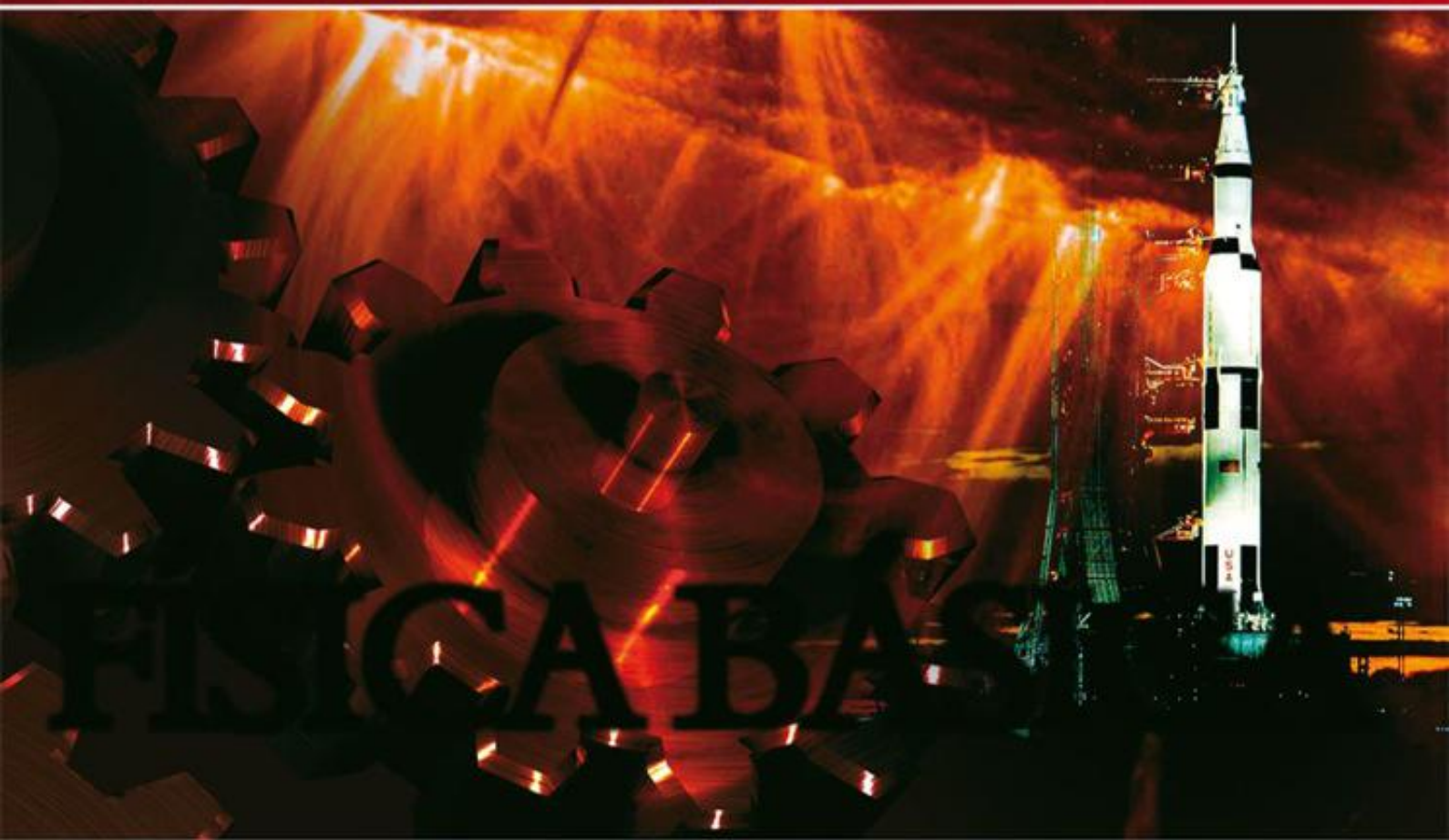


Alaor Chaves - J. F. Sampaio



Mecânica

LTC
EDITORA

LAB
EditoraLAB



Física Básica

Mecânica



Como Utilizar este Livro

Estrutura da obra e variações em sua aplicação

Ao escreverem *Física Básica* os autores levaram em conta a tendência à flexibilização que se observa, em todo o mundo, nos cursos universitários, tornando a obra compatível com as muitas opções sobre a ordem em que os diversos assuntos são ensinados

Física Básica pode ser usado em cursos ministrados em três ou em quatro semestres. No primeiro, sem dúvida, deve-se usar o volume *Mecânica*, assunto que é o fundamento de toda a física. Mas, após isso, tanto se pode ir para o volume *Eletromagnetismo* como para o *Gravitação* | *Fluidos* | *Ondas* | *Termodinâmica*

Física Básica foi escrito para cursos universitários de introdução à física, destinados a estudantes de ciências e engenharias. Ao escrevê-lo, levamos em conta e com atenção a tendência à flexibilização que se observa, em todo o mundo, nos cursos universitários. Tentamos também torná-lo compatível com as muitas opções sobre a ordem em que os diversos assuntos são ensinados. Isso possibilitou que os três volumes do livro nem sequer fossem numerados. *Física Básica* pode ser usado em cursos ministrados em três ou, de maneira mais lenta ou exaustiva, em quatro semestres. No primeiro, sem dúvida, deve-se usar o volume *Mecânica*, assunto que é o fundamento de toda a física. Mas, após isso, tanto se pode ir para o volume *Eletromagnetismo* como para o *Gravitação* | *Fluidos* | *Ondas* | *Termodinâmica*.

Acreditamos que o mais adequado seja estudar eletromagnetismo após mecânica, pois essas duas disciplinas são muito semelhantes em sua estrutura: ambas são formuladas inteiramente em termos de leis de movimento, expressas por equações exatas e de caráter abrangente. Essas duas matérias constituem o núcleo do que neste livro denominamos *paradigma newtoniano*. Também são ciências simples, pelo menos na sua formulação. Depois disso vêm temas como fluidos e termodinâmica, cuja compreensão requer maior maturidade e nos quais, com frequência, os fenômenos são complexos. Além do mais, a termodinâmica tem uma estrutura inteiramente distinta, e seus fundamentos já não são equações de movimento. A termodinâmica fica fora do paradigma newtoniano, pelo menos no atual estágio do conhecimento. Deve-se ainda considerar o fato de que, sem antes ter estudado eletromagnetismo, é impossível compreender a termodinâmica dos sistemas eletromagnéticos — o que equivale a dizer que é impossível entender as propriedades termodinâmicas dos materiais —, e isso é lamentável, pois este é hoje o ramo mais importante da termodinâmica.

Flexibilidade

Além de possibilitar ordenamentos alternativos dos temas do curso, este livro foi escrito de modo que qualquer dos seus volumes possa ser utilizado por estudantes que até então tenham estudado em outro livro.

Cada volume de *Física Básica* é mais autocontido que o usual, o que requereu alguma duplicação de capítulos. O volume *Mecânica* contém um capítulo sobre oscilador harmônico e outro sobre gravitação, capítulos esses repetidos no volume *Gravitação | Fluidos | Ondas | Termodinâmica*.

Além de possibilitar ordenamentos alternativos dos temas do curso, este livro foi escrito de modo que qualquer dos seus volumes possa ser utilizado por estudantes que até então tenham estudado em outro livro. Para isso, tornou-se necessário que cada volume fosse mais autocontido que o usual, o que requereu alguma duplicação de capítulos. O volume *Mecânica* contém um capítulo sobre oscilador harmônico e outro sobre gravitação. Isso é quase imperativo, pois o movimento harmônico é o mais importante de todos os movimentos, e a explicação do movimento dos planetas foi o que deu suporte à obra de Newton — e finalmente levou à sua aceitação unânime. Entretanto, por exigüidade de tempo, com frequência a gravitação não é ensinada no primeiro semestre. Por outro lado, muitos professores preferem unir o ensino do movimento oscilatório ao estudo de ondas, dada a similaridade dos dois fenômenos. Assim, os capítulos sobre gravitação e sobre movimento harmônico são repetidos no volume *Gravitação | Ondas | Fluidos | Termodinâmica*. A apresentação do estudo de ondas também é parcialmente duplicada. No volume de eletromagnetismo, está incluído o estudo das ondas eletromagnéticas. Para que o assunto fosse compreensível por um aluno que ainda não tivesse feito um estudo abrangente de ondas, foi acrescentada uma introdução a esse assunto. Mas essas duplicações não tornam o livro muito grande (respondem por apenas cerca de 6% do seu tamanho) e são amplamente compensadas pela facilidade e pela praticidade que criam para estudantes e professores, atendendo às diferentes visões sobre a ordem e o método do ensino da física.

Física moderna

Muitos fenômenos de natureza relativística ou quântica são tratados neste livro. Entretanto, a teoria da relatividade e a mecânica quântica não são formalmente apresentadas, de modo que com as informações aqui disponíveis o estudante só é capaz de lidar com situações muito simples que envolvam relatividade ou física quântica.

O ensino de tópicos da chamada *física moderna* é assunto sobre o qual há opiniões muito divergentes, e a maneira de ministrar tal ensino está ficando cada vez mais diversificada. A expressão física moderna é quase sempre usada para designar relatividade e física quântica, embora a teoria da relatividade e a mecânica quântica tenham sido desenvolvidas no início do século XX. Obviamente, desde então muita coisa mudou e novos temas se desenvolveram, tais como a física dos materiais, o estudo das partículas elementares e seus campos de força, a cosmologia, além do infinito campo da complexidade. Mas, em se tratando de fundamentos, a relatividade e a mecânica quântica ainda são inteiramente atuais, e sobre seus alicerces se constrói toda a física contemporânea.

O termo complexidade ganhou novo significado nas últimas décadas. Antes, entendia-se como complexo entendia-se como complexo todo sistema complicado para o qual não seja possível obter uma solução exata. Hoje, a classe dos sistemas complicados ramificou-se e a subclasse dos complexos tem de exibir outros atributos muito especiais. Por exemplo, o trânsito de veículos em uma cidade é complexo, mas o movimento das moléculas em um gás, inteiramente caótico e aparentemente mais complicado, não é mais classificado como complexo. O estudo dos sistemas complexos, na terminologia moderna, não pode ser feito efetivamente no nível de um curso de física básica. Já aos sistemas caóticos, podemos dar-lhes um tratamento termodinâmico ou estatístico compreensível para o iniciante. Neste livro, tratamos, com certa ênfase, sistemas complexos, na acepção antiga, quando tratamos dos fluidos, da termodinâmica e da física estatística. Os fluidos são sistemas complexos, na acepção contemporânea, mas não abordamos regimes de escoamento em que a real complexidade do movimento fica mais manifesta.

Muitos fenômenos de natureza relativística ou quântica são tratados neste livro. Entretanto, a teoria da relatividade e a mecânica quântica não são formalmente apresentadas, de modo que com as informações aqui disponíveis o estudante só é capaz de lidar com situações muito simples que envolvam relatividade ou física quântica. Essas duas teorias são apresentadas em outro livro de Alair Chaves (*Física / Óptica, Relatividade e Física Quântica*), que não é parte do *Física Básica* e que está em um nível conceitual um pouco acima deste. Muitas universidades vêm adotando essa estrutura de cursos — em que um curso de física básica de três semestres é seguido de um curso semestral de física moderna, em nível mais avançado —, e com certeza ela é parte indispensável do movimento mundial em busca de caminhos mais ágeis para levar o estudante à fronteira do conhecimento.

Exercícios e problemas

Como é comum nos livros-texto de física, neste livro o estudante encontra exercícios-exemplo, exercícios propostos e problemas propostos

Neste livro, na medida em que os conceitos e métodos são expostos, sua aplicação é ilustrada por meio de exercícios-exemplo, nos quais a solução é demonstrada passo a passo. É muito importante estudar com atenção os exercícios-exemplo, pois isso irá ajudar a sanar dúvidas sobre o assunto, além de ilustrar a importância prática do que foi exposto

Os exercícios propostos são questões mais simples, cuja solução em alguns casos envolve a aplicação direta de uma fórmula. Requerem a aplicação de conceitos ou fórmulas recém-apresentados e, quase sempre, vêm depois de pelo menos um exercício-exemplo. O estudante é enfaticamente aconselhado a trabalhar os exercícios à medida que vão aparecendo

A solução dos problemas requer mais raciocínio e, muitas vezes, também mais elaboração matemática. Os problemas vêm no final dos capítulos, e com frequência sua solução envolve matéria contida em mais de uma seção

Como é comum nos livros-texto de física, neste livro o estudante encontra exercícios-exemplo, exercícios propostos e problemas propostos. Os exercícios propostos são questões mais simples, cuja solução em alguns casos envolve a aplicação direta de uma fórmula, enquanto a solução dos problemas requer mais raciocínio e, muitas vezes, também mais elaboração matemática. Hábitos corretos de abordagem de exercícios e problemas são um dos meios mais efetivos para uma boa aprendizagem. Na solução dos exercícios e problemas, o estudante não só testa o seu entendimento do que foi estudado, como também consolida o aprendizado e aprofunda sua compreensão. Não só isso, mas é resolvendo problemas que o estudante aprende a aplicar o conhecimento em situações práticas e se prepara para lidar com situações inteiramente novas. Neste livro, na medida em que os conceitos e métodos são expostos, sua aplicação é ilustrada por meio de exercícios-exemplo, nos quais a solução é demonstrada passo a passo. É muito importante estudar com atenção esses exemplos, pois isso irá ajudar a sanar dúvidas sobre o assunto, além de ilustrar a importância prática do que foi exposto. Também há exercícios propostos, cuja solução requer a aplicação de conceitos ou fórmulas recém-apresentados; quase sempre, os exercícios vêm depois de pelo menos um exercício-exemplo. *O estudante é enfaticamente aconselhado a trabalhar os exercícios à medida que vão aparecendo.* Isso não só consolida o que já foi apresentado, de modo a facilitar a compreensão do que vem em seguida, como evidencia possíveis deficiências no entendimento de algum conceito. Para prosseguir na leitura, não é indispensável que o estudante seja capaz de resolver todos os exercícios, mas se houver dificuldade em resolver muitos deles isso mostra que é necessário rever o texto. Os problemas vêm no final dos capítulos, e com frequência sua solução envolve matéria contida em mais de uma seção.

Alguns hábitos devem ser adquiridos e praticados com disciplina na solução dos exercícios e problemas. O ponto de partida para a solução é, obviamente, o claro entendimento do que está sendo proposto: qual é de fato a situação a ser investigada, que dados foram fornecidos e que tipo de resposta é solicitado? Uma vez seguro de ter entendido a formulação do problema — ou exercício —, o estudante pode iniciar sua solução. O conhecimento requerido para isso deve estar contido naquele capítulo — naquela seção, caso seja um exercício —, além de conhecimento anterior que já se supõe esteja consolidado. Ao se chegar a uma resposta, é muito importante verificar se ela é razoável, ou se não é, por alguma razão, absurda. Em muitos casos, a resposta é o valor de uma grandeza. Pode ser que um exame crítico do valor obtido mostre claramente que ele é absurdo, ou pelo menos pouco razoável. Por exemplo, se ao calcular o tempo de queda de um corpo o estudante chega a algo como uma semana, sem dúvida deve ter cometido um erro! Em outros casos, a resposta a que se chega é uma equação que exprime uma fórmula. Nesses

O ponto de partida para a solução de exercícios e problemas é, obviamente, o claro entendimento do que está sendo proposto: qual é de fato a situação a ser investigada, que dados foram fornecidos e que tipo de resposta é solicitado?

A atitude do aluno ao resolver problemas é mais importante para o aprendizado do que a quantidade de problemas resolvidos. Quase todos os problemas da física admitem mais de um método de solução, e com frequência permitem um grande número de métodos. Assim, o estudante deve cultivar o hábito de tentar novas soluções, além da primeira obtida com sucesso

casos, dois procedimentos são importantes. O primeiro é verificar se a equação é dimensionalmente correta. Se não for, a solução está incorreta, embora a correção dimensional da fórmula não seja suficiente para garantir a sua inteira correção.

Quase sempre, a equação obtida na solução de um problema é uma fórmula que expressa a maneira como uma grandeza varia em função de uma ou mais variáveis. É importante, nesse caso, testar que valores numéricos a fórmula fornece para certos valores limites das variáveis: por exemplo, quando uma dada variável tem valor nulo ou infinito, que valor se obtém para a grandeza? Valores obviamente absurdos podem se obtidos nesses limites, o que revela que a fórmula não está correta.

Outro hábito é muito útil, e na verdade sua prática sistemática pode desenvolver no aluno habilidades especiais e preciosas na solução de problemas. Em primeiro lugar, a quantidade do aluno ao resolver problemas é mais importante para o aprendizado do que o número de problemas resolvidos. Quase todos os problemas da física admitem mais de um método de solução, e com frequência permitem um grande número de métodos. Assim, o estudante deve cultivar o hábito de tentar novas soluções, além da primeira obtida com sucesso. Nesse exercício, deve-se insistir em buscar uma solução que seja a mais simples de todas; pois, na verdade, a solução mais simples é a melhor e a mais brilhante, e no fundo a que requer mais habilidade de quem a obtém. Quase sempre, essas soluções especialmente simples envolvem a exploração habilidosa das simetrias contidas no sistema ou no próprio problema, e às vezes também o uso de leis de conservação. Elas são capazes de revelar o enorme poder dos princípios fundamentais da física e, dessa maneira, também sua extraordinária beleza.

Material optativo

Física Básica contém seções opcionais que não são menos relevantes que as restantes, e seu caráter opcional reside em que ao omiti-las em seu estudo o estudante não irá dificultar a compreensão de assuntos subsequentes — nem comprometerá sua compreensão da estrutura da física. Entretanto, mesmo que o professor desconsidere tais seções, o aluno que tenha pretensões mais ambiciosas sobre sua aprendizagem deve estudá-las

Física Básica contém seções opcionais. Estas não são menos relevantes que as restantes, e seu caráter opcional reside em que ao omiti-las em seu estudo o estudante não irá dificultar a compreensão de assuntos subsequentes. Tampouco irá comprometer sua compreensão da estrutura da física. Entretanto, mesmo que o professor desconsidere tais seções, o aluno que tenha pretensões mais ambiciosas sobre sua aprendizagem deve estudá-las. Esse estudo pode ser feito após a leitura das seções obrigatórias do livro.

Laboratório

A ênfase e o objetivo principal do curso de laboratório devem ser a aquisição de habilidades em técnicas experimentais

Física Básica foi escrito com base no pressuposto de que o curso será acompanhado de aulas de laboratório nas quais o aluno tomará contato com muitos fenômenos aqui abordados teoricamente. Entretanto, não pensamos que a finalidade principal do curso de laboratório deva ser ilustrar ou demonstrar os fenômenos físicos. A ênfase e o objetivo principal do curso de laboratório devem ser a aquisição de habilidades em técnicas experimentais. As demonstrações de fenômenos devem de preferência ser feitas em sala de aula, dentro do curso teórico.

Duração do curso

O conjunto dos três volumes de Física Básica pode ser ministrado em cursos de três semestres, ou, de maneira mais exaustiva, em cursos de quatro semestres

Como mencionamos, o conjunto dos três volumes de *Física Básica* pode ser ministrado em cursos de três semestres, ou, de maneira mais exaustiva, em cursos de quatro semestres. O ideal é que cada semestre tenha sessenta horas de aula, e para cada hora de aula o estudante deve dedicar pelo menos duas horas de estudo. O ritmo em que é ministrado, e o programa do curso, devem ser escolhidos segundo a formação prévia e também o tempo disponível dos estudantes. Por exemplo, para turmas em que os estudantes tiveram uma boa formação no ensino médio, e têm algum conhecimento de cálculo, o Capítulo 3 de *Mecânica (Movimento Retilíneo)* não precisa ser ensinado. Com frequência, boa parte do Capítulo 4 (*Vetores*) também pode ser omitida, o que libera tempo para a inclusão de seções opcionais do restante do livro. Vários outros casos podem ser mencionados, e cabe ao professor fazer uma seleção criteriosa.

Material de apoio

Recursos adicionais na Internet:
www.editoralab.com.br

A partir do segundo trimestre de 2007 este livro contará com recursos adicionais, disponíveis no site da Editora LAB (www.editoralab.com.br). Haverá um sistema de testes de auto-avaliação, duplicação das ilustrações da obra para confecção de transparências e exercícios e problemas adicionais. O fornecimento desse material será gratuito, bastando que o estudante e o professor se cadastrem no site.

Seção 10.9 ■ Eixo balanceado (opcional)

A Equação 10.34 relaciona L_z com a conexão entre o vetor momento angular $\mathbf{L}$ de um corpo rígido e seu vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ geralmente é complicada, mas torna-se especialmente simples se o eixo de rotação do corpo for um eixo de simetria do mesmo. Consideremos um corpo simétrico girando em torno de um eixo de simetria. Por exemplo, um cone girando em torno do seu eixo, uma esfera girando em torno do seu diâmetro etc. Nesse caso, a primeira soma da Equação 10.30 dá um valor nulo. Isso ocorre porque para cada partícula na posição de coordenadas (z, ρ, ϕ) haverá outra partícula de massa idêntica na posição de coordenadas $(z, -\rho, \phi)$. Dessa forma, no somatório os termos correspondentes às duas partículas se cancelarão exatamente. Devido a tal cancelamento, a Equação 10.30 assumirá a forma

$$\mathbf{L} = \omega k \sum m \rho_i^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (10.36)$$

Posto que $\mathbf{L} = \omega \mathbf{k}$, podemos ainda escrever

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega} \quad (10.37)$$

Um aspecto relevante da Equação 10.37 é que, contrariamente ao que ocorre na Equação 10.34, a coordenada z não mais aparece no momento e na velocidade angulares. Assim, o ponto de origem O (ver Figura 10.15) pode ser colocado em qualquer ponto sobre o eixo dos z , que é o eixo de rotação, sem afetar o valor do momento angular. Nesse caso, como é usual, podemos falar no momento angular do corpo em relação ao seu eixo de rotação, pois o momento angular em relação a qualquer ponto sobre o eixo terá o mesmo valor.

Na verdade, o momento angular e a velocidade angular podem ser paralelos mesmo quando o eixo não é de simetria. A rigor, para que o paralelismo ocorra basta que o primeiro termo na Equação 10.30 seja nulo. Estar girando em torno de um eixo de simetria é condição suficiente mas não necessária para que tal termo se anule. Um eixo de rotação para o qual o momento angular e a velocidade angular são paralelos é denominado **eixo balanceado**, ou **eixo principal de inércia**.

Quando um corpo gira em torno de um eixo balanceado com velocidade angular constante, seu momento angular permanece constante. Isso significa que o corpo consegue permanecer girando em torno desse eixo sem que nenhum torque externo seja aplicado sobre ele. Eixos balanceados são muito importantes para o bom funcionamento de máquinas. Um exemplo muito familiar dessa importância refere-se ao giro de uma roda de automóvel. Se a roda não está balanceada, para que ela gire em torno de um eixo fixo é necessário que o mecanismo que a prende lhe aplique um torque cuja direção gira junto com a roda. Geralmente, o mecanismo de sustentação da roda, mesmo sendo muito forçado, é incapaz de aplicar o torque necessário, e, em consequência, a roda gira mancando. Para balancear a roda e fazer com que ela seja suave, é necessário colocar pequenos contrapesos em seu contorno até que, em termos da Equação 10.30, se torne nulo.

Para um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria, o momento angular é paralelo à velocidade angular.

Um eixo de rotação para o qual o momento angular e a velocidade angular são paralelos é denominado **eixo balanceado**, ou **eixo principal de inércia**.

Seção 10.10 ■ Energia cinética

Para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo com velocidade angular ω , a velocidade da partícula i será dada por

$$\mathbf{v}_i = \omega \rho_i$$

onde ρ_i é a sua distância até o eixo. Esse resultado é um caso particular da Equação 10.37. A energia cinética do corpo será

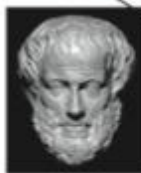
$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 \quad (10.38)$$

Para um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria, o momento angular é paralelo à velocidade angular.

■ **Texto suplementar**, com explicação adicional a algum trecho do capítulo

Capítulo 1 ■ O que é a física

Aristóteles



Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.) nasceu em Estagira, na Macedônia. Aos 17 anos, quando ingressou na Academia de Platão, e de outros pensadores gregos (na verdade o mais influente pensador do Ocidente antigo). Retornou à Macedônia (c. 343 a.C.–c. 340 a.C.) para ser professor de seu filho, Alexandre, e seus interesses abarcaram todo o conhecimento humano: física, metafísica, ética, política, zoologia, psicologia, meteorologia etc. Opunha-se a seu mestre Platão, um idealista que valorizava a percepção sensorial como fonte de conhecimento, sendo mais próximo aos empiristas Tales de Mileto (c. 624 a.C.–c. 546 a.C.) e Pitágoras (c. 570 a.C.–c. 495 a.C.). Aristóteles ignorava a importância da experimentação (observação em condições controladas e, se possível, acompanhada de mensuração) e foi por isso levado a equivocadas que acabaram tornando-se dogmas. Aristóteles defendia o determinismo teleológico, o princípio de que os fenômenos são determinados por um objetivo final —, e esta foi a sua ideia mais duradoura para a ciência. Assim, uma pedra caiu porque buscava seu lugar natural, que era o centro da Terra e também o centro do cosmo. Defendeu também que os objetos celestes eram regidos por leis distintas das leis dos terrestres. A dogmatização dos ensinamentos de Aristóteles pela Igreja (por influência de Aquino) tornou-se, por um milhão, um grande obstáculo para o avanço do conhecimento científico.

Seção 1.3 ■ Teleologia e determinismo causal

O mais influente dos pensadores gregos foi **Aristóteles**. Enciclopédico, temático, dividiu o conhecimento em várias disciplinas e deu-lhe utilidade: *metafísica*, *física* (que ele definiu, em forma mais ampla, sendo o estudo da matéria inorgânica), *biologia*, *ética*, *política*, *psicologia*, *meteorologia*, *zoologia*. Em todas elas, a metodologia foi baseada na observação e na experiência, e portanto ele pode ser considerado um empirista. Seu pensamento foi baseado em dois motivos: o primeiro, o determinismo causal, e o segundo, o determinismo teleológico.

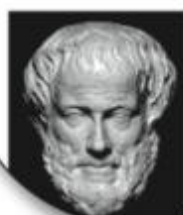
Determinismo é o conceito de que...

Para um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria, o momento angular é paralelo à velocidade angular.

Na verdade, o momento angular e a velocidade angular são paralelos mesmo quando o eixo não é de simetria. A rigor, para que o paralelismo ocorra basta que o primeiro termo na Equação 10.30 seja nulo. Estar girando em torno de um eixo de simetria é condição suficiente mas não necessária para que tal termo se anule. Um eixo de rotação para o qual o momento angular e a velocidade angular são paralelos é denominado **eixo balanceado**, ou **eixo principal de inércia**.

■ **Glossário** com definição de termos fundamentais

Aristóteles



Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.) nasceu em Estagira, na Macedônia. Aos 17 anos, quando ingressou na Academia de Platão, e de outros pensadores gregos (na verdade o mais influente pensador do Ocidente antigo). Retornou à Macedônia (c. 343 a.C.–c. 340 a.C.) para ser professor de seu filho, Alexandre, e seus interesses abarcaram todo o conhecimento humano: física, metafísica, ética, política, zoologia, psicologia, meteorologia etc. Opunha-se a seu mestre Platão, um idealista que valorizava a percepção sensorial como fonte de conhecimento, sendo mais próximo aos empiristas Tales de Mileto (c. 624 a.C.–c. 546 a.C.) e Pitágoras (c. 570 a.C.–c. 495 a.C.). Aristóteles ignorava a importância da experimentação (observação em condições controladas e, se possível, acompanhada de mensuração) e foi por isso levado a equivocadas que acabaram tornando-se dogmas. Aristóteles defendia o determinismo teleológico, o princípio de que os fenômenos são determinados por um objetivo final —, e esta foi a sua ideia mais duradoura para a ciência. Assim, uma pedra caiu porque buscava seu lugar natural, que era o centro da Terra e também o centro do cosmo. Defendeu também que os objetos celestes eram regidos por leis distintas das leis dos terrestres. A dogmatização dos ensinamentos de Aristóteles pela Igreja (por influência de Aquino) tornou-se, por um milhão, um grande obstáculo para o avanço do conhecimento científico.

■ **Minibiografias** de físicos, matemáticos e filósofos de expressão fundamental para a física

■ Energia cinética devida à rotação em torno de um eixo

■ Definição ou nome de determinada equação

E-E Exercício-exemplo 10.12

■ Calcule a energia cinética da porta, do Exercício-exemplo 10.11, quando a sua velocidade angular é 10,0 rad/s, sabendo que sua massa é 10,0 kg e sua largura é 0,800 m.

■ Solução

O momento de inércia da porta é

PROBLEMAS

P 2.1 O módulo de Young

PROBLEMAS

P 2.1 O módulo de Young de um material é uma grandeza que mede a resistência oferecida pelo material a uma distensão ou compressão. A Figura 2.4 mostra um esquema utilizado para a medida do módulo de Young. Uma barra homogênea com seção reta de área A é submetida a uma força de distensão de intensidade F . Com a aplicação da força, o comprimento da barra aumenta de L , para $L + \Delta L$. Observa-se que a elongação da barra é proporcional a F e ao seu comprimento inicial L , e inversamente proporcional a A . Tal relação de proporcionalidade pode ser escrita na forma

$$\Delta L = L \epsilon = \frac{1}{Y} \frac{F}{A} L$$

na qual a constante de proporcionalidade Y é o módulo de Young. Determine a dimensão de Y e dê a sua unidade no SI.

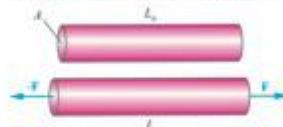


Figura 2.4
(Problema 2.1)

P 2.2 Quantos prótons você come por dia, se a massa do próton vale $1,7 \times 10^{-27}$ kg?

P 2.3 Quantas vezes o coração humano bate, em média, durante a vida?

P 2.4 O cubito foi inicialmente definido pela distância entre o cotovelo e a extremidade do dedo médio de um homem médio. Defina o cubito em metros usando seu braço como padrão.

P 2.5 Meça o tamanho do seu pé e compare-o com o pé, unidade de comprimento inglesa igual a 30,48 cm. Algo errado com seu pé ou com o pé do inglês de referência?

P 2.6 Galileu usou, para medidas de tempo, um método já utilizado no Egito, o da medida do volume (ou peso) da água que escorria de um grande reservatório por um pequeno orifício. Verifique a precisão de tal medida para tempos não muito curtos. Feche a torneira da pia de sua cozinha até que o escoamento da água seja um fino filamento. Utilizando um relógio, meça o tempo necessário para encher uma vasilha de cerca de 1 l. Repita a medida várias vezes sem mexer na torneira. Qual é o erro percentual na sua medida do tempo de escoamento necessário para encher a vasilha?

P 2.7 Faça sua medida do diâmetro do Sol. Próximo ao pôr-do-sol, finque uma estaca verticalmente, deixando exposta cerca de 1 m de estaca. Faça dois riscos horizontais na parte superior da estaca, cuidadosamente separados 20 cm do outro. Posicione-se de modo que a estaca fique entre você e o Sol, e mova-se até que, ao se agachar, você consiga ver o diâmetro do Sol coincidindo precisamente com a distância entre as marcas na estaca (use filtro de luz ao olhar para o Sol). Meça então sua distância até a estaca. (A) Pelas suas medidas, qual é o ângulo aparente do Sol, medido em radianos? (B) Qual é o diâmetro real do Sol, medido em metros, sabendo-se que a distância do Sol à Terra é igual a $1,5 \times 10^8$ m?

P 2.8 Os pontos extremos ao norte e ao sul da América do Sul estão, coincidentemente, no mesmo meridiano: 70° Oeste. O extremo norte está à latitude de 12,1° Norte e o extremo sul está à latitude de 55,7° Sul. Qual é o comprimento da América do Sul?

Os fatores fixos podem ser postos em evidência no último termo da Equação 10.39 para se obter

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

(10.40)

Veja que a equação que expressa a energia cinética de rotação de um corpo em torno de um eixo é metade do produto da inércia de rotação pelo quadrado da velocidade angular. Há aqui uma perfeita analogia com a energia cinética $K = mv^2/2$ associada à translação.

E-E Exercício-exemplo 10.12

■ Calcule a energia cinética da porta, do Exercício-exemplo 10.11, quando a sua velocidade angular é 10,0 rad/s, sabendo que sua massa e sua largura são respectivamente 50,0 kg e 0,800 m.

■ Solução

O momento de inércia da porta é

$$I = \frac{1}{3} \times 50 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \times (0,8 \text{ m})^2 = 10,7 \text{ Nms}^2$$

Sua energia cinética será, então,

$$K = \frac{1}{2} \times 10,7 \text{ Nms}^2 \times (10,0 \text{ s}^{-1})^2 = 5,35 \times 10^3 \text{ J}$$

Note-se que a unidade rad não aparece nos cálculos. Tal fato ocorre porque rad é grandeza adimensional. A velocidade angular da porta pode ser escrita simplesmente como 10/s.

Exercícios

E 10.21 Considere a Terra como uma esfera homogênea com raio de $6,4 \times 10^6$ m e massa de $6,0 \times 10^{24}$ kg. Calcule o momento angular e a energia cinética decorrentes de sua rotação.

