

O Princípio de Dirichlet afirma que

$$u \in D_g \text{ é harmônica se e só se } E(u) \leq E(w) \quad \forall w \in D_g.$$

Lembrando a definição de energia dada para o problema da onda ou do calor na seção 5.1, podemos interpretar este resultado dizendo que *a função harmônica é a com menor energia entre as que satisfazem a condição em $\partial\Omega$* . Por exemplo, entre as possíveis configurações da membrana de um tambor deformado cuja borda é descrita por g , a solução estacionária (na qual então a energia cinética é nula) é a de menor energia elástica.

Em dimensão 1, é fácil ver que, entre as possíveis configurações de uma corda que deve conectar dois pontos (a, u_a) e (b, u_b) , a solução estacionária que minimiza a energia elástica $\int_a^b (u')^2$ é a cuja u' é constante no valor $\frac{u_b - u_a}{b - a}$.

Demonstração do Princípio de Dirichlet. • Suponhamos que $u \in D_g$ e $-\Delta u = 0$.

Seja $w \in D_g$ da forma $w = u + \delta$, logo $\delta|_{\partial\Omega} = 0$ e

$$E(w) = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla \delta|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \delta|^2 + 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla \delta.$$

Integrando por partes obtemos

$$= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \delta|^2 + 2 \left[- \int_{\Omega} (\Delta u) \delta + \int_{\partial\Omega} \delta \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \right],$$

onde a parte em colchetes é nula e logo

$$E(w) = E(u) + \int_{\Omega} |\nabla \delta|^2 \geq E(u),$$

provando que $E(u)$ é mínima em D_g .

- Vice-versa, suponha $u \in D_g$ e $E(u) \leq E(w)$ para todo $w \in D_g$.

Seja $w = u + \varepsilon \delta$ sendo $\delta \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ e $\delta|_{\partial\Omega} = 0$: sabemos que $E(u) \leq E(w)$, isto é,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla(u + \varepsilon \delta)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla \delta|^2 + 2\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla \delta;$$

concluimos que

$$0 \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \delta|^2 + 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla \delta \quad \forall \varepsilon > 0$$

o que implica $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \delta \geq 0$. Repetindo o raciocínio com $-\delta$ obtemos a desigualdade inversa e logo $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \delta = 0$. Integrando por partes de novo obtemos

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \delta = \left[- \int_{\Omega} (\Delta u) \delta + \int_{\partial \Omega} \delta \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \right]$$

e logo $\int_{\Omega} (\Delta u) \delta = 0$. Sendo $\Delta u, \delta$ contínuas e devendo a igualdade valer para toda escolha de δ , concluimos $-\Delta u = 0$ em Ω (se valesse $-\Delta u(x_0) > 0$, então por continuidade isso seria verdade em toda uma vizinhança, e tomando uma $\delta \geq 0$ que seja positiva apenas nesta vizinhança obteríamos uma contradição). \square

6.5 Propriedade do valor médio para funções harmônicas

Nesta seção precisaremos de algumas definições e resultados técnicos.

- Denotaremos por ω_n a **medida da esfera unitária** em \mathbb{R}^n , isto é $\omega_n = \int_{\partial B_1} dS$. Assim a medida de uma esfera de raio r será $\omega_n r^{n-1}$ e a de uma bola de raio r será $\int_0^r \omega_n \rho^{n-1} d\rho = \frac{\omega_n}{n} r^n$. Os primeiros valores de ω_n são $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$.
- Denotaremos por $\int_A f dA$ a **média de f em A** , isto é

$$\int_A f dA = \frac{\int_A f dA}{|A|}.$$

- Sejam f uma função, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$; definimos **média esférica** de f de centro \mathbf{x} e raio r , a quantidade

$$M_f(\mathbf{x}, r) := \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} f(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}}. \quad (6.22)$$

Adotando como definição a segunda expressão (obtida pela mudança de variável $\mathbf{y} \mapsto \boldsymbol{\eta} = \mathbf{x} + r\boldsymbol{\eta}$), podemos considerar $M_f(\mathbf{x}, r)$ definida também para $r \leq 0$, como uma função par.

- **Limite da média esférica:** se $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, então $M_f(\mathbf{x}, r)$ é uma função contínua sempre que $\overline{B_r(\mathbf{x})} \subseteq \Omega$ e

$$M_f(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} M_f(\mathbf{x}, r).$$

- **Derivada da média esférica:** se $f \in C^2(\overline{B_r(\mathbf{x})})$, aplicando o teorema do divergente, podemos calcular

$$\begin{aligned}
 \partial_r M_f(\mathbf{x}, r) &= \frac{1}{\omega_n} \partial_r \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} f(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(\mathbf{0})} (\nabla f(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\eta}) dS_{\boldsymbol{\eta}} \\
 &= \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(\mathbf{0})} \operatorname{div}_{\boldsymbol{\eta}}[\nabla f(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\eta})] dV_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(\mathbf{0})} r \Delta f(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\eta}) dV_{\boldsymbol{\eta}} \\
 &= \frac{r}{n} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta f(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}. \tag{6.23}
 \end{aligned}$$

Considere agora um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definição 6.13.

- Uma função $u \in C(\Omega)$ é dita **subharmônica**⁶ em Ω se

$$u(\mathbf{x}) \leq \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{para todos } \mathbf{x}, r \text{ tais que } \overline{B_r(\mathbf{x})} \subset \Omega.$$

- Uma função $u \in C(\Omega)$ chame-se **superharmônica** em Ω se

$$u(\mathbf{x}) \geq \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{para todos } \mathbf{x}, r \text{ tais que } \overline{B_r(\mathbf{x})} \subset \Omega.$$

Esta propriedade é intimamente ligada ao Laplaciano: de fato vale o seguinte

Teorema 6.14. *Seja $u \in C^2(\Omega)$*

- $-\Delta u \leq 0$ em $\Omega \iff u$ é subharmônica .
- $-\Delta u \geq 0$ em $\Omega \iff u$ é superharmônica.
- $-\Delta u = 0$ em $\Omega \iff$ vale a seguinte **propriedade do valor médio**:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \quad \text{para todos } \mathbf{x}, r \text{ tais que } \overline{B_r(\mathbf{x})} \subset \Omega. \tag{6.24}$$

⁶Em alguns livros, é dita subharmônica uma função $C^2(\Omega)$ com $-\Delta u \leq 0$. Aqui usaremos esta definição mais geral.

Demonstração. Observe que $\int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}$ é a média esférica $M_u(\mathbf{x}, r)$ da definição em (6.22). Fixado $\mathbf{x} \in \Omega$, usando (6.23), obtemos

$$\partial_r \int_{\partial B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \frac{r}{n} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}.$$

Se $-\Delta u \leq 0$, esta derivada é não negativa para $r > 0$, logo $u(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} M_u(\mathbf{x}, r) \leq M_u(\mathbf{x}, r)$, que é a tese. O caso superharmônico é análogo. Observe que para usar (6.23) é necessário $B_r(\mathbf{x}) \subset \Omega$.

No caso de função harmônica é suficiente juntar os dois casos anteriores; para obter $u(\mathbf{x}) = \int_{B_r(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}$ é suficiente integrar sobre as esferas de raio de zero até r .

Viceversa, seja u subharmônica e suponhamos que para algum $\mathbf{x} \in \Omega$ vale $-\Delta u(\mathbf{x}) > 0$; como u é de classe \mathcal{C}^2 , existe uma bola $B_{r_0}(\mathbf{x}) \subset \Omega$ na qual $-\Delta u > 0$. Mas então, $M_u(\mathbf{x}, r)$ satisfaz

$$\partial_r M_u(\mathbf{x}, r) = \frac{r}{n} \int_{B_r(\mathbf{x})} \Delta u(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} < 0$$

para $r < r_0$, o que é uma contradição pois implica $u(\mathbf{x}) > M_u(\mathbf{x}, r)$. Analogamente supondo $-\Delta u(\mathbf{x}) < 0$. \square

Observação 6.15. Quando $n = 1$ é fácil visualizar as propriedades acima: quando $u'' = 0$ necessariamente o gráfico de u é uma segmento e logo no ponto médio vale igual à média dos extremos; quando $u'' > 0$ a função tem concavidade para cima e logo o valor no ponto médio está abaixo do segmento pelos extremos.

Quando $n = 2$ a propriedade do valor médio pode ser deduzida avaliando a fórmula de Poisson (6.13) no centro $\mathbf{x} = 0$: fazendo uma traslazione e um rescalamento podemos aplicar ela a uma qualquer bola expressando o valor no céntrro em termos dos valores na esfera. \triangleleft

Usando os resultados acima, podemos agora provar a versão forte do Princípio de Máximo do Laplaciano

Prova do Princípio de Máximo forte. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ com $-\Delta u \leq 0$ em Ω e seja $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = M$; tomando uma bola $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$, pelo teorema 6.14

$$M = u(x_0) \leq \int_{\partial B_\rho(x_0)} u \leq M, \text{ para todo } \rho \in (0, \varepsilon];$$

logo $M = \int_{\partial B_\rho(x_0)} u$, para todo $\rho \in (0, \varepsilon]$, mas como $u \leq M$ a única maneira de termos isso é se $u \equiv M$ em $B_\varepsilon(x_0)$.

Agora, consideremos o conjunto $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Pelas contas anteriores este conjunto é aberto em Ω , mas também é fechado (em Ω), pois é um conjunto de nível da função contínua u . Como Ω é conexo temos $\Omega = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$, logo $u \equiv M$ em Ω .

A versão fraca pode também ser provada usando a versão forte: se $\max_{\bar{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$, logo $u \equiv u(x_0)$ e como u é contínua até a borda teríamos $\max_{\partial\Omega} u = \max_{\bar{\Omega}} u$, contradizendo a assunção. \square

Observação 6.16. Como a demonstração acima foi baseada na propriedade do valor médio, sem usar diretamente o Laplaciano, a mesma conclusão do Pr. de Máximo pode ser obtida apenas assumindo que u seja em $C^0(\bar{\Omega})$ e que seja subharmônica. \triangleleft

Outra consequência importante da propriedade do valor médio, é que ela implica na regularidade da função:

Teorema 6.17. *Se $u \in C^0(\Omega)$ satisfaz a propriedade do valor médio (6.24) em Ω , então $u \in C^\infty(\Omega)$. Logo também $\Delta u = 0$ em Ω .*

Juntando os teoremas 6.14 e 6.17 obtemos a seguinte propriedade de regularidade para as soluções da equação de Laplace, ou seja, para as funções harmônicas.

Corolário 6.18. *Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz $-\Delta u = 0$ em Ω então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Este tipo de afirmação é chamado um **teorema de regularidade**: nos diz que a equação de Laplace $\Delta u = 0$ tem a propriedade que todas as derivadas de suas soluções existem, mesmo as que não aparecem na equação.

Observação 6.19. Já encontramos este fenômeno de regularidade nos casos (c-d) do exercício 6.1, quando vimos que mesmo com dados cujas séries de Fourier fossem apenas convergentes, os coeficientes da solução eram rapidamente decrescentes.

Também a regularidade pode ser deduzida da (6.13), observando que derivadas com respeito a \mathbf{x} entrando na integral agem apenas na função regular $\frac{1-|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}$. \triangleleft

Para demonstrar o teorema 6.17 utilizaremos a técnica dos *molificadores*⁷, que descrevemos rapidamente a seguir.

- Sabemos que existe uma função $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , par, com $\tilde{\eta}(0) = 1$ e $\tilde{\eta}|_{|\mathbf{x}| \geq 1} \equiv 0$.
- Pondo $\eta(\mathbf{x}) = \tilde{\eta}(|\mathbf{x}|)$ e re-escalando podemos obter uma função radial simétrica $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ que satisfaça

$$\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1; \quad \eta|_{|\mathbf{x}| \geq 1} \equiv 0.$$

- Definindo $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$, e $\tilde{\eta}_\varepsilon(|\mathbf{x}|) = \eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ obtemos

$$\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1; \quad \eta|_{|\mathbf{x}| \geq \varepsilon} \equiv 0. \quad (6.25)$$

Demonstração do teorema 6.17. Considere $\varepsilon > 0$ e $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$: para $\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\mathbf{x}) &:= \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} = \int_{B_\varepsilon(\mathbf{x})} \tilde{\eta}_\varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) u(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \\ &= \int_0^\varepsilon \tilde{\eta}_\varepsilon(\rho) d\rho \int_{\partial B_\rho(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}; \end{aligned}$$

usando a propriedade do valor médio temos

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \int_0^\varepsilon \tilde{\eta}_\varepsilon(\rho) \omega_n \rho^{n-1} d\rho = u(\mathbf{x}) \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon = u(\mathbf{x}).$$

Disso deduzimos que $u_\varepsilon \equiv u$ em todo Ω_ε ; como $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ ⁸ e ε é arbitrário, obtemos $u \in C^\infty(\Omega)$. □

Observação 6.21. É possível mostrar um resultado ainda mais forte que o teorema 6.17: de fato as soluções da equação de Laplace são sempre *analíticas* (veja por exemplo [Joh82, p97,98] [Eva98, p29...32]). ◁

6.6 Soluções fundamentais

Nesta seção procuraremos uma **solução fundamental** (ou função fonte), para o operador $(-\Delta)$. Em analogia com o feito no caso do calor, podemos pensar nela como uma *solução gerada por uma fonte de calor unitária concentrada no ponto $x = 0$* .

Procuramos então uma oportuna família de funções que sejam harmônicas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Em vista da invariância por rotações, procuramos por funções radiais: provamos então a seguinte

⁷A técnica dos molificadores, além da aplicação no Teorema 6.17, permite aproximar funções irregulares com uma sequência de funções C^∞ , em particular vale o seguinte lema, cuja demonstração poder ser encontrada em [Eva98, p630]. .

Lema 6.20. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $L^1_{loc}(\Omega)$; definindo*

$$f_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x - y) f(y) dV_y$$

temos

- $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$,
- $f_\varepsilon \rightarrow f$ q.t.p., (e uniformemente nos compactos se $f \in C(\Omega)$, e em L^p_{loc} se $f \in L^p_{loc}$), quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

⁸Além de usar o Lema 6.20, podemos ver isso pois derivando a definição de u_ε as derivadas recaem na função regular η_ε .

