Definições e propriedades básicas

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, uma equação diferencial partial (EDP) é uma equação do tipo

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x), \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(x)\right) = 0 \tag{1}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função dada e $u = u(x)$ é uma a valores reais a ser determinada.

A **ordem** de uma EDP é dada pela ordem mais alta da derivada que aparece na equação.

Uma função $u : \Omega' \to \mathbb{R}$,sendo $\Omega' \subset \Omega$ um aberto, é uma **solução clássica** de (1) se

1. As derivadas parciais $\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}$ existem para todo $l = l_1 + \cdots + l_n \leq k$ (às vezes pede-se também $u \in C^k(\Omega')$),
2. A equação (1) é satisfeita para todo $x \in \Omega'$.

Uma primeira distinção importante é aquela entre equações lineares e não lineares. A EDP (1) é **linear** se F é for for uma função de primeiro em u e em todas as derivadas parciais de u que aparecem em (1). Caso contrário diremos que a EDP é **não linear**.

Uma primeira distinção importante é aquela entre equações lineares e não lineares. A EDP (1) é **linear** se F é for for uma função de primeiro em u e em todas as derivadas parciais de u que aparecem em (1). Caso contrário diremos que a EDP é **não linear**.

A forma mais geral de uma EDP linear de primeira ordem é

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u + c(x) = 0, \tag{2}$$

onde algum dos coeficientes a_j não é identicamente nulo.

Uma primeira distinção importante é aquela entre equações lineares e não lineares. A EDP (1) é **linear** se F é for for uma função de primeiro em u e em todas as derivadas parciais de u que aparecem em (1). Caso contrário diremos que a EDP é **não linear**.

A forma mais geral de uma EDP linear de primeira ordem é

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u + c(x) = 0, \tag{2}$$

onde algum dos coeficientes a_j não é identicamente nulo.

A forma mais geral de uma EDP linear de segunda ordem é

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u + d(x) = 0, \tag{3}$$

onde algum dos coeficientes a_{ij} não é identicamente nulo.

Dada uma EDP, a parte da equação que contém as derivadas parciais de ordem igual a ordem da EDP é denominada **parte principal da EDP**.

Por exemplo, a parte principal da EDP (2) é dada por

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x).$$

A parte principal da EDP (3) é

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Dentre as EDP não lineares, as que contém parte principal linear são chamadas **semilineares**. Por exemplo, uma EDP de primeira ordem semilinear é da forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x)).$$

A forma mais geral de um EDP semilinear de segunda ordem é

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right).$$

Uma EDP não linear de ordem k é chamada **quaselinear** se os coeficientes de sua parte principal dependem das derivadas parciais de ordem inferior a K. Por exemplo, a forma mais geral de um EDP quasilinear primeira ordem é

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x, u(x)).$$

A forma mais geral de um EDP quasilinear de segunda ordem é

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Uma EDP é chamada **totalmente não-linear** quando não for nenhum dos casos anteriores.

Exemplos

a) $xu_x + yu_y = \sin(xy)$ é uma EDP linear de primeira ordem.

b) $u_t = u_{xxx} + uu_x$ é um EDP semilinear de terceira ordem. Esta equação é chamada equação Korteweg-De Vries (KdV). Em matemática, a equação KdV é uma equação que serve como um modelo matemático de ondas em superfícies de águas rasas.

c) $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$, onde ν é constante, é uma EDP semilinear de segunda ordem. Esta equação é chamada equação de Burger com viscosidade e descreve o fluxo unidimensional de partículas em um fluido com viscosidade ν.

d) A equação de Burger sem viscosidade $u_t + uu_x = 0$ é uma EDP quasilinear de primeira ordem.

Exemplos

d) A equação de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = h(x, y)$$

é uma EDP linear de segunda ordem. No caso homogêneo (em que $h \equiv 0$) a EDP é chamada equação de Laplace. A equação de Poisson está associada a fenômenos físicos estacionários (independentes do tempo), por exemplo, potenciais eletrotásticos gerados por distribuição fixas de cargas.

e) Outra EDP linear de segunda ordem importante é a equação do calor

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},$$

onde $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e α^2 é uma constante. Essa equação descreve a propagação do calor através de um meio homogêneo e isotrópico.