E 10.22 Calcule a energia cinética da hélice no Exercício 10.17.

Seção 10.11 • Conservação do momento angular

A Equação 10.28 nos diz que a taxa de variação do momento angular L do sistema é igual ao torque externo sobre o mesmo. Esse torque é sempre nulo em um sistema isolado e também nulo em sistemas não-isolados. Podemos assim enunciar a seguinte lei da conservação do momento angular:

Lei da conservação do momento angular O momento angular de um sistema isolado ou de um sistema sujeito a um torque externo nulo é constante.

No estudo do movimento dos planetas e seus satélites, a conservação do momento angular é uma ferramenta muito útil. Os planetas se perturbam mutuamente, e suas órbitas são afetadas por isto. Porém, o sistema como um todo conserva o momento angular. A lei da conservação do momento angular é uma das leis fundamentais da mecânica newtoniana e se aplica a toda a isotropia do espaço.



Sumário

Capítulos

- 1 O que é a Física, *1*
- 2 Medidas, *19*
- 3 Movimento Retilíneo, *37*
- 4 Vetores, *65*
- 5 Movimento no Plano e no Espaço, *89*
- 6 Leis Fundamentais da Mecânica, *107*
- 7 Trabalho e Energia, *135*
- 8 Conservação do Momento, *169*
- 9 Colisões, *197*
- 10 Rotações, *211*
- 11 Oscilador Harmônico, *255*
- 12 Gravitação, *277*

Apêndices

- A Sistema Internacional de Unidades (SI), *300*
- B Constantes Universais, *301*
- C Constantes Eletromagnéticas e Atômicas, *301*
- D Constantes das Partículas do Átomo, *302*
- E Constantes Físico-químicas, *302*
- F Dados Referentes à Terra, ao Sol e à Lua, *303*
- G Dados Referentes aos Planetas, *303*
- H Tabela Periódica dos Elementos, *304*

Índice Alfabético, *305*



O que é a Física

- Seção 1.1 ■ A Natureza e seus fenômenos, 2
- Seção 1.2 ■ A antítese entre o céu e a terra, 2
- Seção 1.3 ■ Teleologia e determinismo causal, 3
- Seção 1.4 ■ Método científico, 4
- Seção 1.5 ■ A Natureza é compreensível!, 9
- Seção 1.6 ■ As leis da Natureza são leis de movimento, 11
- Seção 1.7 ■ O que é ciência, 11
- Seção 1.8 ■ O que é a física, 13
- Seção 1.9 ■ A física e as outras ciências, 15
- Seção 1.10 ■ Modelo científico, 16

Seção 1.1 ■ A Natureza e seus fenômenos

Qualquer cenário natural exhibe uma evolução infundável e intrincada de fenômenos. Veja-se o leitor diante de uma cena de entardecer. O Sol, aparentemente imóvel a uma observação de curto prazo, desliza todavia de maneira contínua rumo ao poente. Algumas nuvens se movimentam no céu como aglomerados que se diluem e se recompõem, exibindo variados padrões. As mais próximas aos limites da abóbada celeste, principalmente a leste e a oeste, se coloreem de chumbo, ouro e vermelho, em matizes ricos e mutáveis. A brisa, cada vez mais fria e mais úmida, agita levemente os ramos das árvores, gerando sons familiares. Os pássaros se apressam em buscar suas pousadas noturnas, gastando o saldo de energia em muitos pios, cantos ou até mesmo algum último assédio amoroso. O leitor irá talvez se sentir muito bem, sem motivo algum ou até mesmo com razões para o contrário. Finalmente o Sol se põe, e sua ausência revela um sem-número de estrelas deslizando rumo ao oeste em um arranjo imutável, antigo, aparentemente eterno.

É quase dispensável enfatizar a variedade dos fenômenos que acabamos de descrever. Há corpos se movimentando, alguns inanimados, outros dotados de vida, esta última já por si um fenômeno fabuloso e coberto de mistério. Há sons que se propagam das fontes aos ouvidos do leitor e são de algum modo detectados, analisados, reconhecidos, e enfim sentidos como agradáveis, ou talvez não. Há luz, há cores, há sensações de calor e frio. No centro da cena está o leitor, que tem consciência, emoções, pensamento. Este, como de resto tem ocorrido com todos os humanos desde o surgimento da razão, inevitavelmente buscará explicações para tudo isso.

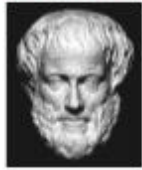
Seção 1.2 ■ A antítese entre o céu e a terra

Desde a sua alvorada, o Homem persegue incansavelmente o entendimento da Natureza. Essa busca e esperança é reforçada pela percepção imediata de que muitos fenômenos apresentam ordem, regularidade. O Sol repete sua rotina diária com obstinada precisão, a Lua apresenta um ciclo de fases bem definidas, as estações se sucedem em ciclos que todas as civilizações reconheceram ter duração de aproximadamente 365 dias. Há também formas de regularidade menos estritas, com menor grau de previsibilidade. Os fenômenos biológicos, meteorológicos, e tantos outros, se enquadram nessa categoria. A ciência nasceu da observação, registro e análise da regularidade dos fenômenos naturais. Como revelam os registros deixados pelas civilizações antigas, muito cedo se descobriu que os fenômenos celestes apresentam muito maior regularidade do que os terrestres, e que a regularidade das estações está ligada ao ciclo anual da declinação do Sol: dele decorrem as variações também cíclicas nas durações do dia e da noite, e assim as estações. Com isso, a astronomia, a primeira ciência natural criada pelo Homem, desenvolveu-se até níveis de considerável avanço em todas as civilizações antigas. O céu passou a ser visto como o *locus* da ordem, com importantes reflexos na visão do mundo e do próprio ser humano. Por meio da astrologia, buscou-se nos astros a determinação do destino humano, e as divindades encarnaram corpos celestes como se fossem suas almas.

Com base na herança babilônica e egípcia, na Grécia a especulação humana atingiu seu apogeu na Antiguidade, e o pensamento grego tem influenciado o pensamento de todo o mundo ocidental até os dias de hoje. Ao lado da mitologia, que habitava principalmente o imaginário popular e as artes, os gregos também desenvolveram maneiras mais sistematizadas e potencialmente mais efetivas de investigação da Natureza. Entretanto, a percepção da antítese entre o céu e a terra, lá em cima revelando-se a regularidade e a ordem enquanto aqui no mundo tangível parecia prevalecer a desordem quase caótica, acabou sendo uma barreira limitante do desenvolvimento da ciência grega. Segundo o pensamento grego dominante, os corpos celestes eram feitos de substância etérea e eterna, distinta das que compõem os objetos da terra, e também eram regidos por leis distintas das leis terrestres. Assim, seria impossível e absurda uma abordagem unificada no estudo da Natureza.

Os fenômenos celestes são em geral regulares, repetitivos de modo cíclico, e por isso previsíveis, enquanto os fenômenos terrestres são irregulares e na maioria das vezes imprevisíveis. Isso gerou nos gregos a idéia da antítese entre o céu e a terra, segundo a qual as leis do céu eram distintas das leis da terra

Aristóteles



Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.) nasceu em Estagira, na Macedônia. Apesar de ter-se estabelecido em Atenas desde os 17 anos, quando ingressou na Academia de Platão, e de ter-se tornado o mais influente dos pensadores gregos (na verdade o mais influente pensador do Ocidente), nunca obteve a cidadania ateniense. Retornou à Macedônia (c. 343 a.C.–c. 340 a.C.) para ser preceptor de Alexandre Magno. Aristóteles foi enciclopédico, e seus interesses abarcaram todo o conhecimento da época. Criou a lógica formal e dividiu o conhecimento em disciplinas — física, metafísica, ética, política, economia, anatomia, zoologia, geologia, meteorologia etc. Opondo-se a seu mestre Platão, um idealista e racionalista, Aristóteles valorizou a percepção sensorial como relevante fonte de conhecimento, sendo assim, juntamente com seus antecessores Tales de Mileto (c. 624 a.C.–c. 546 a.C.) e Pitágoras (c. 570 a.C.–c. 596 a.C.) um precursor do empirismo. Entretanto, Aristóteles ignorou a importância da experimentação (observação de fenômenos em condições controladas e, se possível, acompanhada de mensuração) e foi por isso levado a conclusões equivocadas que acabaram tornando-se dogmas. Aristóteles defendia o determinismo teleológico — ou seja, o princípio de que os fenômenos são determinados por um objetivo final —, e esta foi a sua idéia mais danosa para a ciência. Assim, uma pedra caía porque buscava seu lugar natural, que era o centro da Terra e também o centro do cosmo. Defendeu também que os objetos celestes eram regidos por leis distintas das leis dos terrestres. A dogmatização dos ensinamentos de Aristóteles pela Igreja (por influência de Tomás de Aquino) tornou-se, por um milênio, um grande obstáculo para o avanço do conhecimento.

Seção 1.3 ■ Teleologia e determinismo causal

O mais influente dos pensadores gregos foi **Aristóteles**. Enciclopédico, por excelência um sistematizador, dividiu o conhecimento em várias disciplinas e deu-lhes nomes que até hoje são utilizados: *metafísica*, *física* (que ele definiu, em forma mais ampla que a hoje adotada, como sendo o estudo da matéria inorgânica), *biologia*, *psicologia*, *política* e *ética*. Organizou e elaborou também a sintaxe do raciocínio dedutivo, na prática já consagrada pelos seus antecessores, em uma disciplina, a *lógica*. Em boa parte da sua investigação, principalmente na biologia, grandemente baseada na dissecação, Aristóteles adotou procedimentos atualmente usados pela ciência, e portanto ele poderia ter sido um importante propulsor da ciência. Todavia, tal não ocorreu por dois motivos: o primeiro foi a deturpação do pensamento aristotélico pelos seus seguidores, e o segundo a visão aristotélica da maneira como os fenômenos naturais são determinados. Além disso, a autoridade de Aristóteles transformou em dogma a antítese entre o céu e a terra.

Determinismo é o conceito de que os fenômenos naturais decorrem de maneira unívoca de algum motivo imperativo. No **determinismo teleológico** os fenômenos são determinados por algum objetivo final a ser alcançado. No **determinismo causal** os fenômenos são determinados por algum agente causador anterior ou simultâneo a eles

Determinismo é o conceito de que os fenômenos naturais decorrem de maneira unívoca (única, sem alternativa) de algum motivo imperativo. Segundo Aristóteles, o determinismo tem natureza teleológica (**determinismo teleológico**), ou seja, os fenômenos são determinados por algum objetivo final a ser alcançado. Como exemplo ilustrativo da teleologia aristotélica, consideremos a queda de uma pedra. Para Aristóteles, a matéria tangível era constituída de quatro elementos, dois pesados, a água e a terra, e dois leves, o ar e o fogo. Os elementos pesados buscam seu lugar natural, que é o centro da Terra e também do cosmo. Assim, uma pedra, feita de terra, cai em busca de um objetivo: ir para seu lugar natural, o centro do cosmo. O fogo e o ar, elementos leves, também têm seu lugar natural, o espaço entre a Terra e a Lua, e para lá ascendem. Os astros, pela eternidade, ocupam seu lugar natural, o céu. A teleologia pode ter sido a contribuição aristotélica mais danosa para a evolução da ciência, e o avanço na compreensão da Natureza teve de ser precedido pela aceitação do **determinismo causal**, ou seja, o conceito de que os fenômenos são determinados por algum agente causador anterior ou simultâneo a eles. O fenômeno não pode ser anterior à sua causa. Conforme veremos no Capítulo 6 (*Leis Fundamentais da Mecânica*), **Isaac Newton** fundamentou sua mecânica no determinismo causal. Segundo Newton, os agentes causadores do movimento são as forças, e para explicar a queda de uma pedra ou de outro corpo ele postulou a existência de uma força universal de atração entre os corpos, denominada *força da gravidade*. Com Newton, descobriu-se que a Terra imprime uma força de gravidade sobre a pedra, que é o peso da pedra, e tal força determina seu movimento de queda quando ela é abandonada no ar.

Newton também adotou a nova visão do cosmo, em discussão desde **Nicolau Copérnico**, na qual a Terra deixa de ser o centro do Universo. Na verdade, a Terra é apenas um dos planetas que giram em torno do Sol, e para que um planeta curve sua trajetória em torno desse astro,

Isaac Newton



O inglês Isaac Newton (1643–1727) é possivelmente o maior e mais influente cientista de todos os tempos. Juntamente com Arquimedes e Gauss, é considerado um dos três maiores matemáticos da história e, juntamente com Einstein, um dos dois maiores físicos. Ingressou como aluno na Universidade de Cambridge em 1661, mas dedicou-se principalmente aos seus estudos particulares, que incluíram as obras de Copérnico, Kepler, Galileu, Descartes, Gassendi e outros expoentes da revolução científica, cuja obra ele acabou englobando numa síntese colossal. Após graduar-se, em 1665, retirou-se por dezoito meses na fazenda de sua mãe para fugir de uma praga (peste bubônica) que resultou no fechamento da Universidade. Nesses dezoito meses, realizou o mais prodigioso processo criativo de que se tem notícia. Desenvolveu o cálculo íntegro-diferencial, com base no trabalho de alguns precursores, principalmente Pierre Fermat e John Wallis, estabeleceu os princípios da mecânica, descobriu a lei da gravitação universal e fez grandes descobertas em óptica. Ao formular a mecânica com base em uma equação de movimento, implementou o princípio do determinismo causal (antecipado por Descartes), o que é o maior feito científico-filosófico da história. Newton demorou a publicar seus trabalhos, e o cálculo íntegro-diferencial foi desenvolvido independentemente por Leibniz quase duas décadas depois. Fortemente influenciado por Gassendi, e ao contrário de Descartes, Newton adotou o atomismo. Como, por outro lado, acreditava convictamente na universalidade das leis físicas, defendeu que também a luz tivesse um caráter atômico. Opôs-se assim aos seus contemporâneos que defendiam o caráter ondulatório da luz. No século XX a mecânica quântica conciliou as duas visões: tanto a luz quanto a matéria têm um caráter dual. Ou seja, são ondas e também são partículas. Assim a simetria entre luz e matéria, um aspecto da universalidade das leis físicas, foi resgatada. Newton demonstrou que a luz branca se decompõe nas cores do arco-íris e inventou o telescópio de reflexão, que se revelou muito superior ao de refração. O prodígio de Newton fica ainda mais assombroso quando consideramos que ele dedicou mais tempo à teologia e à alquimia do que à física e à matemática.

segundo Newton, é necessária uma força, no caso a mesma força da gravidade, agora exercida pelo Sol sobre o planeta. Sob a força de gravidade do Sol, afirma Newton, a Terra e os demais planetas seguem as mesmas leis de movimento que comandam a queda de uma pedra sob a ação da gravidade da Terra, ou a queda da maçã cuja observação, segundo a lenda, inspirou Newton. O mesmo determinismo causal, assim na terra como nos céus. Assim, Newton foi a culminância de uma revolução do pensamento que pôs um ponto final na antítese grega entre o céu e a terra, na teleologia e em outros equívocos gregos canonizados por Aristóteles.

Seção 1.4 ■ Método científico

Os antigos costumavam buscar o entendimento da Natureza pela observação dos fenômenos que nela ocorrem de maneira espontânea. Alguns, com destaque para os pitagóricos e Arquimedes (287–212 a.C.), tiveram a boa idéia de fazer experimentos, ou seja, induzir fenômenos em condições controladas e passíveis de repetição, e observar o que ocorria. Tanto os pitagóricos quanto Arquimedes buscaram quantificar as observações por meio de medidas, e desse modo procurar relações matemáticas que envolvessem os fenômenos observados. Entretanto, Aristóteles não acreditava na mensuração e descrição matemática dos fenômenos, e com sua influência interrompeu a tradição de Pitágoras e esterilizou o solo onde plantou Arquimedes. Pitágoras e Arquimedes foram os principais pioneiros do método científico, que após longa dormência foi resgatado e aprofundado na Renascença, sob a influência seminal de Galileu Galilei. Desde então, o método científico se impôs como doutrina e prática.

1.4.1 Instrumentos de observação e medida

O próprio Galileu ou seus discípulos inventaram ou aperfeiçoaram vários instrumentos que ampliaram a capacidade humana de observação dos fenômenos e de medidas precisas das grandezas neles envolvidas, tais como telescópios, microscópios, relógios, barômetros, e outros. Galileu aperfeiçoou o telescópio, inventado pouco antes na Holanda, agregando-lhe poder suficiente para investigações pioneiras dos astros celestes. Apontando seu telescópio para a Lua, constatou que ela não era uma esfera perfeita, como atestaram os gregos, mas apresentava relevos, com vales e montanhas, tal como ocorre na Terra, e pôde até mesmo

René Descartes



O filósofo, cientista e matemático francês René Descartes (1596–1650) é um dos mais poderosos e controversos pensadores da modernidade. Foi um racionalista no sentido platônico, ou seja, acreditava que o mundo pode ser decifrado pelos poderes da razão. É por isso considerado o pai do racionalismo moderno. Os matemáticos também o consideram o primeiro grande matemático da modernidade. Criou a geometria analítica, na qual as formas geométricas podem ser descritas em termos de equações algébricas, que acabou revelando-se essencial para a mecânica newtoniana. Mas a sua maior contribuição para a ciência foi de caráter filosófico. Descartes via o mundo como um suntuoso e preciso aparato que, uma vez criado e colocado num estado inicial de movimento, evolui autonomamente de acordo com leis imutáveis e universais, de caráter mecânico. Tal idéia incluía duas inovações fundamentais. Primeiro, os fenômenos obedeciam a um determinismo causal: o estado presente do Universo determina o estado imediatamente subsequente pelas leis da mecânica. Segundo, as leis naturais teriam caráter universal e seriam as mesmas tanto no céu como na terra. Com base na universalidade das leis da física, Descartes generalizou a lei da inércia descoberta por Galileu, para nela incluir também os corpos celestes. Assim, para que os planetas orbitassem em torno do Sol, era necessário que uma força atuasse sobre eles, o que colocou Descartes muito próximo da lei da gravitação, da qual sem dúvida cogitou. Entretanto, sua visão inteiramente mecanicista do Universo não permitia uma ação a distância, como parecia ser a gravitação. Por isso, Descartes postulou que o espaço era preenchido por matéria invisível que se movimentaria em vórtices que empurravam os planetas rumo ao Sol. (De alguma maneira, essa idéia foi recuperada pelas modernas teorias das forças da Natureza, em que as forças são intermediadas por partículas chamadas bósons virtuais.) Confirmando Galileu, Descartes atestava que as leis naturais têm caráter matemático. O racionalismo de Descartes, no qual o experimento tem um papel um tanto secundário, o de distinguir entre teorias alternativas de igual viabilidade lógico-matemática, tem sido na prática aceito pela maioria dos físicos que trabalham atualmente em física fundamental. Einstein adotou essa visão e a deixou como parte do seu legado.

fazer medições aproximadas das alturas das montanhas e profundidades dos vales, muitos deles em forma de crateras circulares. Isso pedia reconsiderações sobre dogmas de Platão e Aristóteles, para quem os astros celestes eram realizações concretas da perfeição e portanto só poderiam adotar a forma da perfeita esfera. Olhando para Júpiter, Galileu descobriu que o planeta tinha quatro satélites orbitando em torno de si, do mesmo modo que a Lua orbita em volta da Terra. Tal paralelo entre Júpiter e a Terra também sugeria que os planetas pudessem ser objetos análogos à Terra, e portanto que a suposta antítese entre o céu e a terra fosse um conceito equivocado. A partir de Galileu, os instrumentos de observação e medida não pararam de se diversificar e ampliar o seu poder, e foram acrescidos de outros instrumentos de investigação da Natureza, os hoje denominados instrumentos de manipulação. Tal parafênalia é hoje extraordinariamente diversificada e sofisticada, e no conjunto denominada *instrumentação científica*.

1.4.2 A idealização dos objetos e fenômenos sob investigação

Como vimos, a antítese grega entre o céu e a terra teve origem na constatação de que, ao contrário dos fenômenos celestes, os fenômenos à nossa volta geralmente são muito complexos. Tal complexidade também desestimulou enormemente a investigação, em toda a Antiguidade, dos fenômenos terrestres, especialmente dos fenômenos dinâmicos (que envolvem alguma evolução temporal). Galileu deu uma abordagem enormemente eficaz ao estudo dos fenômenos complexos da terra que desde então tem sido adotada na investigação científica. Reconheceu que, freqüentemente, muitas complicações envolvidas em um fenômeno podem ser ignoradas em um processo de idealização no qual o fenômeno é imaginado livre delas. Como notou Galileu, muitas vezes a consideração dos fenômenos assim idealizados revela regularidades de grande importância e reveladoras da maneira como a Natureza funciona. Um exemplo historicamente muito importante revela a eficácia do processo galileano de idealização. A compreensão do movimento sempre fora dificultada pela presença universal — aqui na terra — e perturbadora do atrito. Aristóteles foi especialmente iludido pelo efeito do atrito sobre o movimento dos corpos terrestres, e disto em parte resultaram seus conceitos equivocados

Pierre Gassendi



O filósofo francês Pierre Gassendi (1592–1655) teve um importante papel na revolução científica ao resgatar o atomismo proposto pelos gregos e inseri-lo no espírito da época. O atomismo era negado pela Igreja tanto porque Aristóteles o havia rejeitado quanto porque os átomos eram considerados entidades eternas. Gassendi eliminou esta última barreira ao defender que os átomos haviam sido criados por Deus. Foi o primeiro atomista da modernidade.

Galileu reconheceu que, frequentemente, muitas complicações envolvidas em um fenômeno podem ser ignoradas em um processo de idealização no qual o fenômeno é imaginado livre delas

sobre quase tudo relativo ao movimento. Os estudos de Galileu sobre o movimento estão descritos em sua obra *Diálogos sobre Duas Novas Ciências* (1638), seu mais importante tratado científico. No livro, três interlocutores fictícios discutem um tratado científico escrito por um quarto personagem, referido como *Autor*. As discussões se passam entre *Simplicio*, que defende as idéias e dogmas então vigentes, essencialmente aristotélicos, *Sagredo*, objetivo e neutro, e *Salviati*, que expõe e justifica as idéias do *Autor*. Tal abordagem possibilita a exposição clara e explícita, pela voz de *Salviati*, do método científico praticado pelo *Autor*. Tentando idealizar, a partir de extrapolações baseadas em seus diversos experimentos, o movimento livre do atrito, Galileu (o *Autor*) fez descobertas revolucionárias e fundamentais para o desenvolvimento da mecânica newtoniana, das quais mencionaremos as duas mais importantes:

1. Não fora a resistência do ar, todos os corpos, tanto uma bola de chumbo como uma pluma, levariam o mesmo tempo para cair de uma dada altura. Experiências feitas posteriormente com corpos caindo no vácuo (dentro de câmaras evacuadas) comprovaram inteiramente a conclusão de Galileu.
2. Não fora o atrito — agora envolvendo a resistência do ar e também o atrito de contato entre dois corpos sólidos —, tanto uma bola rígida rolando sobre um plano rígido perfeitamente horizontal como um bloco deslizando sobre tal plano se moveriam para sempre sem qualquer alteração em suas velocidades.

Comentando sobre o efeito do atrito, diz Salviati:

“... a perturbação gerada pela resistência do meio[...], devida à sua diversidade de formas, não se submete a leis fixas nem descrição exata. Assim, se considerarmos somente a resistência que o ar oferece aos movimentos estudados por nós, veremos que ela perturba todos eles e os perturba em uma infinita variedade de modos correspondentes à infinita variedade de formas, peso e velocidade dos projéteis.... Dessa variedade de peso, velocidade, e também de forma, não é possível dar uma descrição exata; assim, para abordar essa matéria de uma forma científica, é necessário ignorarmos essas dificuldades; e uma vez descobertos e demonstrados os teoremas, no caso da ausência da resistência do ar, usá-los e aplicá-los com as limitações ensinadas pela experiência. E a vantagem desse método não será pequena....”

Na investigação dos fenômenos, quase sempre é indispensável abordá-los primeiro nos seus aspectos mais simples, e somente após o entendimento desses aspectos simples refinar a análise com a inclusão progressiva dos ingredientes complicadores

O método da idealização iniciado por Galileu é intensamente utilizado na ciência e se mostrou um dos mais poderosos métodos de investigação. Neste curso, tal método será empregado com frequência, e esperamos que você adquira certa versatilidade no seu uso, que na verdade é uma arte. Entretanto, há de se tomar extremo cuidado: na idealização sem discernimento e percepção prévia do fenômeno na sua real essência, pode ocorrer que algum de seus aspectos fundamentais seja retirado da análise juntamente com outros aspectos periféricos e meramente complicadores. Assim, a criança pode ser jogada fora com a água do banho. A maestria na arte da idealização frequentemente é o que distingue o brilhantismo da mera competência científica.

Naturalmente, como já nos alertou Galileu, muitas vezes pretendemos entender também os aspectos complicadores de um fenômeno. Por exemplo, não podemos ignorar a resistência do ar se nosso objetivo é desenvolver a balística ou estudar o movimento de um avião. Entretanto, para que possamos progredir na investigação dos fenômenos, quase sempre é indispensável abordá-los primeiro nos seus aspectos mais simples, e somente após o entendimento desses aspectos simples refinar a análise com a inclusão progressiva dos ingredientes complicadores.

Nicolau Copérnico



O padre, matemático e astrônomo polonês Mikolaj Koppernigk (1473–1543), que adotou o nome latino Nicolaus Copernicus, doutor em direito canônico, afrontou um dogma da Igreja e uma crença especialmente cara ao coração humano: o de que a Terra seria um corpo imóvel no centro do Universo. Tal idéia fora defendida por Pitágoras, Platão e Aristóteles. O matemático Eudóxio de Cnido (408 a.C.–347 a.C.) e Aristóteles desenvolveram um complicado modelo para descrever o movimento dos astros, um aparato de esferas (56 na versão de Aristóteles) em rotação em torno da Terra. Tal modelo foi aprimorado por Cláudio Ptolomeu (100–175) até ficar satisfatório para explicar o movimento dos planetas, do Sol, da Lua e das estrelas. Aristarco de Samos (320 a.C.–250 a.C.) propôs que o Sol fosse o centro do Universo, mas suas idéias não vingaram. Copérnico propôs o mesmo em sua obra *Das Revoluções dos Corpos Celestes*, publicada postumamente. Teve o cuidado de escrever seu livro em linguagem acessível apenas aos astrônomos e colocar todas as suas proposições apenas como hipóteses úteis para cálculos astronômicos, e também a precaução de postergar sua publicação (viu as provas do livro em seu leito de morte). No modelo de Copérnico, a Terra dá um giro diário em torno de seu eixo, e orbita o Sol, juntamente com os planetas, em trajetórias circulares. As estrelas são fixas e estão a enormes distâncias do Sol, e seu movimento aparente é devido apenas à rotação da Terra. Por supor que as órbitas planetárias são circulares, o modelo de Copérnico é na verdade menos preciso, na previsão dos movimentos dos planetas, que o engenhoso modelo de Ptolomeu. Kepler foi quem lhe deu a versão final e extraordinariamente precisa. O *Revoluções* foi mantido no *Index de Livros Proibidos* (pela Igreja) de 1616 a 1835.

1.4.3 A limitação metódica do escopo da análise

Galileu dedicou grande esforço ao estudo do movimento, sem qualquer consideração sobre as suas causas. Tal ciência, o estudo do movimento sem conexão com seus agentes causadores, hoje denominada cinemática, foi essencial para que Newton mais tarde pudesse desenvolver a dinâmica, ou seja, o estudo do movimento em conexão com suas causas. No *Diálogos* podemos ler:

Sagredo: — Dessas considerações me parece que poderíamos obter a solução real do problema discutido pelos filósofos, qual seja, o que causa a aceleração no movimento natural dos corpos pesados?...

Salviati: — O presente não parece o momento próprio para se investigar a causa da aceleração natural, sobre a qual distintas opiniões têm sido expressas por vários filósofos... todas essas fantasias, e também outras, teriam de ser examinadas; mas isso realmente não valeria a pena. No presente, o propósito do nosso Autor é apenas investigar e demonstrar algumas propriedades do movimento acelerado (seja qual for a causa dessa aceleração)...

Desde Galileu, os cientistas têm conquistado a compreensão da Natureza passo a passo, cada um se baseando nas conquistas dos seus precedentes e a partir delas dando seus próprios passos, conscientes das suas limitações mas sem se deixar imobilizar por elas

Naturalmente, Galileu sabia da importância de investigar a causa da aceleração dos corpos em queda. Entretanto, também sabia que sem novos dados, experimentais ou de alguma natureza ainda não vislumbrada, qualquer opinião sobre a referida causa seria mera *fantasia*. Contudo, deixando tal questão de lado e postergando-a para o momento histórico oportuno, restou-lhe nas mãos o problema do movimento em si, cuja compreensão ele pôde obter com inteira segurança. Tal estratégia tem sido de fundamental importância para o progresso da ciência, e não seria exagero dizer que é exatamente ela que faz com que a ciência seja o único conhecimento realmente cumulativo: desde Galileu, os cientistas têm conquistado a compreensão da Natureza passo a passo, cada um se baseando nas conquistas dos seus precedentes e a partir delas dando seus próprios passos, conscientes das suas limitações mas sem se deixar imobilizar por elas.

1.4.4 Experiências especialmente projetadas para testar hipóteses

Uma inovação importante agregada por Galileu ao método de investigação da Natureza é a experiência especialmente projetada para testar uma dada hipótese, cujos resultados sejam

Galileu Galilei



Galileu Galilei (1564–1642) foi o fundador do método científico. Ingressou na Universidade de Pisa em 1581 para estudar medicina, mas seus interesses se voltaram mais para a matemática. Estudou os matemáticos gregos Euclides (c. 325 a.C.–c. 265 a.C.) e Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.), e mais tarde Apolônio de Perga (c. 262 a.C.–c. 190 a.C.). Deixou a Universidade de Pisa em 1585 sem obter qualquer diploma, mas a ela retornou em 1589 como professor de matemática. Pisa, como todas as universidades da época, era dominada pelo pensamento de Aristóteles, dogmatizado pela Igreja, mas Galileu insistiu na experimentação e na mensuração, principalmente sobre o movimento dos corpos. Criou a cinemática (estudo do movimento), chegando à perfeita descrição matemática da queda dos corpos, do movimento dos projéteis e da oscilação de um pêndulo. Descobriu a lei da inércia, que afirma que um corpo livre de forças permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Entretanto, não estendeu a lei da inércia aos corpos celestes; estes, na ausência de forças, realizariam movimentos circulares uniformes. Assim, manteve intocada a distinção aristotélica entre as leis do céu e as da terra. Aprimorou o telescópio, inventado na Holanda, e o utilizou pela primeira vez para estudar os astros. Defendeu o heliocentrismo proposto por Ptolomeu e acabou sendo perseguido pela Igreja. Suas experiências também afrontavam o Concílio de Trento (1543–1563), que pregava: “A fé não só exclui qualquer dúvida, mas o próprio desejo de submeter a verdade à demonstração”. Para escapar da fogueira, teve de renegar de joelhos sua crença no heliocentrismo, mas mesmo assim foi condenado a prisão domiciliar perpétua.

Galileu adotou o método experimental dos pitagóricos e de Arquimedes, envolvendo a investigação de fenômenos em condições controladas e reproduzíveis, sua quantificação por meio de medidas e a busca de relações matemáticas entre as grandezas medidas. A estreita ligação entre a matemática e as leis naturais estava plenamente clara para Galileu, que afirmou: “*A ciência está escrita nesse grande livro colocado sempre diante de nossos olhos — o Universo —, mas não podemos lê-lo sem aprender a linguagem e entender os símbolos em termos dos quais está escrito. Esse livro está escrito em linguagem matemática*”. Galileu acrescentou ainda aos elementos já adotados na Grécia na investigação dos fenômenos naturais outros poderosos elementos metodológicos que discutimos neste capítulo.

capazes de discriminá-la de outras hipóteses alternativas. Novamente, podemos encontrar em *Diálogos* um exemplo esclarecedor sobre tal tipo de experiência. Desde a Grécia, já se tinha consciência de que ao cair livremente os corpos têm velocidade crescente durante o processo de queda. Era claro que um corpo caindo da altura de 2 m atinge o solo com maior velocidade do que outro caindo da altura de 1 m, se ambos iniciam a queda a partir do repouso. A idéia vigente até Galileu era de que a velocidade do corpo aumentava proporcionalmente à distância percorrida. Assim, um corpo caindo da altura de 2 m atingiria o solo com o dobro da velocidade de outro caindo da altura de 1 m. Galileu formulou a hipótese alternativa de que a velocidade dos corpos em queda aumentava proporcionalmente ao tempo decorrido desde a partida. Naquela época não era ainda possível investigar experimentalmente a evolução da velocidade dos corpos pesados em queda livre, devido à rapidez do processo de queda. Empregando sua estratégia de investigar um fenômeno em situação mais simples cujos resultados pudessem ser depois estendidos (extrapolados) para a compreensão do fenômeno em mira, Galileu realizou experiências sobre o rolamento natural de esferas polidas de bronze em planos, também de bronze polido, cuja inclinação em relação à direção horizontal pudesse ser controlada. Pelo menos para pequenas inclinações do plano, o movimento era lento o suficiente para que o tempo decorrido pudesse ser medido. Verificou que, para uma dada inclinação do plano, o tempo de rolamento da esfera era proporcional à raiz quadrada da distância percorrida. Assim, para a esfera rolar uma distância de 4 m (e não 2 m) o tempo necessário era o dobro do tempo gasto para rolar uma distância de 1 m, como ilustra a Figura 1.1.