Proposição 6.22. *As funções*

$$\psi(\mathbf{y}) = \tilde{\psi}(|\mathbf{y}|) = \begin{cases} \frac{|\mathbf{y}|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} + D & \text{para } n \geq 3, \\ -\frac{\ln(|\mathbf{y}|)}{2\pi} + D & \text{para } n = 2, \\ -\frac{|\mathbf{y}|}{2} + D & \text{para } n = 1, \end{cases} \quad (6.26)$$

são radiais, harmônicas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e possuem uma singularidade na origem. Além disso, $\int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla \psi \cdot \boldsymbol{\nu} = -1$.

Demonstração. Se $\psi(\mathbf{x}) = \tilde{\psi}(|\mathbf{x}|)$ e $\Delta \psi = 0$, então $\tilde{\psi}(\rho)$ satisfaz $\tilde{\psi}'' + \frac{n-1}{\rho} \tilde{\psi}' = 0$ para $\rho > 0$. Pondo $v = \tilde{\psi}'$ temos

$$\frac{v'}{v} = (1-n) \frac{1}{\rho},$$

resolvendo obtemos $v = C\rho^{1-n}$ e integrando de novo obtemos as funções no enunciado, sendo C determinanda para obter $\int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla \psi \cdot \boldsymbol{\nu} = C\omega_n = -1$. \square

Observação 6.23. No caso $n = 1$, ψ pode ser continuada até a origem, dando uma função contínua, cuja derivada salta de -1 na origem. No caso $n = 2$, ψ não é limitada nem perto da origem nem no infinito, enquanto se $n \geq 3$ ela é limitada no infinito.

Em vista da equação (6.18), a condição $\int_{\partial B_1(\mathbf{0})} \nabla \psi \cdot \boldsymbol{\nu} = -1$ pode ser interpretada imaginando que $-\Delta \psi$ esteja concentrado na singularidade e tenha integral igual a 1, ou seja, é uma solução (generalizada) de $-\Delta \psi = f$ com f fonte unitária concentrada na origem. \triangleleft

Provaremos agora o seguinte

Proposição 6.24. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ e $0 \in \Omega$ então*

$$u(0) = \int_{\Omega} \psi(y) [-\Delta u(y)] dV_{\mathbf{y}} + \int_{\partial \Omega} [\psi(y) \nabla u(y) - u(y) \nabla \psi(y)] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}}; \quad (6.27)$$

Demonstração. Usaremos a identidade de Lagrange Green na forma (LG2). Seja $B = B_{\varepsilon}(0)$:

$$\int_{\Omega \setminus B} \psi \Delta u = \int_{\Omega \setminus B} u \Delta \psi + \int_{\partial \Omega} (\psi \nabla u - u \nabla \psi) \cdot \boldsymbol{\nu} - \int_{\partial B} (\psi \nabla u - u \nabla \psi) \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (6.28)$$

onde

$$-\int_{\partial B} (\psi \nabla u - u \nabla \psi) \cdot \boldsymbol{\nu} = -\tilde{\psi}(\varepsilon) \int_{\partial B} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} + \tilde{\psi}'(\varepsilon) \int_{\partial B} u.$$

Considerando o caso $n \geq 3$ temos

$$\tilde{\psi}(\varepsilon) \int_{\partial B} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = \left(\frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)} + D \right) \int_B \Delta u = \left(\frac{\varepsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)} + D \right) \frac{\omega_n}{n} \varepsilon^n \int_B \Delta u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

já que Δu é contínua em zero. Analogamente

$$\tilde{\psi}'(\varepsilon) \int_{\partial B} u = \frac{(2-n)\varepsilon^{1-n}}{\omega_n(n-2)} \omega_n \varepsilon^{n-1} \int_{\partial B} u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -u(0);$$

concluimos (6.27) de (6.28) tomando limite para $\varepsilon \rightarrow 0$. Nos casos $n = 1, 2$ as contas são análogas. \square

Em vista a invariância por translações, usando no lugar de $\psi(\mathbf{y})$ sua transladada $\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ (dita solução fundamental de pólo \mathbf{x}), obtemos o seguinte corolário:

Corolário 6.25. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ então*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [-\Delta u(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} + \int_{\partial\Omega} [\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \nabla \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}}, \quad (6.29)$$

e isso vale para todo $x \in \Omega$.

A (6.29) é uma **fórmula de representação**: se $-\Delta u = f$ em Ω e $u = g, u_{\boldsymbol{\nu}} = h$ em $\partial\Omega$, então vale

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [f(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} + \int_{\partial\Omega} [\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) h(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}) \nabla \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}}. \quad (6.30)$$

Infelizmente ela não fornece uma solução explícita! De fato, já sabemos (veja na seção 6.1.2) que os três dados não podem ser escolhidos arbitrariamente: logo definindo u pela (6.29) pondo funções arbitrárias no lado direito dará em geral uma função que não satisfaz os dados prescritos. Por isso dizemos que (6.29) é apenas uma *fórmula de representação* de uma eventual solução, não uma fórmula explícita para obter a solução.

Observação 6.26. Usando a solução fundamental ψ podemos obter uma *demonstração alternativa da propriedade do valor médio*: escolhendo a constante D em (6.26) de maneira que $\psi|_{\partial B_r(0)} = 0$, (6.29) torna-se

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) [-\Delta u(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} + \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} [-u(\mathbf{y}) \nabla \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}} : \quad (6.31)$$

se $\Delta u = 0$ então

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} [-u(\mathbf{y}) \nabla \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)] \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u.$$

\triangleleft

6.6.1 Função de Green

O corolário 6.25 fornece a fórmula (6.29), que envolve a solução fundamental transladada $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$.

Observe porém que se w é harmônica em Ω e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ então

$$0 = \int_{\Omega} w(\mathbf{y})[-\Delta u(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} + \int_{\partial\Omega} [w(\mathbf{y})\nabla u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\nabla w(\mathbf{y})] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}}, \quad (6.32)$$

pela identidade de Lagrange-Green (LG2); isso significa que (6.29) continua valendo mesmo substituindo ψ por $\psi + w$. Podemos inclusive somar uma função $w_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ diferente para cada ponto \mathbf{x} considerado.

Para obter uma fórmula explícita para a (eventual) solução do problema de Dirichlet (PD) precisaríamos eliminar da fórmula (6.29) o termo $\int_{\partial\Omega} [\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})\nabla u(\mathbf{y})] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}}$; para isso procuramos, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, uma função $w_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ harmônica de maneira que $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - w_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ satisfaça $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{y} \in \partial\Omega$; desta maneira, usando G no lugar de ψ em (6.29), desaparecerá o termo de borda que envolve $u_{\boldsymbol{\nu}}$, nos dando a seguinte fórmula que depende apenas do valor do Laplaciano e do dado de Dirichlet:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})[-\Delta u(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega} [u(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}} \quad (6.33)$$

$$= \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})[f(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega} [g(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}}. \quad (6.34)$$

A função $w_{\mathbf{x}}$ que procuramos deve então satisfazer

$$\begin{cases} -\Delta w_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = 0 & \text{em } \Omega, \\ w_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.35)$$

Admitindo que exista a solução deste problema de Dirichlet, a função G obtida é chamada **função de Green para a região Ω** ; vale então

Teorema 6.27. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ é solução do problema de Dirichlet (PD), então u é dado pela fórmula (6.34).*

Observação 6.28. O teorema 6.27 ainda não garante a existência de uma solução do problema de Dirichlet, pois apenas diz que se existir uma solução, ela deve satisfazer a fórmula, não que pondo as funções f e g na fórmula obtemos uma solução! Isso deverá ser verificado, como fizemos por exemplo no caso da solução da equação do calor na reta (veja por exemplo as proposições 6.34-6.35 e 6.39-6.40 para os casos de um semiespaço e de uma bola).

Além disso, precisamos assumimos a existência da função de Green, mas isso também depende da existência de uma solução de (6.35).

Historicamente, a existência da função de Green era assumida sem demonstração baseando-se na analogia eletrostática: se $n = 3$, $G(\cdot, \mathbf{x})$ corresponde ao potencial eletrostático gerado por uma carga pontiforme posta no ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, quando $\partial\Omega$ é um condutor (logo o potencial pode ser assumido igual a zero em $\partial\Omega$). \triangleleft

Separando as duas parcelas da (6.34) obtemos a **fórmula integral de Green**, para a solução do problema de Dirichlet homogêneo para a equação de Poisson:

$$u_f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) [f(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} \quad (6.36)$$

e a **fórmula integral de Poisson**, para a solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$u_g(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} [g(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}}; \quad (6.37)$$

a função $H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} = -\frac{\partial G}{\partial n_{\mathbf{y}}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (com $\mathbf{x} \in \Omega$ e $\mathbf{y} \in \partial\Omega$) é dita **Núcleo de Poisson** para a região Ω .

Exercício 6.29. Usando a fórmula da solução fundamental (6.26), calcule a função de Green e o núcleo de Poisson em dimensão um, para $\Omega = (0, 1)$. ★

Vejam algumas propriedades da função de Green:

Proposição 6.30. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ com $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ vale $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) > 0$.

Demonstração. Fixado $x \in \Omega$ temos que $\Delta_{\mathbf{y}} G = 0$ em $\Omega \setminus B$ onde $B = B_{\varepsilon}(\mathbf{x})$. Como G é a soma da solução fundamental que tem singularidade em \mathbf{x} (veja (6.26)) com a função contínua $w_{\mathbf{x}}$, se $n \geq 2$ vale $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow +\infty$, quando $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$, logo se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ vale zero se $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ e vale algo positivo se $\mathbf{y} \in \partial B$. Pelo princípio de máximo forte $G(\cdot, \mathbf{x})$ não pode assumir seu mínimo em $\Omega \setminus B$, logo é positiva em $\Omega \setminus B$; pela arbitrariedade de ε obtemos a tese. O caso $n = 1$ pode ser verificado diretamente já que a função de Green pode ser calculada. □

Proposição 6.31. $G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Omega$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$.

Demonstração. Para a prova veja em [Mas]. Uma ideia não rigorosa da prova é a seguinte: pondo em (6.33) $G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ no lugar de $u(\mathbf{x})$ temos

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) [-\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{z})] dV_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega} [G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\nu} dS_{\mathbf{y}}$$

onde a integral de borda é nula e, lembrando que o Laplaciano de G é concentrado na singularidade que está em \mathbf{z} , a primeira integral dá $G(\mathbf{z}, \mathbf{x})$. □

Observação 6.32. A proposição 6.30 mostra que *o princípio de máximo implica na positividade da função de Green*. Viceversa, pode-se mostrar que *a positividade da função de Green implica no princípio de máximo forte*.

De fato, se $u|_{\partial\Omega} = 0$ então

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) [-\Delta u(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} : \quad (6.38)$$

se $-\Delta u \leq 0$ e $G > 0$ então $u \leq 0$ (máximo na fronteira); se além disso $-\Delta u < 0$ num conjunto de medida positiva então $u < 0$ em todo Ω , isto é, se u é nula num ponto interior então $-\Delta u \equiv 0$ e logo u é identicamente nula. \triangleleft

Observação 6.33. Algo análogo ao que fizemos nesta seção, pode ser feito para obter uma fórmula explícita para a *solução do problema de Neumann* para a equação $-\Delta u + cu = 0$ com $c > 0$ (mostre que para este problema pode ser mostrada a unicidade da eventual solução). O que precisa fazer é procurar uma **função de Neumann** $N_c(y, x)$ que seja a soma da solução fundamental para o operador $-\Delta u + cu$ com singularidade em \mathbf{x} , com uma função harmônica que tenha derivada normal oposta em $\partial\Omega$.

Para o caso $c = 0$ pode-se procurar $N_0(y, x)$ que seja solução fundamental de pólo \mathbf{x} e que tenha derivada normal em $\partial\Omega$ uma oportuna constante (de forma que a correção $w_{\mathbf{x}}$ exista). Tal constante não influi no resultado se a o dato satisfaz a condição necessária. \triangleleft

6.6.2 Interpretação eletrostática

Em \mathbb{R}^3 , se u é o **potencial eletrostático** e q a *densidade de carga elétrica*, vale (pondo 1 a constante física) $-\Delta u = q$. Neste caso

- $\psi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{y}|}$ representa o potencial eletrostático gerado por uma carga unitária puntiforme isolada em \mathbb{R}^3 (potencial tende a zero no infinito);
- $u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})[q(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi} \frac{q(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} dV_{\mathbf{y}}$ representa o potencial eletrostático gerado por uma distribuição de carga q em \mathbb{R}^3 (potencial tende a zero no infinito);
- Se G é a função de Green para o conjunto Ω , então $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ representa o potencial eletrostático gerado (em y) por uma carga unitária puntiforme posta em \mathbf{x} , dentro de uma casca condutora $\partial\Omega$ (potencial zero em $\partial\Omega$);
- $u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})[q(\mathbf{y})] dV_{\mathbf{y}}$ representa o potencial eletrostático gerado por uma distribuição de carga q , dentro de uma casca condutora $\partial\Omega$ (potencial zero em $\partial\Omega$).

6.6.3 Solução do problema de Dirichlet num semiespaço

Nesta e na próxima seção usaremos as fórmulas de Green e de Poisson para encontrar uma solução num semiespaço e numa bola. Note que, exceto para as soluções em \mathbb{R}^2 via série de Fourier do exercício 6.1 e da seção 6.1.2, estes serão os primeiros resultados de existência para o Laplaciano: até aqui apenas mostramos propriedades das possíveis soluções.

Começemos com o caso de um semiespaço: seja então $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ e $\Gamma = \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Observe que Ω não é limitado, enquanto a fórmula (6.34)

e outros resultados deste capítulo foram obtidos apenas para domínios limitados; mesmo assim, poderemos verificar no final que o resultado obtido dará mesmo uma solução. Observe que até o resultado de unicidade não vale so semiespaço Ω , de fato $u(\mathbf{x}) = kx_n$ satisfaz $-\Delta u = 0$ em Ω e $u = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $k \in \mathbb{R}$ (apenas uma destas soluções porém é limitada).

O motivo de trabalhar no semiespaço é que poderemos aproveitar as simetrias para calcular facilmente a função de Green. Afirmamos que a **função de Green para o semiespaço** Ω é

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*); \quad (6.39)$$

onde, dado $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$, o ponto \mathbf{x}^* é o simétrico de \mathbf{x} com respeito a Γ : $\mathbf{x}^* = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$. De fato, por simetria, $\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*)|_{y \in \Gamma} = 0$ e como se $\mathbf{x} \in \Omega$ então $\mathbf{x}^* \notin \Omega$, temos que $\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*)$ é harmônica em Ω e logo $G(\cdot, \mathbf{x})$ é mesmo a função de Green⁹ (veja na figura 6.1).