Exemplos

f) A equação da onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

também é uma EDP linear de segunda ordem. A variável $t > 0$ representa o tempo, $x \in \mathbb{R}$ é a variável espacial e $c > 0$ é uma constante. Essa EDP está associada a fenômenos ondulatórios.

g) A equação

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0,$$

é uma EDP quasilinear de segunda ordem. O gráfico de uma solução u dessa equação minimiza a área dentre todas as superfícies cujo bordo repousa sobre uma determinada curva.

Exemplos

h) Um exemplo de EDP totalmente não linear é a equação de Monge-Ampère

$$\det\left(D^2u\right) - f(x) = 0$$

onde $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, D^2u denota a matriz Hessiana de u. A equação de Monge-Ampère em duas variáveis, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é da forma

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 - f(x, y) = 0.$$

Essa equação apareceu originalmente em problemas de geometria diferencial, tornou-se fundamental em problemas de alocação ótima (problemas de alocação de materais de um ponto a outro com custo mínimo).

Linearidade e Superposição

As considerações a seguir valem para EDPs lineares de qualquer ordem. Para fixar as ideias, vamos considerar EDPs lineares de primeira ou segunda ordem nas $x_1, \dots, x_n$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x) + d(x) = 0,$$

para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$,

Linearidade e Superposição

As considerações a seguir valem para EDPs lineares de qualquer ordem. Para fixar as ideias, vamos considerar EDPs lineares de primeira ou segunda ordem nas $x_1, \dots, x_n$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x) + d(x) = 0,$$

para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, a qual é equivalente a

$$Lu(x) = f(x),$$

onde $f(x) = -d(x)$ e $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ é definido por

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x),$$

onde estamos supondo que $a_{ij}, b_j, c \in C(\Omega)$.

Note que L é uma transformação linear (exercício). Uma EDP linear homogênea (o caso em que $f \equiv 0$) pode ser escrita na forma

$$Lu = 0. \tag{4}$$

Usando a linearidade de L, podemos verificar que qualquer combinação linear de soluções de (4) é também uma solução de (4), ou seja, se $u_1, \ldots u_m$ são soluções de (4) e $c_1, \ldots, c_m$ são escalares, então

$$\sum_{k=1}^{m} c_k u_k$$

é também solução de (4) (exercício).

Devido a linearidade de L, podemos provar (exercício) os seguintes fatos relevantes:

1. Se v é solução de uma equação linear homogênea $Lu = 0$ e w é solução de $Lu = f(x)$, então $v + w$ também é solução de $Lu = f(x)$.
2. Se v é solução $Lu = f(x)$ e w é solução de $Lu = g(x)$, então $av + bw$ é solução de $Lu = af(x) + bg(x)$.

Exemplo 1. Vamos procurar soluções clássicas da equação linear homogênea

$$u_{xy}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{5}$$

Neste caso a transformação L é dada por $L : C^2(\mathbb{R}^2) \to C(\mathbb{R}^2)$ dada por $Lu = u_{xy}$. Vamos resolver (5) primitivação. Fixando a variável x e integrando em relação a y, obtemos

$$u_x(x,y) = F(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $F \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária. Fixando agora a veriável y e integrando em relação a x, temos

$$u(x,y) = f(x) + g(y), \tag{6}$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ é uma primitiva de F e $g \in C^2(\mathbb{R})$ é arbitrária. Como F é arbitrária, segue que $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ são arbitrárias. Reciprocamente, toda função da forma (6) é solução de (5). Concluímos que o conjunto solução de (5) é o subespaço vetorial

$$\left\{ u \in C^2(\mathbb{R}^2) \mid u(x,y) = f(x) + g(y),\ f, g \in C^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Vê-se que neste exemplo simples, o espaço das soluções clássicas tem dimensão infinita. Isto nos leva a perguntar sobre a possibilidade de ter um princípio de superposição infinito, ou seja, séries formadas por soluções da edp linear homogênea dada têm como soma uma solução dessa edp?

Vê-se que neste exemplo simples, o espaço das soluções clássicas tem dimensão infinita. Isto nos leva a perguntar sobre a possibilidade de ter um princípio de superposição infinito, ou seja, séries formadas por soluções da edp linear homogênea dada têm como soma uma solução dessa edp?

Proposição. Seja L uma transformação diferencial parcial linear de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que (u_m) é uma sequência de classe C^k em Ω satisfazendo a EDP linear homogênea (4) e que (α_m) é uma sequência de escalares tal que

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e k diferenciável termo a termo em Ω. Então u satisfaz (4).