Sumarizando esse resultado experimental e colocando-o em uma linguagem mais geral, Galileu demonstrou que o tempo necessário para que a esfera, partindo do repouso, rolasse uma certa distância d é proporcional à raiz quadrada de d . Como veremos no Capítulo 3 (*Movimento Retilíneo*), é possível deduzir matematicamente que a velocidade da esfera aumenta de maneira proporcional ao tempo decorrido.

Aumentando a inclinação do plano, os tempos envolvidos no rolamento, a partir de qualquer distância do fim do mesmo, diminuíam, mas a mesma relação de proporcionalidade entre o tempo e a raiz quadrada da distância era observada. Assim, Galileu estendeu a validade dos

Galileu concluiu, por um brilhante processo de experimentação seguida de extrapolação, que o tempo de queda de um corpo é proporcional à raiz quadrada da altura percorrida. Com base nisso, deduziu matematicamente que a velocidade do corpo aumenta proporcionalmente ao tempo de percurso

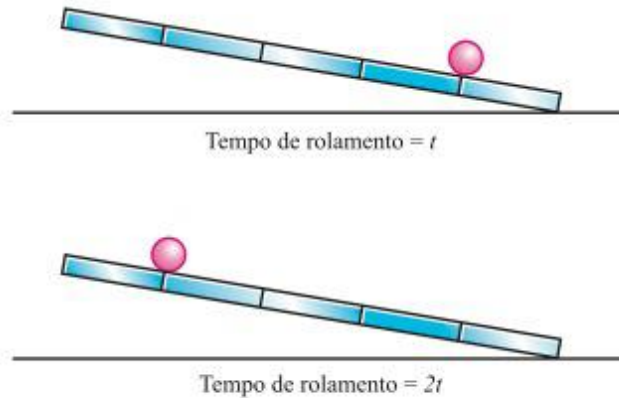


Figura 1.1

seus resultados ao caso do plano vertical para concluir que o tempo de queda de um corpo é proporcional à raiz quadrada da altura da qual o corpo cai. Com esses dados ele pôde demonstrar matematicamente que a velocidade do corpo em queda é proporcional ao tempo decorrido desde a partida.

Seção 1.5 ■ A Natureza é compreensível!

Conforme observamos anteriormente, a Natureza exhibe alguns fenômenos com regularidade óbvia, mas também muitos outros notoriamente irregulares, aparentemente caóticos (sem qualquer ordem). Ressalta-se o contraste entre o movimento do Sol buscando seu crepúsculo e o complexo movimento das nuvens, com sua confusa geração e dissolução de padrões e formas, numa evolução completamente imprevisível, exemplo do contraste entre a ordem do céu e a aparente desordem da terra, que tanto impressionou os gregos. Isso coloca em foco a questão essencial: será a Natureza compreensível? A resposta é afirmativa, pelo menos no sentido que passaremos a expor. Vejamos os fenômenos naturais como um imenso jogo em que as peças são movidas por divindades (muitos antigos gostavam de ver as coisas desse modo). Algumas cenas do jogo escapam completamente à nossa compreensão, devido à sua complexidade. Entretanto, a atenta observação das jogadas mais simples — ou a idealização das jogadas complicadas, nos moldes traçados por Galileu — leva à percepção de que o jogo tem algumas regras que nunca são violadas. Ilustraremos isso com um exemplo histórico, talvez o mais importante da história da ciência. Nosso exemplo será revisto de modo formal e detalhado nos Capítulos 6 (*Leis Fundamentais da Mecânica*) e 12 (*Gravitação*), e portanto por ora nos restringiremos a algumas referências a fatos.

Tycho Brahe registrou por décadas, e com inédita precisão, a posição diária dos cinco planetas visíveis a olho nu. **Johannes Kepler** analisou longamente esse banco de dados e sintetizou todo o seu conteúdo em três regras, as chamadas *leis de Kepler* (os cientistas chamam as regras do nosso jogo imaginário de *leis da Natureza*). As leis de Kepler descrevem as regras seguidas pelos planetas em suas órbitas em torno do Sol, sem nenhuma alusão às causas do movimento. Hoje em dia, leis desse tipo, extraídas diretamente dos fenômenos e sem fundamentação do tipo causa-efeito, são denominadas *leis fenomenológicas*. Coube a Isaac Newton descobrir as regras fundamentais do movimento e da interação entre os corpos celestes, a partir das quais não só as leis de Kepler mas todos os fenômenos então conhecidos que envolviam movimento de corpos podiam ser matematicamente deduzidos. Com base nas regras formuladas por Newton (leis da mecânica e da gravitação), o movimento dos corpos celestes pode ser previsto com tal precisão que mesmo detalhes refinados de alinhamento de corpos, tais como os envolvidos em um eclipse, podem ser calculados com precisão. Tornou-se possível não apenas prever os eclipses do Sol e da Lua para os próximos séculos, mas também recompor os momentos precisos e as circunstâncias exatas dos eclipses anteriores.

Newton descobriu as regras do movimento e da gravitação. Obviamente, a Natureza também exhibe fenômenos diversos — pelo menos aparentemente — dos fenômenos envolvidos em corpos em movimento. A luz, o calor, a eletricidade, o magnetismo são exemplos que

Leis fenomenológicas

São regras extraídas diretamente da observação dos fenômenos, sem análise de seus fundamentos

Tycho Brahe



O astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546–1601) construiu instrumentos capazes de medir a posição dos astros com precisão de um centésimo de grau, dez vezes maior que a precisão até então possível. Por mais de três décadas fez observações diárias que incluíam a posição dos cinco planetas visíveis a olho nu. O seu foi o mais precioso banco de dados astronômicos anteriores à era dos telescópios. Com base nesses dados, Kepler decifrou a órbita dos planetas.

nos ocorrem de imediato. No século XIX, houve intensa investigação sobre esses fenômenos. Nos anos 1860, *James Clerk Maxwell* completou um processo de síntese no qual todas as leis fenomenológicas que envolvam fenômenos elétricos e magnéticos resultam em quatro leis fundamentais, hoje denominadas *equações de Maxwell*. Nestas, eletricidade e magnetismo foram unificadas em uma única teoria, o *eletromagnetismo*. Explorando matematicamente seu conjunto de leis, Maxwell pôde demonstrar que a luz é um fenômeno eletromagnético, e que os fenômenos luminosos podem ser matematicamente deduzidos das suas equações. A evolução histórica do eletromagnetismo contém vários exemplos que bem ilustram a distinção entre leis fenomenológicas e leis fundamentais, dos quais citaremos somente um. Os fenômenos de reflexão e refração da luz — refração é o desvio da trajetória da luz quando passa de um meio transparente para outro, como, por exemplo, do ar para a água — apresentam regras muito bem definidas. A lei da reflexão era conhecida pelos gregos e a lei da refração foi descoberta por Willebrord Snell em 1620. Tanto a lei da reflexão quanto a lei da refração, ambas puramente fenomenológicas, podem ser deduzidas matematicamente das equações de Maxwell.

Também na segunda metade do século XIX, Maxwell (1831–1879) e Ludwig Boltzmann (1844–1907) demonstraram que os fenômenos térmicos (envolvendo calor) podem ser entendidos com base nas leis da mecânica e do eletromagnetismo, e com base na mecânica puderam fundamentar muitas leis fenomenológicas que envolviam tais fenômenos.

Portanto, a Natureza é compreensível! Segundo Einstein, este é o maior mistério da Natureza: ser compreensível. A mente humana é capaz de entender as regras fundamentais do jogo dos deuses! O enorme desenvolvimento das ciências no século XX não apresentou nada que pudesse demolir essa crença; pelo contrário, a reforçou. Três novas teorias fundamentais foram desenvolvidas para lidar com situações extremas: a *relatividade especial*, que lida com movimentos a velocidades próximas à da luz, a *mecânica quântica*, que descreve o movimento de corpos na escala atômica ou em uma escala menor, e a *relatividade geral*, que engloba a relatividade especial e a gravitação gerada por corpos de massa gigantesca. Essas três teorias são extensões das leis de Newton para a mecânica e a gravitação e, além disso, a relatividade especial evidencia a harmonia entre a mecânica e o eletromagnetismo. O fato realmente notável é: jamais foi observado nenhum fenômeno que viole as leis fundamentais da Natureza.

Mais que isso: todos os fenômenos da Natureza parecem ser consequência necessária das leis fundamentais e, *em princípio*, podem ser deduzidos a partir dessas leis. Resta explicar por que foi imposta a restrição “*em princípio*”. Reconsideremos o comportamento das nuvens, descrito em nossa cena do entardecer, ou o comportamento de uma onda que se aproxima suavemente da praia, evolui continuamente para um movimento turbulento, e finalmente se arremessa sobre a areia. Obviamente, nenhuma teoria científica nos permite descrever os detalhes de fenômenos tão complexos. Entretanto, sabemos que a matéria é constituída de átomos, e conhecemos de maneira supostamente exata as leis do movimento para os átomos. Tanto as nuvens que se movimentam no céu quanto a água que compõe o oceano são feitas de átomos, e seu movimento é portanto simplesmente o movimento coletivo de átomos.

O obstáculo aqui oferecido à compreensão é que os referidos fenômenos envolvem um número extraordinariamente grande de átomos cujos movimentos individuais são relevantes para a dinâmica do todo. Voltando ao caso dos planetas, para agendar seu movimento e os eclipses, temos que conhecer a posição e a velocidade de todos eles em um dado instante, para a partir daí calcular seu movimento no passado e no futuro. Para fazer a mesma descrição do movimento de uma onda teríamos que conhecer inicialmente a posição e a velocidade de todos os átomos (da água e do ar) em uma considerável vizinhança da cena, para então iniciar os cálculos. Isso é obviamente impossível, e mesmo que tivéssemos tal informação não teríamos

Não podemos compreender todos os fenômenos naturais, mas entendemos as regras fundamentais que comandam quase todos eles. Portanto, a Natureza pode ser compreendida

Os planetas também são compostos de átomos que se movimentam incessantemente, mas a dinâmica desses átomos não é relevante para se entender o movimento dos planetas

Johannes Kepler



Matemático e astrônomo alemão, Kepler (1571–1630) dedicou muitos anos à análise dos dados de Tycho Brahe, de quem foi assistente por alguns meses. Chegou à perfeita compreensão cinemática do movimento dos planetas, o qual sintetizou em três leis (leis de Kepler). A primeira diz que os planetas se movem em elipses (e não em círculos) das quais o Sol é um dos focos, e as outras duas referem-se à velocidade orbital dos planetas. As leis de Kepler são possivelmente a mais importante descoberta da astronomia.

como prosseguir no cálculo de tamanho número de trajetórias. A dificuldade essencial aqui, como de resto ocorre na maioria dos fenômenos complexos, é que temos partículas demais envolvidas e na prática é impossível acompanhar o movimento de todas elas.

Seção 1.6 ■ As leis da Natureza são leis de movimento

As leis fundamentais da Natureza são expressas em forma de equações matemáticas. Na formulação da sua mecânica, Newton fez a conexão causa-efeito (em outras palavras, a conexão de determinismo causal) entre o movimento e seus agentes causadores — que são forças — em forma de um tipo especial de equação matemática hoje denominado *equação de movimento*. A matemática envolvida nesse tipo de equação foi em parte inventada pelo próprio Newton, e é denominada *cálculo diferencial e integral*, ou simplesmente *cálculo*. A equação de movimento de Newton tem um caráter universal, e o que diferencia o movimento de um corpo do movimento de outro são a força que atua sobre ele (a força tem de ser incluída na equação de movimento) e uma propriedade do corpo, a sua massa, cuja definição será feita no Capítulo 6. No caso específico do movimento dos corpos celestes, a força atuante é a da gravitação, também descoberta e expressa em forma matemática por Newton.

Um fato realmente notável, revelado pela evolução posterior das ciências naturais, é que todas as leis fundamentais até hoje descobertas são equações de movimento, no mesmo espírito das leis de Newton. O eletromagnetismo, a mecânica quântica, a relatividade especial e a relatividade geral, todas são teorias formuladas em termos de equações de movimento. Portanto, as *regras fundamentais da Natureza são equações de movimento*. Neste livro, denominamos tal princípio unificador *paradigma newtoniano*. O paradigma newtoniano é possivelmente o princípio mais abrangente envolvendo as leis naturais. Richard P. Feynman (1918–1988), na primeira das suas famosas *Lectures on Physics*, imaginou uma situação em que um cataclismo estivesse na iminência de destruir todo o conhecimento científico, e formulou a interessante questão: se somente uma sentença pudesse ser passada para as gerações vindouras sobre a ciência, qual seria a melhor escolha? Sua opção foi: “*Todas as coisas são feitas de átomos — partículas minúsculas se agitando em perpétuo movimento, atraindo-se quando ligeiramente separadas, mas repelindo-se quando espremidas umas contra as outras*”. Outra opção poderia ser: *todos os fenômenos naturais decorrem de um reduzido número de leis de movimento, matematicamente descritas como equações diferenciais no espaço e tempo*. Você pode estar se sentindo confuso com expressões tais como equações diferenciais no espaço e tempo, cujo significado não lhe parece claro. Entretanto, em pouco tempo tudo poderá ser entendido e, gradativamente ao longo do curso, o paradigma newtoniano se imporá mediante a sua mente em toda a sua profundidade, clareza e beleza.

Paradigma newtoniano

Todos os fenômenos naturais decorrem de um reduzido número de leis de movimento, matematicamente descritas como equações diferenciais no espaço e tempo. Esta é talvez a mais abrangente afirmação que podemos hoje fazer sobre a Natureza

Seção 1.7 ■ O que é ciência

Esta é uma pergunta difícil, e exatamente por isso vemos acaloradas divergências sobre o caráter científico ou não de algumas formas de indagação sobre a Natureza e o ser humano. Para evitar em parte essa polêmica, limitaremos nossa análise às ciências naturais. A ciência se assenta sobre a experiência, e a experimentação desempenha dois papéis na investigação científica. O primeiro é o papel indutor na formulação das leis naturais. A investigação de um dado fenômeno geralmente começa pela realização de experiências, em condições nas quais as variáveis relevantes são controladas e reproduzíveis. Entretanto, salienta-se que, dada a ilimitada variedade de experiências imagináveis sobre qualquer objeto de estudo, qualquer investigação experimental tem de se inspirar em alguma idéia anterior do que seja relevante

observar, idéia essa nascida da intuição ou de algum conhecimento anterior sobre o fenômeno a ser investigado. Nem sempre a experimentação é possível, como ocorre na astronomia, na meteorologia etc. Nesses casos, a experiência em condições preparadas e controladas é substituída pela observação. Os resultados da experimentação e/ou da observação podem resultar na formulação de leis fenomenológicas, definidas anteriormente. Uma lei, seja fenomenológica ou não, deve naturalmente ser consistente com tudo o que foi previamente observado. Se alguma experiência ou observação contradiz a lei, esta está incorreta. A máxima "*toda regra tem exceção*" não se aplica a lei científica. Obviamente, devemos ser cautelosos ao aplicar esse tipo de teste a uma lei científica. Algumas leis só têm um significado estatístico, e portanto eventos isolados não oferecem qualquer forma de teste.

Um conjunto de leis fenomenológicas pode levar a uma *teoria científica*. Esta é mais fundamental e mais abrangente do que uma lei fenomenológica. Uma teoria científica envolve considerações ligando causas e efeitos. Novamente, o grande passo dado por Newton após a descoberta das leis fenomenológicas de Kepler é ilustrativo. Newton elaborou uma teoria na qual fica explícita a conexão entre o movimento dos planetas, as leis (universais) do movimento e a lei (universal) da gravitação. Exatamente pela sua abrangência, uma teoria deve ser capaz de prever novos fenômenos fora daqueles que a fundamentaram. Aqui se torna claro o outro papel da experimentação/observação: o de testar as previsões das teorias científicas. Uma teoria só pode ser aceita como válida enquanto todas as suas novas previsões forem confirmadas pela experiência. Uma teoria pode ser bonita ou feia, elaborada ou simples, mas nada disso é decisivo. O único teste para sua veracidade é a experiência. Portanto, a experiência serve tanto para inspirar teorias científicas como para destruí-las. Acresce ainda que nenhuma teoria jamais pode ser vista como inteiramente confirmada: uma única nova experiência pode derrubar uma teoria confirmada anteriormente por milhares de outras experiências.

Exatamente por essa razão, todo conhecimento, e toda teoria, devem ser tratados como aproximações da verdade. Voltemos mais uma vez à teoria de Newton. Suas previsões estão em acordo, com grande precisão, com todas as observações envolvendo os planetas e seus satélites, e também com o movimento de todos os objetos da experiência diária. A massa de dados concordantes com a teoria de Newton é extraordinariamente vasta. Entretanto, no limiar do século XX descobriu-se que tal teoria era inadequada para descrever o movimento de corpos a velocidades significativas comparadas à velocidade da luz. Foi então desenvolvida a teoria da relatividade especial, capaz de lidar com movimentos em tais condições extremas. Tal teoria levou a um grande número de novas previsões teóricas, e até o momento nenhuma delas entrou em conflito com os fatos experimentais.

Em termos conceituais, a teoria da relatividade é totalmente distinta da teoria newtoniana. Estas são realmente teorias distintas, com filosofias totalmente diferentes e visões essencialmente opostas sobre espaço e tempo. Isso naturalmente pede esclarecimentos sobre nossa afirmativa anterior de que o conhecimento científico é cumulativo: o aparecimento de uma teoria com conceitos tão distintos e até opostos aos conceitos de outra anterior sugere mais um processo em que o antigo é demolido e substituído pelo novo do que um processo de conhecimento cumulativo. Ocorre que a relatividade especial envolve uma ruptura parcial com a mecânica newtoniana, mas não sua demolição. Tal ruptura está relacionada exatamente com os conceitos de espaço e de tempo, e uma vez que a mecânica é a ciência do movimento, uma revolução nos conceitos de espaço e de tempo necessariamente leva a uma revolução na mecânica. Entretanto, exatamente por estar consciente de que a mecânica newtoniana tinha de ser válida nos limites em que havia sido testada, Einstein, de posse de novas idéias sobre o espaço e o tempo, exerceu seu gênio para reconstruir a mecânica de modo que, para movimentos a pequenas velocidades, ela recaísse naturalmente na mecânica de Newton. Além do mais, sem a existência prévia da mecânica newtoniana, que lhe servisse de inspiração e referência sobre o que deve ser uma teoria do movimento, e também de âncora no limite de baixas velocidades, Einstein não teria como construir a mecânica relativística. Assim, sua teoria, apesar de revolucionária no aspecto conceitual, é na verdade uma extensão da mecânica newtoniana, completamente assentada no paradigma newtoniano.

Um exemplo ilustra como as duas mecânicas levam às mesmas conclusões quando as velocidades são pequenas comparadas à velocidade da luz. A teoria de Newton diz que a

Nenhuma teoria científica pode ser considerada inteiramente confirmada pela experiência. Sempre pode aparecer uma nova experiência com resultados conflitantes com a teoria. Portanto, qualquer teoria deve ser tratada como uma aproximação da verdade, e só é válida no domínio dos fenômenos em que já foi testada

massa de um corpo tem um valor independente do seu movimento. Consideremos um caça supersônico capaz de atingir a velocidade de 3600 km/h. Pela teoria da relatividade, sua massa pode atingir acréscimos de até uma parte em 180 bilhões enquanto o avião voa a velocidade variável. Tal acréscimo é tão pequeno que não pode ser observado, e nesse caso tanto para Einstein como para Newton a massa do caça não varia com sua velocidade. Entretanto, se a velocidade é maior, maior é o erro na previsão da teoria de Newton. Por exemplo, se um elétron se mover a velocidade igual a 90% da velocidade da luz, sua massa sofrerá acréscimo de 130%. Velocidades dessa magnitude somente foram observadas no século XX, e por isso as falhas na teoria de Newton não foram antes percebidas.

Neste ponto estamos talvez preparados para responder à pergunta inicial desta seção. **Ciência** é uma descrição da Natureza capaz de fazer previsões — objetivas, explícitas e sem ambigüidade — consistentes com as observações experimentais. A experiência é não somente a fonte inspiradora mas também o juiz único e inapelável da verdade científica. Muitas formas de descrição da Natureza também incluem previsões sobre os fenômenos naturais, tais como a astrologia, a cartomancia, a numerologia, e tantas outras. Entretanto, seus praticantes nunca fazem previsões livres de ambigüidade e suficientemente explícitas, e com tal estratégia evitam a confrontação com os fatos.

Ciência

Descrição da Natureza capaz de fazer previsões — objetivas, explícitas e sem ambigüidade — consistentes com as observações experimentais

Seção 1.8 ■ O que é a física

O crescimento da ciência levou à sua divisão em várias ciências naturais que vão se desmembrando de maneira contínua: física, astronomia, química, biologia, psicologia, geologia, meteorologia etc., coisa já proposta por Aristóteles. Nessa divisão, a física se ocupa dos aspectos mais fundamentais e mais abrangentes dos fenômenos naturais. Sua expansão ocorre em três fronteiras. A primeira envolve seus fundamentos. Naturalmente, não conhecemos todas as leis fundamentais, e nem podemos dizer se algum dia isso será alcançado. A física é hoje capaz de fazer previsões confiáveis de fenômenos até a escala de 10^{-19} m (como veremos na próxima seção, $10^{-19} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 1$; há 19 dígitos após a vírgula), o que significa um bilionésimo do tamanho de um átomo. Este é o limite já atingido pela nossa exploração experimental.

Conhecemos quatro forças distintas na Natureza: a força gravitacional, a força eletromagnética e duas outras forças (nucleares) que só se manifestam em escalas abaixo de 10^{-14} m. O comportamento das quatro forças até a escala de 10^{-19} m é bem entendido e testado, exceto o comportamento da gravitação, que não foi testado experimentalmente a pequenas distâncias. Entretanto, há boas razões para crer que tais forças se modifiquem em escalas menores, provavelmente convergindo para uma única força fundamental da Natureza. (Na verdade, na escala de 10^{-19} m a força eletromagnética já se fundiu com uma das forças nucleares para criar uma única força, a *força eletrofraca*.) A escala dessa unificação e as características da força unificada são totalmente ignoradas, sendo fato porém que um grande número de físicos teóricos dedica seu tempo a conjecturas sobre essa força.

A composição da matéria, até a escala de 10^{-19} m, também está solidamente estabelecida, e muitos físicos estão convictos de que não haverá surpresas em escalas menores. Resta ver. A maior barreira à evolução da física em escala tão diminuta é a falta de suporte experimental. As experiências envolvem máquinas capazes de acelerar partículas, principalmente prótons e elétrons, até velocidades muito próximas à da luz. Os aceleradores de partículas são máquinas colossais e muito caras. Um acelerador capaz de atingir a escala de 10^{-19} m custa alguns bilhões de dólares. O custo cresce de forma geométrica com o inverso da escala de tamanho a ser atingida. O projeto para construção no Texas de um acelerador capaz de atingir a escala de 10^{-20} m foi cancelado pelo governo americano após constatar que seu custo excederia 12 bilhões de dólares. Há também barreiras tecnológicas aparentemente intransponíveis para diminuir em muito a escala atual. Exceto se ocorrer uma revolução tecnológica não imaginável no momento, jamais atingiremos a escala provável (10^{-35} m) da unificação das forças. Por outro lado, infelizmente já sabemos que, enquanto não pudermos fazer experiências bastante próximas da escala de 10^{-35} m, seremos incapazes de testar de maneira conclusiva e incontestável qualquer teoria fundamental sobre a Natureza!

O avanço da física ocorre atualmente em três fronteiras: (A) duas fronteiras envolvendo os seus fundamentos, uma voltada para o microcosmo e a outra para o macrocosmo; (B) a fronteira da complexidade, ou seja, a análise dos sistemas complexos em termos das teorias fundamentais

A segunda fronteira da física envolve a denominada *cosmologia*, ou seja, o estudo do comportamento do Universo em larga escala e de como o Universo foi criado. Larga escala aqui significa 10^{26} m ($10^{26} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$; o número tem 26 zeros), o tamanho do Universo observável. Curiosamente, um entendimento mais completo da criação do Universo depende do entendimento das leis naturais na escala da unificação das forças, ou seja, aquela escala de 10^{-35} m provavelmente inatingível experimentalmente. Isso parece altamente desestimulante, mas o cientista é um obstinado que nunca desiste. Exatamente porque as leis que regem o muito pequeno determinam a maneira como o cosmo foi criado e também que tipo de cosmo pode ter sido criado, o conhecimento do cosmo pode ajudar a decidir entre teorias alternativas sobre o muito pequeno. Nos últimos quinze anos, muitos cosmólogos e físicos de partículas (que estudam a estrutura da matéria e as forças da Natureza na escala ultramicroscópica) juntaram seus esforços tentando desvendar o mundo com base nessa visão. Atualmente é muito mais barato aumentar o alcance dos nossos telescópios para ampliar a escala de investigação do macrocosmo do que aumentar a energia dos nossos aceleradores de partículas para reduzir a escala de investigação do microcosmo. Nesse cenário, a cosmologia experimental e teórica vem passando por um processo de rápida evolução.

A terceira fronteira da física é a da complexidade. Ultimamente a expressão *sistemas complexos* tem aparecido com frequência crescente, com um sentido mais específico e mais restrito do que o sentido tradicional utilizado neste livro. A complexidade, no sentido amplo e tradicional, ocorre sempre que há muitos atores em cena. Atores aqui são as partículas. Algumas vezes, a complexidade ocorre mesmo em sistemas que contêm poucas partículas. As leis fundamentais do movimento descrevem o movimento de uma dada partícula sujeita a determinadas forças. Partícula é um corpo de dimensões desprezíveis. Por exemplo, ao analisarmos o movimento de um carro em um longo percurso podemos ignorar que o carro é um corpo extenso que contém partes. O veículo contém uma frente, uma traseira, motor, passageiros etc., mas muitas vezes podemos nos referir simplesmente ao carro, uma entidade indivisível. Em uma abordagem menos minuciosa da astronomia, podemos tratar um planeta como uma partícula.

Mas tudo isso é muito relativo. Dependendo da análise que temos em mente, um átomo não pode ser visto como partícula. O átomo tem um núcleo em torno do qual orbitam elétrons, e se quisermos entendê-lo temos que considerar todos esses detalhes. Na análise de uma reação química, um átomo se comporta como um sistema complexo. Tomemos uma molécula de oxigênio (O_2) formada pela ligação entre dois átomos de oxigênio (O). Cada átomo contém oito elétrons, e em uma análise com a precisão necessária para se entender como os dois átomos se ligam para formar a molécula, já temos complexidade para uma boa dor de cabeça. Se formos além, e quisermos entender como dezenas de átomos se combinam para formar um aminoácido, temos uma complexidade muito maior. Esses aminoácidos se combinam para formar proteínas, estas e outras moléculas se combinam para formar uma célula. Aqui já estamos falando de um corpo que contém milhares de bilhões de átomos. A vida certamente é um fenômeno de enorme complexidade.

Consideremos agora um corpo sólido, como, por exemplo, um pedaço de silício. Novamente, temos uma enorme quantidade de átomos envolvidos. Entretanto, tais átomos se combinam em um arranjo tridimensional extraordinariamente ordenado e simétrico, denominado *sólido cristalino* (isso ocorre com essencialmente todos os materiais em estado sólido), e por esse motivo o nível de complexidade do cristal se reduz o suficiente para possibilitar uma análise em termos das leis fundamentais da física. O silício é o material mais investigado em toda a Natureza. A aplicação das leis da física possibilitou um excelente entendimento das propriedades desse material. Com base nesse entendimento, foi possível desenvolver dispositivos microeletrônicos como diodos, transistores etc., baseados no silício, e depois disso combinar todos esses dispositivos em complicadíssimos microcircuitos, tais como microprocessadores, sistemas de memórias etc., e combinar toda essa complexidade para fazer um computador, cujo comportamento é (às vezes!) totalmente previsível.

Voltemos à onda quebrando na praia. Seu estudo se inclui em uma área da física denominada *hidrodinâmica*, ou *dinâmica dos fluidos*. Esse tema tem grande importância. Seu entendimento tem grandes implicações em várias indústrias, principalmente a automobilística e a

aeronáutica. Além disso, esse é um tema essencial para o desenvolvimento da meteorologia e da astrofísica. Um fluido é um sistema complexo. Seu movimento em forma não-turbulenta, tal como ocorre na onda que evolui suavemente em águas profundas, já é bem entendido. Já o movimento turbulento, que corresponde àquele estágio em que a onda quebra na praia em enorme confusão, é um desafio ainda insolúvel.

A física dos sistemas complexos tem grandes implicações em outras ciências e também enorme importância tecnológica. Por essas razões, a maioria dos físicos hoje trabalha em sistemas complexos.

Seção 1.9 ■ A física e as outras ciências

A esta altura, você já deve ter percebido que, na divisão das ciências naturais, a física ficou com a parte mais simples. Exatamente por isso, ela alcançou um nível de profundidade e de rigor na sua análise que não tem paralelo nas outras ciências. No caso dos sistemas mais simples, as previsões da física estão em concordância com os resultados experimentais com precisão melhor do que uma parte por bilhão. Ressalve-se ainda que o erro de uma parte por bilhão está na medida e não nos cálculos. Medidas mais precisas presumivelmente levariam a concordâncias ainda melhores. Conforme dissemos anteriormente, as leis realmente fundamentais da Natureza são as leis da física. Pode-se então questionar sobre o porquê da divisão das ciências. A resposta já foi em parte dada. Muitos sistemas da Natureza são tão extraordinariamente complexos que sua análise em termos das leis fundamentais é impraticável. Por exemplo, se os métodos da física são ainda incapazes de explicar um simples vírus, o que dizer sobre o entendimento de uma bactéria, um pássaro, um poeta? Em princípio, acredita-se, todos esses sistemas podem ser entendidos a partir das leis da física, mas há um abismo entre o princípio e a prática, de modo que ciências como a química, a biologia, a psicologia, desenvolveram cada uma delas seus próprios métodos, engenhosos e eficazes, de abordagem dos seus objetos de análise. A física fica com o átomo, a química com a proteína, a biologia com o vírus, e a psicologia com o poeta. Em tempo: o pássaro fica dividido entre o biólogo e o psicólogo.

Reduccionismo

Esforço que visa a explicar sistemas complexos a partir das leis fundamentais da física

O esforço para explicar sistemas complexos a partir das leis fundamentais é denominado **reduccionismo**. A ciência na qual o projeto reducionista da física mais avançou é a química. A chamada *química quântica* é uma vigorosa área da química na qual se avança rapidamente na compreensão fundamental das propriedades das moléculas. A evolução da capacidade dos computadores tem permitido a realização de cálculos das propriedades de moléculas cada vez mais complexas, com ótima concordância com as experiências. Com isso, a química quântica é hoje vista essencialmente como um ramo da física. Ilustrativo dessa realidade é o fato de que o físico Walter Kohn recebeu o Prêmio Nobel de Química de 1998 pela sua contribuição aos métodos da química quântica.

O projeto reducionista deve ser entretanto visto como uma utopia que só será alcançada em escala limitada e de maneira bastante lenta. Ressalte-se ainda que o projeto reducionista da física é reproduzido em todas as ciências naturais, em uma estrutura hierárquica. Por exemplo, a física é mais fundamental que a química, que é mais fundamental que a biologia, que é mais fundamental que a psicologia. A química pretende explicar a biologia, a biologia pretende explicar a psicologia. Assim, o reduccionismo pode ser visto como um programa no qual cada ciência seria explicada em termos de outra mais fundamental.

A física tem ainda outras formas de conexões com outras ciências e com a engenharia. O avanço da física gera novas tecnologias, que por sua vez possibilitam novos experimentos e novos avanços da física, e assim por diante. A exploração de novas descobertas da física em outras ciências é também muito intensa. No caso da medicina, podemos mencionar a radiografia, as tomografias por raios X, ultra-som e ressonância magnética, o ecocardiograma, e a medicina nuclear. Pelo desenvolvimento da tomografia por ressonância magnética, mais conhecida por imagem por ressonância magnética, o físico Peter Mansfield e o químico Paul Lauterbur ganharam o Prêmio Nobel de Medicina de 2003. Na química, os exemplos são incontáveis. Um exemplo recente: o desenvolvimento dos *lasers* de pulsos ultracurtos nos anos 1980 possibilitou o estudo da dinâmica das reações

químicas, e com essa pesquisa o químico Ahmed Zewail conquistou o Prêmio Nobel de Química de 1999.

Cada vez mais também se utilizam os métodos da física em outras ciências. Os termos físico-química, biofísica, geofísica e astrofísica, há muito incorporados ao vocabulário científico, são demonstrações dessa disseminação de métodos.

Seção 1.10 ■ Modelo científico

Não há qualquer juízo de valor embutido no conceito de estrutura hierárquica da ciência. A hierarquia diz o que é mais fundamental e o que é menos fundamental e portanto em princípio pode ser reduzido ao fundamental. Não diz que o mais fundamental é mais importante. Por exemplo, importantes descobertas na medicina são muito mais relevantes para o homem do que novos avanços no entendimento do microcosmo

O termo *modelo* é empregado na ciência com dois significados.