Com algumas contas (veja em [Mas]) podemos calcular o **núcleo de Poisson para o semiespaço**

$$H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 2 \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{-n}}{\omega_n} x_n, \quad (6.40)$$

assim (6.37) torna-se

$$u_g(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n}, \quad (6.41)$$

dita **fórmula integral de Poisson** para o semiespaço.

Como antecipado, precisaria agora verificar que as funções u_f , u_g em (6.36) e (6.41) são realmente soluções do problema de Dirichlet quando Ω é o semiespaço. De fato, valem as seguintes

Proposição 6.34. *Se $f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ então¹⁰ a função em (6.36) $u_f \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e satisfaz $-\Delta u_f = f$ em Ω e $u_f = 0$ em $\partial\Omega$.*

Proposição 6.35. *Se $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{n-1})$ e é limitada, então $u_g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, é limitada, satisfaz $-\Delta u_g = 0$ em Ω e $\lim_{x \rightarrow \Gamma} u_g = g$.*

Demonstração. Veja [[Eva98]p38 [Fol95]p94], ou [Mas]. □

Sobrepondo as duas soluções acima obtemos o primeiro resultado de existência para o problema de Dirichlet (PD):

Teorema 6.36. *Se Ω é um semiespaço em \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ e $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{n-1})$ é limitada, então existe uma solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ do problema de Dirichlet (PD) em Ω .*

⁹Podemos verificar nesta definição que vale $G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ em Ω , como mostramos nas proposições 6.30 e 6.31.

¹⁰A condição $f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ significa que além de f ser de classe \mathcal{C}^2 , seu suporte é um compacto contido em Ω . O resultado pode ser obtido também com condições mais fracas.

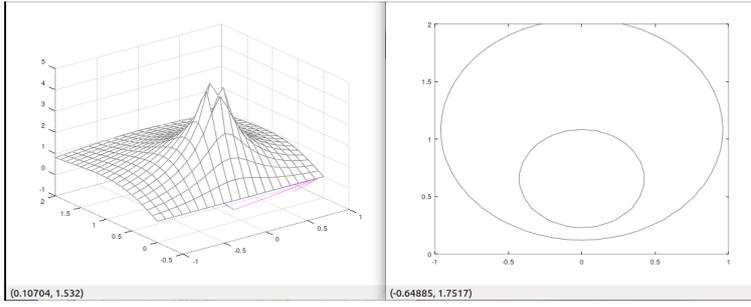


Figura 6.1: Função de Green no espaço.

6.6.4 Solução do problema de Dirichlet numa bola

Para a bola podemos de novo explorar as simetrias para calcular a Função de Green e o Núcleo de Poisson, obtendo uma solução do problema de Dirichlet.

Seja $B = B_1(0)$ e seja, para todo $\mathbf{x} \in B \setminus \{0\}$, $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$, isto é, um ponto fora da bola, na mesma radial e tal que $|\mathbf{x}||\mathbf{x}^*| = 1$. Vale então o seguinte:

Lema 6.37. *Com a definição acima,*

$$|\mathbf{x}||\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| = |\mathbf{y}||\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|;$$

em particular,

$$\text{se } |\mathbf{y}| = 1 \text{ então } |\mathbf{x}||\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Demonstração. Trivialmente

$$|\mathbf{x}|^2 \left(|\mathbf{y}|^2 + \frac{|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|^4} - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^2} \right) = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 + 1 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{y}|^2 \left(|\mathbf{x}|^2 + \frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{y}|^4} - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^2} \right)$$

e este termo corresponde ao quadrado dos termos que afirmamos ser iguais.

No caso $|\mathbf{y}| = 1$ é suficiente usar o fato que então $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$.

A prova pode também ser feita geometricamente: comparando os triângulos \mathbf{Oxy}^* e \mathbf{Oyx}^* temos um ângulo comum e $\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{y}|} = \frac{|\mathbf{y}^*|}{|\mathbf{x}^*|}$, logo $\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{y}|} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*|}$. \square

Por consequência podemos mostrar

Lema 6.38. *Se $\mathbf{x} \in B \setminus \{0\}$ a função $\psi(|\mathbf{x}|(|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*|))$ é harmônica na variável y em B e vale $\psi(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$ para $y \in \partial B$.*

Demonstração. Como ψ é harmônica exceto no pólo, trasladando e re-escalando continua harmônica, exceto em \mathbf{x}^* que não está em B .

Como ψ é radial e $\mathbf{y} \in \partial B$ implica $|\mathbf{x}||\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, obtemos a segunda afirmação. \square

Logo a **função de Green para uma bola** $B = B_1(0)$ é

$$\begin{cases} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := \psi(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) - \psi(|\mathbf{x}|(|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*|)) & \text{se } \mathbf{x} \neq 0, \\ G(\mathbf{y}, \mathbf{0}) := \psi(|\mathbf{y}|) - \tilde{\psi}(1). \end{cases}$$

onde $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$ (veja na figura 6.2).

Calculando $\frac{\partial G}{\partial \nu_{\mathbf{y}}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})|_{\mathbf{y} \in \partial B}$ obtemos o **núcleo de Poisson para B** (se $n \geq 2$):

$$H(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{\omega_n |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n},$$

com o qual (6.37) torna-se então a **fórmula integral de Poisson** para a bola em \mathbb{R}^n , análoga à (6.13):

$$u_g(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{\omega_n} \int_{\partial B} g(\mathbf{y}) \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n}. \quad (6.42)$$

Como antes, ainda precisará mostrar que as funções u_f , u_g em (6.36) e (6.42) são realmente soluções do problema de Dirichlet quando Ω é B , em particular

Proposição 6.39. *Se $f \in C_0^2(B)$ então $u_f \in C^2(\overline{B})$ e satisfaz $-\Delta u_f = f$ em B e $u_f = 0$ em ∂B .*

Proposição 6.40. *[Eva98, p41] Se $g \in C^0(\partial B)$ então $u_g \in C^\infty(B)$ e satisfaz $-\Delta u_g = 0$ em B e $\lim_{x \rightarrow \partial B} u_g = g$.*

As demonstrações seguem os mesmos princípios daquelas das proposições 6.34 e 6.35, adaptando as contas.

Sobrepondo as duas soluções acima obtemos o resultado de existência para o problema da Dirichlet (PD) na bola:

Teorema 6.41. *Se $B = B_1(0)$, $f \in C_0^2(B)$ e $g \in C^0(\partial B)$, então existe uma solução $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ do problema da Dirichlet (PD) em B .*

Observação 6.42. No caso de bolas de raio diferente é suficiente mudar de variável e usar a mesma fórmula. \triangleleft

6.7 Solução em domínios mais gerais

Para provar a existência de soluções em domínios Ω mais gerais, são necessários métodos mais avançados.

6.7.1 Método de Perron

O método de Perron fornece a solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace em domínios limitados pedindo apenas a continuidade do dado e um pouco de regularidade da fronteira $\partial\Omega$. O método consiste em aproximar a solução por funções subharmônicas. Em particular, definindo

$$S_g = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : u \text{ é subharmônica e satisfaz } u \leq g|_{\partial\Omega}\}$$

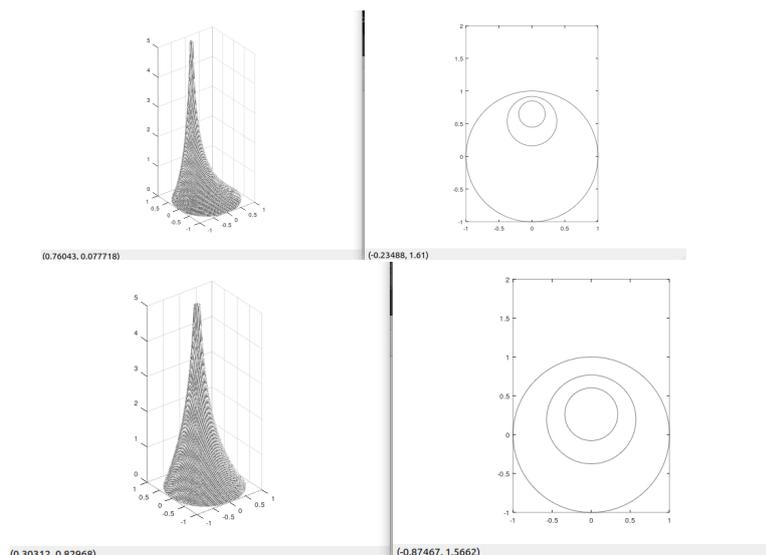


Figura 6.2: Função de Green na bola para dois pólos diferentes.

e

$$h(x) = \sup \{l(x) : l \in S_g\} ,$$

vale a seguinte proposição:

Proposição 6.43. *A função h é harmônica em Ω . Além disso, se g é contínua e $\partial\Omega$ é regular, também vale $h = g|_{\partial\Omega}$.*

Vale destacar que na demonstração é feito uso do resultado de existência na bola que mostramos na seção anterior.

6.7.2 Métodos variacionais

Os métodos variacionais consistem em procurar soluções como pontos críticos de oportunos funcionais, de forma parecida ao visto no princípio de Dirichlet na seção 6.4. Eles podem ser usados também para resolver problemas não lineares.

Repare porém que na seção 6.4 apenas mostramos a equivalência entre o problema de mínimo e o problema de Dirichlet, mas para mostrar a existência do mínimo precisaríamos mostrar que uma sequência minimizante converge necessariamente a uma função \mathcal{C}^2 , que não seria óbvio!

Por isso torna-se necessário trabalhar em espaços funcionais maiores (os espaços de Sobolev, por exemplo), que contenham todos os possíveis limites e onde as derivadas serão no sentido das distribuições. Uma vez encontrada uma solução, ainda precisará mostrar que é \mathcal{C}^2 para que seja uma solução clássica.

Capítulo 7

Ondas e difusão em \mathbb{R}^n

No capítulo 5 vimos alguns resultados para a equação da onda e do calor que valem em qualquer dimensão, e obtivemos fórmulas de resolução para o case em dimensão um. Neste capítulo mostraremos como encontrar as fórmula de resolução em dimensão maior.

7.1 A equação da onda em dimensão três

A solução de (PVI-O) quando $n > 1$ e ímpar pode ser obtida aproveitando a invariância por rotações do Laplaciano e várias identidades diferenciais.

Desenvolveremos o caso $n = 3$, mas as mesmas técnicas levam à solução também em dimensões ímpares maiores.

Em vista da invariância por rotações do Laplaciano, voltaremos a usar as médias esféricas definidas na seção 6.5. Precisaremos de algumas propriedades adicionais: usando a segunda formulação em (6.22), vemos que podemos passar as derivadas com respeito a \mathbf{x} e a r dentro do sinal de integral, logo deduzimos que

Lema 7.1. *Se $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ então $M_f(\mathbf{x}, r) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.*

Uma outra propriedade da média esférica é a seguinte.

Lema 7.2. *Se $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ então M_f satisfaz*

$$\Delta_{\mathbf{x}} M_f(\mathbf{x}, r) = \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) M_f(\mathbf{x}, r)$$

para todo $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $r > 0$: operando como em (6.23) chegamos a

$$\begin{aligned} \partial_r M_f &= \frac{r}{\omega_n r^n} \int_{B_r(0)} \Delta f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) dV_{\mathbf{z}} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r d\rho \int_{\partial B_\rho(0)} \Delta f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) dS_{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \rho^{n-1} d\rho \int_{\partial B_1(0)} \Delta f(\mathbf{x} + \rho \boldsymbol{\tau}) dS_{\boldsymbol{\tau}}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Logo,

$$\begin{aligned} r^{n-1}\partial_r^2 M_f + (n-1)r^{n-2}\partial_r M_f &= \partial_r (r^{n-1}\partial_r M_f) = \\ &= \frac{1}{\omega_n} r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \Delta f(\mathbf{x} + r\boldsymbol{\tau}) dS_{\boldsymbol{\tau}} = r^{n-1} M_{\Delta f}; \end{aligned} \quad (7.2)$$

dividindo por r^{n-1} e como $M_{\Delta f} = \Delta_{\mathbf{x}} M_f$ chegamos ao resultado esperado quando $r > 0$.

Para $r < 0$ a fórmula ainda vale pois tudo é par.

Quando $r \rightarrow 0$ temos que $\Delta_{\mathbf{x}} M_f(\mathbf{x}, r) \rightarrow \Delta f(\mathbf{x})$, logo também $(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r) M_f(\mathbf{x}, r)$ pode ser estendido por continuidade ao valor $\Delta f(\mathbf{x})$. \square

Corolário 7.3. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ então $\square u = 0$ se e só se*

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r \right) M_u(\mathbf{x}, r, t) = \partial_t^2 M_u(\mathbf{x}, r, t), \quad \text{para } r > 0, (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (7.3)$$

onde a média é feita apenas na variável \mathbf{x} .

Demonstração. Se $u_{tt} = \Delta_{\mathbf{x}} u$ então $(M_u)_{tt} = M_{u_{tt}} = M_{\Delta_{\mathbf{x}} u} = \Delta_{\mathbf{x}} M_u = (\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r) M_u$.

Viceversa, se $(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r) M_u(\mathbf{x}, r, t) = \partial_t^2 M_u(\mathbf{x}, r, t)$ para $r > 0$ então $M_{u_{tt}} = M_{\Delta_{\mathbf{x}} u}$ e no limite quando $r \rightarrow 0$ obtemos $u_{tt} = \Delta_{\mathbf{x}} u$. \square

A partir de agora desenvolveremos as contas apenas para o caso¹ $n = 3$: a seguinte identidade diferencial

$$\partial_r^2 [r f(r)] = r \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) f(r), \quad (7.4)$$

junto com a (7.3), nos leva a

$$\partial_r^2 [r M_u(\mathbf{x}, r, t)] = r \partial_t^2 M_u(\mathbf{x}, r, t) = \partial_t^2 [r M_u(\mathbf{x}, r, t)], \quad (7.5)$$

para $r > 0, (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Deduzimos que a quantidade $[r M_u(\mathbf{x}, r, t)]$ satisfaz, para todo \mathbf{x} , a equação da onda em dimensão um nas variáveis r, t . Logo podemos encontrá-la usando a fórmula de D´Alambert.