Demonstração: (caso $k = 1$ ou 2) Para todo $x \in \Omega$,

$$
\begin{aligned}
Lu &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m \right] + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m \right] + c \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \sum_{j=1}^{n} b_j \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right] + c \left[\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m \right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + cu_m \right] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m L u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Condições de Cortorno e Iniciais

Uma diferença importante entre EDOs e EDPs é a informação adicional necessária para a unicidade de solução.

Condições de Cortorno e Iniciais

Uma diferença importante entre EDOs e EDPs é a informação adicional necessária para a unicidade de solução. Por exemplo, na solução geral de um EDO linear de aparecem uma ou mais constantes arbitrárias, as quais podem ser determinadas impondo condições iniciais ao fixar os valores da solução e de suas derivadas em um determinado ponto.

Condições de Cortorno e Iniciais

Uma diferença importante entre EDOs e EDPs é a informação adicional necessária para a unicidade de solução. Por exemplo, na solução geral de um EDO linear de aparecem uma ou mais constantes arbitrárias, as quais podem ser determinadas impondo condições iniciais ao fixar os valores da solução e de suas derivadas em um determinado ponto. No caso de intervalos limitados, a unicidade é obtida impondo condições nos extemos do intervalo.

Condições de Cortorno e Iniciais

Uma diferença importante entre EDOs e EDPs é a informação adicional necessária para a unicidade de solução. Por exemplo, na solução geral de um EDO linear de aparecem uma ou mais constantes arbitrárias, as quais podem ser determinadas impondo condições iniciais ao fixar os valores da solução e de suas derivadas em um determinado ponto. No caso de intervalos limitados, a unicidade é obtida impondo condições nos extemos do intervalo.

A situação para as EDPs é diferente. Mesmo no caso linear, a solução geral envolve funções arbitrárias, de modo que existe um grau de generalidade muito maior com relação à forma da solução.

No caso de EDPs, o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procuramos soluções em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; é natural substituir os extremos do intervalo no caso $n = 1$ pelo bordo ou fronteira[1] de $\partial\Omega$ da região Ω. Quando impomos condições sobre o valor da soluções e/ou de suas derivadas no bordo da região (condições de contorno) temos um problema de valores de contorno.

[1] $\partial\Omega = \{x \in \overline{\Omega} : x \neq \Omega^\circ\}$, onde $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω (o menor conjunto fechado que contém Ω) e Ω° é o interior de Ω (o maior conjunto aberto contido em Ω).

A teoria das equações lineares pode ser considerada suficiente bem desenvolvida e estabelecida, pelo menos no que diz respeito à maioria das questões relevante. Em contraste, as equações não lineares têm uma variedade tão rica de aspectos e complicações que uma teoria geral não parece concebível. Os resultados existentes e novas pesquisas se concentram em casos mais ou menos específicos, de interesse para as ciências aplicadas. Nesta disciplina estudaremos, quase exclusivamente, equações diferenciais parciais lineares.

Condições de contorno surgem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários (isto é, independentes do tempo). Econtramos com frequência condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

onde α e β são constantes dadas e f é uma função dada em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ denota a derivada direcional de u na direção normal a $\partial\Omega$.

Condições de contorno surgem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários (isto é, independentes do tempo). Econtramos com frequência condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

onde α e β são constantes dadas e f é uma função dada em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ denota a derivada direcional de u na direção normal a $\partial\Omega$.

No caso $\beta = 0$, essa condição é conhecida como **condição de Dirichlet**; no caso em que $\alpha = 0$, temos uma **condição de Neumann.**

Como generalizar o conceito de condições iniciais de EDOs para EDPs?

Como para EDPs há mais de uma variável independente, por exemplo x e t, é natural fixar uma das variáveis (por exemplo $t = 0$) e impor o valor da solução e de suas derivadas em relação à variável fixada como função das outras variáveis (por exemplo, $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$ com f e g funções dadas).

Como generalizar o conceito de condições iniciais de EDOs para EDPs?

Como para EDPs há mais de uma variável independente, por exemplo x e t, é natural fixar uma das variáveis (por exemplo $t = 0$) e impor o valor da solução e de suas derivadas em relação à variável fixada como função das outras variáveis (por exemplo, $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$ com f e g funções dadas).