Em um deles, modelo é algo intermediário entre leis fenomenológicas e teoria científica. No outro, modelo é uma idealização simplificada de um sistema complexo, cujo comportamento supostamente reproduz na essência o do sistema complexo cujo entendimento é almejado

Anteriormente, falamos sobre *leis fenomenológicas* e *teorias científicas*, as últimas muito mais fundamentais e mais abrangentes do que as primeiras. Entre esses dois estágios do avanço do conhecimento, há um estágio intermediário, o *modelo científico*, ou simplesmente *modelo*. Adiamos sua conceituação para este momento, após falarmos em reducionismo e estrutura hierárquica da ciência, porque agora dispomos de algumas noções úteis na discussão sobre modelos.

O termo *modelo* é usado com dois significados distintos na ciência. Em um deles, modelo é algo intermediário entre fenômeno e fundamento, ou melhor, entre lei fenomenológica e teoria fundamental. Utilizaremos os fenômenos da reflexão e da refração da luz para ilustrar esse conceito de modelo. Como já vimos, as leis da reflexão e da refração foram durante muito tempo leis fenomenológicas, regras extraídas da observação dos fenômenos para as quais ainda não tínhamos explicação. No século XVI Christiaan Huygens (1629–1695) desenvolveu um modelo para a propagação da luz, do qual as leis da refração e da reflexão puderam ser deduzidas.

Huygens postulou que a luz é um fenômeno ondulatório, semelhante às ondas do mar. Mesmo sem avançar explicações sobre o que compunha a onda luminosa, formulou um modelo para a sua propagação. O modelo de Huygens foi capaz de explicar as leis da reflexão e da refração, que podem ser deduzidas matematicamente a partir dele. No início do século XIX, foram descobertos novos fenômenos luminosos, denominados *interferência* e *difração*, cujas leis fenomenológicas também puderam ser deduzidas matematicamente a partir do modelo de Huygens. Portanto, o modelo foi uma importante síntese capaz de englobar vários fenômenos luminosos e as leis fenomenológicas descobertas para esses fenômenos, em uma descrição mais abrangente.

Todavia, o modelo de Huygens ainda não era uma teoria fundamental da luz. Nem todos os fenômenos luminosos podiam ser entendidos e, acima de tudo, as relações entre causas e efeitos não estavam estabelecidas. A teoria fundamental veio com a teoria eletromagnética de Maxwell, uma síntese extraordinária: a luz é um fenômeno eletromagnético, e não somente os fenômenos luminosos, mas também todos os outros fenômenos eletromagnéticos, podem ser matematicamente deduzidos da teoria de Maxwell. As relações causa-efeito ficam perfeitamente claras na teoria eletromagnética, e com isso ficou evidente como gerar outras ondas eletromagnéticas, tais como ondas de rádio e microondas.

Nossa discussão tornou clara uma outra estrutura hierárquica na ciência: uma lei fenomenológica explica um dado tipo de fenômeno, um modelo engloba alguns fenômenos e explica suas respectivas leis fenomenológicas, e finalmente uma teoria sintetiza toda uma classe de fenômenos em uma estrutura lógica dentro da qual as relações causa-efeito são esclarecidas e todos os fenômenos dessa classe podem, pelo menos em princípio, ser preditos com precisão. Resta saber se essa hierarquia é *finita* ou *infinita*.

Para prosseguir, temos que esclarecer o que queremos dizer com finito ou infinito. Já foi dito que a física é constituída de algumas poucas teorias fundamentais. Dois cenários são possíveis para a evolução futura dessa ciência. Em um delas, novas sínteses irão englobar diferentes teorias em uma mais abrangente, mas ao mesmo tempo a ampliação da investigação para escalas cada vez menores e também para escalas cada vez maiores irá revelar novos fenômenos que não podem ser explicados pelas teorias vigentes. Dessa maneira, as velhas teorias serão sempre sintetizadas em novas teorias mais fundamentais, mas sempre irão aparecer novos fenômenos que demandam novas teorias, e assim para sempre. Se pudermos prever algo com base na história, este é o cenário mais provável. Até agora, a evolução da ciência seguiu essa dinâmica. Entretanto, sempre há os otimistas, e a eles costuma pertencer o reino do mundo.

Dois cenários são possíveis na evolução da física fundamental. No primeiro, as teorias vigentes serão sempre sintetizadas em teorias mais abrangentes e fundamentais, mas ao mesmo tempo novas descobertas experimentais sempre demandarão a criação de novas teorias, *ad infinitum*. No outro, uma teoria unificada e final acabará decifrando o mecanismo de todos os fenômenos da Natureza.

Os otimistas vêem outro cenário em que esse processo evolutivo levará a uma teoria final, totalmente abrangente, capaz de explicar em princípio todos os fenômenos da Natureza. Na verdade, nos últimos vinte anos esses otimistas ficaram tão confiantes com algumas inovações conceituais que já criaram até um nome para essa grande síntese: TOE (do inglês *theory of everything*). A regra única e final do jogo dos deuses já estaria quase ao alcance do homem!

Conforme dissemos, usa-se na ciência o termo modelo também com outro significado, que passaremos a discutir. A maioria dos fenômenos naturais é demasiadamente complexa para que possamos analisá-los em detalhe a partir das leis fundamentais. Isso faz com que os cientistas substituam os *sistemas* (sistema é qualquer parte da Natureza distinguida para fins de análise) que estejam estudando por outro imaginário e mais simples, e que supostamente apresenta as propriedades essenciais do sistema real. O *sistema idealizado* é denominado *modelo*. Na verdade, quase sempre o cientista está investigando um modelo e não um sistema real. *Exemplos*: em astronomia, os planetas são tratados como corpos homogêneos, e algumas vezes até mesmo como simples partículas. Em fisiologia, frequentemente o coração é visto como uma bomba d'água. Grande parte da arte do cientista está em criar modelos que, ao mesmo tempo, possibilitem análise e reproduzam com alguma fidelidade os fenômenos do sistema complexo cujo comportamento se pretende entender.





Medidas

Seção 2.1 ■	Quantificação de grandezas,	20
Seção 2.2 ■	Grandezas fundamentais e grandezas derivadas,	21
Seção 2.3 ■	Análise dimensional,	22
Seção 2.4 ■	Definição operacional de uma grandeza,	23
Seção 2.5 ■	Notação exponencial,	24
Seção 2.6 ■	Ordem de grandeza,	24
Seção 2.7 ■	Erros e algarismos significativos,	27
Seção 2.8 ■	Operações com números que contêm erros,	28
Seção 2.9 ■	Estimativas,	30
	Problemas,	34
	Respostas dos exercícios,	35
	Respostas dos problemas,	35

Seção 2.1 ■ Quantificação de grandezas

A física lida com grandezas, ou seja, coisas que podem ser quantificadas. Quantificar uma grandeza significa atribuir-lhe um valor com base no qual possamos dizer se essa grandeza é menor, igual ou maior que outra. Obviamente, relações do tipo menor, igual ou maior só se aplicam entre grandezas da mesma natureza. Por exemplo, não há como fazer comparação entre um dado comprimento e um intervalo de tempo. Podemos dizer que um comprimento é maior que outro, mas não que é maior que um certo intervalo de tempo. As relações entre grandezas de igual natureza podem ser expressas em forma matemática — ou seja, podemos dizer que uma grandeza é x vezes (10; 5,25; ou 0,31 vezes) o valor da outra. Isso sugere imediatamente que as grandezas sejam quantificadas em termos de uma grandeza padrão da sua natureza, previamente escolhida como unidade. Como exemplo, tomemos o comprimento (ou, de modo equivalente, a distância), provavelmente a primeira grandeza a ser objeto de medida e quantificação. Muito cedo a humanidade precisou quantificar as distâncias envolvidas em seus itinerários, e para isso adotou unidades como estádio, milha, milha marítima, légua, jornada e outras. Essas unidades itinerárias eram definidas de maneira imprecisa e às vezes variável de um local para outro. A milha romana valia 1000 passos. Mais tarde, para medição de campos de cultivo agrícola, de obras arquitetônicas e artefatos diversos, foram surgindo unidades menores e mais precisas, em enorme variedade: polegada (0,0254 m), palmo (0,220 m), pé (0,3048 m), cúbito (0,45 m), jarda (0,9144 m), metro (1 m) vara (1,10 m), braça (1,80 m ou 2,20 m) etc.

Outras grandezas relacionadas com o espaço são área e volume. Ambas têm natureza distinta do comprimento (não se pode dizer que uma dada área é tantas vezes maior que um dado comprimento). Entretanto, é claro que, uma vez escolhida a unidade de comprimento, as unidades de área e de volume ficam automaticamente definidas: 1 metro quadrado (m^2) é a área de um quadrado cujos lados têm comprimento de 1 metro, e 1 metro cúbico (m^3) é o volume de um cubo cujas arestas têm comprimento de 1 m. Dizemos que as unidades de área e de volume são derivadas da unidade de comprimento.

Duas outras grandezas de natureza distinta do comprimento, que têm sido medidas desde a Antiguidade, são o tempo (duração) e a massa. O tempo apresenta uma unidade natural muito óbvia. O dia ou frações do dia foram amplamente adotados como unidade de tempo, e os chamados relógios solares podem ser encontrados nas mais diversas ruínas de civilizações antigas. A massa de um corpo sempre foi associada ao seu peso, e muito freqüentemente confundida com ele. Como veremos mais adiante, o peso de um corpo, em um determinado local, é proporcional à sua massa, de modo que a medida da massa através da medida do peso acaba sendo um procedimento correto: se uma melancia pesa 8,5 vezes mais que um cilindro de latão escolhido como unidade de peso, sua massa também será 8,5 vezes maior que a do cilindro.

O desenvolvimento da ciência e da tecnologia passou a requerer unidades de medidas de grande precisão, e o primeiro sistema de unidades assim criado, em 1792, pela Academia de Ciências da França, foi o chamado **sistema métrico** ou **sistema MKS** (de metro-quilograma-segundo). O **metro**, cujo símbolo ou abreviação é m, foi definido pelo comprimento de uma barra de platina iridiada, construída de tal modo que supostamente a distância da linha do equador a qualquer dos pólos da Terra mediria 10 000 000 m. O **quilograma**, cujo símbolo é kg, foi definido pela massa de um cilindro de platina iridiada; supostamente o quilograma equivaleria à massa de 1 litro (1 milésimo de metro cúbico) de água purificada à temperatura de 4°C. O **segundo** foi definido como sendo 1/86400 do dia solar médio. O sistema métrico acabou sendo adotado em muitos países, dele então resultando o **Sistema Internacional**, abreviado por **SI** (do francês *Système International*). No SI, o metro e o segundo foram redefinidos de modo que seus padrões pudessem ser encontrados na própria Natureza. Assim:

- o segundo é a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação gerada pela transição entre os dois níveis hiperfinos do estado eletrônico fundamental do césio 133;
- o metro é a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299 792 458 segundo;
- o quilograma é a massa de um cilindro de platina iridiada guardado em Sèvres, França.

Sistema métrico ou sistema MKS, foi o primeiro sistema de unidades de grandezas físicas, criado em 1792 pela Academia de Ciências da França. Posteriormente, foi adotado, com aperfeiçoamentos, por muitos países e denominado Sistema Internacional (SI)

Seção 2.2 ■ Grandezas fundamentais e grandezas derivadas

Qualquer grandeza física pode ser quantificada em termos de comprimento, massa e tempo. Ao estudarmos a termodinâmica, porém, esta afirmação será reconsiderada, como pode ser visto em *Física Básica/Gravitação, Fluidos, Ondas e Termodinâmica*

Existem na física grandezas de natureza muito variada, como, por exemplo, força, pressão, carga elétrica, corrente elétrica, energia, potência etc. Entretanto, qualquer grandeza física pode ser quantificada em termos de comprimento, tempo e massa. A natureza de uma grandeza é também denominada sua *dimensão*, e há uma simbologia para expressar a dimensão de uma grandeza. Para expressar as dimensões de comprimento, tempo e massa empregamos os símbolos $[L]$, $[T]$ e $[M]$, respectivamente. Consideremos, por exemplo, a velocidade, uma grandeza que expressa distância percorrida por unidade de tempo. Nesse caso, a dimensão de velocidade é

$$[v] = \frac{[L]}{[T]}, \quad (2.1)$$

Portanto, a unidade de velocidade no SI é m/s. Consideremos agora a grandeza força, cuja dimensão é expressa por $[F]$. Como veremos em mais detalhe no Capítulo 6 (*Leis Fundamentais da Mecânica*), uma força F aplicada a um corpo de massa m imprime ao corpo uma aceleração a dada pela lei

$$F = ma. \quad (2.2)$$

Como aceleração é variação de velocidade por unidade de tempo, sua dimensão será

$$[a] = \frac{[v]}{[T]} = \frac{[L]}{[T^2]}. \quad (2.3)$$

Pelas Equações 2.2 e 2.3, concluímos que

$$[F] = [M][a] = [M] \frac{[L]}{[T^2]}. \quad (2.4)$$

No SI, a unidade de força é o newton, cujo símbolo é N. Pela Equação 2.4 concluímos que

$$N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}. \quad (2.5)$$

Consideremos a grandeza pressão, que exprime força por unidade de área. Vê-se logo que

$$[p] = \frac{[F]}{[L^2]}, \quad (2.6)$$

e considerando a Equação 2.4 podemos escrever

$$[p] = \frac{[M][L]}{[T^2][L^2]} = \frac{[M]}{[L][T^2]}. \quad (2.7)$$

No SI, a unidade de pressão é o pascal, de símbolo Pa. Portanto, 1 Pa vale 1 N/m². Por outro lado, considerando a Equação 2.7, podemos ver que

$$\text{Pa} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}.$$

Energia é uma grandeza cuja dimensão é

$$[E] = [F][L]. \quad (2.8)$$

Entretanto, considerando a Equação 2.4, vemos que

$$[E] = [M] \frac{[L]}{[T^2]} [L] = [M] \frac{[L^2]}{[T^2]}. \quad (2.9)$$

Grandezas fundamentais são aquelas em termos das quais todas as outras grandezas físicas podem ser quantificadas. Essas grandezas são comprimento, tempo e massa

Metrologia é a ciência e a técnica da medida

Grandezas básicas são aquelas para as quais padrões de unidade são definidos em um dado sistema de unidades de medidas. As grandezas básicas do SI estão mostradas na Tabela 2.1

No SI, a unidade de energia é o joule cujo símbolo é J. Vê-se imediatamente que $J = N \cdot m$.

Até aqui, nossos exemplos envolveram somente grandezas usadas na mecânica. Ao longo deste curso você tomará contato com grandezas de natureza diversa da natureza daquelas incluídas no âmbito da mecânica, tais como carga elétrica, corrente elétrica, intensidade luminosa e muitas outras. Entretanto, verá que qualquer grandeza física pode ser quantificada em termos de comprimento, tempo e massa. Essas são as **grandezas fundamentais** da Natureza, e todas as outras podem ser quantificadas em termos das suas unidades. Esse é um fato extraordinário e de enorme importância. Apesar disso, o SI inclui como padrões básicos outras unidades além do metro, do segundo e do quilograma. Isso decorre de peculiaridades da **metrologia**, que é a ciência e a técnica da medida. Muitas vezes é tecnicamente muito complicado realizar medidas de uma dada grandeza a partir dos padrões de comprimento, tempo e massa. Por isso, visando a aprimorar a metrologia, o SI (antigo sistema MKS) adotou mais quatro **grandezas básicas** e para elas definiu unidades independentes. As sete grandezas básicas do SI e suas unidades são mostradas na Tabela 2.1. No Apêndice A (*Sistema Internacional de Unidades*), estão listadas as unidades básicas do SI e também as unidades derivadas relevantes para a física.

■ Tabela 2.1

Grandezas básicas no SI, suas unidades e seus símbolos.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Massa	quilograma	kg
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Intensidade luminosa	candela	cd
Quantidade de substância	mole	mol

Seção 2.3 ■ Análise dimensional

Uma equação é **dimensionalmente homogênea** quando todos os seus termos têm a mesma dimensão

Como vimos, relações de igualdade ou desigualdade entre grandezas de naturezas distintas não têm significado. Não faz sentido, por exemplo, dizer que a massa de um carro é o dobro do seu comprimento. Por isso, as equações envolvidas na física e em outras ciências têm de ser **dimensionalmente homogêneas**, ou seja, em uma equação do tipo

$$A + B + C = D \quad (2.10)$$

todas as grandezas A , B , C e D (ou seja, os termos da equação) têm de ter igual natureza. Para ilustração, consideremos o peso de um corpo. O peso é a força com a qual a Terra atrai o corpo, e é proporcional à sua massa. Essa relação de proporcionalidade pode ser escrita na forma

$$P = mg, \quad (2.11)$$

onde g é a constante de proporcionalidade. Considerando-se que P é uma força, a homogeneidade dimensional desta equação implica que

$$[F] = [M] \times [g]. \quad (2.12)$$

Considerando a Equação 2.4, podemos escrever

$$[g] = \frac{[F]}{[M]} = [M] \frac{[L]}{[T^2]} \frac{1}{[M]} = \frac{[L]}{[T^2]}. \quad (2.13)$$

A **análise dimensional** é a averiguação da homogeneidade dimensional de uma equação

Vemos então que g tem dimensão de aceleração. Com efeito, g é a aceleração da gravidade, que em um dado local tem valor fixo.

A **análise dimensional** consiste na averiguação de que uma dada equação seja dimensionalmente homogênea ou não, e é útil em várias circunstâncias. Por exemplo, se uma equação não for dimensionalmente homogênea podemos concluir com certeza que ela é incorreta. Por isso, após concluir um cálculo que resulta em uma fórmula (equação) é sempre aconselhável averiguar se a equação é dimensionalmente homogênea. Se for homogênea, não podemos dizer se a fórmula é correta; mas, se não for, com certeza a fórmula é incorreta. Como exemplo, submetamos a fórmula $h = v_0 + \frac{1}{2} g t^2$, que supostamente exprimiria a altura h percorrida por um corpo que cai livremente, em um tempo t de queda, à velocidade inicial v_0 . Temos:

$$[L] = \frac{[L]}{[T]} + \frac{[L]}{[T^2]} [T^2]. \quad (2.14)$$

A equação não passa pelo teste da homogeneidade dimensional, e portanto está incorreta. Pode-se verificar que a fórmula $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ passa pelo teste.

Exercícios

E 2.1 Mostre que $[p] = \frac{[E]}{[V]}$ e $[E] = [M] \times [v^2]$.

E 2.2 Mostre que a fórmula que exprime o período T de um pêndulo simples em termos do seu comprimento l e da aceleração da gravidade g , expressa por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, é dimensionalmente homogênea.

E 2.3 A densidade ρ de um material é por definição sua massa por unidade de volume. Pascal descobriu que a pressão da água em um lago varia com a profundidade h segundo a lei $p = p_0 + \rho gh$ sendo p_0 a pressão atmosférica e g a aceleração da gravidade. Submeta a lei de Pascal ao teste da homogeneidade dimensional.

Seção 2.4 ■ Definição operacional de uma grandeza

Definição operacional de uma grandeza é aquela que contém as operações pelas quais a grandeza possa ser quantificada

Como uma grandeza é uma entidade quantificável, sua definição tem necessariamente que conter as operações com as quais ela possa ser quantificada. Em outras palavras, o modo de quantificação da grandeza já tem de estar contido na sua definição. Por exemplo, a grandeza *velocidade* é, por definição, *distância percorrida por unidade de tempo*; a grandeza *aceleração* é, por definição, *taxa de variação da velocidade com o tempo*. A definição de uma grandeza que contém o seu modo de quantificação denomina-se **definição operacional**. No âmbito da física, para que uma entidade possa ser qualificada como grandeza é necessário que possamos dar a essa entidade uma definição operacional. Consideremos, por exemplo, o conceito de beleza. No cotidiano é comum dizer-se que uma flor é mais bela que outra, o que, de certa maneira, significa que sua beleza é maior que a da outra. Entretanto, como não sabemos dar uma definição operacional de beleza, não podemos qualificá-la como grandeza. Exatamente pela ausência de um método operacional de quantificação de beleza, mais belo ou menos belo são relações meramente subjetivas, dependentes de quem avalia. Na física aparecem entidades, atributos ou conceitos que não são quantificáveis, mas nenhum deles é considerado grandeza.

Seção 2.5 ■ Notação exponencial

A física trabalha com números que podem ser muito pequenos ou muito grandes. Isto decorre do fato de a física abordar sistemas desde a escala das partículas subatômicas até a escala do Universo. Além disso, um corpo macroscópico tem um número muito grande de átomos. Por exemplo, um grama de água contém 33 427 800 000 000 000 000 000 moléculas. Esse é um número inconveniente para se registrar e manipular. Observe que o número

contém 17 zeros. Podemos eliminá-los escrevendo o número na forma $334\,278 \times 10^{17}$. Cada unidade no expoente do número 10, em 10^{17} , significa um zero adicionado ao número. Essa *notação exponencial* torna mais prática a manipulação dos grandes números. Na verdade, os cientistas costumam usar a notação exponencial de modo que o fator multiplicando a potência de 10 esteja entre 1 e 10. Neste caso, o número de moléculas em um grama de água fica escrito na forma

$$N = 3,342\,78 \times 10^{22}. \quad (2.15)$$

De fato, cada avanço de um dígito na vírgula no número na Equação 2.15 equivale a multiplicar o número por 10. Deslocar a vírgula de cinco dígitos equivale a multiplicar o número por 10^5 , e levando em conta o fator 10^{17} já existente acabamos com o fator 10^{22} , que é igual a $10^5 \times 10^{17}$.

A notação exponencial também é usada para exprimir números muito pequenos. No capítulo anterior, escrevemos o número 10^{-19} . Seu significado é

$$10^{-19} = \frac{1}{10^{19}} = 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,1. \quad (2.16)$$

Em algumas situações, a notação exponencial não é simplesmente uma questão de conveniência. O matemático *Roger Penrose* estimou (1989) a probabilidade de o estado inicial do Universo ter sido acidental e encontrou o número

$$P = 10^{-(10^{123})}. \quad (2.17)$$

Veja que o expoente de 10 no número P é o número -10^{123} . Portanto, o número P é algo da forma

$$P = 0,000\dots 1, \quad (2.18)$$

sendo que o número de zeros entre a vírgula e o dígito 1 é 10^{123} . Ou seja, o número de zeros no número estimado por Penrose é muito maior que o número de átomos contidos no Universo. Certamente, Penrose não poderia escrever seu número sem a notação exponencial!

Exercício

E 2.4 Exprima na notação exponencial os seguintes números:

(A) $10!$; (B) $(10!)^{-1}$; (C) e^{-6}

Seção 2.6 ■ Ordem de grandeza

Na notação exponencial, o número N tem a forma $N = f \times 10^n$, na qual $1 \leq f \leq 10$. Uma vez que o número f pode ser expresso na forma

$$f = 10^{\log f}, \quad (2.19)$$

na qual $\log$ indica o logaritmo na base 10, podemos reescrever N na forma

$$N = 10^{\log f} \times 10^n = 10^{n+\log f}. \quad (2.20)$$

A ordem de grandeza (OG) de N é, por definição, a potência de 10 mais próxima de N . Quando $\log f < 0,5$, a OG será 10^n , e quando $\log f \geq 0,5$ a OG será 10^{n+1} . Considerando-se que $0,5 = \log(3,16)$, a *ordem de grandeza* de N é definida da seguinte maneira:

quando $f < 3,16$, a ordem de grandeza de N é 10^n ;
quando $f > 3,16$, a ordem de grandeza de N é 10^{n+1} .

E-E Exercício-exemplo 2.1

■ Calcule a ordem de grandeza dos números:

(A) $N_1 = 0,004$; (B) $N_2 = 4000$; (C) $N_3 = 2,5 \times 10^{15}$.

■ Solução

(A) $N_1 = 4 \times 10^{-3}$, portanto, OG de N_1 é 10^{-2} ;

(B) $N_2 = 4 \times 10^3$, portanto, OG de N_2 é 10^4 ;

(C) OG de N_3 é 10^{15}

A ordem de grandeza do número N expresso pela Equação 2.15 é 10^{23} . As Tabelas 2.2, 2.3 e 2.4 dão a ordem de grandeza de alguns números relevantes.

■ Tabela 2.2

Alguns comprimentos.

Comprimentos	Metros
Menor distância conceitual na física atual, denominada comprimento de Planck	10^{-35}
Menor dimensão já pesquisada	10^{-19}
Dimensão do núcleo atômico	10^{-15}
Dimensão do átomo	10^{-10}
Dimensão de um vírus	10^{-7}
Dimensão de uma bactéria	10^{-5}
Comprimento de onda da luz visível	10^{-6}
Altura do homem	10^0
Diâmetro da Terra	10^7
Distância até o Sol	10^{11}
Distância até a estrela mais próxima	10^{16}
Dimensão da Via Láctea	10^{21}
Distância até Andrômeda	10^{22}
Dimensão do Universo	10^{26}

■ Tabela 2.3

Alguns intervalos de tempo.

Tempos	Segundos
Menor tempo conceitual na física atual, denominado tempo de Planck	10^{-43}
Tempo para a luz atravessar o núcleo	10^{-23}
Período de oscilação da luz visível	10^{-15}
Período de oscilação de um rádio FM	10^{-8}
Período do motor de um carro veloz	10^{-2}
Período do batimento cardíaco	10^0
Duração do dia	10^5

■ **Tabela 2.3** (continuação)

Alguns intervalos de tempo.

Duração do ano	10^7
Duração da vida humana	10^9
Desde o surgimento da escrita	10^{11}
Desde o surgimento do homem	10^{13}
Idade da Terra	10^{17}
Idade do Universo	10^{18}

■ **Tabela 2.4**

Algumas massas.

Massas	Quilogramas
Massa do elétron	10^{-30}
Massa do próton	10^{-27}
Massa de um vírus	10^{-21}
Massa de uma bactéria	10^{-12}
Massa de uma pulga	10^{-7}
Massa do homem	10^2
Pão de Açúcar (pequena montanha)	10^{10}
Massa da atmosfera	10^{19}
Massa dos oceanos	10^{21}
Massa da Terra	10^{25}
Massa do Sol	10^{30}
Massa da Via Láctea	10^{41} a 10^{42}
Massa do Universo	10^{53} a 10^{54}

O SI adotou alguns prefixos para indicar fatores em potências de 10 e símbolos especiais para designá-los. A Tabela 2.5 mostra esses prefixos e seus símbolos.

■ **Tabela 2.5**

Prefixos adotados no SI.

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mili	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	quilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^1	deca	da	10^{-18}	atto	a

Alguns exemplos de uso de prefixos do SI

O pulso de luz mais curto gerado até hoje (2006) tem duração de 6×10^{-15} segundos, o que pode ser escrito na forma 6 fentossegundos, ou 6 fs.

A Usina de Itaipu foi projetada para gerar energia elétrica a uma potência de $1,26 \times 10^{10}$ watts, o que pode ser escrito na forma 12,6 gigawatts, ou 12,6 GW.

Exercícios

E 2.5 Quantos tempos de Planck já decorreram desde a criação do Universo?

E 2.6 Quantos prótons contém o Sol?

E 2.7 Quantos vírus pesa um homem?

E 2.8 O alqueirão, unidade de área de terra usada em algumas regiões do Brasil, é a área de um quadrado cujos lados medem 100 braças de 2,20 m, e um hectare é a área de um quadrado cujos lados medem 100 m. Quantos hectares estão contidos em um alqueirão? Quantos alqueirões estão contidos em um hectare?

E 2.9 Use a definição do metro para obter a velocidade da luz no vácuo.

E 2.10 Um ano-luz (al) é a distância percorrida pela luz em um ano. (A) Quanto vale um ano-luz, em metros? (B) Quanto vale um femtômetro (fm) em anos-luz?

E 2.11 A estrela mais próxima (*Proxima Centauri*) dista 4 anos-luz de nós. Quanto tempo uma nave, movendo-se a 40 mil km/h, gastaria para ir até *Proxima Centauri*?

E 2.12 Dê a ordem de grandeza dos números resultantes das operações

(A) $(2,3 \times 10^{-8}) \times (3,4 \times 10^5)$; (B) $(2,3 \times 10^{-8}) \div (3,4 \times 10^5)$

Seção 2.7 ■ Erros e algarismos significativos

Toda mensuração envolve algum erro. As grandezas calculadas também contêm erros, sejam decorrentes das medidas usadas para o cálculo ou da imprecisão do próprio cálculo. Portanto, ao se expressar o valor de uma grandeza é conveniente dar uma idéia do erro envolvido. Às vezes o erro é expresso de maneira explícita. Por exemplo, a massa do elétron é

$$m = (9,109\,3897 \pm 0,000\,0054) \times 10^{-31} \text{ kg.} \quad (2.21)$$

Isto quer dizer que os dois últimos dígitos do número 9,109 3897 não são confiáveis, e o número que antecede o fator 10^{-31} está entre 9,109 3843 e 9,109 3951. Frequentemente, o valor da grandeza e de seu erro são expressos em uma forma mais compacta. Por exemplo, podemos expressar a massa do elétron na forma

$$m = 9,109\,3897\,(54) \times 10^{-31} \text{ kg.} \quad (2.22)$$

Nem sempre se é tão explícito na indicação do erro de uma grandeza. Uma vez que os dois últimos algarismos no valor da massa do elétron são duvidosos, é frequente fazer-se algum tipo de arredondamento no seu valor e expressá-lo na forma

$$m = 9,109\,39 \times 10^{-31} \text{ kg.} \quad (2.23)$$

Quando uma grandeza é expressa na forma da Equação 2.23, fica implícito que o último dígito é duvidoso, havendo geralmente erro de $\pm 0,5$ em seu valor. Os seis algarismos da massa do elétron na Equação 2.23 são denominados *algarismos significativos*. O último dígito 9 é significativo, apesar de poder estar sujeito a erro.

Alguns pontos merecem ser comentados sobre a expressão de grandezas. Deve-se notar que expressões como 0,3 m e 0,300 m têm significados distintos, pois exprimem um dado

comprimento com diferentes graus de precisão. Além disso, nem sempre o número de algarismos significativos de um número corresponde ao número de dígitos com que é expresso. Por exemplo, o número 0,0025 tem somente dois algarismos significativos, os dígitos 2 e 5. Isto fica claro quando se nota que ele pode ser expresso na forma $2,5 \times 10^{-3}$.

Seção 2.8 ■ Operações com números que contêm erros

A análise rigorosa das operações com números que contêm erros envolve uma área da matemática denominada *teoria dos erros*. Qualquer incursão nessa área está fora de nossas intenções. Nossa meta é simplesmente estabelecer algumas regras simples que, mesmo sendo aproximações da teoria dos erros, podem evitar que sejamos muito errados ao lidar com erros.

2.8.1 Adição e subtração

Consideremos a soma (e subtração) de cinco números em que o erro está explícito:

$$S = (2,352 \pm 0,015) + (-1,345 \pm 0,015) - (0,322 \pm 0,015) + (2,357 \pm 0,015) + (-1,105 \pm 0,015)$$

Considerando os erros das cinco parcelas, teremos

$$S = 1,937 \pm 0,015 \pm 0,015 \pm 0,015 \pm 0,015 \pm 0,015 = 1,937 \pm \Delta S.$$

Temos agora que decidir sobre o erro ΔS embutido na soma. Observe que todos os números apresentam o mesmo erro. Isso pode acontecer, por exemplo, quando são todos provenientes de medidas com um mesmo instrumento (balança, um multímetro etc.) e uma mesma escala cujo erro em uma medida é $\pm 0,015$. O erro em uma dada medida pode ser qualquer coisa entre $-0,015$ e $+0,015$, mas não se pode saber se ele vale $+0,010$, $+0,012$ ou $-0,005$. Na pior das hipóteses, todas as parcelas estariam com o erro máximo para cima (ou para baixo), e a soma teria então o erro de $5 \times 0,015 = 0,075$ para cima (ou para baixo). Ou seja, na pior das hipóteses, a soma daria $S = 1,937 \pm 0,075$. Essa é uma maneira muito pessimista de ver as coisas. O problema deve ser visto segundo as leis da probabilidade, e a estimativa correta do erro é

$$\Delta S = \sqrt{5 \times (0,015)^2} = \sqrt{5} \times 0,015 = 0,034, \quad (2.24)$$

e portanto a soma dará

$$S = 1,937 \pm 0,034. \quad (2.25)$$

Consideremos agora a soma geral

$$S = \sum_{i=1}^N (x_i \pm \Delta x_i). \quad (2.26)$$

A forma correta de escrever o resultado é

$$S = \sum_{i=1}^N x_i \pm \sqrt{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}. \quad (2.27)$$

Deve-se observar que a Equação 2.24 é um caso particular da regra geral, expressa pela Equação 2.27, para o caso particular em que $N = 5$ e todos os Δx_i valem 0,015. Deve-se também notar que na Equação 2.27 não há qualquer exigência de que todos os x_i tenham o mesmo sinal. Alguns dos x_i podem ser positivos e outros negativos, mas o erro final será o mesmo.

Vamos agora considerar a soma de números em que o erro é presumido com base nos algarismos significativos. Seja a soma de três números:

De modo geral, em uma soma de poucas parcelas mantém-se um número de algarismos até a casa decimal da parcela que tiver o maior erro presumido

$$\begin{array}{r} 12,55 \\ 1,0432 \\ 3,2 \\ \hline 16,7932 \end{array}$$

arredondando 16,8

Naturalmente, o número 3,2 tem um erro implícito de 0,05 e, portanto, não faz sentido manter todos os algarismos no resultado. A forma correta de escrever o resultado é 16,8. Isto pode ser visto também pela aplicação da regra descrita pela Equação 2.27. Os erros presumidos nas três parcelas são $\pm 0,005$; $\pm 0,00005$ e $\pm 0,05$. Quando esses erros são elevados ao quadrado e somados, o último predomina completamente.