Definindo então

$$V(\mathbf{x}, r, t) := [r M_u(\mathbf{x}, r, t)],$$

temos que

$$\begin{cases} V_{tt}(\mathbf{x}, r, t) - V_{rr}(\mathbf{x}, r, t) = 0, \\ V(\mathbf{x}, r, 0) = F(x, r), \\ V_t(\mathbf{x}, r, 0) = G(\mathbf{x}, r) \end{cases} \quad (7.6)$$

¹Para as outras dimensões ímpares veja na seção 7.1.1

onde

$$\begin{cases} F(\mathbf{x}, r) := [rM_\phi(\mathbf{x}, r)], \\ G(\mathbf{x}, r) := [rM_\psi(\mathbf{x}, r)]; \end{cases} \quad (7.7)$$

observe que V, F, G são funções ímpares em r , pois M é par.

Aplicando a fórmula de D'Alambert temos que a solução é

$$V(\mathbf{x}, r, t) = \frac{F(\mathbf{x}, r-t) + F(\mathbf{x}, r+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} G(\mathbf{x}, \xi) d\xi. \quad (7.8)$$

Precisamos agora voltar a obter u :

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} M_u(\mathbf{x}, r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{x}, r, t)}{r}, \quad (7.9)$$

ou seja,

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x}, r+t) + F(\mathbf{x}, r-t)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} G(\mathbf{x}, \xi) d\xi.$$

Usando que F é ímpar na segunda variável,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x}, r+t) + F(\mathbf{x}, r-t)}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x}, t+r) - F(\mathbf{x}, t-r)}{2r} = \partial_2 F(\mathbf{x}, t).$$

Como G também é ímpar na segunda variável, vale $\int_{r-t}^{t-r} G(\mathbf{x}, \xi) d\xi = 0$, logo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} G(\mathbf{x}, \xi) d\xi = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} G(\mathbf{x}, \xi) d\xi = G(\mathbf{x}, t).$$

Concluimos que

$$u(\mathbf{x}, t) = [\partial_t F(\mathbf{x}, t) + G(\mathbf{x}, t)], \quad (7.10)$$

isto é,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B_t(\mathbf{x})} \phi dS \right) + t \int_{\partial B_t(\mathbf{x})} \psi dS; \quad (7.11)$$

explicitando a derivada (precisará usar a fórmula da derivada da média com respeito ao raio, na primeira linha da (6.23))

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B_t(\mathbf{x})} [\phi(\mathbf{y}) + t \nabla \phi(\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\nu} + t \psi(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}} = \int_{\partial B_t(\mathbf{x})} [\phi(\mathbf{y}) + \nabla \phi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t \psi(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}}; \quad (7.12)$$

esta é chamada **fórmula de Kirchhoff** (para a solução da equação da onda em dimensão $n = 3$).

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 7.4. *Se $n = 3$, $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ então existe uma solução $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ de (PVI-O) (com $F = 0$) e é dada pela (7.11).*

7.1.1 O caso com n ímpar maior

Se n é ímpar e maior que 3, podemos aproveitar as contas vistas até o corolário 7.3.

Para obter um análogo de (7.5), que explorou a identidade (7.4), temos a identidade mais geral, válida para $n \geq 3$ ímpar,

$$\partial_r^2 \left(\frac{\partial_r}{r} \right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2} f(r)] = \left(\frac{\partial_r}{r} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2} \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) f(r) \right]. \quad (7.13)$$

Será então $\left[\left(\frac{\partial_r}{r} \right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2} M_u(\mathbf{x}, r, t)] \right]$ que satisfaz, para todo \mathbf{x} , a equação da onda em dimensão um nas variáveis r, t .

Através de contas parecidas às vistas na seção anterior, obtém-se

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[\partial_t \left(\frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{\partial B_t(\mathbf{x})} \phi \, dS \right) + \left(\frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \int_{\partial B_t(\mathbf{x})} \psi \, dS \right) \right]; \quad (7.14)$$

onde $\gamma_n := (n-2) \cdot (n-4) \dots 3 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{(n-3)/2} (n-2k)$. Esta é a **fórmula resolutiva da equação da onda homogênea em dimensão $n > 1$ ímpar**.

Em conclusão

Teorema 7.5. *Se $n > 1$ é ímpar, $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ então existe uma solução $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ de (PVI-O) (com $F = 0$) e é dada pela (7.14).*

Em particular, (7.14) satisfaz $\square u = 0$ para $t > 0$ e pode ser prolongada por continuidade em $t = 0$ até satisfazer as condições iniciais.

7.2 A equação da onda em dimensão dois

Quando n é par, podemos deduzir a solução do caso em dimensão $n+1$ supondo que tudo seja constante com respeito a uma das variáveis (método de descida ou de Hadamard).

Procuremos então a solução $u(\mathbf{x}, t)$ (com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e n par) de (PVI-O) através da solução $\tilde{u}(\mathbf{x}, z, t)$ de

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta_x \tilde{u} - \tilde{u}_{zz} = 0, \\ \tilde{u}(\mathbf{x}, z, 0) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, z) := \phi(\mathbf{x}), \\ \tilde{u}_t(\mathbf{x}, z, 0) = \tilde{\psi}(\mathbf{x}, z) := \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (7.15)$$

A solução existe pelo teorema 7.5 e da fórmula (7.14) podemos deduzir que \tilde{u} não dependerá de z , já que seus dados não dependem, logo $\tilde{u}_{zz} = 0$ e $u(\mathbf{x}, t) := \tilde{u}(\mathbf{x}, 0, t)$ será também solução da equação da onda em dimensão n , logo a solução que procuramos.

No caso $n = 2$,

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, z, t) = \partial_t \left(t \int_{\partial \tilde{B}_t(\mathbf{x}, z)} \tilde{\phi}(\mathbf{y}, w) dS_{\mathbf{y}, w} \right) + \left(t \int_{\partial \tilde{B}_t(\mathbf{x}, z)} \tilde{\psi}(\mathbf{y}, w) dS_{\mathbf{y}, w} \right). \quad (7.16)$$

As integrais que aparecem na formula acima são sobre esferas em \mathbb{R}^3 (de raio t e centro $(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3$) descritas nas variáveis de integração $(\mathbf{y}, w) \in \mathbb{R}^3$. Podemos parametrizar as duas semiesferas por

$$w = z \pm \sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} : \mathbf{y} \in B_t(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^2;$$

assim $dS_{\mathbf{y}, w} = dV_{\mathbf{y}} \sqrt{1 + |\nabla_{\mathbf{y}} w|^2} = dV_{\mathbf{y}} \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} = dV_{\mathbf{y}} \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}}$. Logo

$$\int_{\partial \tilde{B}_t(\mathbf{x}, z)} \tilde{\phi}(\mathbf{y}, w) dS_{\mathbf{y}, w} = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B_t(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{y}) \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} = \quad (7.17)$$

$$= \frac{2}{4\pi t^2} \pi t^2 \int_{B_t(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{y}) \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}}, \quad (7.18)$$

e uma fórmula análoga vale para ψ .

Obtemos então a fórmula

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\partial_t \left(t^2 \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\phi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} \right) + t^2 \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} \right]; \quad (7.19)$$

esta é chamada **fórmula de Poisson** (para a solução da equação da onda em dimensão $n = 2$).

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 7.6. *Se $n = 2$, $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ e $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, então existe uma solução em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$ de (PVI-O) (com $F = 0$) e é dada pela (7.19).*

Outras formas úteis de escrever (7.19) são as seguintes.

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{t\phi(\mathbf{y}) + t\nabla\phi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t^2\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}}; \quad (7.20)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\phi(\mathbf{y}) + \nabla\phi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{1 - \left|\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{t}\right|^2}} dV_{\mathbf{y}}. \quad (7.21)$$

7.2.1 O caso com n par maior

Para n par maior que dois, obtemos a fórmula

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[\partial_t \left(\frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\phi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} \right) + \left(\frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} \right) \right], \quad (7.22)$$

onde $\gamma_n := 2 \cdot 4 \dots n = \prod_{k=1}^{n/2} 2k$.

Esta é a **fórmula resolutiva da equação da onda em dimensão n par**.

O teorema 7.5 junto com as contas acima implicam no seguinte resultado:

Teorema 7.7. *Se n é par, $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{C}^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$, então existe uma solução em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ de (PVI-O) (com $F = 0$) e é dada pela (7.22).*

Em particular, (7.22) satisfaz $\square u = 0$ para $t > 0$ e pode ser prolongada por continuidade em $t = 0$ até satisfazer as condições iniciais.

7.3 A solução da equação não homogênea

Para obtermos a solução de (PVI-O) no caso não homogêneo² usaremos o chamado **princípio de Duhamel**: isso consiste em afirmar que a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}} u = F(\mathbf{x}, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \end{cases} \quad (7.23)$$

pode ser encontrada pela fórmula³

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t u[s](\mathbf{x}, t) ds, \quad (7.24)$$

onde $u[s](\mathbf{x}, t)$ é a solução de

$$\begin{cases} u_{tt}[s] - \Delta_{\mathbf{x}} u[s] = 0, \\ u[s](\mathbf{x}, s) = 0, \\ u_t[s](\mathbf{x}, s) = F(\mathbf{x}, s). \end{cases} \quad (7.25)$$

²Outra técnica possível seria integrar F no come do passado de um ponto, como feito na Dedução 5.10

³Esta fórmula é a versão para EDPs do método de variação das constantes arbitrárias: de fato uma solução de $u_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}} u = F(\mathbf{x}, t)$ é obtida sobrepondo soluções da homogênea com pesos que dependem da função F .

Mostremos primeiro que a fórmula funciona: calculemos

$$u_t = \partial_t \left(\int_0^t u[s](\mathbf{x}, t) ds \right) = u[t](\mathbf{x}, t) + \int_0^t u_t[s](\mathbf{x}, t) ds = \int_0^t u_{tt}[s](\mathbf{x}, t) ds$$

pela condição em (7.25) $u[t](\mathbf{x}, t) = 0$.

Pondo $t = 0$ nesta equação e em (7.24) vemos que u satisfaz ambas as condições iniciais de (7.23). Derivando mais uma vez obtemos

$$u_{tt} = \partial_t \left(\int_0^t u_t[s](\mathbf{x}, t) ds \right) = u_t[t](\mathbf{x}, t) + \int_0^t u_{tt}[s](\mathbf{x}, t) ds;$$

usando a equação e a condição inicial de (7.25) obtemos

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t) + \int_0^t \Delta_{\mathbf{x}} u[s](\mathbf{x}, t) ds = F(\mathbf{x}, t) + \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) ds,$$

logo u é solução de (7.23).

Dos Teoremas 7.5-7.7 sabemos que para resolver (7.25) precisa $F \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$, logo temos

Teorema 7.8. *Seja $F \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, então (7.24) é de classe \mathcal{C}^2 e é solução de (7.23).*

Em particular

Teorema 7.9. *Seja $n = 2$ ou 3 e $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, então (7.24) é de classe \mathcal{C}^2 e é solução de (7.23).*

Usando as formulas das seções anteriores para resolver (7.25), obtemos a solução de (7.23) nos casos $n = 1, 2, 3$:

$n = 1 :$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(y, s) dy,$$

$n = 2 :$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_{B_{t-s}(\mathbf{x})} \frac{F(\mathbf{y}, s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}},$$

$n = 3 :$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t ds \int_{\partial B_{t-s}(\mathbf{x})} \frac{F(\mathbf{y}, s)}{t-s} dS_{\mathbf{y}}.$$

7.4 Comentários sobre a solução da eq. da onda

- Como para o caso $n = 1$, uma vez que mostramos existência, unicidade e uma fórmula para a solução podemos verificar dela a dependência contínua dos dados e concluir que o problema de Cauchy (PVI-O) é *bem posto segundo Hadamard*.
- No caso $n > 1$ ímpar, se aplicarmos a (7.14) o mesmo procedimento de explicitar as derivadas que usamos para passar de (7.11) a (7.12), podemos ver que a solução em (\mathbf{x}, t) depende de ϕ, ψ e de um certo número de suas derivadas, mas apenas na esfera de centro \mathbf{x} e raio t , isto é, depende destas funções apenas numa pequena vizinhança desta esfera, e não no interior da bola, como sugeria o teorema 5.6.

Este fato é chamado **princípio de Huygens** e não vale nem em dimensão $n = 1$ nem em dimensão par, como pode ser visto pela fórmula de D'Alembert e por (7.22).

De fato, comparando as três fórmulas $n = 1$, $n > 1$ ímpar e n par, podemos ver importantes *diferenças qualitativas*:

- no caso $n = 1$, a solução em (x, t) depende de ϕ na esfera de centro x e raio t (isto é, o dois pontos $x \pm t$), de ψ na bola inteira (o segmento $[x - t, x + t]$) e de F no inteiro cone (triângulo) do passado de (x, t) ;
- no caso $n > 1$ ímpar a solução em (\mathbf{x}, t) depende de ϕ, ψ (e suas derivadas) apenas na esfera de centro \mathbf{x} e raio t e de F apenas na superfície do cone do passado de (\mathbf{x}, t) ;
- no caso n par, enfim, a solução em (\mathbf{x}, t) depende de ϕ, ψ em toda a bola de centro \mathbf{x} e raio t e de F no inteiro cone do passado de (\mathbf{x}, t) .

Reescrevamos os casos $n = 1, 2, 3$ com $F = 0$ numa forma fácil de comparar:

$$n = 1 : \quad u(x, t) = \int_{\partial B_t(x)} \phi(y) dy + \int_{B_t(x)} t\psi(y) dy, \quad (7.26)$$

$$n = 2 : \quad u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\phi(\mathbf{y}) + \nabla\phi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{1 - \left|\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t}\right|^2}} dV_{\mathbf{y}}, \quad (7.27)$$

$$n = 3 : \quad u(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B_t(\mathbf{x})} [\phi(\mathbf{y}) + \nabla\phi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t\psi(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}}. \quad (7.28)$$

Podemos ver que, além das diferenças no domínio de dependência, também nas últimas duas fórmulas aparece o gradiente de ϕ , e na fórmula em dimensão 2 aparece a função a denominador que pesa de maneira diferente os dados segundo sua distância de \mathbf{x} (os na borda da bola têm peso maior, mas todos os na bola têm peso não nulo).

- Os teoremas 7.5 e 7.7 mostram que para ter solução \mathcal{C}^2 precisaremos dados tanto mais regulares quanto maior for a dimensão: isso não é apenas uma necessidade técnica para obter o resultado, mas realmente a regularidade da solução pode ser menor da dos dados, como pode ser visto pelas fórmulas da solução, que envolvem

várias derivadas dos dados. Esta **perda de regularidade** é devida ao fato que as singularidades propagando nos cones característicos podem se somar em algumas regiões dando singularidades mais fortes.