Observe que no caso $n = 2$, com variáveis x e t, isso significa impor o valor da solução e de sua derivada normal ao longo da curva $t = 0$.

Como generalizar o conceito de condições iniciais de EDOs para EDPs?

Como para EDPs há mais de uma variável independente, por exemplo x e t, é natural fixar uma das variáveis (por exemplo $t = 0$) e impor o valor da solução e de suas derivadas em relação à variável fixada como função das outras variáveis (por exemplo, $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$ com f e g funções dadas).

Observe que no caso $n = 2$, com variáveis x e t, isso significa impor o valor da solução e de sua derivada normal ao longo da curva $t = 0$.

No caso $n = 3$, com variáveis x, y e t, isso significa impor o valor da solução e de sua derivada normal ao longo da superfície $t = 0$.

Podemos generalizar o conceito de condições iniciais impondo o valor da solução em suas derivadas normais ao longo de uma curva inicial (se $n = 2$) ou superfície inicial (se $n = 3$). O problema correspondente é um problema de Cauchy ou de valor inicial.

Podemos generalizar o conceito de condições iniciais impondo o valor da solução em suas derivadas normais ao longo de uma curva inicial (se $n = 2$) ou superfície inicial (se $n = 3$). O problema correspondente é um problema de Cauchy ou de valor inicial.

Exemplo 2. O problema

$$\begin{cases} u_y(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, p(x)) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ são funções dadas, é um problema de Cauchy. Como a EDP é de primeira ordem, basta impor o valor da solução na curva inicial $y = p(x)$ no plano. Veremos na próxima aula que este problema tem uma única solução.

Exemplo 3. O problema

$$\begin{cases} u_y(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = f(y), & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

também é um problema de Cauchy envolvendo uma EDP de primeira ordem. Nesse caso a curva inicial é o eixo dos y. Ao contrário do exemplo anterior, veremos na próxima aula que este problema não terá solução se f não for constante, ou terá terá infinitas soluções de f for constante.

Exemplo 4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado. Então o problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 \Delta u, \quad (x,y,z) \in \Omega, t > 0, \\ u(x,y,z,t) = 0, \quad (x,y,z) \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

é um problema misto: a condição $u(x,y,z,t) = 0$, $(x,y,z) \in \partial\Omega$, $t \geq 0$ é uma condição de contorno, enquanto $u(x,y,z,0) = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \overline{\Omega}$ é uma condição inicial, onde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, α é uma constante positiva e f é uma função dada. Procuramos uma solução $u \in C^2(\Omega \times (0,\infty) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,\infty)$, logo f tem que estar em $C(\overline{\Omega})$ e satisfazer a condição de compatibilidade $f(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \partial\Omega$.

Este problema descreve fisicamente a temperatura $u(x, y, z, t)$ no ponto (x, y, z) e no instante t do sólido $\overline{\Omega}$ feito de material homogêneo, com difusividade térmica[2] igual a α^2 e posto em um reservatório térmico mantido à temperatura constante igual a zero (condição de contorno) com distribuição de temperatura inicial $f(x, y, z)$ (condição inicial). Este problema é misto, mas pode ser considerado um problema de contorno na região ilimitada $[0, L] \times [0, \infty)$.

[2] A difusividade térmica é uma propriedade física que descreve a capacidade de um material em conduzir calor.

Este problema descreve fisicamente a temperatura $u(x, y, z, t)$ no ponto (x, y, z) e no instante t do sólido $\overline{\Omega}$ feito de material homogêneo, com difusividade térmica[2] igual a α^2 e posto em um reservatório térmico mantido à temperatura constante igual a zero (condição de contorno) com distribuição de temperatura inicial $f(x, y, z)$ (condição inicial). Este problema é misto, mas pode ser considerado um problema de contorno na região ilimitada $[0, L] \times [0, \infty)$.

Estudaremos em detalhe a versão unidimensional desse problema:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \end{cases}$$

com a condição de compatibilidade $f(0) = f(L) = 0$, onde $L > 0$ e $f \in C([0, L])$ são dados.

[2] A difusividade térmica é uma propriedade física que descreve a capacidade de um material em conduzir calor.

O problema para a equação da onda em um intervalo limitado

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \end{cases}$$

também pode ser considerado um problema misto (com condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $x \in [0, L]$, e condições de contorno $u(0, t) = 0 = u(L, t), t \geq 0$) ou como um problema de contorno na região ilimitada $[0, L] \times [0, \infty)$.