De modo geral, em uma soma de poucas parcelas mantém-se o erro da parcela que tiver o maior erro presumido. Entretanto, deve-se ter cuidado no caso de uma soma em que muitas parcelas (N) tenham o mesmo maior erro presumido, pois então o fator $\sqrt{N}$ descrito nas Equações 2.24 a 2.27 pode levar à diminuição de um algarismo significativo no resultado.

Exercícios

E 2.13 Um grupo de cinco estudantes trouxe as seguintes quantidades de alimentos para uma campanha de distribuição: 3,4 kg, 1,08 kg, 2,9 kg, 0,75 kg e 2,6 kg. (A) Sem usar métodos estatísticos, qual é o número que melhor representa a quantidade total de alimentos? (B) Qual é o erro presumido nesse número? (C) Usando os erros presumidos em cada quantidade e a Equação 2.27, determine o erro da quantidade total de alimentos.

E 2.14 Em um laboratório de ensino, cinco grupos de estudantes determinaram os seguintes valores para a aceleração da gravidade local, g , em m/s^2 : $9,8 \pm 0,3$; $9,7 \pm 0,6$; $9,9 \pm 0,6$; $9,5 \pm 1,0$ e 10 ± 1 . Utilize a regra de soma de grandezas com erros explícitos e então determine o valor médio para g e seu erro com base nos resultados desses estudantes.

E 2.15 Dê o resultado das seguintes somas, com seus respectivos erros: (A) $5,17 + 2,05 + 4,38 + 3,25$; (B) $(0,510 \pm 0,016) + (1,485 \pm 0,020) - (0,714 \pm 0,011) + (1,233 \pm 0,023)$.

2.8.2 Multiplicação e divisão

O erro relativo de $1/x$ é igual ao erro relativo de x

A multiplicação (e a divisão) de números que contêm erros é mais fácil de ser analisada por meio dos erros relativos desses números. O erro relativo do número $(x_i \pm \Delta x_i)$ é, por definição, igual a $\Delta x_i / x_i$. Vamos então analisar a seguinte operação de multiplicação e divisão:

$$P = (x_1 \pm \Delta x_1)(x_2 \pm \Delta x_2)/(x_3 \pm \Delta x_3) = (x_1 x_2 / x_3) \left(1 \pm \frac{\Delta x_1}{x_1}\right) \left(1 \pm \frac{\Delta x_2}{x_2}\right) \left(1 \pm \frac{\Delta x_3}{x_3}\right). \quad (2.28)$$

Primeiramente vamos discutir o fator $1/(1 \pm \frac{\Delta x_3}{x_3})$ proveniente da divisão por x_3 . Se $\Delta x_3 / x_3 \ll 1$, então esse fator é aproximadamente igual a $(1 \mp \frac{\Delta x_3}{x_3})$. Ou seja, o erro relativo de $1/x_3$ é o mesmo erro relativo de x_3 . Então o produto acima será

$$P = (x_1 \pm \Delta x_1)(x_2 \pm \Delta x_2)/(x_3 \pm \Delta x_3) = (x_1 x_2 / x_3) \left(1 \pm \frac{\Delta x_1}{x_1}\right) \left(1 \pm \frac{\Delta x_2}{x_2}\right) \left(1 \mp \frac{\Delta x_3}{x_3}\right).$$

Se todos os erros relativos forem muito menores que 1, esse produto se simplifica para

$$P = (x_1 x_2 / x_3) \left(1 \pm \frac{\Delta x_1}{x_1} \pm \frac{\Delta x_2}{x_2} \mp \frac{\Delta x_3}{x_3}\right) \equiv P \left(1 \pm \frac{\Delta P}{P}\right). \quad (2.29)$$

Tanto na multiplicação como na divisão, o erro relativo do resultado é a soma dos erros relativos dos fatores

Na multiplicação e na divisão, se os erros são presumidos pelos números de algarismos significativos, deve-se escrever o resultado com um número de algarismos igual ao do fator que tem o menor número de significativos

Observe que termos do tipo $(\Delta x_i / x_i)(\Delta x_j / x_j)$ e produtos de mais que dois erros relativos, supostamente pequenos, foram desprezados. Conclui-se então que na multiplicação e na divisão podemos tratar os erros relativos da mesma maneira que os erros absolutos são tratados na soma e na subtração, e o erro relativo do resultado é a soma dos erros relativos dos fatores.

Como a Equação 2.29 contém uma soma de erros relativos, podemos aplicar a ela o mesmo critério utilizado na soma de erros absolutos da operação de adição (e subtração) e concluir que uma maneira mais precisa, do ponto de vista estatístico, de se calcular o erro relativo de P é:

$$\frac{\Delta P}{P} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}. \quad (2.30)$$

Quando os erros nos fatores em uma multiplicação ou divisão não estão explícitos, e devem ser presumidos pelo número de algarismos significativos, deve-se escrever o resultado com um número de algarismos significativos igual ao número do fator que tem o menor número de algarismos significativos. Isso se deve ao fato de que, quanto menor o número de algarismos significativos, maior será o erro relativo $\Delta x/x$. *Exemplos:*

$$8,436 \times 3,5 = 30,$$

$$3,1416 \times (2 \times 10^{15}) = 6 \times 10^{15}$$

$$10,42 \div 0,015 = 6,9 \times 10^3.$$

Observe que, ao limitar o número de algarismos com base no número menos preciso, podemos estar sendo muito severos. Considere, por exemplo, a operação

$$F = 4,18 \div 0,31 = 13. \quad (2.31)$$

O resultado $F = 13$ pressupõe um erro $\Delta F = \pm 0,5$. Entretanto, se considerarmos que os fatores 4,18 e 0,31 têm erros relativos de 0,005/4,18 e 0,005/0,31, respectivamente, podemos encontrar o erro $\Delta F/F$ somando os erros relativos ou usando a Equação 2.30. Assim se obtém $\Delta F/F = 0,017$ e o resultado para F seria

$$F = 13,49 \pm 13,49 \times 0,017 = 13,5 \pm 0,2. \quad (2.32)$$

Esta equação mostra que tínhamos direito a mais um algarismo em nosso resultado, e que o erro nele embutido é $\pm 0,2$, e não $\pm 0,5$, como faz crer a Equação 2.35. Portanto, quando for importante exprimir de maneira mais precisa o erro em uma multiplicação ou divisão, é melhor usar a regra da soma dos erros relativos.

Exercícios

E 2.16 Dê os resultados das operações, com seus erros (A) $5,18 \times (2,4 \times 10^3)$; (B) $0,085 \div 12$.

E 2.17 As dimensões de uma caixa foram determinadas como sendo $(0,84 \pm 0,01)\text{m}$, $(1,30 \pm 0,05)\text{m}$ e $(2,0 \pm 0,1)\text{m}$. Os lados da caixa fazem ângulo reto. Determine seu volume e seu respectivo erro.

E 2.18 À temperatura ambiente, o mercúrio é um metal líquido e tem uma densidade igual a $(13,456 \pm 0,0005)\text{g/cm}^3$. Qual será o volume ocupado por $(1,00 \pm 0,01)\text{kg}$ de mercúrio?

Seção 2.9 ■ Estimativas

Para obtermos o valor de uma dada grandeza, temos de medi-la diretamente ou calcular seu valor por meio de outras grandezas conhecidas. Em ambos os casos, freqüentemente temos de nos contentar com um valor grosseiramente aproximado. No caso da medida direta,

Valores de grandezas obtidos com dados ou cálculos precários são denominados estimativas

a instrumentação que temos à mão pode ser muito imprecisa. No caso do cálculo, os dados necessários para sua realização podem ser muito imprecisos ou, mesmo se dispusermos de dados precisos, o cálculo pode ser muito complicado e por isso temos de fazer aproximações grosseiras para realizá-lo. Valores de grandezas obtidos com dados ou cálculos precários são denominados estimativas, e a capacidade em realizar estimativas é indispensável na rotina do cientista ou engenheiro. Durante este curso você tomará contato freqüente com estimativas, e nesta seção serão apresentados alguns exemplos ilustrativos de procedimentos comuns na estimativa.

Começaremos pela primeira estimativa da circunferência da Terra. Muitos fenômenos corriqueiros (aponte alguns) indicam que a Terra seja uma esfera, mas por alguma razão os antigos não os levaram em consideração e, pelo que se sabe, foi Pitágoras quem primeiro declarou, em 532 a.C., que habitamos uma esfera. Eratóstenes realizou a primeira estimativa da circunferência do nosso planeta. A cidade de Siena (hoje Assuã), no sul do Egito, situa-se à latitude de aproximadamente $23,5^\circ$ Norte e, por isso, no pico do verão no hemisfério Norte, ao meio-dia ali o Sol se posiciona quase exatamente na vertical. Alexandria situa-se no extremo norte do Egito, e Eratóstenes julgou que essas duas cidades ficavam no mesmo meridiano (confirme em um mapa do Egito se isso é verdade), ou seja, partindo de Assuã e viajando para o norte chegaríamos a Alexandria. Para medir a distância de Assuã a Alexandria, Eratóstenes baseou-se no fato de que eram gastos 50 dias de viagem a camelo para ir de uma cidade à outra, e que em um dia um camelo andava em média 100 estádios. Portanto, a distância entre Assuã e Alexandria foi estimada em 5000 estádios.

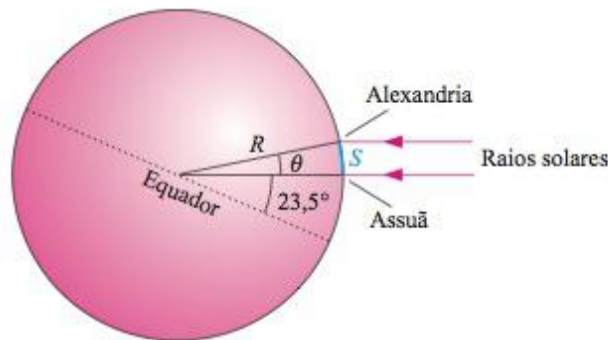


Figura 2.1

Dados envolvidos na estimativa da circunferência da Terra feita por Eratóstenes. Ao meio-dia, no pico do verão, o Sol se posiciona na vertical em Assuã, mas em Alexandria, à distância S de Assuã aproximadamente na direção norte, ao meio-dia o Sol se inclina $\theta = 360^\circ / 50$ em relação à vertical. Isto significa que a circunferência da Terra é $C = 50 S$. Estimando a distância S com base no tempo gasto em viagem de camelo de uma cidade à outra, Eratóstenes chegou a um valor surpreendentemente preciso para o tamanho da Terra.

Eratóstenes mediu a orientação do Sol em Alexandria, ao meio-dia no pico do verão, e verificou que o astro se inclinava do ângulo $\theta = 7,2^\circ = 360^\circ / 50$ em relação a um fio de prumo. Portanto, a circunferência da Terra valeria

$$C = 50S = 50 \times 5000 \text{ estádios}, \quad (2.33)$$

sendo S a distância entre Assuã e Alexandria. Ao expressarmos esse valor em quilômetros, temos uma ambigüidade decorrente da dúvida quanto ao valor do estádio. Assim,

$$C = 250.000 \times 0,157 \text{ km} = 3,9 \times 10^4 \text{ km}, \quad (2.34)$$

ou

$$C = 250.000 \times 0,185 \text{ km} = 4,6 \times 10^4 \text{ km}. \quad (2.35)$$

A circunferência da Terra, na orientação norte-sul, vale aproximadamente 40.000 km. Portanto, Eratóstenes terá errado 2,5% para menos ou 15% para mais em sua estimativa.

E-E Exercício-exemplo 2.2

■ **Estimativa** Ao passar férias às margens de um lago, Pedro decidiu fazer sua própria medida do tamanho da Terra. À tardinha, estando o lago bem tranquilo, fincou uma grande régua exatamente no limite entre a água e a areia, de modo que 7 m da régua ficaram acima do nível da água. Encaminhou-se para o outro lado do lago e, consultando seu mapa, verificou que estava a 8,7 km, em linha reta, da sua régua. Entrou na água, agachou-se até que seus olhos ficassem ligeiramente acima do nível da água. Com seus binóculos, focalizou a ponta da régua anteriormente preparada e pôde ver 1,1 m da sua extremidade superior. A partir dessa observação, calculou o raio da Terra. Que valor Pedro obteve?



Figura 2.2
(Exercício-exemplo 2.2).

■ Solução

Pelos dados do problema, h , na Figura 2.2, vale 5,9 m. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos da figura:

$$(R + h)^2 = R^2 + d^2,$$

$$2Rh + h^2 = d^2.$$

Portanto,

$$R = \frac{d^2 - h^2}{2h} \cong \frac{d^2}{2h} = \frac{(8,7)^2 \times 10^6 \text{ m}}{2 \times 5,9 \text{ m}} = 6,4 \times 10^6 \text{ m}.$$

Esse valor é bem próximo do valor mais preciso, $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$.

E-E Exercício-exemplo 2.3

■ **Estimativa** Quantos pingos de chuva caem no Brasil a cada ano?

■ Solução

Considerando-se uma média global de 1,4 m de precipitação anual no território brasileiro, e sua área territorial de $8,5 \times 10^6 \text{ km}^2$, o volume de chuva em um ano será

$$V = 1,4 \text{ m} \times 8,5 \times 10^6 \text{ km}^2 = 1,2 \times 10^{13} \text{ m}^3.$$

Estimando que os pingos de chuva tenham em média $1 \times 10^1 \text{ mm}^3$, chegamos ao número estimado de pingos:

$$N = \frac{1,2 \times 10^{13} \text{ m}^3}{1 \times 10^1 \text{ mm}^3} = \frac{1,2 \times 10^{13} \text{ m}^3}{1 \times 10^{-8} \text{ m}^3} = 1 \times 10^{21}.$$

Por coincidência, o número de átomos contidos em nosso pingo de água médio também é 1×10^{21} . Isso dá uma idéia eloqüente da pequenez do átomo.

E-E Exercício-exemplo 2.4

■ **Estimativa** Quantos fios de cabelo haverá na cabeça de uma mulher?

■ **Solução**

Uma trança de cabelo feminino costuma ter, próximo à base, um diâmetro um pouco superior a 2 cm (na ponta, porém, a trança se afina, porque muitos fios do cabelo são mais curtos). Se a trança fosse mais compactada, provavelmente atingiria um diâmetro de 2 cm. O diâmetro típico de um cabelo humano é $d = 0,005$ cm. Ignorando-se o espaço vazio entre os fios, o número de fios de cabelo será igual a

$$N = \left(\frac{D}{d}\right)^2 = \left(\frac{2 \text{ cm}}{0,005 \text{ cm}}\right)^2 = 2 \times 10^5.$$

E-E Exercício-exemplo 2.5

■ **Estimativa** Joana conhecia a distância da Terra à Lua (384 mil quilômetros), mas não seu diâmetro D . Durante a lua-cheia, decidiu fazer sua própria medida de D . Pegou um cartão contendo um orifício circular com diâmetro de 0,50 cm, vedou o olho esquerdo, afastou o cartão do rosto até ver o corpo da Lua preencher perfeitamente o orifício, e pediu a uma amiga para medir a distância do cartão até seu olho direito. A medida deu $r = 54$ cm. Qual foi o valor encontrado para D ?

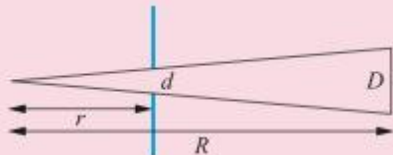


Figura 2.3
(Exercício-exemplo 2.5).

■ **Solução**

Como se pode ver pela inspeção da Figura 2.3, o diâmetro da Lua pode ser calculado pela relação de proporcionalidade

$$\frac{D}{d} = \frac{R}{r} \Rightarrow D = \frac{d}{r} R = \frac{0,50 \text{ cm}}{54 \text{ cm}} \times 384 \times 10^3 \text{ km} = 3,6 \times 10^3 \text{ km}.$$

E-E Exercício-exemplo 2.6

■ **Estimativa** Estime o número de moléculas de água contidas nos mares e oceanos.

■ **Solução**

Os mares e oceanos cobrem 70,8% da superfície da Terra, e sua profundidade média é de 3 km. Portanto, o volume de água dos oceanos é

$$V = 0,708 \times 4\pi R^2 \times 3 \text{ km},$$

sendo $R = 6,37 \times 10^3$ km o raio da Terra. Do cálculo resulta

$$V = 1 \times 10^9 \text{ km}^3 = 1 \times 10^{18} \text{ m}^3.$$

(continua)

Cada metro cúbico (m^3) de água tem massa de cerca de $1,0 \times 10^3 \text{ kg}$ de água, mais um pouco de sal. Portanto, a massa de água dos oceanos é

$$M = 1 \times 10^{21} \text{ kg}.$$

Cada molécula de água tem massa $m = 3,00 \times 10^{-26} \text{ kg}$. Portanto, o número de moléculas de água é

$$N = \frac{M}{m} = \frac{1 \times 10^{21} \text{ kg}}{3,0 \times 10^{-26} \text{ kg}} = 3 \times 10^{46}.$$

Exercícios

E 2.19 No cobre metálico, os átomos têm um diâmetro de 0,20 nm. Quantos átomos são contidos em $1,0 \text{ cm}^3$ de cobre?

E 2.20 Por que uma faca corta? Faça estimativa do raio r de curvatura do fio de corte de uma faca bem afiada. Supondo que a área de contato da faca com um pedaço de madeira seja $A = 5 \text{ mm} \times r$, e que a faca seja pressionada contra a madeira com força de 50 N, calcule a pressão exercida sobre a madeira.

E 2.21 Na Via-Láctea, explodem umas três supernovas a cada milênio. Quantas supernovas explodem diariamente no Universo conhecido?

E 2.22 Qual é a espessura desta folha de papel?

PROBLEMAS

P 2.1 O módulo de Young de um material é uma grandeza que mede resistência oferecida pelo material a uma distensão ou compressão. A Figura 2.4 mostra um esquema utilizado para a medida do módulo de Young. Uma barra homogênea com seção reta de área A é submetida a uma força de distensão de intensidade F . Com a aplicação da força, o comprimento da barra aumenta de L_0 para L . Observa-se que a elongação da barra é proporcional a F e ao seu comprimento inicial L_0 , e inversamente proporcional a A . Tal relação de proporcionalidade pode ser escrita na forma

$$L - L_0 = \frac{1}{Y} \frac{L_0}{A} F,$$

na qual a constante de proporcionalidade Y é o módulo de Young. Determine a dimensão de Y e dê a sua unidade no SI.

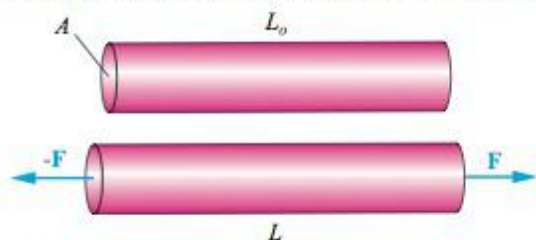


Figura 2.4

(Problema 2.1)

P 2.2 Quantos prótons você come por dia, se a massa do próton vale $1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$?

P 2.3 Quantas vezes o coração humano bate, em média, durante a vida?

P 2.4 O cúbito foi inicialmente definido pela distância entre o cotovelo e a extremidade do dedo médio de um homem médio. Defina o cúbito em metros usando seu braço como padrão.

P 2.5 Meça o tamanho do seu pé e compare-o com o pé, unidade de comprimento inglesa igual a 30,48 cm. Algo errado com seu pé ou com o pé do inglês de referência?

P 2.6 Galileu usou, para medidas de tempo, um método já utilizado no Egito, o da medida do volume (ou peso) da água que escoava de um grande reservatório por um pequeno orifício. Verifique a precisão de tal medida para tempos não muito curtos. Feche a torneira da pia de sua cozinha até que o escoamento da água seja um fino filamento. Utilizando um relógio, meça o tempo necessário para encher uma vasilha de cerca de 1 l. Repita a medida várias vezes sem mexer na torneira. Qual é o erro percentual na sua medida do tempo de escoamento necessário para encher a vasilha?

P 2.7 Faça sua medida do diâmetro do Sol. Próximo ao pôr-do-sol, finque uma estaca verticalmente, deixando exposto cerca de 1 m de estaca. Faça dois riscos horizontais na parte superior da estaca, cuidadosamente separados 20 cm do outro. Posicione-se de modo que a estaca fique entre você e o Sol, e mova-se até que, ao se agachar, você consiga ver o diâmetro do Sol coincidindo precisamente com a distância entre as marcas na estaca (use filtro de luz ao olhar para o Sol). Meça então sua distância até a estaca. (A) Pelas suas medidas, qual é o ângulo aparente do Sol, medido em radianos? (B) Qual é o diâmetro real do Sol, medido em metros, sabendo-se que a distância do Sol à Terra é igual a $1,5 \times 10^8 \text{ m}$?

P 2.8 Os pontos extremos ao norte e ao sul da América do Sul estão, coincidentemente, no mesmo meridiano: 70° Oeste. O extremo norte está à latitude de $12,1^\circ$ Norte e o extremo sul está à latitude de $55,7^\circ$ Sul. Qual é o comprimento da América do Sul?

P 2.9 A cidade de Barrow, no estado de Arkansas, EUA, está à latitude de $71,17^\circ \text{N}$. Qual é a distância de Barrow ao Pólo Norte?

P 2.10 Os círculos Ártico e Antártico, respectivamente, são os paralelos (círculos paralelos à linha do equador) com latitudes $66,5^\circ \text{N}$ e $66,5^\circ \text{S}$. Calcule o comprimento desses círculos.

P 2.11 As cidades de Sacramento, Califórnia, EUA, e Washington DC, EUA, estão nas coordenadas $38,03^\circ \text{N}$, $121,56^\circ \text{O}$ e $38,53^\circ \text{N}$, $77,02^\circ \text{O}$, respectivamente. Faça a aproximação de que as duas cidades estejam à mesma latitude de $38,28^\circ \text{N}$ e calcule a distância entre elas. (Observe que o paralelo que vai de uma cidade a outra tem circunferência menor que a da Terra.)

P 2.12 Estimativa Quanto de CO_2 seria produzido caso se queimasse toda a Floresta Amazônica?

P 2.13 Estimativa Quantos grãos estão contidos em 1 kg de arroz?

P 2.14 Estimativa Quantos postos de gasolina existem na cidade de São Paulo?

P 2.15 Estimativa Quantos caminhões chegam diariamente à cidade de São Paulo trazendo alimentos?

Respostas dos exercícios

E 2.4 (A) $3,628\,800 \times 10^6$; (B) $2,755\,732 \times 10^{-7}$;

(C) $4,034\,287\,934\,927 \times 10^2$

E 2.5 10^{61}

E 2.6 $N = 1,2 \times 10^{57}$

E 2.7 10^{23}

E 2.8 alqueirão = 4,84 he, he = 0,2066 alqueirão

E 2.10 (A) $1\text{y} = 9,46 \times 10^{15} \text{m}$, (B) $\text{fm} = 1,057 \times 10^{-31} \text{ly}$

E 2.11 $1,1 \times 10^5$ anos

E 2.12 (A) 10^{-4} ; (B) 10^{-11}

E 2.13 (A) 10,7 kg; (B) 0,05 kg; (C) 0,09 kg.

E 2.14 $(9,8 \pm 0,3) \text{m/s}^2$.

E 2.15 (A) $14,85 \pm 0,01$; (B) $2,514 \pm 0,036$

E 2.16 (A) $(12,4 \pm 0,3) \times 10^3$; (B) $0,0071 \pm 0,0003$

E 2.17 $(2,2 \pm 0,2) \text{m}^3$

E 2.18 $(74,3 \pm 0,7) \text{cm}^3$

E 2.19 $1,2 \times 10^{23}$

E 2.20 $p = 10^9 \text{Pa}$

E 2.21 $N = 10^{10}$

E 2.22 $e = 0,10 \text{mm}$

Respostas dos problemas

P 2.1 $[Y] = \frac{[F]}{[L^2]}$, unidade Pa

P 2.2 $N = (3 \pm 1) \times 10^{26}$

P 2.3 $N = (3 \pm 0,1) \times 10^9$

P 2.8 $d = 7,53 \times 10^3 \text{km}$

P 2.9 2092 km

P 2.10 $l = 1,60 \times 10^4 \text{km}$

P 2.11 $d = 3,89 \times 10^3 \text{km}$

P 2.12 $(1,5 \pm 0,5) \times 10^{15} \text{kg}$

P 2.13 10^4

P 2.14 $N = (8 \pm 3) \times 10^3$

P 2.15 $N = (1,0 \pm 0,3) \times 10^3$





Movimento Retilíneo

- Seção 3.1 ■ Introdução, 38
- Seção 3.2 ■ Sistemas de referência, 38
- Seção 3.3 ■ Movimento retilíneo, 39
- Seção 3.4 ■ Velocidade média e velocidade escalar média, 39
- Seção 3.5 ■ Velocidade instantânea, 41
- Seção 3.6 ■ A velocidade instantânea é expressa por uma derivada, 43
- Seção 3.7 ■ Cálculo de $x(t)$ a partir de $v(t)$, 44
- Seção 3.8 ■ Aceleração, 47
- Seção 3.9 ■ Movimento uniforme, 49
- Seção 3.10 ■ Movimento uniformemente acelerado, 50
- Seção 3.11 ■ Relações de simetria no movimento uniformemente acelerado (opcional), 54
- Seção 3.12 ■ Movimento uniformemente acelerado — análise pelo cálculo (opcional), 55
- Seção 3.13 ■ Queda livre, 55
- Seção 3.14 ■ Movimento relativo, 59
- Problemas, 61
- Respostas dos exercícios, 62
- Respostas dos problemas, 63



Seção 3.1 ■ Introdução

A **cinemática** é o estudo puramente descritivo do movimento, sem consideração das suas causas. A **dinâmica** estuda a conexão do movimento com suas causas. Em conjunto, essas duas disciplinas compõem a **mecânica**.

Pelo visto no Capítulo 1 (*O que é a Física*), as leis fundamentais da Natureza são equações de movimento. Nesse caso, é natural começar-se o estudo da física pelo estudo descritivo do movimento. Estudo descritivo significa análise do movimento em si, sem levar em conta o agente ou agentes causadores do mesmo. Esse tipo de estudo é denominado **cinemática**. O estudo do movimento em conexão com suas causas é o objeto da **dinâmica**, que será apresentada nos Capítulos 6 a 12. A cinemática e a dinâmica compõem a **mecânica**.

O estudo do movimento é muito antigo. Como observou Galileu em *Dois Novas Ciências*, os tratados sobre o assunto não são poucos nem pequenos. Entretanto, quase nada se aproveita dos antigos estudos do movimento, não só porque eles não foram fundamentados na experimentação, mas também porque os seus autores não tiveram o cuidado de definir precisamente as grandezas envolvidas no movimento. Galileu foi bastante inovador nesses dois itens, mas mesmo sua abordagem já não é inteiramente adequada à visão do físico contemporâneo.

Seção 3.2 ■ Sistemas de referência

O movimento é um fenômeno relativo: quando falamos que um corpo se move, temos implicitamente em mente algum outro corpo em relação ao qual ele se move. Por exemplo, se você está sentado ao lado de alguém num avião em voo, seu parceiro está imóvel em relação a você, mas ambos vocês estão se movendo em relação a alguém que esteja parado no aeroporto. Se seu parceiro levanta-se e se desloca no corredor à velocidade de 3 km/h, para a terceira pessoa sentada na cadeira do aeroporto sua velocidade é uma combinação da velocidade de caminhada no corredor do avião com a velocidade do próprio avião. Portanto, para descrever o movimento de um corpo temos de escolher previamente um sistema de referência em relação ao qual os deslocamentos do corpo sejam medidos. Ressalta-se ainda que um deslocamento tem uma direção: para o norte, para o leste, para cima etc. Assim, o sistema de referência tem de conter orientações fixas em relação às quais a direção do deslocamento possa ser definida sem ambigüidade. Em sua forma mais conveniente, o sistema de referência contém três eixos mutuamente ortogonais, denominados *eixos cartesianos*. Para movimento em um plano, bastam dois eixos, como mostra a Figura 3.1.

Os eixos devem ter marcações semelhantes às da escala de uma régua, e geralmente — mas não necessariamente — suas numerações começam no ponto de encontro dos eixos, o ponto de origem ou ponto zero. Para cada eixo, um sentido é arbitrado como positivo e o outro negativo. No lado positivo do eixo as marcas recebem números positivos, e no lado negativo recebem números negativos, como se vê na Figura 3.1. Dessa forma, cada ponto sobre um dado eixo tem a sua coordenada, que pode ser um número inteiro, se o ponto estiver sobre uma das marcas, ou um número fracionário, se estiver entre duas marcas. Em qualquer dos casos, o número tem de ser seguido da unidade de comprimento que define a separação entre as marcas. Por exemplo, coordenada 2 m, coordenada 3,45 m ou coordenada -1,56 m, sobre

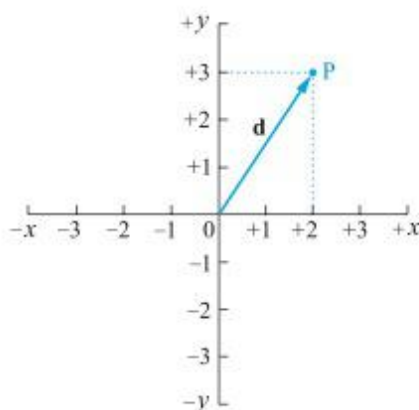


Figura 3.1

Sistema cartesiano de eixos xy .

o eixo x . Frequentemente, a unidade de comprimento é omitida na declaração da coordenada, mas nas aplicações ao estudo de algum movimento tal unidade tem de estar explícita ou subentendida. Para se definir a posição de um ponto fora dos eixos são necessárias duas coordenadas. Por exemplo, as coordenadas do ponto P da Figura 3.1 são 2, na direção x e 3 na direção y . Os deslocamentos são grandezas orientadas de um tipo denominado vetor, e nos desenhos são indicados por uma seta. Na Figura 3.1, indicamos o vetor que exprime o deslocamento da origem dos eixos para o ponto P.

Seção 3.3 ■ Movimento retilíneo

Partícula é um corpo com dimensões reduzidas o suficiente para que possamos tratá-lo como pontual

Neste capítulo, estudaremos o movimento de um corpo sobre uma reta, o denominado *movimento retilíneo*, e portanto não nos envolveremos com as complicações decorrentes do caráter vetorial do deslocamento. Para simplificar ainda mais, só trataremos do movimento de partículas. **Partícula** é uma das idealizações de Galileu e consiste em um corpo com dimensões tão minúsculas que possamos tratá-lo como pontual.

Isto é conveniente, pois ao dizer a posição do corpo não temos de explicitar sobre que parte do mesmo estamos falando. Além do mais, um ponto somente pode deslocar-se (transladar), mas não girar, e por isso não teremos de nos preocupar com a orientação do corpo. Se a partícula se move sobre eixo dos x , só teremos de nos preocupar com sua coordenada x . Dispomos também de um relógio para marcar o tempo, e no instante t a partícula terá coordenada $x(t)$, como mostra a Figura 3.2.



Figura 3.2

Uma partícula desloca-se sobre o eixo dos x . No instante t , sua coordenada terá o valor $x(t)$.

Seção 3.4 ■ Velocidade média e velocidade escalar média

O termo velocidade expressa, no cotidiano, a rapidez com que um corpo se move. Para estudo do movimento, entretanto, temos de definir velocidade de forma operacional e, na verdade, temos de usar o termo velocidade com mais de um significado, cada qual requerendo uma definição precisa. Sejam $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$ as coordenadas da partícula nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente, e nesse caso seu deslocamento no intervalo de tempo $(t_2 - t_1)$ é $(x_2 - x_1)$. A **velocidade média** da partícula nesse intervalo de tempo é por definição a grandeza

■ Velocidade média
$$\bar{v} \equiv \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad (3.1)$$

sendo que o sinal $\equiv$ indica uma igualdade utilizada para definir a grandeza do lado esquerdo da equação. Portanto, $\equiv$ pode ser lido como “definido como sendo igual a”. Usando a notação compacta $\Delta x \equiv x_2 - x_1$ e $\Delta t \equiv t_2 - t_1$, podemos reescrever a Equação 3.1 na forma

■ Velocidade média
$$\bar{v} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (3.2)$$

E-E Exercício-exemplo 3.1

■ Em $t_1 = 2,00$ s uma partícula estava em $x_1 = 1,50$ m. A partir desse instante, ela moveu-se 5,50 m para a direita, retornou e em $t_2 = 5,00$ s encontrava-se em $x_2 = -2,50$ m. Qual foi sua velocidade média no intervalo de tempo $(t_2 - t_1)$?