Por outro lado, vimos na observação 5.7 que, pelo menos para dados a suporte compacto, a energia $\int u_t^2 + |\nabla u|^2$ é conservada: isso significa que a soma das norma L^2 de u_t e ∇u resta constante: a deterioração da regularidade acontece apenas no sentido clássico, não para as derivadas no sentido L^2 .

- O princípio de Huygens tem algumas importantes *consequências físicas*.
 - Como som e luz satisfazem a equação da onda em dimensão 3, o princípio de Huygens implica no fato que um sinal (de luz ou de som) emitido em $t = 0, \mathbf{x} = 0$ é recebido exatamente no instante $t = |\mathbf{x}|$ no ponto \mathbf{x} : isso permite de maneira simples transmitir receber e decodificar sinais sonoros e luminosos. O mesmo não acontece no caso de ondas numa superfície líquida: um sinal emitido em $t = 0, \mathbf{x} = 0$ será recebido no ponto \mathbf{x} a começar do tempo $t = |\mathbf{x}|$, mas continuaria perturbando o ponto \mathbf{x} para todo $t > |\mathbf{x}|$, se sobrepondo a eventuais sinais seguintes. Este fenômeno pode ser visto facilmente nas ondas produzidas pela queda de uma pedra: em vez de gerar apenas uma onda circular que propaga com velocidade c (como aconteceria em dimensão 3) geram-se ondas concêntricas sempre mais fracas mas que nunca se anulam. Este fato também pode ser visualizado pensando no método de descida: se pensarmos na solução com $n = 2$ como uma solução em \mathbb{R}^3 uniforme numa direção, o sinal emitido em $t = 0, (x, y) = (0, 0)$ corresponderá em \mathbb{R}^3 a um sinal emitido ao longo do eixo z , logo um observador começará a perceber o sinal quando chegar o emitido do ponto mais próximo da reta, mas continuará percebendo, sempre mais fracos, os emitidos nos pontos mais longe.
 - Outra consequência do princípio de Huygens é que, para $n > 1$ ímpar, se os dados iniciais têm suporte compacto, então a solução $u(\cdot, t)$, terá também, para t grande, não apenas suporte compacto mas *suporte contido no anel* $\{r(t) \leq |\mathbf{x}| \leq R(t)\}$, de fato para $|\mathbf{x}| < r(t)$ a esfera $\partial B_t(\mathbf{x})$ não terá mais intersecção com o suporte dos dados e assim $u(\mathbf{x}, t) = 0$. Se além de ter suporte compacto, os dados são limitados e com derivadas limitadas, podemos deduzir que a *solução decairá com o tempo*: de fato a intersecção de $\partial B_t(\mathbf{x})$ com o suporte dos dados será, para t grande, da ordem de D^{n-1} sendo D o diâmetro do suporte dos dados, logo não aumentará mais de superfície, mas as médias diminuem pois a medida de $\partial B_t(\mathbf{x})$ cresce como t^{n-1} ; se considerarmos o caso $n = 3$, usando (7.12), temos que a integranda cresce no máximo como t , $\partial B_t(\mathbf{x})$ como t^2 e logo a solução decai como $1/t$. Algo parecido pode ser obtido em dimensão par, mas a função peso complica um pouco a questão. Em dimensão um obviamente não tem este decaimento no tempo.

7.5 A equação do calor em dimensão maior

Para obter a solução da equação do calor em dimensão espacial $n > 1$, podemos proceder de uma forma bem mais simples do que no caso da onda. De fato é suficiente observar o seguinte simples Lema.

Lema 7.10. *Se $u_i(\xi, t)$, $i = 1, \dots, n$ são soluções da equação do calor em uma variável espacial ξ , então $u(\mathbf{x}, t) = \prod_{i=1}^n u_i(x_i, t)$ é solução da equação do calor em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Vejamos isso com $n = 2$, mas a prova é análoga para qualquer n : consideremos $v(x, t)$ e $w(y, t)$ tais que $v_t - v_{xx} = 0 = w_t - w_{yy}$. Seja então $u(x, y, t) := v(x, t)w(y, t)$, assim

$$u_t = vw_t + v_t w, \quad u_{xx} = v_{xx}w, \quad u_{yy} = w_{yy}u$$

e concluímos que

$$u_t - \Delta_{x,y}u = (v_t - v_{xx})w + v(w_t - w_{yy}) = 0.$$

□

Corolário 7.11. *A função*

$$\psi^n(\mathbf{x}, t) := \prod_{i=1}^n \psi(x_i, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\sum x_i^2}{4t}}$$

- *satisfaz a equação do calor em \mathbb{R}^n para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$,*
- *sua integral em \mathbb{R}^n é 1 para todo $t > 0$,*
- *tende a 0 quando $t \rightarrow 0$ exceto na origem.*

Demonstração. A primeira afirmação é consequência do Lema 7.10 e do fato que ψ satisfaz a equação do calor em uma variável para todo $t > 0$. A segunda é apenas uma aplicação do Teorema de Fubini, já que a integral de ψ na reta é sempre 1. A terceira vem também da análoga propriedade de ψ . □

Podemos então interpretar ψ^n (que denotaremos a partir de agora simplesmente por ψ , sendo subentendida a dimensão espacial em que estamos trabalhando) como **solução fundamental** para a equação do calor em dimensão n , ou seja, a *solução gerada em \mathbb{R}^n por uma distribuição de temperatura inicial concentrada no instante $t = 0$ e no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Em particular, para todo $t > 0$, a função $\psi(\cdot, t)$ é uma **gaussiana em n variáveis, radial-simétrica na variável \mathbf{x} , de integral unitário, centrada em $x = 0$ e cuja variância $\sigma^2 = 2t$ aumenta com o tempo.**

Usando a solução fundamental encontrada é possível provar fórmulas para a solução do problema de valores iniciais (PVI-C), formalmente análogas às (5.19) e (5.22):

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{w}, t) \phi(\mathbf{w}) dV_{\mathbf{w}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{w}|^2}{4t}} \phi(\mathbf{w}) dV_{\mathbf{w}} \quad (7.29)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{w}, t) \phi(\mathbf{w}) dV_{\mathbf{w}} + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{w}, t - s) F(\mathbf{w}, s) dV_{\mathbf{w}}.$$

7.6 Problemas mistos via separação de variáveis

Se Ω é um domínio limitado podemos tentar resolver a equação do calor ou da onda em $\Omega \times [0, \infty)$, com condições de fronteira de tipo Dirichlet ou Neumann (homogêneas) via separação de variáveis. No lugar de separar cada variável, apenas separaremos o tempo do espaço, isto é, procurando uma solução na forma $u(\mathbf{x}, t) = T(t)X(\mathbf{x})$. Obtemos, para $X, T \neq 0$,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(\mathbf{x})}{X(\mathbf{x})} \quad \text{no caso do calor}, \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(\mathbf{x})}{X(\mathbf{x})} \quad \text{no caso da onda.}$$

Como lado direito e esquerdo dependem cada um de uma das variáveis, necessariamente serão constantes, que indicamos por $-\lambda$. Isso nos leva a querer resolver um problema para o Laplaciano na forma (dependendo das condições de borda)

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{ou} \quad u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.30)$$

onde λ é um parâmetro real.

Este problema é chamado **problema de autovalores**, no conjunto Ω (já trabalhamos com ele no caso em uma variável espacial na seção 5.5, e também no exercício 6.11).

No exercício 6.11 vimos que se $\lambda < 0$ existe apenas a solução trivial $u \equiv 0$, mas para $\lambda \geq 0$ podem existir outras soluções. De fato, acontece algo bem parecido com o caso em dimensão um: é conhecido (veja por exemplo em [Bre83]) que existe uma sequência $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ divergente, com $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$, de valores de λ (ditos **autovalores**) pelos quais existem soluções não triviais φ_i de (7.30) (ditas **autofunções**); estas soluções são regulares se Ω o for, e podem ser escolhidas de maneira de formar uma base ortonormal⁴ para $L^2(\Omega)$ (exatamente como vimos com as funções $\sin(nx)$), permitindo então de usar a mesma teoria das séries de Fourier (veja o Teorema 5.30 e os seus comentários).

Como já visto na seção (5.5), resolvendo agora $T' = -\lambda T$ obtemos soluções da forma $Ce^{-\lambda t}$, para o calor enquanto para a onda resolvemos $T'' = -\lambda T$ obtendo soluções da forma $A \sin(\sqrt{\lambda}t) + B \cos(\sqrt{\lambda}t)$.

Chegamos então nos seguintes resultados:

⁴A ortogonalidade das autofunções associadas a autovalores distintos é fácil de provar usando as identidades de Lagrange-Green: sejam (λ_n, φ_n) e (λ_k, φ_k) duplas autovalor-autofunção correspondentes.

Se, no caso do calor, a condição inicial for⁵

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x),$$

então a solução será (formalmente)

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x) e^{-\lambda_i t}.$$

No caso da onda, com condições

$$u(x, 0) = \phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i(x)$$

teremos a solução (formal)

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \left[a_i \cos(\sqrt{\lambda_i} t) + \frac{b_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin(\sqrt{\lambda_i} t) \right]. \quad (7.33)$$

Como na seção 5.5, apenas faltará verificar a convergência apropriada para obter soluções clássicas.

As observações feitas na seção 5.5 sobre propriedades, regularidade e decaimento das soluções, continuam valendo neste novo contexto, em vista do fato que a sequência $\lambda_i \rightarrow \infty$ como a sequência dos naturais (note também que enquanto o primeiro autovalor λ_1 é positivo para o problema de Dirichlet, ainda será $\lambda_1 = 0$ no caso de Neumann, com autofunção associada $\varphi_1 = \text{const}$).

Aplicação 7.12. [Vibração de um tambor.]

Podemos usar o método acima par estudar a vibração de um tambor: uma vez calculadas

Então temos

$$\int_{\Omega} (-\Delta \phi_n) \phi_k = \lambda_n \int_{\Omega} \phi_n \phi_k, \quad (7.31)$$

$$\int_{\Omega} (-\Delta \phi_k) \phi_n = \lambda_k \int_{\Omega} \phi_n \phi_k, \quad (7.32)$$

mas os lados esquerdos são iguais por (LG2) em vista das condições de fronteira, implicando que se $\lambda_n \neq \lambda_k$, necessariamente $\int_{\Omega} \phi_n \phi_k = 0$.

Por outro lado, autofunções correspondentes ao mesmo autovalor formam um subespaço vetorial (verifique), no qual pode ser escolhida uma base ortonormal.

⁵Como vimos na seção 5.6.3, se a sequência φ_i é escolhida ortonormal, então os coeficientes da série são dados por $a_i = \int_{\Omega} \phi \varphi_i$.

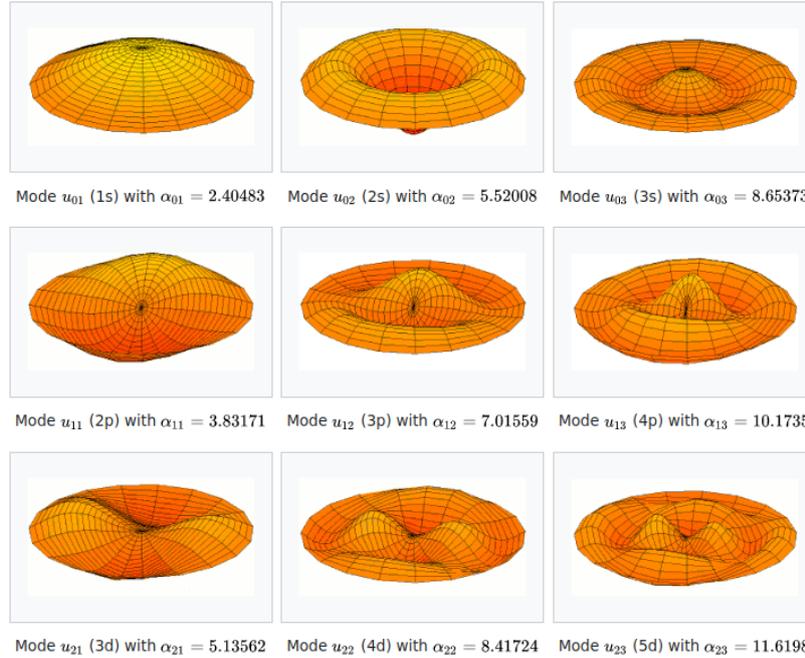


Figura 7.1: Alguns modos de vibração de um tambor circular.

as autofunções do problema de Dirichlet no conjunto Ω que representa a membrana do tambor, podemos escrever a solução como a série (7.33).

Diferente do caso da corda, onde as frequências eram $\sqrt{\lambda_i} = i$, a distribuição da sequência destes autovalores não tem esta mesma regularidade, logo o som produzido não será uma sobreposição de frequências múltiplas de uma frequência fundamental, produzindo um som menos harmônico.

Para o tambor circular de raio 1 podemos separar as variáveis ρ e θ na expressão em coordenadas polares de (7.30):

$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}v_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}v_{\theta\theta} = -\lambda v;$$

pondo $v(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ obtemos

$$R''\Theta + \frac{R'\Theta}{\rho} + \frac{R\Theta''}{\rho^2} = -\lambda R\Theta,$$

onde para separar variáveis precisamos dividir por $R\Theta$ e multiplicar por ρ^2 , obtendo

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \lambda \rho^2 = \mu = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

A componente angular terá soluções 2π -periódicas se $\mu = \ell^2$ com $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da forma $A \cos(\ell\theta) + B \sin(\ell\theta)$.

Precisamos então resolver

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} + \lambda \rho^2 - \ell^2 = 0, \quad R(1) = 0$$

para todo $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. As soluções podem ser obtidas em termos das funções de Bessel (veja [Str08, Cap10.2]). Em particular, para cada ℓ dado, existe uma sequência de valores $\lambda_{\ell,k}$ para os quais existe uma solução $R_{\ell,k}(\rho)$ satisfazendo $R_{\ell,k}(1) = 0$, e tendo outros $k - 1$ zeros entre 0 e 1: as autofunções serão então $R_{\ell,k}(\rho) \cos(\ell\theta)$, $R_{\ell,k}(\rho) \sin(\ell\theta)$ com autovalores correspondentes $\lambda_{\ell,k}$. Cada autofunção produz então um som com frequência $\sqrt{\lambda_{\ell,k}}$.