O problema para a equação da onda em um intervalo limitado

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \end{cases}$$

também pode ser considerado um problema misto (com condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $x \in [0, L]$, e condições de contorno $u(0, t) = 0 = u(L, t), t \geq 0)$ ou como um problema de contorno na região ilimitada $[0, L] \times [0, \infty)$.

Observe que como a equação da onda é de segunda ordem em relação a variável temporal t, precisamos de duas condições iniciais. Veremos mais tarde que para existir solução $u \in C^2((0, L) \times (0, \infty)) \times C([0, L] \times [0, \infty))$, com u_t contínua em $[0, L]$, precisaremos que $f \in C^2([0, L])$, $f(0) = f(L) = 0$, $f''(0) = f''(L) = 0$ e que $g \in C^1([0, L])$ com $g(0) = g(L) = 0$.

Do ponto de vista físico, este problema descreve uma corda elástica de comprimento L, com extremidades mantidas presas, vibrando em um plano vertical em um meio que não oferece resistência ao deslocamento da corda. Aqui $u(x, t)$ é o deslocamento vertical da corda no ponto x no instante t e as funções f e g descrevem, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais da corda. A constante c^2 é uma constante física; é a tensão dividida pela densidade.

A EDP no exemplo anterior corresponde a vibrações livres; no caso de vibrações forçadas a EDP fica

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t),$$

enquanto que a EDP para vibrações amortecidas pode ser do tipo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - b u_t,$$

onde b é uma constante positiva, ou mais geralmente

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - p(u_t).$$

Exemplo 5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é dada, é um problema de contorno para a equação de Laplace, conhecido como problema de Dirichlet. Trataremos esse problema para o caso que $n = 2$ e Ω é a região retangular ou um disco. Esse problema tem solução clássica única na classe $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Exemplo 6. Outro problema para a equação de Laplace é

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

que é um problema de Neumann. Observe que esse problema não tem unidade de solução: se u é uma solução desse problema, então $u + C$ tamb´me o será para qualquer constante C.

Usando o teorema da divergência, podemos mostrar que para a existência de solução desse problema, a função f deve satisfazer a condição

$$\int_\Omega f(x) dV = 0.$$

Questões relevantes

Dado um problema envolvendo uma EDP e condições de contorno e/ou condições iniciais, três questões são importantes, a saber:

1. existência de soluções, na classe escolhida;
2. unicidade de soluções, na classe escolhida;
3. dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais e/ou dados de contorno, na classe escolhida.

Para discutir a existência de preciso especificar a classe onde estaremos procurando tais soluções e em que sentido as codições iniciais e/ou contorno devem ser satisfeitas.

Para discutir a existência de preciso especificar a classe onde estaremos procurando tais soluções e em que sentido as codições iniciais e/ou contorno devem ser satisfeitas.

Para ilustrar isto, consideremos o problema misto associado a EDP do calor do Exemplo 4 com Ω uma bola de raio 1 centrada na origem e $f \in C(\overline{\Omega})$ satisfazendo a condição de compatibilidade $f\mid_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Para discutir a existência de preciso especificar a classe onde estaremos procurando tais soluções e em que sentido as codições iniciais e/ou contorno devem ser satisfeitas.

Para ilustrar isto, consideremos o problema misto associado a EDP do calor do Exemplo 4 com Ω uma bola de raio 1 centrada na origem e $f \in C(\overline{\Omega})$ satisfazendo a condição de compatibilidade $f\,|_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Se procurarmos soluções $u \in C^2(\Omega \times (0,\infty))$ mas não necessariamente em $C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, como iremos interpretar a condição de contorno?

Poderíamos, por exemplo, procurar $u \in C^2(\Omega \times (0, \infty))$ satisfazendo a EDP em $\Omega \times (0, \infty)$, de modo que para verificar a condição de contorno façamos:

a) para cada $t > 0$ e para cada $X \in \partial\Omega$ fixados, tenhamos

$$\lim_{\rho \to 1^-} u(\rho X, t) = 0;$$

b) para cada $t = 0$ e para cada $X \in \partial\Omega$ fixados, tenhamos

$$\lim_{(t,\rho) \to (0^+, 1^-)} u(\rho X, t) = 0.$$

De modo semelhante, poderíamos interpretar a condição inicial do seguinte modo:

a) para cada $x \in \Omega$ fixado, devemos ter

$$\lim_{t \to 0^+} u(x, t) = f(x);$$

b) para cada $x \in \partial\Omega$ fixado, devemos ter

$$\lim_{(t,\rho) \to (0^+, 1^-)} u(\rho x, t) = f(x).$$

Uma vez mostrado que a solução existe em alguma classe escolhida, a questão seguinte seria verificar se esta solução é única na classe escolhida.