■ Solução

Pelo emprego direto da definição de velocidade média, obtemos

$$\bar{v} = \frac{-2,50\text{m} - 1,50\text{m}}{5,00\text{s} - 2,00\text{s}} = -1,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ressalta-se que a definição da velocidade média não menciona o trajeto realizado pela partícula em seu deslocamento. Portanto, a velocidade média não tem a ver com a distância total percorrida pela partícula no referido intervalo de tempo. A grandeza relacionada com a distância percorrida é a *velocidade escalar média*, definida por

■ Velocidade escalar média

$$|\bar{v}| \equiv \frac{\Delta d}{|\Delta t|}, \quad (3.3)$$

A velocidade escalar é sempre uma grandeza positiva. Já a velocidade pode ser negativa, se o deslocamento é negativo, ou positiva, se o deslocamento é positivo

onde o símbolo $| \cdot |$ exprime valor absoluto da grandeza compreendida entre as duas barras. Por exemplo, $|-5| = 5$. A velocidade escalar mede a rapidez com que o corpo se move e, na verdade, é a grandeza que expressa o sentido com que usamos o termo velocidade no cotidiano. Por exemplo, se um maratonista corre 42 km em 2,50 h, dizemos que sua velocidade média na corrida foi $42 / 2,5 \text{ km/h} = 16 \text{ km/h}$. Entretanto, esta não é a linguagem usada em física. Em física, dizemos que sua *velocidade escalar média* foi de 16 km/h. Se o maratonista no final chegou ao mesmo ponto de partida, seu deslocamento durante a corrida foi nulo, e portanto sua *velocidade média* naquelas 2,50 h de corrida também foi nula. A velocidade escalar é sempre uma grandeza positiva. Já a velocidade pode ser negativa, se o deslocamento é negativo, ou positiva, se o deslocamento é positivo. No caso do movimento sobre o eixo dos x , o deslocamento para a direita é positivo e o deslocamento para a esquerda é negativo. No caso geral, a ser estudado no Capítulo 5 (*Movimento no Plano e no Espaço*), em que o movimento não fica restrito a uma trajetória retilínea previamente definida, temos de tratar o deslocamento como um vetor, uma grandeza orientada no espaço.

E-E Exercício-exemplo 3.2

■ Qual é a velocidade escalar média da partícula considerada no Exercício-exemplo 3.1?

■ Solução

No intervalo $\Delta t = 3,00$ s a partícula percorreu uma distância de 15,0 m, pois deslocou-se 5,50 m para a direita e após isso 9,50 m para a esquerda. Portanto,

$$|\bar{v}| \equiv \frac{15,00\text{m}}{3,00\text{s}} = 5,00 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Podemos aplicar o conceito de velocidade escalar média também ao movimento sobre uma trajetória curvilínea, se medirmos a distância percorrida pela partícula sobre a trajetória curva percorrida. Por exemplo, um carro que foi do km 140 ao km 200 de uma estrada em 45 min desenvolveu nesse percurso a velocidade escalar média de 80 km/h, independentemente da distância em linha reta entre esses dois marcos.

Exercícios

E 3.1 Um carro roda à velocidade de 80 km/h durante 30 min. Chega então a uma estrada de alta velocidade e rapidamente atinge a velocidade de 110 km/h, à qual viaja por 45 min. Qual é a velocidade escalar média do carro durante a viagem?

E 3.2 Um atleta treina corrida em uma pista retilínea. Em $t_1 = 0$, parte do marco 0 m, corre até o marco 200 m, pára por certo tempo, volta a correr até o marco 400 m, e daí retorna ao marco 100 m, onde chega em $t_2 = 100$ s. Calcule (A) a velocidade média do corredor entre os instantes t_1 e t_2 ; (B) a velocidade escalar média nesse intervalo.

E 3.3 Um corredor de Fórmula 1 percorre o circuito fechado da pista de corrida, cujo comprimento é 5,20 km, em 90,0 s. Calcule a velocidade média e a velocidade escalar média do piloto no referido percurso.

Seção 3.5 ■ Velocidade instantânea

Ao viajar em uma estrada, a indicação do velocímetro do seu carro irá variar para cima e para baixo. A cada instante, o velocímetro estará indicando a velocidade escalar instantânea do carro. Se a indicação do velocímetro não oscilasse, mantendo-se, por exemplo, em 80 km/h, sua velocidade escalar média em qualquer intervalo de tempo também seria 80 km/h. A velocidade escalar média do carro em um dado intervalo de tempo expressa um valor médio da velocidade indicada no velocímetro. Se o carro estiver movendo-se em linha reta no mesmo sentido, a velocidade média e a velocidade escalar média terão o mesmo valor, exceto talvez pelo sinal, uma vez que, se o carro estiver se deslocando no sentido negativo, sua velocidade será negativa. Mas, afinal, como se define a velocidade instantânea? A Figura 3.3 mostra um gráfico da variação da posição de uma partícula (definida pela coordenada x) em função do tempo. Nosso intuito é definir sua velocidade instantânea em um dado instante, digamos $t_o = 3,000$ s. Visando isto, calculamos a velocidade média em intervalos de tempo $t - t_o$, para diversos valores de t , sendo $t > t_o$. Na verdade, dispomos da tabela de dados que gerou a Figura 2.3, o que torna o cálculo bastante simples.

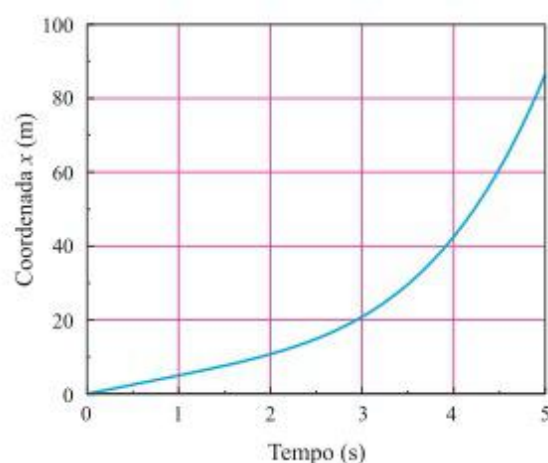


Figura 3.3

Variação no tempo da coordenada x de uma partícula.

A Tabela 3.1 mostra os valores de x para diversos valores de t , e também a velocidade média da partícula nos diversos intervalos $t - t_o$. Tal velocidade média, vale lembrar, é calculada pela expressão

$$\bar{v} = \frac{x(t) - x(t_o)}{t - t_o}. \quad (3.4)$$

■ Tabela 3.1

Variação da posição e da velocidade média, entre t_0 e t , da partícula cujas coordenadas variam no tempo na forma vista na Figura 3.3.

t (s)	x (m)	$\bar{v} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ (m/s)
$t_0 = 3,000$	20,8594	
3,005	20,9314	14,398
3,01	21,0037	14,430
3,02	21,1491	14,485
3,05	21,5924	14,660
3,10	22,3546	14,952
3,20	23,9716	15,561
3,50	29,6500	17,581
4,00	42,5094	21,650
4,50	60,9000	26,694
5,00	86,5094	32,825

A tabela mostra que a velocidade média tende para um valor próximo de 14,39 m/s quando o intervalo de tempo $\Delta t = t - t_0$ tende para zero. Esta tendência pode ser visualizada na Figura 3.4, que mostra graficamente o comportamento de $\bar{v}$ com o intervalo de tempo $t - t_0$. O limite de $\bar{v}$ quando $t - t_0$ tende para zero é por definição a velocidade instantânea da partícula no instante t_0 . Formalmente, escrevemos

$$v(t_0) \equiv \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}. \quad (3.5)$$

A Equação 3.5 pode ser reescrita na forma

$$v(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \quad (3.6)$$

ou, equivalentemente,

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (3.7)$$

■ Definição de velocidade instantânea

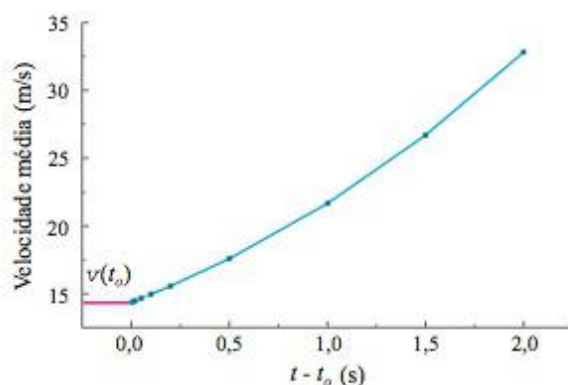


Figura 3.4

Variação com o tempo t da velocidade média, no intervalo entre t_0 e t , da partícula cuja variação temporal das coordenadas é mostrada na Figura 3.3. Quando $t - t_0$ tende para zero, a velocidade média tende para um valor $v(t_0)$, o qual por definição é a velocidade instantânea da partícula no instante t_0 .

Definindo

$$\Delta x \equiv x(t + \Delta t) - x(t), \quad (3.8)$$

a velocidade instantânea pode ser escrita na forma

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.9)$$

A *velocidade escalar instantânea* da partícula no instante t é por definição o valor absoluto da sua velocidade instantânea:

■ Velocidade escalar instantânea

$$\text{velocidade escalar instantânea} \equiv |v(t)|. \quad (3.10)$$

Seção 3.6 ■ A velocidade instantânea é expressa por uma derivada

O limite mostrado na Equação 3.9 é por definição a *derivada da função $x(t)$* no instante t . Formalmente, escreve-se

■ Derivada da função $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.11)$$

Portanto,

■ Velocidade instantânea

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \quad (3.12)$$

Essas operações matemáticas que acabamos de realizar têm uma interpretação geométrica muito conveniente, que pode ser obtida pela análise da Figura 3.5. A velocidade média da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$ é igual ao coeficiente angular (inclinação) da corda que une os pontos indicando a partícula nesses dois instantes. Quando $\Delta t \rightarrow 0$, a corda se alinha com a tangente da curva $x(t)$ no instante t . Portanto, a velocidade instantânea da partícula no instante t é igual ao coeficiente angular da tangente à curva $x(t)$ naquele instante.

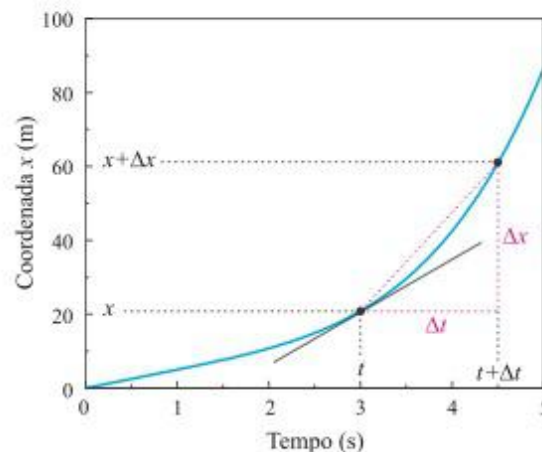


Figura 3.5

A velocidade média da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$ é igual ao coeficiente angular (ou inclinação) $\Delta x/\Delta t$ da corda que une os dois pontos indicando a partícula naqueles dois instantes. Quando $\Delta t \rightarrow 0$, a corda ganha a direção da tangente da curva $x(t)$ no instante t . A inclinação dessa tangente é a velocidade instantânea da partícula no referido instante.

Ilustraremos como se usa a derivada da coordenada da partícula para se calcular sua velocidade instantânea. A função $x(t)$ descrita graficamente nas Figuras 3.3 e 3.5 é

$$x(t) = 5,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 0,150 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot (t - 0,500 \text{ s})^4. \quad (3.13)$$

Derivando $x(t)$, obtemos a velocidade instantânea da partícula em função do tempo:

$$v(t) = 5,000 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,600 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot (t - 0,500 \text{ s})^3. \quad (3.14)$$

Da Equação 3.14 podemos calcular

$$v(3,000s) = 5,000 \frac{m}{s} + 0,600 \frac{m}{s^4} \cdot (2,500 s)^3 = 14,375 \frac{m}{s},$$

valor bastante próximo dos 14,39 m/s estimados com base na Tabela 2.1.

Exercícios

E 3.4 A posição de um corpo varia segundo a equação $x = 50 m + 10 \frac{m}{s} \cdot t + 1,0 \frac{m}{s^3} \cdot (t - 2,0 s)^3$. Qual é a velocidade do corpo em (A) $t = 0$ e (B) $t = 2,0 s$?

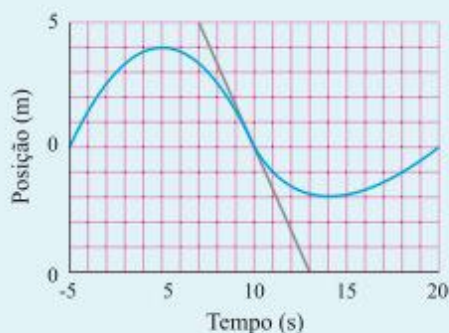


Figura 3.6

Variação no tempo da posição (coordenada) de um corpo.

E 3.5 Com relação ao movimento de um corpo representado na Figura 3.6 (A) Em que instantes o corpo tem velocidade nula? (B) Em que instante o corpo tem velocidade máxima? (C) Em que instante o corpo tem velocidade com valor algébrico mínimo?

E 3.6 Qual é a velocidade média do corpo cujo movimento é mostrado na Figura 3.6, nos intervalos (A) (0, 10 s) e (B) (0, 20 s)?

E 3.7 Qual é a velocidade do corpo cujo movimento é mostrado na Figura 3.6 no instante $t = 10 s$?

Seção 3.7 ■ Cálculo de $x(t)$ a partir de $v(t)$

Já aprendemos a calcular $v(t)$ a partir do conhecimento de $x(t)$. Estudaremos agora o problema inverso, de calcular $x(t)$ a partir do conhecimento de $v(t)$. A Figura 3.7 mostra o gráfico da variação temporal da velocidade de uma partícula. Para calcular o deslocamento da partícula no intervalo de t_o a t , podemos decompor esse intervalo em N pequenos intervalos de pequena duração

$$\Delta t = \frac{t - t_o}{N}, \quad (3.15)$$

de modo que a velocidade em cada intervalo tenha uma variação pequena. Nesse caso, podemos em cada intervalo i de tempo aproximar a velocidade da partícula por um valor constante v_i (ver Figura 3.7), e o deslocamento da partícula no intervalo i será

$$\Delta x_i \cong v_i \Delta t. \quad (3.16)$$

O deslocamento da partícula entre t_o e t será a soma dos deslocamentos Δx_i e, portanto, poderá ser aproximado pela fórmula

$$x(t) - x(t_o) \cong (v_1 + v_2 + \dots + v_N) \Delta t, \quad (3.17)$$

$$x(t) - x(t_o) \cong \sum_{i=1}^N v_i \Delta t. \quad (3.18)$$

Observe-se que o somatório na Equação 3.18 é igual à “área” sombreada na Figura 3.7. O uso da palavra área entre aspas pede uma explicação. Destaca-se que área, no sentido estrito, tem dimensão de $[L^2]$, enquanto o somatório na Equação 3.18 tem dimensão dada por

$$[v][T] = \frac{[L]}{[T]}[T] = [L], \quad (3.19)$$

o que não poderia deixar de ocorrer porque o resultado do somatório deve ser um deslocamento. Portanto, estamos falando aqui de área em sentido abstrato, meramente formal. No gráfico da Figura 3.7, nenhuma das coordenadas tem dimensão de comprimento; mas, ao multiplicarmos os lados do retângulo cuja base é Δt e cuja altura é v_i , falamos que o resultado é uma área. Esse tipo de abstração, no qual a rigor está envolvida uma inconsistência dimensional, é um expediente muito usado em física. Feita essa ressalva, não usaremos mais aspas ao falar em áreas, ou às vezes em volumes, quando esse tipo de abstração for feita.

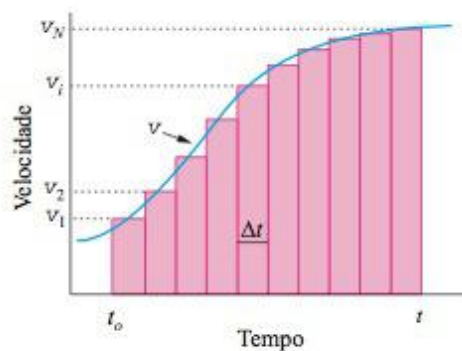


Figura 3.7

A curva contínua descreve a variação temporal da velocidade de uma partícula. Para o cálculo do deslocamento no intervalo de tempo entre t_0 e t , esse intervalo é dividido em N pequenos intervalos de duração $\Delta t = (t - t_0) / N$, durante os quais a velocidade é aproximada por um valor constante. O deslocamento da partícula entre t_0 e t é aproximadamente igual à área sombreada da figura.

Para o cálculo exato do deslocamento da partícula, toma-se o limite em que $N \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, $\Delta t \rightarrow 0$. No limite, o somatório contido na Equação 3.18 se transforma em uma integral. Portanto,

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v(t') dt'. \quad (3.20)$$

■ Deslocamento em movimento a uma velocidade variável

O deslocamento da partícula, expresso pela Equação 3.20, é igual à área sombreada na Figura 3.8.

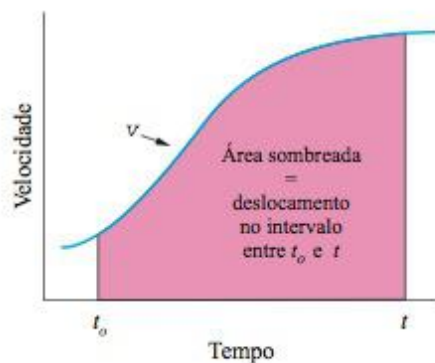


Figura 3.8

A área sobre a curva $v(t)$ entre t_0 e t é igual ao deslocamento da partícula nesse intervalo de tempo.

E-E Exercício-exemplo 3.3

■ Que tipo de média das velocidades dá a velocidade média? (*Opcional*) Um carro faz um percurso de comprimento d sem paradas. Na primeira metade do percurso, sua velocidade é v_1 , e na segunda metade sua velocidade é v_2 . Calcule a velocidade média do carro no percurso e compare-a com $(v_1 + v_2)/2$.

■ Solução

Os tempos gastos na primeira e segunda metades do percurso são respectivamente

$$t_1 = \frac{d}{2v_1}, \quad t_2 = \frac{d}{2v_2}.$$

A velocidade média em todo o percurso será

$$\bar{v} = \frac{d}{t_1 + t_2} = \frac{d}{\frac{d}{2v_1} + \frac{d}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Vê-se, portanto, que

$$\bar{v} \neq \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Resta nesse caso descobrir que tipo de média das velocidades v_1 e v_2 dá o valor $\bar{v}$. Naturalmente, a distância total percorrida pelo carro é

$$d = v_1 t_1 + v_2 t_2.$$

Por outro lado, pela definição da velocidade média, $\bar{v} = d/(t_1 + t_2)$. Portanto,

$$\bar{v} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = v_1 \frac{t_1}{t_1 + t_2} + v_2 \frac{t_2}{t_1 + t_2}.$$

Vê-se então que a velocidade média do carro não é a média aritmética das suas velocidades, mas sim a média ponderada das suas velocidades, na qual o peso de cada velocidade é a fração de tempo em que ela é mantida. Essa regra vale qualquer que seja a maneira como a velocidade varia no tempo. No caso geral, considerando a Equação 3.20, podemos escrever

$$\bar{v} = \frac{x - x_o}{t - t_o} = \frac{\int_{t_o}^t v(t') dt'}{t - t_o} = \int_{t_o}^t v(t') \frac{dt'}{t - t_o}.$$

Exercícios

E 3.8 Calcule o deslocamento do corpo cuja velocidade é representada na Figura 3.9 no intervalo entre 0 e 20 s.

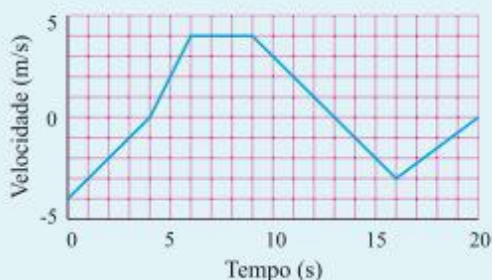


Figura 3.9

Variação da velocidade de um corpo em função do tempo.

E 3.9 Calcule a velocidade média, no intervalo entre 10 s e 20 s, do corpo cujo movimento é mostrado na Figura 3.9.

Seção 3.8 ■ Aceleração

Aceleração é uma grandeza ligada a mudanças de velocidade

■ Definição de aceleração média

Aceleração tem na física um significado diferente do entendido na linguagem comum.

Dizemos que um carro está muito acelerado quando sua velocidade é elevada, mesmo que ela tenha valor constante no tempo. Em contraste, na física aceleração é uma grandeza ligada a mudanças de velocidade. Mais especificamente, aceleração é a taxa de variação da velocidade com o tempo. Sejam v_1 e v_2 respectivamente as velocidades da partícula nos instantes t_1 e t_2 . A *aceleração média* da partícula no intervalo (t_1, t_2) é definida por

$$\bar{a} \equiv \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.21)$$

Por exemplo, um carro que vai do repouso a 100 km/h em 12,0 s tem nesse intervalo uma aceleração média igual a

$$\bar{a} = \frac{100 \text{ km/h} - 0}{12 \text{ s} - 0} = \frac{27,78 \text{ m/s}}{12 \text{ s}} = 2,31 \text{ m/s}^2.$$

Destaca-se a analogia entre as definições de aceleração média e velocidade média. Estendendo essa analogia, definimos *aceleração instantânea* na forma

■ Definição de aceleração instantânea

$$a(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad (3.22)$$

■ Aceleração é a taxa de variação da velocidade com o tempo

$$a(t) \equiv \frac{dv}{dt}. \quad (3.23)$$

Uma vez que a aceleração instantânea é a derivada em relação ao tempo da velocidade instantânea, e esta última é a derivada em relação ao tempo da coordenada x da partícula (Equação 3.12), a aceleração instantânea da partícula é a derivada segunda em relação ao tempo da sua coordenada:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.24)$$

O termo *instantâneo* é geralmente omitido na descrição do movimento. Quando se diz velocidade ou aceleração, quer-se dizer respectivamente velocidade instantânea ou aceleração instantânea

O termo *instantâneo* é geralmente omitido na descrição do movimento. Quando se diz velocidade ou aceleração, quer-se dizer respectivamente velocidade instantânea ou aceleração instantânea. Seguiremos tal linguagem simplificada e passaremos a falar em velocidade, velocidade média, aceleração e aceleração média.

E-E Exercício-exemplo 3.4

- Calcule a aceleração da partícula cujo movimento é descrito pela Figura 3.5 e Equação 3.13, no instante $t = 3,000 \text{ s}$.

■ Solução

Derivando a função $v(t)$ descrita pela Equação 3.14, obtemos

$$a(t) = 1,800 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} (t - 0,500 \text{ s})^2.$$

Portanto,

$$a(3,000 \text{ s}) = 1,800 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot (3,000 \text{ s} - 0,500 \text{ s})^2 = 11,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

E-E Exercício-exemplo 3.5

■ A coordenada de uma partícula varia na forma

$$x(t) = x_o + v_o t + \frac{A}{6}(t - t_o)^3, \quad (3.25)$$

sendo que x_o , v_o e A são constantes. Calcule $v(t)$ e $a(t)$

■ Solução

Tomando as derivadas primeira e segunda da função $x(t)$, obtemos respectivamente

$$v(t) = v_o + \frac{A}{2}(t - t_o)^2, \quad (3.26)$$

$$a(t) = A(t - t_o). \quad (3.27)$$

E-E Exercício-exemplo 3.6

■ Sendo $t_o = 5,00$ s, $A = 2,00$ m/s³, $v_o = -10,00$ m/s e $x_o = 50$ m na Equação 3.25, faça gráficos de $a(t)$, $v(t)$ e $x(t)$ no intervalo de tempo entre 0 e 10 s.

■ Solução

Os gráficos são apresentados nas Figuras 3.10, 3.11 e 3.12, respectivamente.

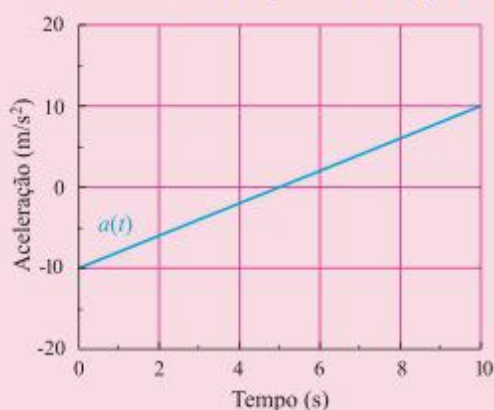


Figura 3.10

Aceleração da partícula cujo movimento é descrito pela Equação 3.25, com os parâmetros fornecidos no Exercício-exemplo 3.6.

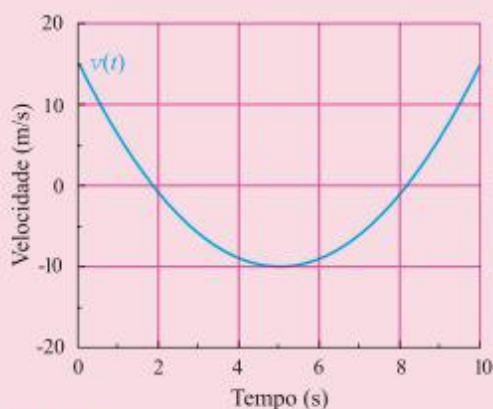


Figura 3.11

Velocidade da partícula cujo movimento é descrito pela Equação 3.25, com os parâmetros fornecidos no Exercício-exemplo 3.6.

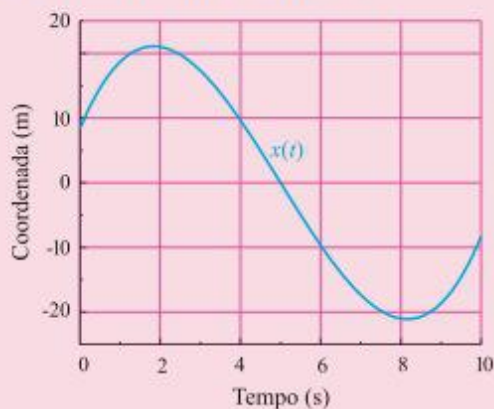


Figura 3.12

Coordenada da partícula cujo movimento é descrito pela Equação 3.25, com os parâmetros fornecidos no Exercício-exemplo 3.6.

O Exercício-exemplo 3.6 põe em evidência algumas ligações entre os gráficos de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ que merecem ser discutidos. Como vimos anteriormente, a velocidade é numericamente dada pela inclinação da curva que descreve $x(t)$. Portanto, quando essa inclinação é positiva, a velocidade é positiva (movimento para a direita) e quando a inclinação da curva é negativa a velocidade é negativa (movimento para a esquerda). As Figuras 3.11 e 3.12 mostram claramente essa conexão.

De modo análogo, a aceleração é numericamente dada pela inclinação da curva que descreve $v(t)$. Portanto, quando essa inclinação é positiva a aceleração é positiva, e quando a inclinação é negativa a aceleração é também negativa. Esses fatos são claramente expostos pela comparação entre as Figuras 3.10 e 3.11.

Onde a concavidade da curva que descreve $x(t)$ é positiva (algo assim: ) a aceleração é positiva, e onde a curva tem concavidade negativa (algo assim: ) a aceleração é negativa

Conforme vimos, a aceleração é a derivada segunda de $x(t)$. Por outro lado, há uma relação entre a derivada segunda de uma função e a concavidade da curva que a descreve: quando a derivada segunda é positiva, a concavidade é também positiva, e quando a derivada segunda é negativa a concavidade é negativa. Portanto, quando a aceleração é positiva, a curva que descreve $x(t)$ tem concavidade positiva, e quando a aceleração é negativa a curva tem concavidade negativa. Isto pode ser visto pela comparação das Figuras 3.10 e 3.12. No intervalo de tempo entre 0 e 5 s, a concavidade da curva que descreve $x(t)$ na Figura 3.12 é negativa e, como se vê na Figura 3.10, a aceleração é também negativa. Já no intervalo de tempo entre 5 s e 10 s, tanto a concavidade da curva de $x(t)$ quanto a aceleração são positivas.

Geralmente na linguagem comum se diz que um corpo está acelerando quando sua velocidade aumenta, e freando quando ela está diminuindo. É claro que estes conceitos se referem ao módulo da velocidade. No contexto da física, isto deve ser analisado com base nos sinais da aceleração e da velocidade. No movimento descrito pelas Figuras 3.10 a 3.12, por exemplo, para instantes posteriores a $t = 5$ s a aceleração é positiva. Entre 5 s e 8,1 s a velocidade é negativa (a partícula se move no sentido negativo do eixo das posições x). Como a velocidade e a aceleração têm sentidos opostos, a partícula está sendo freada. No intervalo de tempo entre 1,9 s e 5 s, no entanto, tanto a aceleração quanto a velocidade são negativas e então a partícula se acelera, pois aumenta o módulo de sua velocidade, que se torna cada vez mais negativa até o instante $t = 5$ s, quando a aceleração inverte seu sentido. Se a escolha do sentido positivo do eixo das posições fosse invertida, todas as grandezas $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ trocariam seus sinais, mas essas conclusões não mudariam.

Exercícios

E 3.10 A posição de um corpo varia segundo a equação $x = 50 \text{ m} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot (t - 2,0 \text{ s})^3$. Qual é a sua aceleração em $t = 0$?

E 3.11 Faça um gráfico da aceleração do corpo cuja velocidade é representada na Figura 3.9.

E3.12 Calcule a aceleração média, no intervalo entre 0 e 10 s, do corpo cujo movimento é mostrado na Figura 3.9.

E 3.13 Em que intervalo de tempo o corpo cujo movimento é mostrado na Figura 3.6 tem aceleração (A) positiva? (B) negativa?

E 3.14 Esboce gráficos da velocidade e da aceleração, em função do tempo, do corpo cujo movimento é mostrado na Figura 3.6.

Seção 3.9 ■ Movimento uniforme

Nesta seção e nas próximas estudaremos várias formas de movimento. O mais simples de todos é o *movimento uniforme*, no qual a velocidade da partícula é constante. Esse movimento é ilustrado na Figura 3.13. O deslocamento no intervalo de tempo de t_0 a t é

$$x - x_0 = v_0(t - t_0). \quad (3.28)$$

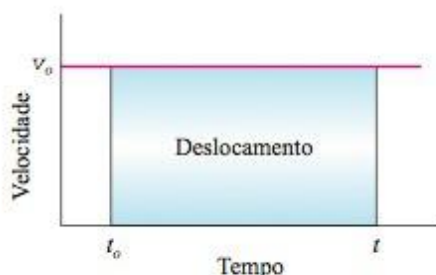


Figura 3.13

Movimento uniforme.

E-E Exercício-exemplo 3.7

■ Para medir a velocidade da bala de seu rifle, um atirador atira contra o tronco de uma árvore distante 100 m. Um detector de som, posicionado ao seu lado, é ligado a um sistema eletrônico que registra os instantes em que algum pulso de som é captado pelo detector. O intervalo de tempo entre o estampido do tiro e o som da colisão da bala com a árvore é de 0,715 s. Sabendo-se que a velocidade do som é de 334 m/s, qual é a velocidade da bala?

■ Solução

O tempo que o som leva no percurso da árvore até o detector é $t_s = \frac{100\text{m}}{334\text{m/s}} = 0,2994\text{ s}$.

Portanto, o tempo gasto no trajeto da bala é $t_b = 0,715\text{ s} - 0,2994\text{ s} = 0,4156\text{ s}$.

Dai, calculamos

$$v_b = \frac{100\text{m}}{0,4156\text{s}} = 241\text{m/s}.$$

Exercício

E 3.15 Uma partícula move-se sobre o eixo dos x a uma velocidade constante. Em $t = 2,0\text{ s}$, sua posição é $x = 9,0\text{ m}$, e em $t = 5,0\text{ s}$ sua posição é $x = 3,0\text{ m}$. Escreva a expressão para $x(t)$.

Seção 3.10 ■ Movimento uniformemente acelerado

O movimento uniformemente acelerado tem uma aceleração de valor constante, que tanto pode ser positiva quanto negativa

Por definição, o movimento uniformemente acelerado tem uma aceleração de valor constante, que tanto pode ser positiva quanto negativa. Seja a o valor da aceleração. Uma vez que a aceleração não muda no tempo, a aceleração média em qualquer intervalo de tempo é igual a a , ou seja, $\bar{a} = a$. Se em t_0 a velocidade tem o valor v_0 e em t seu valor é v , pela definição de aceleração média (Equação 3.21) obtemos

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0}, \quad (3.29)$$

e, portanto,

$$v = v_0 + a(t - t_0). \quad (3.30)$$

A conexão anteriormente feita entre o deslocamento da partícula e a área sob a curva que descreve $v(t)$ pode ser facilmente vista no caso do movimento uniformemente acelerado. A Figura 3.13 mostra o gráfico de $v(t)$ expressa pela Equação 3.30.

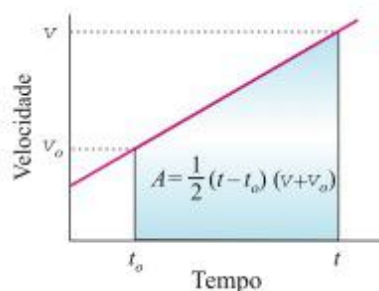


Figura 3.14

Comportamento da velocidade em um movimento uniformemente acelerado.

O deslocamento $x - x_0$ da partícula entre os instantes t_0 e t é igual à área A sombreada na figura:

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2} (t - t_0) [v(t) + v_0]. \quad (3.31)$$

As Equações 3.30 e 3.31 são suficientes para se resolver qualquer problema de movimento uniformemente acelerado. Entretanto, combinando essas duas equações podemos obter outras duas relações que podem ser muito úteis. Podemos usar a Equação 3.30 para eliminar $v(t)$ na Equação 3.31, e assim obtemos

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2} (t - t_0) \{v_0 + [v_0 + a(t - t_0)]\} \text{ ou} \\ x &= x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Podemos ainda usar $t - t_0 = (v - v_0)/a$ (da Equação 3.30) para substituir na 3.31 e obter:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0). \quad (3.33)$$

As Equações 3.32 e 3.33 são equivalentes a 3.30 e 3.31 e a escolha de qual delas utilizar é uma questão só de conveniência. Entretanto, deve-se perceber que a Equação 3.32 contém todas as informações sobre o movimento, pois fornece a posição em cada instante. Sua derivada fornece a velocidade em cada instante.