Na figura 7.1⁶ é possível visualizar algumas destas autofunções junto com os autovalores correspondentes. Note que não tem alguma regularidade clara na sequência dos autovalores: as primeiras frequências de vibração são (aproximadamente) $2.4(\ell = 0, k = 1)$, $3.8(\ell = 1, k = 1)$, $5.1(\ell = 2, k = 1)$, $5.5(\ell = 0, k = 2)$, .. ★

Exercício 7.13. Considere um tambor retangular $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi/\eta]$: separe as duas variáveis para encontrar as autofunções e os autovalores correspondentes (isto é, resolva (7.30)).

No caso do quadrado ($\eta = 1$), escreva as frequências de vibração associadas aos primeiros autovalores, observe sua distribuição e as autofunções correspondentes. ★

Aplicação 7.14. [Átomo de hidrogênio.]

Um importante problema com características parecidas ao do tambor, é o do átomo de hidrogênio. Consideremos a equação de Schrödinger em \mathbb{R}^3 com potencial radial $V(|\mathbf{x}|)$:

$$u(\mathbf{x}, t) : \quad \begin{cases} iu_t = -\Delta u + V(|\mathbf{x}|)u, \\ u \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} 0; \end{cases}$$

procurando por ondas estacionárias da forma $u(\mathbf{x}, t) = \exp(-i\omega t)\hat{u}(\mathbf{x})$ temos

$$\omega \exp(-i\omega t)\hat{u}(\mathbf{x}) = -\exp(-i\omega t)\Delta\hat{u} + V(|\mathbf{x}|)\exp(-i\omega t)\hat{u}(\mathbf{x})$$

e logo \hat{u} satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta\hat{u} + V(|\mathbf{x}|)\hat{u} = \omega\hat{u}. \\ \hat{u} \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} 0. \end{cases} \quad (7.34)$$

Pondo $V(|\mathbf{x}|) = -1/|\mathbf{x}|$: e passando a coordenadas polares obtemos

$$v_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}v_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left[v_{\varphi\varphi} + \cot(\varphi)v_{\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi}v_{\theta\theta} \right] + \frac{1}{\rho}v = -\omega v.$$

⁶Veja também em https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_membrane e compare com o caso da corda em https://en.wikipedia.org/wiki/String_vibration.

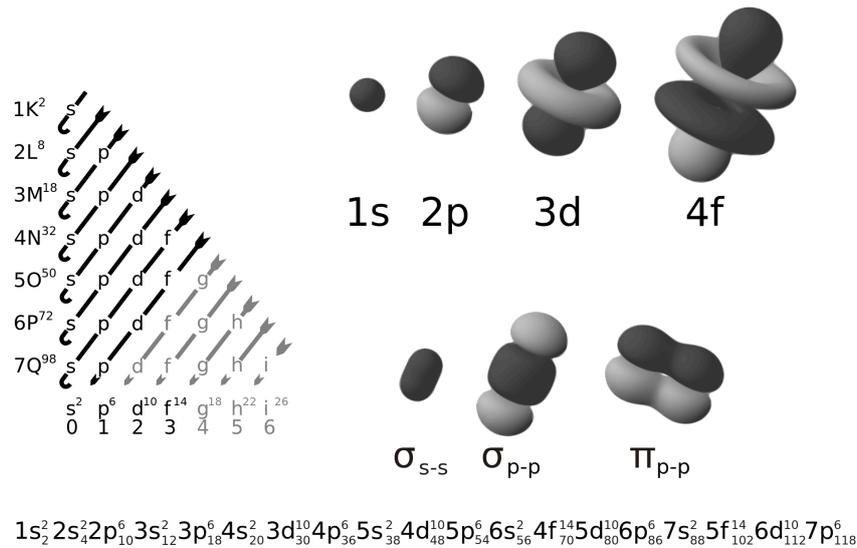


Figura 7.2: Ordem de preenchimento e esboço da forma dos orbitais.

Separando a parte radial e a parte angular como $v(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho)A(\theta, \varphi)$ temos

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{2R'}{R} + \omega\rho^2 + \rho = \mu = -\frac{1}{A} \left[A_{\varphi\varphi} + \cot(\varphi)A_{\varphi} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} A_{\theta\theta} \right].$$

As soluções da parte angular existem para $\mu = \ell^2$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, e são chamadas de esféricos harmônicos de ordem ℓ (correspondem aos polinômios harmônicos, homogêneos de grau ℓ , restritos à esfera). Em particular, em dimensão 3, a dimensão do autoespaço correspondente ao autovalor ℓ é $2\ell + 1$.⁷

Procedendo como para o tambor circular, precisamos então resolver

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{2R'}{R} + \omega\rho^2 + \rho - \ell^2 = 0, \quad R \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0$$

para todo $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. As soluções podem ser obtidas em termos dos polinômios de Laguerre generalizados (veja [Str08, Cap10.7]). De novo, para cada ℓ dado, existe uma sequência de valores $\omega_{\ell,k}$ para os quais existe uma solução $R_{\ell,k}(\rho)$ satisfazendo $R_{\ell,k} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0$, e tendo $k - 1$ zeros.

As **autofunções** serão então $R_{\ell,k}(\rho)A_{\ell}^i(\theta, \varphi)$ onde os $A_{\ell}^i(\theta, \varphi)$ ($i = 1, \dots, 2\ell + 1$) são os harmônicos esféricos de ordem ℓ , com **autovalores correspondentes** $\omega_{\ell,k}$. Neste caso o valor de ω corresponde à energia associada à autofunção.

Na interpretação física, as autofunções correspondem aos "orbitais" do átomo, e cada orbital pode hospedar dois elétrons.⁸ É chamado primeiro número quântico o valor $n =$

⁷Em dimensão 2, o problema análogo é o já visto $\Theta''/\Theta = -\ell^2$: neste caso os harmônicos de ordem ℓ no círculo são $\cos(\ell\theta)$ e $\sin(\ell\theta)$, e o autoespaço correspondente tem sempre dimensão 2 (exceto para $\ell = 0$, onde apenas contém as constantes).

⁸Para átomos com mais de um elétron, o modelo é mais complicado e impossível de resolver analiticamente, mas ainda o modelo do átomo de hidrogênio é uma boa aproximação e permite descrever qualitativamente as principais características dos elementos.

$k + \ell$, que individua a camada eletrônica (e corresponde a um mais o número total de superfícies de nível zero na autofunção, enquanto como vimos k corresponde a um mais o número de zeros da componente radial); o segundo número quântico é ℓ e individua a forma do orbital, sendo a ordem do harmônico esférico correspondente (veja figura 7.2).⁹

Em particular,

- os orbitais de tipo s são os com $\ell = 0$ (radiais), e há apenas um por cada valor de k , hospedando 2 elétrons (estes orbitais são indicados por ns),
- os de tipo p são os com $\ell = 1$, logo são três por cada valor de k e hospedam 6 elétrons (estes orbitais são indicados por np),
- os de tipo d são os com $\ell = 2$, logo são cinco por cada valor de k e hospedam 10 elétrons (estes orbitais são indicados por nd),
- os de tipo f são os com $\ell = 3$, logo são sete por cada valor de k e hospedam 14 elétrons (estes orbitais são indicados por nf),
- autofunções com $\ell > 3$ não aparece nos estados normais dos elementos da natureza pois não existem átomos com suficiente número de elétrons.

A ordem de preenchimento dos orbitais segue a ordem da energia associada a eles, isto é, dos autovalores $\omega_{\ell,k}$: temos então a conhecida ordem de preenchimento:

$$\overset{1s}{\omega_{0,1}} < \overset{2s}{\omega_{0,2}} < \overset{2p}{\omega_{1,1}} < \overset{3s}{\omega_{0,3}} < \overset{3p}{\omega_{1,2}} < \overset{4s}{\omega_{0,4}} < \overset{3d}{\omega_{2,1}} < \overset{4p}{\omega_{1,3}} < \overset{5s}{\omega_{0,5}} < \overset{4d}{\omega_{2,2}} < \overset{5p}{\omega_{1,4}} < \overset{6s}{\omega_{0,6}} < \overset{4f}{\omega_{3,1}} < \dots$$

Esta estrutura explica por exemplo a forma da tabela periódica (figura 7.3): cada linha começa quando se inicia a encher um novo orbital de tipo s , logo a primeira linha tem 2 elementos, a segunda e terceira tem 8 (preenchimento de orbitais s e p), a seguir tem duas linhas com 10 elementos mais (pois preenchem os d) e em seguida duas com 14 elementos mais (preenchendo os f).

★

⁹Veja também https://en.wikipedia.org/wiki/Hydrogen_atom e https://en.wikipedia.org/wiki/Atomic_orbital.

Tabela periódica

3	—	número atômico
Li	—	símbolo químico
lítio	—	nome
6,94	—	peso atômico (massa atômica relativa)

1 H hidrogênio 1,008																	18 He hélio 4,0026				
3 Li lítio 6,94	4 Be berílio 9,0122															5 B boro 10,81	6 C carbono 12,011	7 N nitrogênio 14,007	8 O oxigênio 15,999	9 F flúor 18,998	10 Ne neônio 20,180
11 Na sódio 22,990	12 Mg magnésio 24,305															13 Al alumínio 26,982	14 Si silício 28,086	15 P fósforo 30,974	16 S enxofre 32,06	17 Cl cloro 35,45	18 Ar argônio 39,95
19 K potássio 39,098	20 Ca cálcio 40,078(4)	21 Sc escândio 44,956	22 Ti títânio 47,867	23 V vanádio 50,942	24 Cr cromo 51,996	25 Mn manganês 54,938	26 Fe ferro 55,845(2)	27 Co cobalto 58,933	28 Ni níquel 58,693	29 Cu cobre 63,546(3)	30 Zn zinco 65,38(3)	31 Ga gálio 69,723	32 Ge germânio 72,630(5)	33 As arsênio 74,922	34 Se selênio 78,971(8)	35 Br bromo 79,904	36 Kr criptônio 83,798(3)				
37 Rb rubídio 85,468	38 Sr estrôncio 87,62	39 Y ítrio 88,906	40 Zr zircônio 91,224(2)	41 Nb nióbio 92,906	42 Mo molibdênio 95,95	43 Tc tecnécio	44 Ru rútenio 101,07(2)	45 Rh ródio 102,91	46 Pd paládio 106,42	47 Ag prata 107,87	48 Cd cádmio 112,41	49 In índio 114,82	50 Sn estanho 118,71	51 Sb antimônio 121,76	52 Te telúrio 127,60(3)	53 I iodo 126,90	54 Xe xenônio 131,29				
55 Cs césio 132,91	56 Ba bário 137,33	57 a 71 Hf hafnínio 178,48(6)	72 Ta tântalo 180,95	73 W tungstênio 183,84	74 Re rênio 186,21	75 Os ósio 190,23(3)	76 Ir írio 192,22	77 Pt platina 195,08	78 Au ouro 196,97	79 Hg mercúrio 200,59	80 Tl talho 204,38	81 Pb chumbo 207,2	82 Bi bismuto 208,98	83 Po polônio	84 At astato	85 Rn radônio	86				
87 Fr frâncio	88 Ra rádio	89 a 103 Rf rúterfórdio	104 Db dubnio	105 Sg seabérgio	106 Bh bohrio	107 Hs hásio	108 Mt metálio	109 Ds darmstádio	110 Rg reentgênio	111	112 Cn copernício	113 Nh nihônio	114 Fl fleróvio	115 Mc moscóvio	116 Lv livermório	117 Ts tennesso	118 Og oganessônio				
www.tabelaperiodica.org																					
87 La lantanio 138,91	88 Ce césio 140,12	89 Pr praseodímio 140,91	90 Nd neodímio 144,24	91 Pm promécio	92 Sm samário 150,36(3)	93 Eu europio 151,96	94 Gd gadolínio 157,25(3)	95 Tb terbio 158,93	96 Dy disprósio 162,50	97 Ho hólmio 164,93	98 Er érbio 167,26	99 Tm tímio 168,93	100 Yb itérbio 173,05	101 Lu lutécio 174,967							
89 Ac actínio	90 Th tório 232,04	91 Pa protactínio 231,04	92 U urânio 238,03	93 Np néptúmio	94 Pu plutônio	95 Am américio	96 Cm cúrio	97 Bk berquélio	98 Cf califórnio	99 Es éstatício	100 Fm fermílio	101 Md mendelévio	102 No nobélio	103 Lr lawréncio							

Fonte: IUPAC. Os dados pertencem à comunidade científica e não são propriedade intelectual.
 Versão: IUPAC2019 (p-67) com 8 alterações algorítmicas, baseada na IUPAC2019-2015-0081 - atualizada em 13 de fevereiro de 2022.
 Licença de uso: Creative Commons BY-NC-SA 4.0 - Este conteúdo para fins educacionais.
 Com o consentimento do autor, este conteúdo pode ser usado em qualquer meio.

Figura 7.3: Tabela periódica.

Capítulo 8

Distribuições e transformada de Fourier

Neste capítulo veremos uma pequena panorâmica sobre distribuições e transformada de Fourier. Estas ferramentas permitem definir soluções em sentido generalizado e fornecem métodos para encontrar soluções.

8.1 Distribuições em \mathbb{R}

Definições:

- $\mathcal{D} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \phi \equiv 0 \text{ fora de um conjunto limitado}\}$: **funções \mathcal{C}^∞ a suporte compacto**.
- Definimos em \mathcal{D} a seguinte **noção de convergência**: dada $\{\phi_n\} \subseteq \mathcal{D}$ dizemos que $\phi_n \rightarrow \phi$ em \mathcal{D} se

$$\begin{cases} \phi_n \equiv 0 \text{ fora de um conjunto limitado comum,} \\ D^k \phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D^k \phi \text{ uniformemente para todo } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

- Definimos **Distribuição**: um **funcional linear de domínio \mathcal{D} , contínuo** com respeito à convergência em \mathcal{D} , isto é

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} : \phi \mapsto (f, \phi) \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \circ (f, a\phi + b\psi) = a(f, \phi) + b(f, \psi) \text{ para } a, b \in \mathbb{R}, \phi, \psi \in \mathcal{D}, \\ \circ (f, \phi_n) \rightarrow (f, \phi) \text{ quando } \phi_n \rightarrow \phi \text{ em } \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Denotamos por \mathcal{D}' o espaço das distribuições.