Uma vez mostrado que a solução existe em alguma classe escolhida, a questão seguinte seria verificar se esta solução é única na classe escolhida.

Finalmente, tendo mostrado a existência e a unicidade da solução na classe escolhida, a última questão básica seria verificar se a solução depende continuamente dos dados iniciais e/ou contorno dentro de alguma classe onde estes possam variar.

Uma vez mostrado que a solução existe em alguma classe escolhida, a questão seguinte seria verificar se esta solução é única na classe escolhida.

Finalmente, tendo mostrado a existência e a unicidade da solução na classe escolhida, a última questão básica seria verificar se a solução depende continuamente dos dados iniciais e/ou contorno dentro de alguma classe onde estes possam variar. Isto é importante, pois devemos lembrar que os dados de um problema físico são dados experimentais que necessariamente contêm erros de media. Portanto é natural perguntar se pequenas variações nos dados acarretam pequenas variações na solução. É claro que o significado de "pequenas variações" depende do problema em questão.

Um problema para o qual que a solução existe, é única e depende continuamente dos dados iniciais e/ou contorno será chamado um problema bem posto (no sentido de Hadamard). Caso contrário o problema será dito problema mal posto.

Um problema para o qual que a solução existe, é única e depende continuamente dos dados iniciais e/ou contorno será chamado um problema bem posto (no sentido de Hadamard). Caso contrário o problema será dito problema mal posto.

Nesta disciplinas trataremos essencialmente do problema da existência e unicidade de soluções relacionados com a equações do calor e da onda unidimensionais e a equação de Laplace bidimensional. A questão da dependência contínua em relação aos dados iniciais e/ou contorno é mais delicada e só aparecerá em alguns exemplos específicos.

Lista de Exercícios

1. Dê a ordem das EDPs abaixo:
   (i) $(u_x)^2 + u_{yyy} = 0$
   (ii) $uu_{xxy} + u_x = u^2 + 1$
   (iii) $u_x u_t = \sin u$
   (iv) $x^3 u_x - u^3 u_t + u_{xx} = x^5 + nt^4$
   (v) $(u^2)_x - u_y = xyu$
2. Verifique quais das EDPs abaixo são lineares e o tipo das não lineares:
   (i) $(u^2)_x + u_y = 0$
   (ii) $x^3 u_{xy} - y^2 u_y + u = x + y$
   (iii) $(u_x)^2 - x^2 + u_t = 0$
   (iv) $u_{xx} - u_{tt} = \sin u$
   (v) $u_{xx} + uu_y = xyu$
   (vi) $x^2 u_{yy} + y^2 u_{xx} = u_x + u_y + xyu$

3. Identifique as condições iniciais e/ou de contorno nos problemas abaixo, indicando se é um problema de Cauchy, de contorno ou misto. Indique se alguma das funções dadas tem que satisfazer condições de compatibildade.

   (i)
$$\begin{aligned} &xu_x - yu_y = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ &u(t^3, t^5) = t^2 + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (ii)
$$\begin{aligned} &xu_x + yu_y = 0, \quad x^2 + y^2 < 4 \\ &u(2\cos t, 2\sin t) = t \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{aligned}$$

   (iii)
$$\begin{aligned} &tu_{xx} + 2u_{xt} - tu_{tt} + x^2 u_x + t^2 u_t = e^x \cos t, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ &u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(iv)

$$y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} + xyu = x + y, \quad x^2/4 + y^2/9 < 1$$
$$u(2\sin t, 3\cos t) = t(2\pi - t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(v)

$$t^2 u_{xx} + xu_t - u = f(x,t), \quad t > 0,\ x \in (0,1)$$
$$u(0,t) = \alpha(t),\ u(1,t) = \beta(t), \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \gamma(x), \quad x \in [0,1].$$