Algumas relações úteis podem ser facilmente obtidas para o movimento uniformemente acelerado. Escolhendo-se o tempo inicial $t_0 = 0$ e definindo-se o deslocamento $x - x_0 \equiv d$, para os casos em que $v_0 = 0$ a Equação 3.32 se simplifica para

$$d = \frac{1}{2} at^2. \quad (3.34)$$

Por outro lado, para essas condições a Equação 3.33 será

$$d = \frac{v^2}{2a}. \quad (3.35)$$

Analogamente, a distância que um corpo com velocidade inicial v_0 percorre até parar (velocidade final = 0), quando submetido a uma aceleração uniforme contrária à sua velocidade inicial (aceleração de frenagem), é

$$d = \frac{-v_0^2}{2a} \quad \text{ou} \quad |d| = \frac{v_0^2}{2|a|}. \quad (3.36)$$

■ Distância que um corpo uniformemente acelerado, partindo do repouso, percorre até atingir a velocidade v

■ Distância que um corpo com velocidade inicial v_0 percorre em uma frenada uniforme

E-E Exercício-exemplo 3.8

■ A variação no tempo da velocidade de uma partícula é mostrada na Figura 3.15. Calcule a aceleração da partícula e seu deslocamento no intervalo de tempo entre 2,0 s e 8,0 s.

■ Solução

A variação da velocidade no intervalo de tempo $\Delta t = 10 \text{ s} - 0 \text{ s} = 10 \text{ s}$ foi

$\Delta v = 20 \text{ m/s} - 80 \text{ m/s} = -60 \text{ m/s}$. Portanto, a aceleração, de acordo com a Equação 3.29, será

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-60 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = -6,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Para se determinar o deslocamento entre 2,0 s e 8,0 s pode-se usar a Equação 3.30 duas vezes para se determinarem as velocidades $v(2,0 \text{ s}) = 68 \text{ m/s}$ e $v(8,0 \text{ s}) = 32 \text{ m/s}$, e então utilizar a Equação 3.31 com $t_o = 2,0 \text{ s}$ e $t = 8,0 \text{ s}$ ou a Equação 3.33:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \times (8,0 \text{ s} - 2,0 \text{ s}) \times \left(68 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 32 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 300 \text{ m};$$

$$\Delta x = \frac{[v(8,0 \text{ s})^2 - v(2,0 \text{ s})^2]}{2a} = \frac{[(68 \text{ m/s})^2 - (32 \text{ m/s})^2]}{2 \times 6 \text{ m/s}^2} = 300 \text{ m}.$$

Poder-se-ia também utilizar a Equação 3.30 uma vez para determinar que $v(2,0 \text{ s}) = 68 \text{ m/s}$ e então usar a Equação 3.32:

$$\Delta x = 68 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 6,0 \text{ s} - \frac{1}{2} \times 6,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6,0 \text{ s})^2 = 408 \text{ m} - 108 \text{ m} = 300 \text{ m}.$$

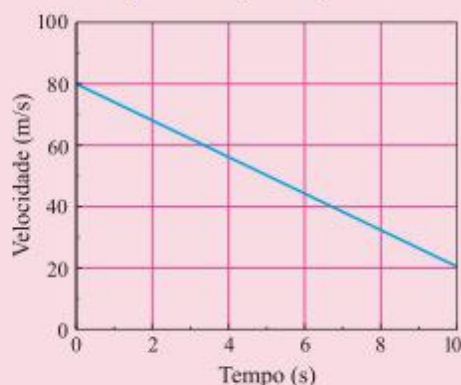


Figura 3.15
(Exercício-exemplo 3.8)

E-E Exercício-exemplo 3.9

■ Um carro, à velocidade inicial de 25,0 m/s (90 km/h), freia com aceleração constante e percorre 60,0 m até parar. Qual é a sua aceleração?

■ Solução

Pela Equação 3.36, a aceleração é negativa e tem módulo dado por

$$a = \frac{(25,0 \text{ m/s})^2}{2 \times 60 \text{ m}} = 5,21 \text{ m/s}^2.$$

E-E Exercício-exemplo 3.10

■ Um avião, partindo do repouso, tem aceleração uniforme na pista e percorre a distância de 800 m até levantar voo à velocidade de 360 km/h. Quanto tempo ele gasta nesse processo?

■ Solução 1

Pela Equação 3.35, a aceleração do avião vale

$$a = \frac{(360 \text{ km/h})^2}{2 \times 800 \text{ m}} = \frac{(100 \text{ m/s})^2}{2 \times 800 \text{ m}} = 6,25 \text{ m/s}^2,$$

e, portanto, o tempo gasto na aceleração é

$$t = \frac{v}{a} = \frac{100 \text{ m/s}}{6,25 \text{ m/s}^2} = 16,0 \text{ s}.$$

■ Solução 2

Pela Equação 3.31 vemos que

$$d = \frac{1}{2} vt \Rightarrow t = \frac{2d}{v} = \frac{2 \times 800 \text{ m}}{360 \text{ km/h}} = \frac{2 \times 800 \text{ m}}{100 \text{ m/s}} = 16,0 \text{ s}.$$

E-E Exercício-exemplo 3.11

■ Um carro, trafegando à velocidade de 30 km/h, está à distância de 50 m de uma avenida cuja largura é de 30 m quando o sinal de cruzamento com a avenida fica amarelo. Sabe-se que o sinal fica amarelo durante 6,0 s. A aceleração máxima do carro é de 2,3 m/s², e o motorista tem um tempo de reação $t_r = 0,60$ s antes de acelerá-lo. Conseguirá o veículo cruzar a avenida antes de o sinal ficar vermelho?

■ Solução

Vamos definir a origem das coordenadas (x) no ponto inicial do carro, quando o sinal fica amarelo. O movimento é uma composição de um movimento uniforme inicial, entre $t_o = 0$ e $t = t_r$, com velocidade constante igual a $v_o = 30$ km/h, e a partir daí um movimento uniformemente acelerado para o qual $t_o = t_r$. Supondo que o motorista imprima ao carro a aceleração máxima de 2,3 m/s², podemos calcular o tempo t necessário para que o carro cruze a avenida da seguinte maneira:

$$80 \text{ m} = v_o t_r + v_o (t - t_r) + \frac{1}{2} a (t - t_r)^2.$$

Como $v_o t_r = 8,3 \text{ m} \times 0,60 \text{ s} = 5,0 \text{ m}$, obtemos

$$75 \text{ m} = v_o (t - t_r) + \frac{1}{2} a (t - t_r)^2.$$

Resolvendo essa equação,

$$t - t_r = -\frac{v_o}{a} + \sqrt{\frac{v_o^2}{a^2} + \frac{150 \text{ m}}{a}}.$$

Substituindo os valores nesta equação,

$$t = 0,60 \text{ s} - \frac{8,33}{2,3} \text{ s} + \sqrt{\frac{69,4}{5,29} + \frac{150}{2,3}} \text{ s} = 5,2 \text{ s}.$$

Portanto, o carro conseguirá cruzar em tempo a avenida.

Exercícios

E3.16 Um corpo é atirado verticalmente para cima com velocidade v_o , a partir do ponto $y = y_o$, e permanece apenas sob a ação da gravidade até atingir o solo. Escreva a expressão para $y(t)$ no intervalo de tempo em que ele permanece no ar.

E3.17 Um carro leva 12,0 s para atingir a velocidade de 100 km/h, partindo do repouso. Supondo que sua aceleração seja constante, quanto ele se desloca até atingir essa velocidade?

E3.18 Um foguete é lançado verticalmente com velocidade inicial igual a zero e aceleração constante até atingir a altitude de 600 km, quando sua velocidade é de 7,23 km/s. Qual é sua aceleração nesse trajeto?

Seção 3.11 ■ Relações de simetria no movimento uniformemente acelerado (opcional)

As Equações 3.35 e 3.36 são conseqüências de uma propriedade geral de simetria do movimento uniformemente acelerado. Essa propriedade pode ser vista na Figura 3.16, que mostra um gráfico da posição $x(t)$ em função do tempo t tal como descrito pela Equação 3.32. Veja que essa função tem um mínimo, se $a > 0$ (ou máximo se $a < 0$) no instante $t_m = t_o - v_o/a$. Nesse momento a posição será $x_m = x_o + v_o^2/2a$. Mas a figura mostra que para qualquer intervalo de tempo t' transcorrido após o instante t_m a distância percorrida pela partícula é a mesma que ela percorreu durante o tempo t' anterior a t_m . Matematicamente isso pode ser visto se utilizarmos a nova variável $t' = t - t_m$ na Equação 3.32; e o resultado será ainda mais simples se utilizarmos $x' = x - x_m$ para as posições. Quando t e x na Equação 3.32 são substituídos por $t' + t_m$ e $x' + x_m$, respectivamente, obtém-se:

$$x' = \frac{1}{2} at'^2. \quad (3.37)$$

As Equações 3.30 e 3.33 também se simplificam para:

$$v(t') = at'; \quad (3.38)$$

e

$$v^2(t') = 2ax'. \quad (3.39)$$

Estas equações nos permitem perceber claramente a simetria do movimento. Para os instantes t' e $-t'$ a partícula está na mesma posição x' , pois $x'(t') = x'(-t')$, e tem velocidades iguais em módulo mas de sentidos contrários, porque $v(t') = -v(-t')$. Isso evidencia o resultado das Equações 3.36 de que a distância percorrida pela partícula, saindo do repouso até atingir uma velocidade v , é a mesma que ela percorre para parar se tinha anteriormente uma velocidade inicial $-v$. Da Equação 3.38 fica claro também que os tempos gastos nessas duas situações são iguais.

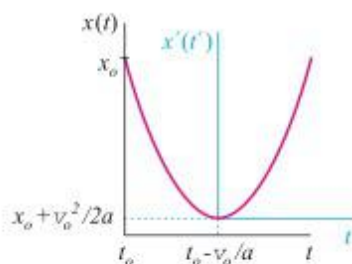


Figura 3.16

Seção 3.12 ■ Movimento uniformemente acelerado — análise pelo cálculo (opcional)

As ferramentas do cálculo tornam a análise do movimento uniformemente acelerado muito direta e simples. Com efeito, integrando a Equação 3.23 para o caso particular em que $a(t) = a$ (valor constante), obtemos

$$v(t) = v_o + \int_{t_o}^t a dt' = v_o + a(t - t_o). \quad (3.40)$$

Substituindo este valor de $v(t)$ na Equação 3.20 — que resulta da integração da Equação 3.12 —, obtemos

$$x = x_o + \int_{t_o}^t v_o dt' + \int_{t_o}^t a(t' - t_o) dt', \quad (3.41)$$

$$x = x_o + v_o t' \Big|_{t_o}^t + \frac{1}{2} a (t' - t_o)^2 \Big|_{t_o}^t = x_o + v_o (t - t_o) + \frac{1}{2} a (t - t_o)^2, \quad (3.42)$$

que reproduz a Equação 3.32.

Outra maneira de tratar a Equação 3.23 é multiplicá-la por $v(t)$: $av(t) = v(t) \frac{dv(t)}{dt}$.

O lado direito dessa relação é igual a $\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$. Se fizermos uma integral dessa relação para tempos variando de t_o a t quando v varia de v_o a v , teremos:

$$a \int_{t_o}^t v(t') dt' = \frac{1}{2} \int_{v_o}^{v(t)} v(t) dv \Rightarrow a(x - x_o) = \frac{1}{2} (v^2 - v_o^2) \text{ ou} \quad (3.43)$$

$$v^2 - v_o^2 = 2a(x - x_o),$$

que reproduz a Equação 3.33.

Seção 3.13 ■ Queda livre

A queda livre de corpos sujeitos à gravidade da Terra, na proximidade de sua superfície, foi objeto de intensa especulação na Grécia. Segundo os gregos, os corpos em queda livre realizavam um movimento uniformemente acelerado, mas, como vimos no Capítulo 1 (*O que é a Física*), a definição grega — melhor dizer aristotélica — de movimento uniformemente acelerado era distinta da posteriormente adotada por Galileu, e desde então empregada pelos físicos. Para os gregos, no movimento uniformemente acelerado — que Aristóteles denominou *movimento natural dos corpos pesados* —, característico dos corpos em queda, o deslocamento do corpo, para o caso de velocidade inicial nula, seria proporcional ao tempo decorrido. As experiências de Galileu, feitas com esferas rolando em rampas, demonstraram que o deslocamento é proporcional ao quadrado do tempo decorrido. Como se vê da Equação 3.34, esta é exatamente a dependência temporal do deslocamento de um corpo que parte do repouso e cuja velocidade cresce proporcionalmente ao tempo. Por processo de extrapolação a partir de seus experimentos, Galileu concluiu que os corpos em queda livre realizam movimento uniformemente acelerado, no sentido moderno da terminologia. Experiências posteriores confirmaram inteiramente a extrapolação feita por Galileu. Ignorando-se a resistência que o ar oferece ao movimento, todos os corpos em um dado ponto da Terra caem com a mesma aceleração g , denominada *aceleração da gravidade*. O valor de g varia com a altitude, a latitude, e em menor grau com a composição e morfologia local das rochas, e na atualidade pode ser medido, por meio de um instrumento denominado *gravímetro*, com erro não maior que uma parte em 10^9 . O valor típico da aceleração da gravidade é

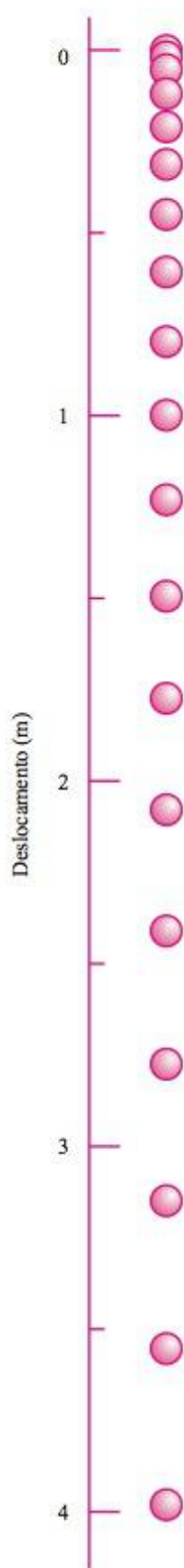


Figura 3.17

Vistas, tomadas a cada 50,0 ms, de uma esfera em queda livre, partindo do repouso.

Se um corpo cai partindo do repouso no instante inicial $t_0 = 0$, do ponto de coordenada $y_0 = h$, a variação da sua coordenada y com o tempo pode ser obtida imediatamente fazendo-se $a = -g$ na Equação 3.42 (veja que a aceleração está orientada no sentido contrário ao do eixo da coordenada y) e, obviamente, trocando-se x por y :

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (3.44)$$

A Figura 3.17 mostra a sequência, simulada em computador, de uma esfera em queda livre. O intervalo de tempo entre as imagens consecutivas da esfera é de 50,0 ms, e a primeira imagem mostra a esfera no instante inicial.

A Figura 3.18 mostra a variação no tempo do deslocamento $h - y$ da esfera cuja queda é mostrada na Figura 3.17. A linha ocre mostra a parábola descrita por $d = h - y = gt^2 / 2$.

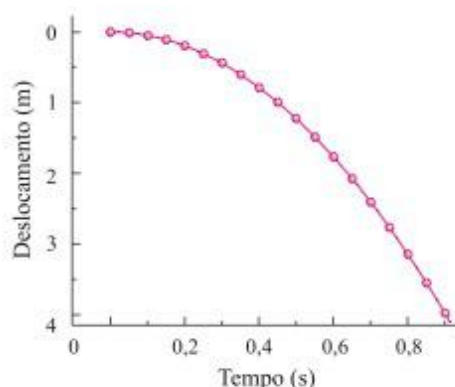


Figura 3.18

Variação no tempo do deslocamento da esfera em queda livre mostrada na Figura 3.17.

E-E Exercício-exemplo 3.12

■ Calcule o tempo que um corpo gasta para cair de uma altura h , partindo do repouso, e sua velocidade final.

■ Solução

Fazendo $y = 0$ na Equação 3.44, obtemos

$$h = \frac{1}{2}gt_c^2, \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (3.45)$$

A velocidade final será

$$v_f = gt_c.$$

Substituindo o valor de t_c , obtemos

$$v_f = \sqrt{2gh}. \quad (3.46)$$

■ Tempo de queda livre da altura h

■ Velocidade final da queda livre

E-E Exercício-exemplo 3.13

■ Considere uma pedra atirada verticalmente para cima a uma velocidade inicial de 30,0 m/s. Calcule a variação temporal da velocidade e da altura da pedra até completar-se a sua queda e faça gráficos de $v(t)$ e $y(t)$.

■ Solução

Sejam $t_o = 0$ e $y_o = 0$, ou seja, o solo de onde o corpo é atirado é tomado como origem das coordenadas e a contagem do tempo inicia-se no instante de sua partida. Trocando x por y e fazendo $a = -g$ nas Equações 3.30 e 3.32, obtemos

$$v = v_o - gt, \quad (3.47)$$

$$y = v_o t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (3.48)$$

Para facilitar a interpretação dos gráficos de $v(t)$ e $y(t)$, utilizaremos nas Equações 3.47 e 3.48 o valor inteiro $g = 10 \text{ m/s}^2$, assim obtendo

$$v = 30,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times t,$$

$$y = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} t - \frac{1}{2} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times t^2.$$

A Figura 3.19 mostra os gráficos de $v(t)$ e $y(t)$. Um pouco de discussão sobre a figura será útil para esclarecer alguns aspectos conceituais do movimento, cujo entendimento nem sempre é obtido imediatamente pelo iniciante. No gráfico de $v(t)$ (Figura 3.19A) vemos que a velocidade da pedra é inicialmente positiva, decai continuamente em módulo até, em $t = 3,0 \text{ s}$, atingir o valor nulo; como se vê no gráfico de $y(t)$, exatamente nesse instante a pedra atinge sua altura máxima de 45 m. A partir de $t = 3,0 \text{ s}$, a pedra inicia seu movimento de queda. Sua velocidade, inicialmente nula, torna-se crescentemente negativa, e em $t = 6,0 \text{ s}$ a pedra atinge a velocidade de -30 m/s , ou seja, a mesma velocidade com que foi atirada, exceto quanto ao sinal, que agora é negativo; do gráfico de $y(t)$ vê-se que em $t = 6,0 \text{ s}$ a pedra tem altura nula, ou seja, nesse instante ela atinge o solo, assim completando sua queda. O processo de queda gasta exatamente os mesmos 3,0 s que a pedra gastou na subida. Isto decorre da simetria de $y(t)$ contida na Equação 3.48 e já descrita anteriormente.

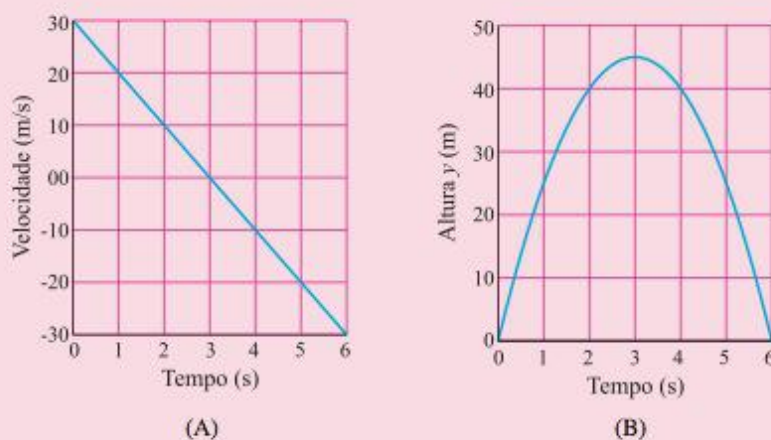


Figura 3.19

Variação temporal da velocidade (A) e da altura (B) de uma pedra atirada verticalmente para cima.

(continua)

Durante a subida da pedra, sua aceleração tem sentido oposto ao da velocidade, e a pedra sofre uma frenagem; já na descida, a aceleração e a velocidade têm o mesmo sinal negativo, e a velocidade escalar da pedra aumenta com o tempo. Durante todo o processo, tanto na subida quanto na descida, e também no ponto de altura máxima, quando a pedra inverte o sentido da sua velocidade, a aceleração mantém seu valor constante, igual a $-g$. A parada da pedra no ponto de altura máxima não dura nenhum lapso de tempo, é uma parada instantânea. Isto fica claro quando se examina o gráfico de $v(t)$: a inclinação da curva, que mede sua aceleração, mantém-se a mesma durante todo o tempo, ou seja, a aceleração não cessa para que a pedra passe do processo de subida para o de descida. Portanto, no ponto de altura máxima, a pedra tem velocidade nula mas sua aceleração tem o mesmo valor $-g$ de todo o movimento.

E-E Exercício-exemplo 3.14

■ Para medir a aceleração da gravidade na Lua, onde não existe atmosfera, uma equipe de exploradores usa o experimento ilustrado na Figura 3.20. Um dispositivo atira uma esferinha verticalmente para cima, a partir da altura $y = 0$, e envia um sinal a um relógio para iniciar a contagem do tempo. Na altura $y = h$, um feixe de laser é interceptado pela esferinha, no instante t_1 quando ela sobe e no instante t_2 quando ela desce. A interrupção da luz no detector gera um sinal enviado ao relógio, que registra os tempos t_1 e t_2 . Calcule o valor de g a partir dos dados obtidos no experimento.

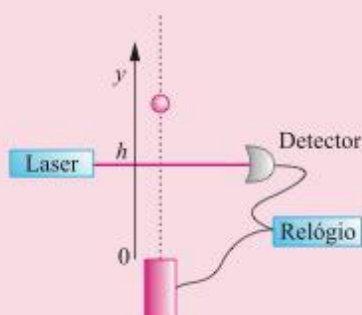


Figura 3.20

Esquema de um arranjo experimental para se medir a aceleração da gravidade. (Exercício-exemplo 3.14)

■ Solução

A coordenada y da esferinha passa pelo mesmo valor h nos tempos diferentes, simétricos em relação ao vértice da parábola $y(t)$, e que podem ser obtidos pela solução da equação

$$h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Obtemos

$$t = \frac{v_o}{g} \pm \sqrt{\frac{v_o^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}$$

Portanto,

$$t_1 = \frac{v_o}{g} - \sqrt{\frac{v_o^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}, \quad t_2 = \frac{v_o}{g} + \sqrt{\frac{v_o^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}.$$

Usando o fato de que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, obtemos

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow g = \frac{2h}{t_1 t_2}.$$

Exercícios

E 3.19 Mostre que uma pedra atirada para cima leva o mesmo tempo na subida e na descida.

E 3.20 Alguns jogadores de futebol como Éder e Nelinho conseguiam chutar a bola com velocidade de 130 km/h. Se a bola fosse chutada para cima com tal velocidade, (A) qual seria a altura atingida? (B) Qual seria o seu tempo de permanência no ar?

E 3.21 Em um dado planeta, em uma queda livre partindo do repouso um corpo gasta metade do tempo que gastaria na Terra para cair da mesma altura. Quanto vale a aceleração da gravidade nesse planeta?

E 3.22 Um corpo cai da altura h , com velocidade inicial v_0 para baixo. Calcule (A) o tempo de queda e (B) a velocidade final do corpo.

Seção 3.14 ■ Movimento relativo

Até aqui, estudamos o movimento de um corpo em relação a um eixo de coordenadas fixo. Estudaremos agora o movimento de um corpo em relação a outro também em movimento. Manteremos a restrição de que ambos os corpos se movem sobre a mesma linha reta, digamos, o eixo dos x . As coordenadas dos dois corpos nesse sistema de eixos serão $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente. A diferença entre as coordenadas dos dois corpos será

$$X(t) = x_2(t) - x_1(t). \quad (3.49)$$

A velocidade do corpo 2 em relação ao corpo 1 — ou, em outros termos, a velocidade do corpo 2 em um referencial no qual o corpo 1 está parado — será

$$V = \frac{dX}{dt} = \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}, \quad (3.50)$$

ou

$$V = v_2 - v_1. \quad (3.51)$$

A Equação 3.51 exprime algo que possivelmente é bastante óbvio para você. Por exemplo, se o carro 2 segue na estrada reta à velocidade de 100 km/h e o carro 1 segue no mesmo sentido à velocidade de 80 km/h, a velocidade do carro 2 em relação ao carro 1 é

$$V = 100 \text{ km/h} - 80 \text{ km/h} = 20 \text{ km/h}. \quad (3.52)$$

Já se os dois carros viajam em sentidos opostos, supondo que a velocidade do carro 2 seja positiva, obtemos

$$V = 100 \text{ km/h} - (-80 \text{ km/h}) = 180 \text{ km/h}. \quad (3.53)$$

Essa descrição do movimento relativo, por mais óbvia que nos pareça, não é válida quando as velocidades são significativas em relação à velocidade da luz no vácuo, cujo valor é aproximadamente 300 000 km/s, ou $3,00 \times 10^8$ m/s. A teoria da relatividade corrige a descrição do movimento relativo, e a expressão correta para a Equação 3.51 é

$$V = \frac{v_2 - v_1}{1 - v_1 v_2 / c^2}. \quad (3.54)$$

No caso do movimento dos objetos de nossa observação diária, a correção é muito pequena. Tomando o caso dos dois automóveis que acabamos de analisar, considerando que

$$\frac{80 \text{ km/h} \times 100 \text{ km/h}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = \frac{6,15 \times 10^2}{9 \times 10^{16}} = 6,8 \times 10^{-15},$$

as Equações 3.52 e 3.53 são corrigidas respectivamente para

$$V' = \frac{20 \text{ km/h}}{1 - 6,8 \times 10^{-15}} = 20 \text{ km/h} \times (1 + 6,8 \times 10^{-15}) = 20 \text{ km/h} + 1,4 \times 10^{-13} \text{ km/h}.$$

e

$$V' = \frac{180 \text{ km/h}}{1 + 6,8 \times 10^{-15}} = 180 \text{ km/h} \times (1 - 6,8 \times 10^{-15}) = 180 \text{ km/h} - 1,2 \times 10^{-12} \text{ km/h}.$$

Fica então evidente que a correção na velocidade relativa imposta pela teoria da relatividade é pequena demais para ser percebida. Esta é exatamente a razão pela qual a relatividade foi desenvolvida tardiamente.

Consideremos agora dois elétrons passando um pelo outro em sentidos opostos, a velocidades cujos valores absolutos sejam ambos iguais a $c/2$. Neste caso, a velocidade relativa entre os dois elétrons será

$$V' = \frac{c/2 + c/2}{1 + \frac{(c/2)^2}{c^2}} = \frac{c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4c}{5}, \quad (3.55)$$

o que é bastante distinto do valor $V = c$ previsto pela cinemática clássica.

E-E Exercício-exemplo 3.15

■ O motorista de um carro que trafega em uma reta à velocidade de 80 km/h avista um caminhão vindo em direção oposta, passando sobre uma ponte que ele sabe estar à distância de 2,0 km, e 40 s após isso cruza por ele. Qual era a velocidade do caminhão, supondo-se que ela se manteve constante?

■ Solução

Sejam v_1 a velocidade do carro e v_2 a velocidade do caminhão, em relação ao referencial da estrada. A velocidade do carro em relação ao caminhão é $V = v_1 - v_2$, e com tal velocidade relativa a distância $d = 2,0$ km foi percorrida em $t = 40$ s. Logo,

$$V = \frac{d}{t} = \frac{2,0 \text{ km}}{40 \text{ s}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Portanto,

$$v_1 - v_2 = 180 \text{ km/h} \Rightarrow v_2 = v_1 - 180 \text{ km/h} = 80 \text{ km/h} - 180 \text{ km/h} = -100 \text{ km/h}.$$

O valor negativo em v_2 expressa o fato de que a velocidade do caminhão é oposta à do carro.

E-E Exercício-exemplo 3.16

■ Um carro viaja atrás de um caminhão lento, ambos à velocidade constante v_1 , em uma estrada de mão dupla. A distância do carro até a dianteira do caminhão é d . Em dado instante, o carro entra no início de uma reta e seu motorista avista um carro vindo na direção oposta à velocidade constante v_2 , a uma distância D . O motorista imprime ao carro uma aceleração constante a para realizar a ultrapassagem. Qual é o valor mínimo de a para que a ultrapassagem seja bem-sucedida? Despreze o comprimento do carro.

■ Solução

Sendo $t = 0$ o início da arrancada para a ultrapassagem e $x = 0$ sua posição nesse instante, as posições do carro que realiza a ultrapassagem, da frente do caminhão e do outro carro são, respectivamente,

$$x_1(t) = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad X(t) = d + v_1 t, \quad x_2(t) = D - v_2 t.$$

A ultrapassagem se completará no instante t_u dado por

$$v_1 t_u + \frac{1}{2} a t_u^2 = d + v_1 t_u, \quad t_u = \sqrt{\frac{2d}{a}}.$$

As coordenadas dos dois carros nesse instante serão

$$x_1(t_u) = d + v_1 \sqrt{\frac{2d}{a}},$$

$$x_2(t_u) = D - v_2 \sqrt{\frac{2d}{a}}.$$

Para que a ultrapassagem seja bem-sucedida o carro 1 não pode atingir o carro 2.

Então, $x_1(t_u) < x_2(t_u)$. Portanto,

$$d + v_1 \sqrt{\frac{2d}{a}} < D - v_2 \sqrt{\frac{2d}{a}}.$$

Finalmente,

$$a > 2 \left(\frac{v_1 + v_2}{D - d} \right)^2 d.$$

Exercícios

E 3.23 O piloto de um avião pretende fazer um percurso de 700 km em 50 min. Se o avião voa contra um vento de 80 km/h, qual deve ser a velocidade do avião em relação ao ar?

E 3.24 Numa corrida entre uma criança e um corredor olímpico, este dá uma frente de 100 m à criança. Ele corre à velocidade de 10,0 m/s, o dobro da velocidade da criança. (A) Quanto tempo o corredor leva para alcançar a criança? (B) Quanto tempo leva o corredor para ficar 100 m à frente da criança? (C) Refaça o exercício para o caso em que o corredor faz 10,0 m/s e a criança 2,00 m/s.

E 3.25 Dois automóveis viajam a velocidades médias iguais a 80 km/h e 100 km/h respectivamente. O carro mais veloz está no km 220 enquanto o outro está no km 210. Em qual km provavelmente ocorreu a ultrapassagem?

PROBLEMAS

P 3.1 Um carro faz um percurso de comprimento d sem paradas em um tempo t . Na primeira metade do tempo, sua velocidade é v_1 , e na segunda metade sua velocidade é v_2 . Calcule a velocidade média do carro no percurso e compare-a com $(v_1 + v_2)/2$.

P 3.2 Duas pessoas fazem de carro o percurso de 740 km entre Belo Horizonte e Brasília. Na metade do caminho, uma passa a direção do carro à outra e desde então a velocidade média do carro aumenta em 20%. O tempo total de viagem é de 8,00 h. Qual foi a velocidade média na primeira metade do percurso?

P 3.3 Estime a velocidade no instante $t = 10$ s do corpo cuja aceleração é mostrada na Figura 3.21, supondo que sua velocidade inicial seja nula.

P 3.4 A aceleração de um corpo é mostrada na Figura 3.21. Esboce gráficos da velocidade e do deslocamento do corpo em função do tempo, supondo que sua velocidade inicial seja nula.

P 3.5 Na cobrança do pênalti, no jogo de futebol, a bola é chutada à distância de 11 m do gol, e a velocidade típica da bola

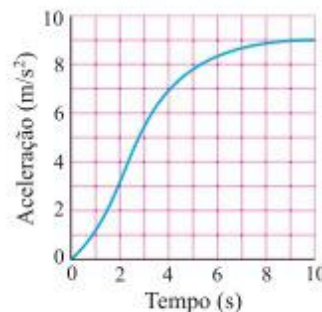


Figura 3.21
(Problema 3.3).

é 100 km/h. O tempo que o goleiro gasta para cair é aproximadamente igual ao tempo que um objeto gasta para cair de uma altura $h/2$, sendo h a altura do goleiro. Calcule (A) o tempo que a bola leva no trajeto até o gol e (B) o tempo que o goleiro gasta para cair. (C) É possível que o goleiro pegue uma bola rasteira sem pular antes do chute? (Observação: o valor de h deve ser estimado.)

P 3.6 Um corpo cai da altura h , partindo do repouso. Os tempos gastos na primeira e segunda metades da queda são t_1 e t_2 , respectivamente. Calcule t_2/t_1 .

P 3.7 Um corpo cai da altura de 50,0 m, partindo do repouso. Quanto ele percorre no último segundo da queda?

P 3.8 Um objeto cai do alto de um edifício, e durante o último segundo de queda percorre 50,0 m. Qual é a altura do edifício?