Exemplo 8.1. Alguns exemplos:

- dada uma função localmente integrável g podemos definir a distribuição ¹

$$f : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} g\phi;$$

- nem toda distribuição pode ser gerada como acima, por exemplo

$$\delta_p : \phi \mapsto \phi(p), \quad \delta_p^k : \phi \mapsto \phi^{(k)}(p),$$

são distribuições que não podem ser associadas a nenhuma função localmente integrável; δ_p é dita **delta de Dirac, centrada em p** .

★

Definimos também uma noção de convergência em \mathcal{D}' (dita **convergência fraca em \mathcal{D}'**): dizemos que $f_n \rightharpoonup f$ se

$$(f_n, \phi) \rightarrow (f, \phi) \text{ para toda } \phi \in \mathcal{D}.$$

Exemplo 8.2. Seja $f_n(x) := \psi(x, t_n)$, sendo ψ a solução fundamental do calor. Como para todo $t > 0$ fixado é uma função integrável, logo define uma distribuição:

$$(f_n, \phi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(y - 0, t_n)\phi(y) dy;$$

do teorema 5.16 sabemos que $(f_n, \phi) \rightarrow \phi(0) = (\delta_0, \phi)$, ou seja, mostramos que $f_n \rightharpoonup \delta_0$, no sentido das distribuições. ★

Definimos também **derivada de uma distribuição** como

$$f' : \phi \mapsto -(f, \phi').$$

Esta definição é motivada pelo seguinte fato: se $g \in \mathcal{C}^1$, então a distribuição associada a g' é $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} g'\phi$, onde integrando por partes (sendo ϕ nula fora de um limitado) obtemos $-\int_{\mathbb{R}} g\phi'$.

Exemplo 8.3. A derivada da delta de Dirac é

$$\delta_0' : \phi \mapsto -(\delta_0, \phi') = -\phi'(0),$$

assim as derivadas seguintes são

$$\delta_0^{(k)} : \phi \mapsto (-1)^k (\delta_0, \phi^{(k)}) = (-1)^k \phi^{(k)}(0).$$

¹Observe que se g fosse também contínua, ela seria identificada pela definição da distribuição f ; nestes casos podemos então identificar a função e a distribuição.

A função Sc definida na equação (5.15) define a distribuição $\text{Sc} : \phi \mapsto \int_0^\infty \phi$, assim

$$\text{Sc}' : \phi \mapsto - \int_0^\infty \phi' = \phi(0),$$

ou seja, $\text{Sc}' = \delta_0$.

A função² $\chi_{[a,b]}(x)$ define a distribuição $d : \phi \mapsto \int_a^b \phi$, assim

$$d' : \phi \mapsto - \int_a^b \phi' = \phi(a) - \phi(b),$$

ou seja, $d' = \delta_a - \delta_b$.

A função $P(x) = x \text{Sc}(x)$ define a distribuição $P : \phi \mapsto \int_0^\infty x\phi$, então

$$P' : \phi \mapsto - \int_0^\infty x\phi'(x)dx = -[x\phi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty \phi = \int_0^\infty \phi,$$

ou seja, $P' = \text{Sc}$. ★

Observação 8.4. Vimos que o conceito de distribuição estende a classe das funções localmente integráveis, permitindo definir uma noção de convergência e de derivada mesmo em casos em que elas não fariam sentido na definição clássica.

Por isso veremos a seguir que poderemos resolver EDPs "no sentido das distribuições", obtendo soluções generalizadas. ◁

8.2 Distribuições em \mathbb{R}^n

Podemos definir analogamente **distribuições em \mathbb{R}^n** , tomando

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \phi \equiv 0 \text{ fora de um conjunto limitado}\}$$

e definindo convergência em \mathcal{D} pedindo a existência de um suporte comum e que $D^\alpha \phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D^\alpha \phi$ uniformemente para todo multi-índice α .

As **derivadas parciais** serão definidas (pelo teor. do divergente) como

$$D_{x_i} f : \phi \mapsto -(f, D_{x_i} \phi), \quad \nabla f : \phi \mapsto -(f, \nabla \phi).$$

Exemplo 8.5. A função (descontínua) $u(x, t) = \text{Sc}(x + ct) + \text{Sc}(x - ct)$ define uma distribuição cujas derivadas são

$$\begin{aligned} u_x &= \delta(x + ct) + \delta(x - ct), & u_{xx} &= \delta'(x + ct) + \delta'(x - ct), \\ u_t &= c\delta(x + ct) - c\delta(x - ct), & u_{tt} &= c^2\delta'(x + ct) + c^2\delta'(x - ct). \end{aligned}$$

Logo u (composta por duas descontinuidades que viajam com velocidade c em direções opostas) é uma **solução (no sentido das distribuições) de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$** . ★

²Em geral a função χ_A , dita função característica do conjunto A , é a função que vale 1 em A e 0 em A^c .

8.3 Distribuições em Ω

Podemos definir analogamente **distribuições em um aberto** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, tomando

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \phi \equiv 0 \text{ fora de um aberto } \omega \text{ t.q. } \bar{\omega} \subset \Omega\}.$$

A condição de suporte compacto contido em Ω ainda permite integrar por partes tendo sempre os termos de borda nulos.

Exemplo 8.6. Seja $\Omega = (-\pi, \pi)$ e seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então podemos escrever sua série de Fourier

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Pelas (5.39)

$$\phi(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \right) = \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \left(1/2 + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right) dx.$$

Isso significa que, no sentido das distribuições em $(-\pi, \pi)$,

$$1/2 + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \pi \delta_0.$$

Em notação complexa isso é

$$\sum_{n=-N}^N e^{inx} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2\pi \delta_0.$$

Observe que a série não converge em nenhum ponto! ★

8.4 Exemplos e aplicações

8.4.1 Laplaciano

Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ então por (6.29) vale

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y-x) [-\Delta \phi(y)].$$

Isto significa que, vista como distribuição, $\psi_x(y) := \psi(y-x)$ satisfaz

$$-\Delta \psi_x = \delta_x \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

ou seja, o menos-Laplaciano da solução fundamental é a delta de Dirac.

Da mesma forma, se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ então por (6.33)

$$\phi(x) = \int_{\Omega} G(y, x) [-\Delta\phi(y)].$$

Isto significa que, vista como distribuição em Ω ,

$$-\Delta_y G(y, x) = \delta_x.$$

8.4.2 Calor

Vimos que $\psi(x, t)$ é uma função para todo $t > 0$, mas que vista como distribuição em \mathbb{R} satisfaz

$$\psi(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_0 \text{ em } \mathcal{D}'.$$

Além disso, é possível ver que, como distribuição em \mathbb{R}^2 , $\psi(x, t)$ satisfaz

$$(\partial_t \psi - \partial_{xx} \psi)(x, t) = \delta_0(t) \delta_0(x),$$

ou seja,

$$\phi(0, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(y, s) (-\partial_t - \partial_{xx}) \phi(y, s) dy ds.$$

A conta não é óbvia: lembrando que $\psi(y, s) \equiv 0$ para $s < 0$ e da singularidade, isso pode ser escrito como

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi(y, s) (-\partial_t - \partial_{xx}) \phi(y, s) dy ds,$$

integrando por partes (duas vezes em y e uma em s) e eliminando os termos de borda que estão com $|y|$ ou s grandes, chegamos a

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t - \partial_{xx}) \psi(y, s) \phi(y, s) dy ds + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \psi(y, \varepsilon) \phi(y, \varepsilon) dy,$$

como ψ satisfaz a eq. do calor sobra

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \psi(y, \varepsilon) \phi(y, \varepsilon) dy = \phi(0, 0),$$

como já vimos fazendo o limite de (5.19) quando $t \searrow 0$.

8.4.3 Onda

No caso da onda, já temos uma fórmula de resolução em qualquer dimensão. Podemos então procurar uma **solução fundamental da onda** ψ^o , de forma que definindo

$$u(x, t) := \int \psi^o(x - y, t)g(y),$$

ela seja a solução do eq. da onda homogênea com dados $u(x, 0) = 0$ e $u_t(x, 0) = g(x)$.

Diremos então que ψ^o satisfaz, no sentido das distribuições, o problema

$$\begin{cases} (\partial_{tt}\psi^o - \Delta\psi^o)(x, t) = 0 \\ \psi^o(x, 0) = 0, \quad \psi_t^o(x, 0) = \delta_0 \end{cases} \quad (8.1)$$

podemos interpretar ψ^o como a solução gerada por um impulso concentrado na origem.

- **caso n=1:** pondo então $\int \psi^o(x - y, t)g(y) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g$ obtemos

$$\psi^o(x, t) = \frac{1}{2} \chi_{[-t, t]}(x) = \frac{1}{2} Sc(t^2 - x^2) :$$

o impulso gera um frente de onda que avança em ambas as direções deixando atrás o valor 1.

- **caso n=3:** pondo $\int_{\mathbb{R}^3} \psi^o(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)g(\mathbf{y}) = t \int_{\partial B_t(\mathbf{x})} g dS; = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}} d\rho \delta_0(t-\rho) \int_{\partial B_\rho(\mathbf{x})} g dS;$ obtemos

$$\psi^o(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi t} \delta_0(t - |\mathbf{x}|) :$$

o impulso gera uma frente de onda concentrada apenas numa esfera de raio crescente e de intensidade que decai.

- **caso n=2:** pondo $\int_{\mathbb{R}^2} \psi^o(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{t^2}{2} \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\psi^o(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} = \frac{t^2}{2\pi t^2} \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\psi^o(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}}$ obtemos

$$\psi^o(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}} \chi_{[0, t]}(|\mathbf{x}|) :$$

o impulso gera uma frente de onda que avança enchendo um círculo de raio crescente, deixando para trás um valor não nulo.

8.5 Transformada de Fourier

8.5.1 Definição

Dada³ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente integrável em \mathbb{R} definimos

$$F(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx :$$

F é a **Transformada de Fourier de f** (indicamos também como $T[f]$).

Para reobter f temos a fórmula (dita **anti-transformada**)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi .$$

Observação 8.7. Uma justificação das formulas acima (a prova das passagens não é trivial) vem da série de Fourier, na sua escritura complexa num intervalo de comprimento $2L$. Sabemos que podemos calcular os coeficientes da série (associada a $f|_{[-L,L]}$) como

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-inx\frac{\pi}{L}} dx ,$$

e reobter f como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx\frac{\pi}{L}} .$$

Definindo nos pontos $n\pi/L$ a função F como

$$F\left(\frac{n\pi}{L}\right) := 2Lc_n = \int_{-L}^L f(x) e^{-ix\frac{n\pi}{L}} dx , \quad (8.2)$$

temos então

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{ix\frac{n\pi}{L}} \frac{2\pi}{2L} . \quad (8.3)$$

Pondo $\xi = \frac{n\pi}{L}$ e fazendo uma operação de limite para $L \rightarrow \infty$ (não trivial), a função em (8.2) torna-se definida em todo \mathbb{R} e a série em (8.3) converge a $\int_{\mathbb{R}} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.⁴ \triangleleft

³Podemos assumir também $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

⁴Observe que $\sum_{n=-N}^N F\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{ix\frac{n\pi}{L}} \frac{\pi}{L}$ é uma soma de Riemann associada a $\int_{-\frac{N\pi}{L}}^{\frac{N\pi}{L}} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ e à partição do intervalo em subintervalos iguais de tamanho π/L .

8.5.2 Algumas propriedades

- a operação de transformação T é **linear** ;
- a função transformada $F(\xi) = T[f](\xi)$ é **contínua**, de fato, se f é absolutamente integrável então podemos trocar limite e integral na definição de F ;
- por outro lado, nem sempre F é absolutamente integrável⁵ em \mathbb{R} : por exemplo se $f = \chi_{[-1,1]}$ então

$$T[f](\xi) = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{e^{-i\xi} - e^{i\xi}}{-i\xi} = \frac{2 \sin(\xi)}{\xi};$$

- $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} F(\xi) = 0$;
- se f é real e par então F é real e par; se f é real e ímpar então F é imaginária com parte imaginária ímpar.

8.5.3 Exemplos e mais propriedades:

Nas tabelas a seguir reportamos algumas transformadas importantes e propriedades da

	f	F
a)	$e^{-x^2/2}$	$\sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$
b)	$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2+\xi^2}$
c)	$\chi_{[-a,a]}$	$\frac{2 \sin(a\xi)}{\xi}$

transformada.

d)	$f'(x)$	$i\xi F(\xi)$
e)	$xf(x)$	$iF'(\xi)$
f)	$f(x-a)$	$e^{-ia\xi}F(\xi)$
g)	$e^{iax}f(x)$	$F(\xi-a)$
h)	$ a f(ax)$	$F(\xi/a)$
i)	$f * g$	FG

Prova das propriedades nas tabelas.

(a) Para calcular $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx$, completamos o quadrado no expoente obtendo $-(x^2 - 2ix\xi + (i\xi)^2)/2 + (i\xi)^2/2$ e logo $I = e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2/2} dx$.

A integral que sobra é igual a $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$: a prova disso consiste em mostrar que a integral complexa $\int_{\gamma} e^{-z^2/2} = 0$, onde γ é a borda do retângulo $[-A, A] \times$

⁵Neste caso, cuidado com a anti-transformada: como F não é abs. integrável então a anti-transformada é apenas no sentido das distribuições (veja na seção 8.5.4). De fato, se F fosse abs. integrável poderíamos deduzir a continuidade de f , que não vale.

$[0, \xi] \subseteq \mathbb{C}$, corresponde, quando $A \rightarrow \infty$, à diferença das duas integrais mais a integral feita nos lados de parte real $\pm A$, que tende a zero:

$$\left| \int_{\pm A}^{\pm A + i\xi} e^{-z^2/2} dz \right| = \left| \int_0^\xi e^{-(A^2 + 2Aiy - y^2)/2} i dy \right| \leq |\xi| e^{-A^2/2} e^{\xi^2/2} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.$$

- (b) Calculamos $\int_0^\infty e^{-ax} e^{-ix\xi} dx = \left[\frac{e^{(-a-i\xi)x}}{-a-i\xi} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{a+i\xi}$;
 analogamente $\int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{a-i\xi}$;
 somando os dois temos $\frac{2a}{a^2 + \xi^2}$.

- (d-e) Integrando por partes (note que a absoluta integrabilidade de f implica que $f \rightarrow 0$ pelo menos ao longo de duas sequência $x_n^\pm \rightarrow \pm\infty$)

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-ix\xi} dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) (-i\xi) e^{-ix\xi} dx = i\xi F(\xi).$$

Analogamente provamos a (e)

- (f-g) Com a mudança de variável $y = x - a$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} f(x - a) e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i(y+a)\xi} dy = e^{-ia\xi} F(\xi).$$

Analogamente para (g).

- (h) Com a mudança de variável $y = ax$, se $a > 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy\xi/a} dy = \frac{1}{a} F(\xi/a).$$

Quando $a < 0$ há uma troca de sinal devida à troca dos extremos de integração.

- (c) Em vista da (h) e da transformada de $\chi_{[-1,1]}$ já vista.

- (i) A transformada da convolução é $\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right] e^{-ix\xi} dx$;

trocando x por $z + y$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(z) g(y) e^{-iy\xi} e^{-iz\xi} dz \right] dy = \left[\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-iy\xi} dy \right] \left[\int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-iz\xi} dz \right] = T[g]T[f].$$

□

8.5.4 Transformadas “generalizadas”

É possível definir diferentes versões da Transformada de Fourier, assumindo diferentes hipóteses. Por exemplo, vimos que assumindo f absolutamente integrável a transformada F podia não sê-lo. Uma possibilidade para ter uma situação mais simétrica é definir a transformada no conjunto das funções $f \in \mathcal{C}^\infty$ cujas derivadas de qualquer ordem decaem rapidamente no infinito (mais rápido de qualquer potência x^{-n} , $n \in \mathbb{N}$).

Por outro lado, é também útil enfraquecer o requisito e definir a transformada de uma distribuição como

$$T[f] = F(\xi) = (f, e^{-ix\xi}).$$

Provaremos as transformadas na seguinte tabela:

	f	F
j)	$\delta_0(x)$	1
k)	1	$2\pi\delta_0(\xi)$
ℓ)	$sgn(x)$	$\frac{2}{i\xi}$
m)	$Sc(x)$	$\frac{1}{i\xi} + \pi\delta_0(\xi)$

Prova das propriedades na tabela.

(j-k) $F(\xi) = (\delta_0, e^{-ix\xi}) = e^0 = 1$. Analogamente para a (k).

(ℓ-m) Como $Sc' = \delta_0$ poderíamos pensar que $T(Sc) = \frac{1}{i\xi}$. Infelizmente neste ambiente de transformadas generalizadas, a operação de primitiva é complicada pelo fato que as constantes transformam como deltas de Dirac (propriedade k).

De fato, $\frac{1}{i\xi}$ não poderia ser a transformada de Sc já que é imaginária pura, devendo ser a transformada de uma função ímpar. Ela é então a transformada de $\frac{1}{2}sgn(x) = Sc(x) - \frac{1}{2}$. Em conclusão $T[Sc] = \frac{1}{i\xi} + T[\frac{1}{2}] = \frac{1}{i\xi} + \pi\delta_0(\xi)$.

□

Observe que a transformada da delta nem sequer decai: por ser uma distribuição que não pode ser associada a uma função integrável não satisfaz a propriedade que as transformadas devem tender a zero.

8.5.5 Transformada em \mathbb{R}^n

É possível definir, de forma análoga, uma transformada para funções em \mathbb{R}^n :
dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente integrável em \mathbb{R}^n definimos

$$F(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} dV_{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

Para reobter f temos:

$$f(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{\xi})e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} dV_{\boldsymbol{\xi}}.$$

8.6 Aplicações da transformada de Fourier

8.6.1 Equação do calor

Veamos como resolver (PVI-C) usando a Transformada de Fourier: com esta técnica obteremos (5.19) com um procedimento bem mais simples do visto no Capítulo 5.

Resolvemos primeiro a equação do calor com dado inicial $u(x, 0) = \delta_0(x)$. Para isso aplicamos a transformada em \mathbb{R} na variável x : $\widehat{u}(\xi, t) = \int u(x, t)e^{-ix\xi} dx$. Desta forma \widehat{u} satisfaz

$$\widehat{u}_t - (i\xi)^2 \widehat{u} = 0, \quad \widehat{u}(\xi, 0) = T[\delta_0] = 1.$$

Observe que pela propriedade (d) da seção 8.5.3, a EDP do calor se tornou uma EDO no tempo, pois a derivação em x transformou em simples multiplicação por $i\xi$.

Resolvendo $\widehat{u}_t = -\xi^2 \widehat{u}$ obtemos

$$\widehat{u} = C(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

A função C é determinada pela condição inicial, logo $C \equiv 1$ e a solução pode ser escrita como

$$\widehat{\psi}(\xi, t) = e^{-(\xi\sqrt{2t})^2/2};$$

usando (a) e (h) da seção 8.5.3 isso torna-se $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$: a solução fundamental do calor.

Para resolver o genérico problema de valores iniciais $u(x, 0) = g(x)$ é suficiente impor a condição inicial para $\widehat{u}(\xi, 0) = C(\xi) = T[g]$, logo $\widehat{u}(\xi, t) = T[g](\xi) \widehat{\psi}(\xi, t)$ e como anti-transformando o produto obtemos a convolução, chegamos à fórmula (5.19).

Observação 8.8. O que foi explorado na conta acima é primeiramente o fato que a transformada muda a derivada em um produto transformando a EDP numa EDO facilmente resolvível. Além disso o fato da transformada de δ_0 ser a constante 1 deixou muito fácil a solução da EDO e sua anti-transformação. Enfim, a fórmula para o problema com condição qualquer resultou fácil de ser encontrada usando a correspondência entre convolução e produto das transformadas. \triangleleft

8.6.2 Equação da onda

Vejamos como aplicar a mesma técnica ao problema (8.1) para obter mais facilmente a solução fundamental da onda em dimensão $n = 1$.

De novo aplicamos a transformada em \mathbb{R} na variável x obtendo, para a transformada \widehat{u} o problema de EDO

$$\widehat{u}_{tt} - (i\xi)^2 \widehat{u} = 0, \quad \widehat{u}(\xi, 0) = 0, \quad \widehat{u}_t(\xi, 0) = T[\delta_0] = 1.$$

Resolvendo $\widehat{u}_{tt} = -\xi^2 \widehat{u}$ obtemos $\widehat{u}(\xi, t) = C(\xi) \cos(\xi t) + D(\xi) \sin(\xi t)$ onde $C = 0$ pela condição inicial enquanto pondo $\widehat{u}_t(\xi, t) = D(\xi) \xi \cos(0) = 1$ obtemos $D(\xi) = 1/\xi$. A solução procurada é então

$$\widehat{u} \frac{\sin(\xi t)}{\xi}.$$

Pelas (c) e (h) da seção 8.5.3 obtemos a solução já vista na seção 8.4.3:

$$u(x, t) = \psi^o(x, t) = \frac{1}{2} \xi_{[-t, t]}(x).$$

8.6.3 Laplaciano

Vejam os enfm como obter uma solução fundamental para o Problema de Dirichlet no semiplano, isto é, uma solução para o problema

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ } y > 0, \\ u(x, 0) = \delta_0(x). \end{cases}$$

Procedendo como nos casos anteriores transformamos na variável x obtendo , para a transformada \hat{u} o problema de EDO

$$(i\xi)^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = 1.$$

Neste caso as soluções seriam na forma $A(\xi)e^{\xi y} + B(\xi)e^{-\xi y}$. Note que temos apenas uma condição para determinar as duas funções A, B , mas impondo que a solução obtida seja limitada para $y > 0$ teremos necessariamente $A(\xi) = 0$ para $\xi > 0$ e $B(\xi) = 0$ para $\xi < 0$. A solução com $\hat{u}(\xi, 0) = 1$ será então $\hat{u}(\xi, 0) = e^{-|\xi|y}$.

Usando a (b) da seção 8.5.3 obtemos

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Observe que este é de fato o Núcleo de Poisson (centrado na origem) para o semiplano (em duas variáveis): compare com (6.40) pondo $n = 2$, $x_n = y$, $\mathbf{y} = 0$ e $\mathbf{x} = (x, y)$.

8.7 Referências

Para complementar os assuntos deste capítulo, além da referência [Str08], pode consultar [dF77, Cap.6].

Referências Bibliográficas

- [Bre83] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications]. Cited at page(s) [125](#)
- [CH89] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989, Partial differential equations, Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication. Cited at page(s) [48](#)
- [dF77] Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 5, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977. Cited at page(s) [88](#), [144](#)
- [Eva98] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Cited at page(s) [29](#), [104](#), [110](#), [112](#)
- [Fol95] Gerald B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, second ed., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995. Cited at page(s) [18](#), [29](#), [110](#)
- [Gar64] P. R. Garabedian, *Partial differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964. Cited at page(s) [18](#), [29](#), [48](#)
- [Joh82] Fritz John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982. Cited at page(s) [18](#), [29](#), [104](#)
- [Mas] E. Massa, *Equações diferenciais parciais*, Notas de aula - ICMC - USP. Cited at page(s) [2](#), [17](#), [18](#), [24](#), [25](#), [29](#), [48](#), [70](#), [78](#), [108](#), [110](#)
- [Str08] Walter A. Strauss, *Partial differential equations*, second ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2008, An introduction. Cited at page(s) [18](#), [29](#), [48](#), [68](#), [88](#), [128](#), [129](#), [144](#)

Índice Remissivo

- característico/a
 - coordenada, 42, 44
 - curva, 21, 24, 38, 42, 44, 46, 47
 - método das, 21, 22
 - problema, 16
 - problema, não-, 16
 - sistema, 22, 25
 - superfície, 38
- clássica (solução), 8
- classificação
 - eq. linear
 - 2v, cc, 32, 33
 - 2v, cv, 40
 - nv, cc, 36, 37
 - nv, cv, 38
 - eq. não linear, 39
- cone do passado/futuro, 62
- conservação da energia
 - eq. da onda, 64
- convergência uniforme (série), 83
- D´Alambert
 - fórmula de, 66
 - operador de, 50
- delta de Dirac, 134
- dependência contínua dos dados, 10, 25
 - calor, 59, 71, 78
 - Laplaciano, 97
 - onda, 67, 122
- determinante
 - eq. segunda ordem, 40
- distribuição, 133
 - convergência, 134
 - derivada, 134
 - em \mathbb{R}^n , 135
- domínio, 95
- domínio de dependência, 27
 - onda, 63
- elíptica, 33, 37
- energia
 - eq. da onda, 60, 62, 64
 - eq. do calor, 60
- equação
 - da ótica geométrica, 9
 - da onda, 9, 32, 37, 50
 - n ímpar, 118
 - n par, 120
 - não homogênea, 120
 - perda de regularidade, 123
 - de Burger, 29
 - de conservação, 28
 - de Laplace, 9, 89
 - de Poisson, 89
 - de primeira ordem, 19
 - de Schrödinger, 128
 - de transporte, 9, 28
 - de Tricomi, 44
 - degenerada, 37
 - diferencial parcial, 8
 - do calor, 9, 37, 53
 - linear, 8
 - quasilinear, 9
 - semilinear, 9
 - totalmente não-linear, 9
- existência
 - calor, 70, 71, 125
 - eq. ordem um, 25
 - Laplaciano, 89, 110, 112
 - onda, 67, 122
 - existência e unicidade, 17, 25

- fórmula
 - de D´Alambert, 66
 - de integr. por partes, 49
 - de Kirchhoff, 117
 - de Poisson (onda), 119
 - integral de Green, 108
 - integral de Poisson, 95, 108, 110, 112
- formas canônicas, 33, 37
- fronteira parabólica, 78
- função
 - de Green, 107, 110, 111
 - de Neumann, 109
 - harmônica, 89
 - sub-/super-harmônica, 101
- hidrogênio
 - átomo de, 128
- hiperbólica, 33, 37
 - normalmente hiperbólica, 37
 - ultrahiperbólica, 37
- identidade
 - Lagrange-Green, 97
- Laplaciano, 32
 - coord. esféricas, 92
 - coord. polares, 91
 - radial, 91
- média esférica, 100
- método
 - de descida, 118
 - de Hadamard, 118
 - de separação das variáveis, 10, 79, 125
- modelagem
 - calor/difusão, 54
 - campo eletro-magnético, 53
 - campo eletrostático, 55, 109
 - corda vibrante, 51
 - escoamento irrotacional, 56
 - membrana, 52
 - som/luz, 53
 - vibração, 51
- mudança de variáveis, 31
- multi-índice, 7
- núcleo
 - de Poisson, 108, 110, 112
- não-caracteristicidade, 16, 17, 21, 24, 25
- parabólica, 33, 37
- princípio
 - de Dirichlet, 99
 - de Duhamel, 120
 - de Huygens, 122
 - de sobreposição, 9
 - do máximo (calor), 78
 - do máximo (Laplaciano), 95, 102
- problema
 - bem posto segundo Hadamard, 10, 67, 122
 - de Cauchy, 15
 - de Dirichlet, 56
 - de Neumann, 56
 - de Robin, 56
 - de val. iniciais (calor), 53
 - de val. iniciais (onda), 50
 - mal posto, 79
 - misto (calor), 54
 - misto (onda), 50, 77
 - não-característico, 16
- propriedade
 - do valor médio, 101
- região de influência, 27
 - onda, 63
- regularidade
 - calor, 70, 72, 80, 82
 - onda, 66, 81, 82, 123
- reversibilidade tempo
 - calor, 59, 71
 - onda, 59
- série de Fourier, 85
- série trigonométrica, 85
- salto, 45
- singularidades
 - propagação, 45, 75, 77

solução

- calor, 125
- calor ($n=1$), 69, 71
- clássica, 8
- Dirichlet em bola, 111
- Dirichlet em semiespaço, 109
- fundamental (calor), 70
- fundamental (Laplaciano), 104
- fundamental (onda), 138
- generalizada, 67
 - onda, 67, 75, 77, 82
- onda n ímpar, 118
- onda n par, 120
- onda ($n=1$), 66
- onda não homogênea, 120

teorema

- Cauchy-Kowalevski, 17, 26
- do divergente, 49
- existência e unicidade primeira ordem,
25

tipo de não linearidade, 8

transformada de Fourier, 139

unicidade

- eq. da onda - IVP, 63
- eq. da onda - misto, 61
- eq. do calor, 78
- eq. do calor - misto, 61
- eq. ordem um, 25
- Laplaciano, 97, 98
- onda, 67

velocidade de propagação

- calor, 70, 72
- onda, 63, 64

vibração

- corda, 82
- tambor, 126