P 3.9 A aceleração dos metrô, tanto na arrancada como na freada, é usualmente limitada a $a = 1,3 \text{ m/s}^2$ (em valor absoluto), para maior segurança dos passageiros que estão viajando em pé. Por isso, no percurso entre duas estações separadas por uma pequena distância d , o trem não consegue atingir grandes velocidades. (A) Mostre que o menor tempo de percurso é obtido se o trem tem aceleração a na primeira metade do percurso e $-a$ na segunda metade do mesmo. (B) Calcule a velocidade máxima $v_{\text{máx}}$ atingida pelo trem. (C) Calcule $v_{\text{máx}}$ para o caso em que $d = 1,00 \text{ km}$.

P 3.10 Uma bala à velocidade de 240 m/s atinge um bloco de madeira e nele penetra 3,0 cm. (A) Supondo-se que a aceleração da bala fosse constante, qual seria o seu valor durante a colisão, e (B) quanto duraria a colisão? (C) Na realidade, a aceleração da bala não é constante durante a colisão. Nesse caso, seu valor médio corresponde ao calculado no item (A) do problema?

P 3.11 A velocidade de um corpo varia segundo a equação $v = 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^4$. (A) Qual é a aceleração do corpo no instante $t = 2,0 \text{ s}$? (B) Qual é o seu deslocamento no intervalo entre $t = 2,00 \text{ s}$ e $t = 4,00 \text{ s}$?

P 3.12 Um corpo é atirado verticalmente para baixo com velocidade v_0 da altura h . Nos instantes t_1 e t_2 o corpo está, respectivamente, nas alturas y_1 e y_2 . Calcule h e v_0 .

P 3.13 A posição de um corpo varia segundo a equação $x = A \cos \omega t$. (A) Calcule a velocidade e a aceleração do corpo no instante t . (B) Faça um gráfico de x , da velocidade e da aceleração para valores de ωt variando entre 0 e 4π .

P 3.14 A posição de um corpo varia segundo a equação $x = A \sin \omega t$. Mostre que $x = -a/\omega^2$, sendo a a aceleração do corpo.

P 3.15 Questão: Imagine que na Figura 3.9 o eixo vertical fosse a coordenada x do corpo e não sua velocidade. Você veria algum absurdo na figura?

P 3.16 Dois carros partem simultaneamente do repouso de pontos separados por 300 m, indo um em direção ao outro. Um carro tem aceleração constante de $2,00 \text{ m/s}^2$ e o outro tem aceleração constante de $-3,00 \text{ m/s}^2$. (A) Quanto tempo os carros levam para passar um pelo outro? (B) Quanto o carro mais rápido se desloca até esse encontro?

P 3.17 Um carro está parado no sinal luminoso. Quando o sinal abre, o carro arranca com aceleração de $3,0 \text{ m/s}^2$, e exatamente nesse instante outro carro o ultrapassa à velocidade de 40 km/h . Tanto a aceleração do carro que arranca quanto a velocidade do carro que vem de trás são mantidas constantes durante 10 s. (A) Faça um gráfico das posições dos dois carros. (B) Calcule a distância percorrida até que o carro acelerado ultrapasse o outro.

P 3.18 Dois carros trafegam em sentidos opostos em um trecho reto da estrada, às velocidades v_1 e $-v_2$, respectivamente. Em $t = 0$, os dois carros estão nas posições x_{10} e $x_{20} = x_{10} + d$. (A) Em que instante se dará o cruzamento dos automóveis? (B) Em que posição se dará o cruzamento?

P 3.19 Um carro viaja à velocidade constante v e sua frente está à distância d da traseira de um caminhão que viaja à velocidade constante V . O carro tem comprimento l e o caminhão tem comprimento L . Quanto o carro se deslocará até ultrapassar o caminhão?

P 3.20 Um pára-quedista salta, e um certo tempo depois está à velocidade constante v e um nível h abaixo do avião. Nesse momento um segundo pára-quedista salta e só abre seu pára-quedas quando alcança a altitude do primeiro. Quanto tempo ele permanece em salto livre?

P 3.21 Uma pedra é solta, a uma velocidade inicial nula, de uma altura h . Um tempo T depois, outra pedra é atirada para baixo à velocidade inicial v_0 , do mesmo ponto inicial da primeira pedra. Qual deve ser o valor mínimo de v_0 para que as duas pedras colidam no ar?

P 3.22 Um próton com velocidade de $0,80c$ é perseguido por um elétron com velocidade de $0,90c$. Qual é a velocidade do elétron relativamente à do próton?

P 3.23 Dois prótons viajam na mesma direção e sentidos opostos a velocidades de valor $0,800c$. Qual é a velocidade relativa entre eles?

P 3.24 Duas pessoas se encontram no escuro, e cada qual acende sua lanterna para iluminar a outra, de modo que os dois feixes de luz caminham na mesma direção em sentidos opostos. Qual é a velocidade V de um feixe em relação ao outro?

P 3.25 Um barco consegue a velocidade máxima v em relação à água e seu piloto tem de subir por um rio até a distância d , e depois retornar ao ponto de origem. Se a corrente do rio tem velocidade escalar u (menor que v), qual é tempo mínimo requerido para tal viagem?

P 3.26 Uma escada rolante tem comprimento L . Quando a escada está parada, uma criança consegue subi-la em um tempo t . (A) Em quanto tempo a criança consegue subir a escada quando esta se move à velocidade constante u , se $u < L/t$? (B) Se $u > L/t$, a criança consegue subir a escada?

Respostas dos exercícios

E 3.1 98 km/h

E 3.2 (A) 1,00 m/s; (B) 7,00 m/s

E 3.3 $\bar{v} = 0$, $|\bar{v}| = 208 \text{ km/h}$

E 3.4 (A) 22 m/s; (B) 10 m/s

E 3.5 (A) 5 s e 14 s; (B) 0; (C) 9,6 s

E 3.6 (A) zero; (B) zero

E 3.7 -1,7 m/s

E 3.8 5,5 m

E 3.9 -0,60 m/s

E 3.10 -12 m/s²

E 3.12 0,80 m/s²

E 3.13 (A) (10 s, 20 s); (B) (0, 10 s)

E 3.15 $x(t) = 13\text{m} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} t$

E 3.16 $y(t) = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$

E 3.17 167 m

E 3.18 $a = 43,6 \text{ m/s}^2$

E 3.20 (A) 67 m; (B) 7,4 s

E 3.21 $g_{\text{planeta}} = 4g_{\text{Terra}}$

E 3.22 $t = \left(\sqrt{v_o^2 + 2gh} - v_o \right) / g$, $v = \sqrt{v_o^2 + 2gh}$

E 3.23 920 km/h

E 3.24 (A) 20 s; (B) 40 s; (C) $t_1 = 12,5 \text{ s}$; $t_2 = 25,0 \text{ s}$

E 3.25 km 170

Respostas dos problemas

P 3.1 $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$

P 3.2 84,8 km/h

P 3.3 65 m/s

P 3.5 (A) 0,4 s; (B) 0,42 s; (C) Não.

P 3.6 0,41

P 3.7 $d = 26,4 \text{ m}$

P 3.8 154 m

P 3.9 (B) $\sqrt{ad}$; (C) 130 km/h.

P 3.10 (A) $a = 0,6 \times 10^5 \text{ m/s}^2$; (B) $t = 2,5 \times 10^{-4} \text{ s}$; (C) Não.

P 3.11 (A) $6,4 \text{ m/s}^2$; (B) 51,7 m

P 3.12 $h = \frac{y_1 t_2 - y_2 t_1}{t_2 - t_1} - \frac{1}{2} g t_2 t_1$; $v_o = \frac{y_2 - y_1}{t_1 - t_2} - \frac{1}{2} g (t_1 + t_2)$.

P 3.13 (A) $v(t) = -\omega A \sin(\omega t)$; $a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t)$.

P 3.15 Sim. A aceleração nos instantes $t = 4 \text{ s}$, $t = 6 \text{ s}$, $t = 9 \text{ s}$ e $t = 16 \text{ s}$ seria infinita.

P 3.16 (A) 11,0 s; (B) -180 m

P 3.17 82 m

P 3.18 (A) $t_c = \frac{d}{v_1 + v_2}$. (B) $x_c = x_{i0} + \frac{v_1}{v_1 + v_2} d$.

P 3.19 $\frac{v}{v-v} (d+l+L)$

P 3.20 $t = \frac{v}{g} + \sqrt{\left(\frac{v}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$

P 3.21 $v_{\min} = \frac{2h - g(\sqrt{2h/g} - T)^2}{2(\sqrt{2h/g} - T)}$

P 3.22 0,36c

P 3.23 0,976c

P 3.24 $V = c$

P 3.25 $t_{\min} = \frac{2vd}{v^2 - u^2}$

P 3.26 (A) $T = \frac{L}{L/t - u}$; (B) Não.





Vetores

Seção 4.1 ■ Introdução,	66
Seção 4.2 ■ Vetores,	66
Seção 4.3 ■ Operações com vetores — método geométrico,	67
Seção 4.4 ■ Representação analítica de vetores,	70
Seção 4.5 ■ Produto escalar de vetores,	74
Seção 4.6 ■ Produto vetorial de vetores,	78
Seção 4.7 ■ Porque o produto vetorial é um pseudovetor,	80
Seção 4.8 ■ Produto misto de vetores,	82
Seção 4.9 ■ O que é a isotropia do espaço,	83
Seção 4.10 ■ Caráter tensorial das grandezas físicas,	84
Seção 4.11 ■ Esquerdo e direito são equivalentes?,	85
Problemas,	86
Respostas dos exercícios,	87
Respostas dos problemas,	88

Seção 4.1 ■ Introdução

As entidades mensuráveis que aparecem nas leis físicas são denominadas **grandezas físicas**.

Como vimos no Capítulo 2 (*Medidas*), a física lida com grandezas, ou seja, entidades quantificáveis. As leis físicas são expressas por equações matemáticas que relacionam entre si diferentes grandezas. Tais grandezas comparecem também nas equações envolvidas em nossos cálculos e análises matemáticas, com os quais exploramos os fenômenos decorrentes das leis físicas. Não sabemos quantificar odor, sabor, emoções, conceitos éticos e estéticos etc. Por isso, não conseguimos formular leis físicas que envolvam tais entidades e, em consequência elas não são encontradas nas equações da física. As entidades mensuráveis que aparecem nas leis físicas são denominadas **grandezas físicas**. Comprimento, massa, velocidade, força, pressão e temperatura são algumas das grandezas físicas. Neste capítulo, identificaremos outros atributos essenciais para que uma entidade seja qualificada como grandeza física. Veremos que ser quantificável é condição necessária mas não suficiente para que uma entidade possa ser considerada uma grandeza física.

O espaço e o tempo são os cenários em que ocorrem todos os fenômenos. O espaço apresenta a notável propriedade de ser isotrópico, ou seja, todas as suas direções são equivalentes. Isto parece contradizer a experiência comum. A vertical é distinta das outras direções; tanto é assim que as paredes das edificações em geral são posicionadas na vertical. A contemplação do céu estrelado também transmite a nítida impressão de um Universo não-isotrópico. Entretanto, estamos nesses casos falando de uma anisotropia puramente configuracional, ou seja, ligada à configuração (arranjo espacial) dos objetos. A gravidade da Terra define localmente uma direção vertical, a qual acompanha o movimento de rotação do planeta. Uma análise mais cuidadosa sempre irá mostrar que o espaço em si é isotrópico. Isto restringe enormemente a forma das leis físicas, pois estas não podem ser sensíveis à orientação no espaço. Consequentemente, ficam também restritas as grandezas que podem aparecer nas equações que exprimem as leis físicas. Este capítulo é uma análise introdutória deste tema. Veremos que as grandezas físicas pertencem a uma categoria denominada *tensor*.

Seção 4.2 ■ Vetores

Deslocamento envolve um comprimento, uma direção e um sentido. Grandezas que contêm uma medida e uma orientação são denominadas **vetor**.

Na física aparecem grandezas — como massa, volume e temperatura — que podem ser expressas por apenas um número e certa unidade preestabelecida de medida. Grandezas desse tipo são denominadas *escalares*. Outras grandezas, tais como velocidade e força, requerem esquemas mais elaborados para sua expressão. Como vimos no Capítulo 3 (*Movimento Retilíneo*), a mudança de posição de uma partícula é denominada *deslocamento*. Na Figura 4.1, o deslocamento do ponto P para o ponto Q está representado por uma seta que vai de P a Q. Essa seta tem um comprimento, uma direção e um sentido. O deslocamento pode não coincidir com o movimento real da partícula. Ele expressa somente o efeito resultante do movimento. Portanto, a partícula pode ter se deslocado do ponto P para o ponto Q por uma trajetória curva qualquer. Deslocamento é exemplo de um tipo de grandeza denominada **vetor**.

Neste capítulo, adotaremos o deslocamento como protótipo de vetor e investigaremos as propriedades de vetores com base nas propriedades do deslocamento. O raciocínio de se imaginar um vetor, qualquer que seja (velocidade, força, campo elétrico etc.), como se fosse um deslocamento, com uma sugestão de movimento seguindo uma flecha representativa do vetor, sempre facilita a realização de operações com vetores.



Figura 4.1

Vetor deslocamento do ponto P ao ponto Q.

O vetor deslocamento de P para Q na Figura 4.1 pode também ser representado pelo símbolo **a**. Muitas vezes o vetor é representado pelo símbolo $\vec{a}$. Em particular, em textos escritos à mão, este último é quase sempre o símbolo adotado. Neste texto, os vetores serão representados por uma letra, quase sempre latina, em negrito. O módulo do vetor é o comprimento da seta em unidades preestabelecidas. Exceto para o caso do vetor deslocamento, a unidade de

medida do módulo não é um comprimento. Por exemplo, se o vetor indicar uma velocidade, a unidade terá a dimensão de $[L]/[T]$. De qualquer modo porém, continuaremos nos referindo ao comprimento da seta. O módulo de $\mathbf{a}$ é designado pelo símbolo $|\mathbf{a}|$, ou simplesmente pela letra a . Esta última notação será a adotada neste texto, sempre que não houver risco de confusão. Os únicos elementos representativos do vetor são seu módulo, sua direção e seu sentido. Neste caso, todas as setas da Figura 4.2 representam o mesmo vetor.

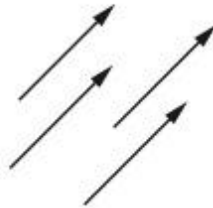


Figura 4.2

Todas as setas representam o mesmo vetor.

Para representar vetores ortogonais ao plano do papel, utilizamos os símbolos mostrados na Figura 4.3. Vê-se que tais símbolos são incapazes de dar qualquer idéia do módulo do vetor.

- ⊙ Vetor saindo do papel
- ⊗ Vetor entrando no papel

Figura 4.3

Para representar um vetor ortogonal ao plano do papel, cujo sentido aponta para fora do mesmo, usamos um círculo com um ponto em seu centro; se o sentido do vetor aponta para dentro do papel, usamos um círculo com uma cruz em seu interior.

Seção 4.3 ■ Operações com vetores — método geométrico

4.3.1 Multiplicação de vetor por um número

O vetor $\lambda \mathbf{a}$, no qual λ é um número real, por definição tem a direção de $\mathbf{a}$. Quando $\lambda > 0$ tem também o sentido de $\mathbf{a}$, mas seu sentido é oposto ao de $\mathbf{a}$ se $\lambda < 0$. O módulo deste produto é dado por

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| a. \quad (4.1)$$

Observe que a definição de $-\mathbf{a}$ é um caso particular da definição de produto de vetor por um número, ou seja, $-\mathbf{a} = (-1) \mathbf{a}$. A Figura 4.4 mostra alguns exemplos de multiplicação de um vetor por um número

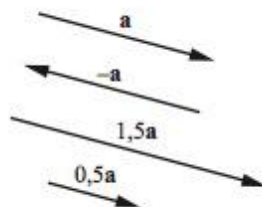


Figura 4.4

Exemplos de multiplicação do vetor $\mathbf{a}$ por um número.

É muito útil separar, na representação de um vetor, o seu módulo das suas outras propriedades (direção e sentido). Para isso, define-se a direção e o sentido por

$$\hat{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{a}}{a}. \quad (4.2)$$

Após isso, o vetor pode ser reescrito na forma

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{a}}. \quad (4.3)$$

Vê-se que $|\hat{\mathbf{a}}| = 1$, ou seja, o vetor $\hat{\mathbf{a}}$ tem módulo unitário, pois

$$|\hat{\mathbf{a}}| = \frac{|\mathbf{a}|}{a} = \frac{a}{a} = 1. \quad (4.4)$$

Vetor unitário é aquele cujo módulo vale 1 (módulo unitário)

O vetor $\hat{\mathbf{a}}$ é denominado **vetor unitário**. A Figura 4.5 mostra alguns vetores e seus respectivos unitários.

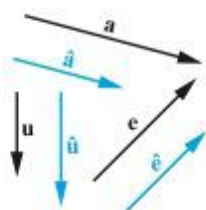


Figura 4.5

Exemplos de vetores e seus unitários.

4.3.2 Soma de vetores

Na Figura 4.6, o deslocamento $\mathbf{a}$ é seguido de outro deslocamento $\mathbf{b}$. O resultado final é o deslocamento $\mathbf{c}$ (saindo do início de $\mathbf{a}$ e terminando no final de $\mathbf{b}$). Define-se $\mathbf{c}$ como sendo a soma de $\mathbf{a}$ com $\mathbf{b}$ e escreve-se a equação

$$\mathbf{c} \equiv \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (4.5)$$

A Figura 4.6 mostra como se somam dois vetores. Por definição, o vetor $\mathbf{c}$ é a soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

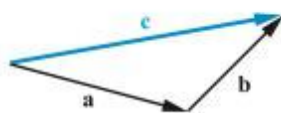


Figura 4.6

O deslocamento $\mathbf{a}$ é seguido do deslocamento $\mathbf{b}$, e o resultado líquido é o deslocamento $\mathbf{c}$. Por definição, o vetor $\mathbf{c}$ é a soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

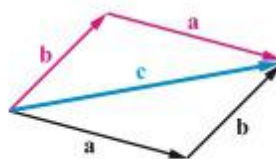


Figura 4.7

A soma de vetores é comutativa.

A Figura 4.7 mostra que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, ou seja, a soma de vetores é comutativa

A Figura 4.7 mostra que o deslocamento $\mathbf{a}$ seguido de $\mathbf{b}$ equivale ao deslocamento $\mathbf{b}$ seguido de $\mathbf{a}$, ou seja:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (4.6)$$

A Equação 4.6 diz que a soma de vetores é *comutativa*. A Figura 4.7 sugere imediatamente uma forma alternativa equivalente de se realizar a operação de soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, que pode ser vista na Figura 4.8.

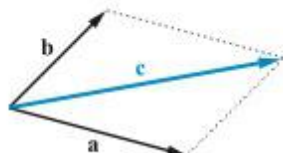


Figura 4.8

Forma alternativa de se realizar a operação $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

A Figura 4.8 mostra uma forma alternativa de se realizar a operação $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

A Figura 4.9 mostra como realizar a soma de três vetores a , b , c . Também mostra que $(a + b) + c = a + (b + c)$, ou seja, a soma de vetores é associativa

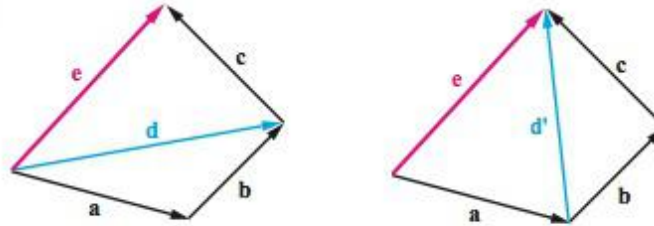


Figura 4.9

A soma de vetores é associativa.

A Figura 4.9 mostra que a soma de vetores é também associativa, ou seja:

$$\mathbf{d} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{d}' = \mathbf{e}, \quad (4.7)$$

sendo $\mathbf{d} \equiv (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e $\mathbf{d}' \equiv \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

O vetor que representa a soma de dois ou mais vetores é denominado **vetor resultante**.

Vetor resultante é aquele que representa a soma de outros vetores

4.3.3 Subtração de vetores

A subtração de vetores é definida por

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{b}), \quad (4.8)$$

e é ilustrada na Figura 4.10A. A Figura 4.10B mostra uma forma alternativa de se realizar a operação de subtração entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Os dois vetores são desenhados a partir da mesma origem, e o vetor $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ é representado pela flecha que vai da extremidade da flecha de $\mathbf{b}$ à extremidade da flecha de $\mathbf{a}$.

As Figuras 4.10A, 4.10B e 4.10C mostram como se subtrai um vetor de outro

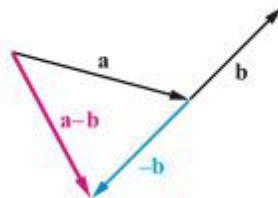


Figura 4.10A

Subtração de vetores a partir da definição.

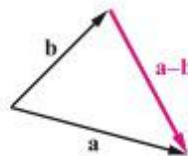


Figura 4.10B

Subtração de vetores. Forma alternativa de se efetuar a operação.

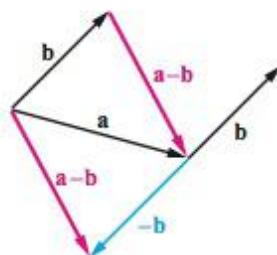


Figura 4.10C

Demonstração de que as operações mostradas nas Figuras 4.9A e 4.9B dão o mesmo resultado para o vetor $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

A Figura 4.10C mostra que as formas representadas nas Figuras 4.10A e 4.10B para a realização da operação $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ são equivalentes. Os dois resultados representam o mesmo vetor $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, pois são paralelos, de igual sentido e igual módulo.

Exercícios

E 4.1 Use o método geométrico para calcular $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ e $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ os vetores mostrados na Figura 4.11.

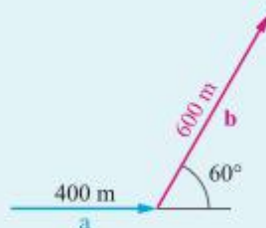


Figura 4.11
(Exercício 4.1).

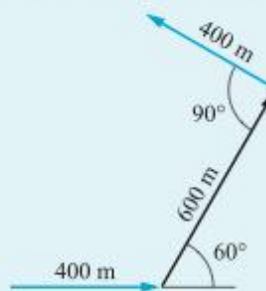


Figura 4.12
(Exercício 4.2).

E 4.2 Um andarilho faz os três deslocamentos mostrados na Figura 4.12. A que distância ele acaba ficando do seu ponto de partida?

E 4.3 Sabendo-se que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, o que se pode concluir sobre o vetor $\mathbf{b}$?

E 4.4 Use propriedades geométricas do triângulo para mostrar que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$, sendo θ o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

E 4.5 Usando a representação geométrica para a soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, encontre o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ para o caso em que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = a + b$.

E 4.6 Usando a representação geométrica para a soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e a subtração $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, determine o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ para o caso em que $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

Seção 4.4 ■ Representação analítica de vetores

A representação gráfica de vetores é inconveniente em duas e impraticável em três dimensões; a alternativa que evita tal inconveniência é a representação analítica de vetores. A forma mais simples e mais amplamente utilizada de representação analítica de vetores é a *representação cartesiana*, baseada nos eixos cartesianos já estudados no Capítulo 3 (*Movimento Retilíneo*). A Figura 4.11 ilustra tal forma de representação no espaço de duas dimensões. Os dois vetores unitários $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ são alinhados com os eixos cartesianos x e y , respectivamente. As projeções do vetor $\mathbf{a}$ nos eixos x e y , respectivamente, são os vetores $a_x \hat{\mathbf{i}}$ e $a_y \hat{\mathbf{j}}$, e portanto o vetor $\mathbf{a}$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}, \quad (4.9)$$

e os números a_x e a_y são denominados componentes do vetor. Deve-se observar que as componentes do vetor $\mathbf{a}$ são as mesmas, independentemente de sua origem coincidir ou não com a origem dos eixos cartesianos, como se vê na Figura 4.13.

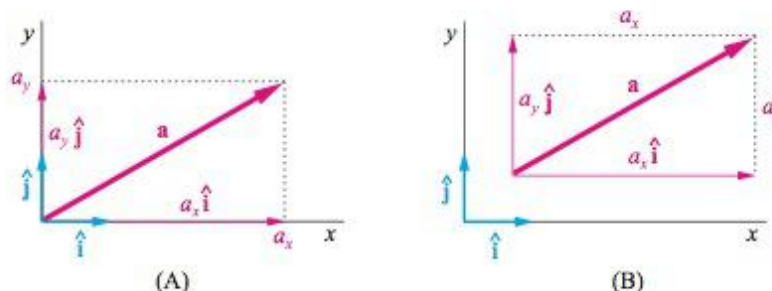


Figura 4.13

Representação analítica do vetor $\mathbf{a}$ no sistema de eixos cartesianos x e y . Deve-se observar que as componentes do vetor $\mathbf{a}$ são as mesmas, independentemente de sua origem coincidir ou não com a origem dos eixos cartesianos, como se vê em (A) e (B).

Veremos agora como as operações com vetores são realizadas de forma analítica. O teorema de Pitágoras permite expressar o módulo de $\mathbf{a}$ na forma

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (4.10)$$

E-E Exercício-exemplo 4.1

- Escreva a expressão analítica do vetor $\mathbf{a}$ mostrado na Figura 4.14 e calcule seu módulo.

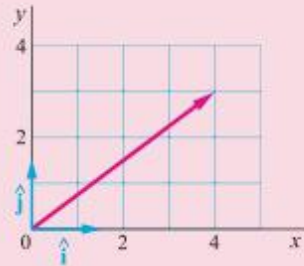


Figura 4.14
(Exercício-exemplo 4.1).

■ Solução

Pela leitura direta da figura, vê-se que $a_x = 4$ e $a_y = 3$. Portanto,

$$\mathbf{a} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}},$$

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Exercício

E4.7 Escreva expressões analíticas aproximadas para os vetores da Figura 4.15, sabendo que cada quadrado do reticulado tem área de 1 m^2 .

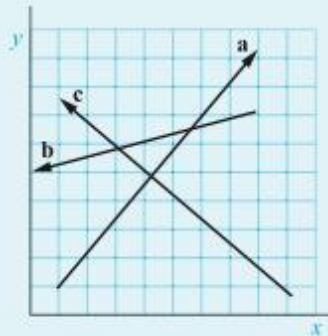


Figura 4.15
(Exercício 4.7).

Vê-se também que

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x)\hat{\mathbf{i}} + (\lambda a_y)\hat{\mathbf{j}} \quad (4.11)$$

ou seja, para multiplicar um vetor por um número λ basta multiplicar suas componentes por esse número. De fato, se o vetor $\mathbf{a}$ é multiplicado pelo número λ , suas projeções nos eixos x e y também ficam multiplicadas por esse mesmo número.

Da Figura 4.16, vê-se que, se

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}}.$$

Tem-se então:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\hat{\mathbf{j}}, \quad (4.12)$$

ou seja, para somar dois vetores basta somar suas componentes.

Como se vê na Equação 4.12, para se somar dois vetores basta somar suas componentes

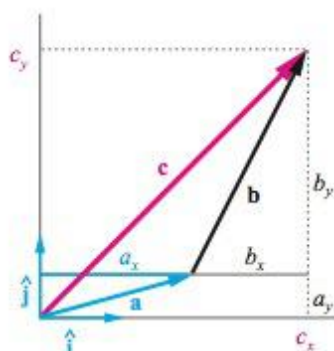


Figura 4.16

O vetor $\mathbf{c}$ é a soma dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Pode-se observar que a componente de $\mathbf{c}$ em um dado eixo é também a soma das componentes de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ nesse eixo. Ou seja, se $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, então $c_x = a_x + b_x$ e $c_y = a_y + b_y$.

E-E Exercício-exemplo 4.2

■ Sejam os vetores $\mathbf{a} = 1,0\hat{\mathbf{i}} + 2,0\hat{\mathbf{j}}$ e $\mathbf{b} = 3,0\hat{\mathbf{i}} + 1,5\hat{\mathbf{j}}$. Escreva a expressão analítica do vetor $\mathbf{c} = 3,0\mathbf{a} + 5,0\mathbf{b}$.

■ Solução

Inicialmente, temos de escrever a expressão analítica dos vetores $3\mathbf{a}$ e $5\mathbf{b}$. Aplicando a regra expressa pela Equação 4.11, obtemos

$$3,0\mathbf{a} = (3,0 \times 1,0)\hat{\mathbf{i}} + (3,0 \times 2,0)\hat{\mathbf{j}} = 3,0\hat{\mathbf{i}} + 6,0\hat{\mathbf{j}},$$

$$5,0\mathbf{b} = (5,0 \times 3,0)\hat{\mathbf{i}} + (5,0 \times 1,5)\hat{\mathbf{j}} = 15,0\hat{\mathbf{i}} + 7,5\hat{\mathbf{j}}.$$

Agora, com o emprego da regra de soma expressa pela Equação 4.12, podemos escrever

$$3,0\mathbf{a} + 5,0\mathbf{b} = 3,0\hat{\mathbf{i}} + 6,0\hat{\mathbf{j}} + 15,0\hat{\mathbf{i}} + 7,5\hat{\mathbf{j}} = (3,0 + 15,0)\hat{\mathbf{i}} + (6,0 + 7,5)\hat{\mathbf{j}}.$$

Finalmente,

$$\mathbf{c} = 18,0\hat{\mathbf{i}} + 13,5\hat{\mathbf{j}}.$$

A generalização do que se viu nesta seção para o caso de três dimensões se faz sem dificuldade. A Figura 4.17 mostra a decomposição do vetor $\mathbf{a}$ nos eixos cartesianos (x, y, z) de vetores unitários ($\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$).

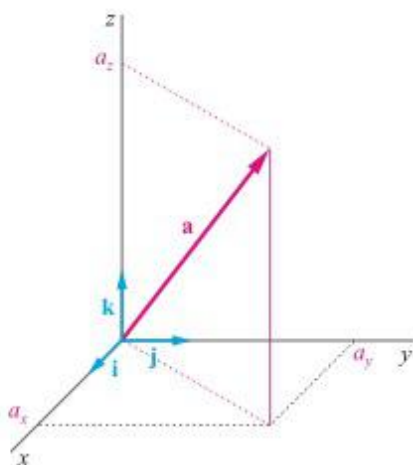


Figura 4.17

Representação cartesiana do vetor $\mathbf{a}$ no sistema de eixos x, y, z .

O conjunto de vetores unitários ($\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$) é denominado **base da representação** e cada um desses vetores é denominado **vetor-base**.

Esses unitários aparecerão tão frequentemente neste texto que, para simplificar, vamos omitir o acento circunflexo nos seus símbolos, ou seja, $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, o que na verdade já foi feito na Figura 4.17. O conjunto de vetores unitários ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) é denominado **base da representação** e cada um desses vetores é denominado **vetor-base**.

Em três dimensões, a Equação 4.9 toma a forma

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (4.13)$$

Da Figura 4.17, vê-se que

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (4.14)$$

As Equações 4.11 e 4.12 serão generalizadas para

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}. \quad (4.16)$$

E-E Exercício-exemplo 4.3

■ Seja $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Calcule (A) $2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, (B) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, (C) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

■ Solução

(A) Aplicando a regra expressa pela Equação 4.15, obtemos

$$2\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \quad 4\mathbf{b} = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j}.$$

Utilizando agora a Equação 4.16, com alterações óbvias, obtemos

$$2\mathbf{a} - 4\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - 16\mathbf{i} - 8\mathbf{j} = -10\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

(B) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3 + 4)\mathbf{i} + (-2 + 2)\mathbf{j} + \mathbf{k} = 7\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Com base na Equação 4.14, obtemos $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$.

(C) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (3 - 4)\mathbf{i} + (-2 - 2)\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}.$$

E-E Exercício-exemplo 4.4

■ Mostre analiticamente que $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ para qualquer vetor $\mathbf{a}$.

■ Solução

Seja $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$. Pela Equação 4.15, vê-se que

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k},$$

e portanto

$$|\lambda \mathbf{a}| = \sqrt{(\lambda a_x)^2 + (\lambda a_y)^2 + (\lambda a_z)^2} = \sqrt{\lambda^2 (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)},$$

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Finalmente,

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|,$$

o que completa a prova.

Exercícios

E 4.8 Um avião voa 300 km para leste, vira rapidamente e depois voa 200 km para nordeste. Escolha um sistema de coordenadas e com ele expresse o deslocamento final do avião.

E 4.9 O ponteiro de minutos do relógio de uma torre de igreja tem comprimento de 1,50 m. Qual é o vetor deslocamento da ponta do ponteiro do instante em que o relógio marca 2h50 min até o instante em que ele marca 3h15 min?

E 4.10 Maria caminha 100 m na direção sul, segue depois para oeste e caminha 200 m. Chega ao edifício em que trabalha, toma o elevador e sobe 100 m. Calcule (A) o módulo do deslocamento $\mathbf{d}$ de Maria; (B) o ângulo entre $\mathbf{d}$ e a direção norte.

E 4.11 Um menino corre 20 m subindo uma rampa cuja inclinação é de 30° . Qual é o deslocamento (A) horizontal e (B) vertical do menino?

E 4.12 Sejam os vetores $\mathbf{a} = 5,0\mathbf{i} + 7,0\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = -3,5\mathbf{i} + 6,0\mathbf{k}$. Calcule o vetor $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

Seção 4.5 ■ Produto escalar de vetores

■ Definição geométrica do produto escalar

Define-se o *produto escalar* dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, designado pelo símbolo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a b \cos \theta, \quad (4.17)$$

sendo θ o ângulo formado pelos dois vetores. O produto definido pela Equação 4.17 resulta em uma grandeza escalar, o que justifica a expressão produto escalar. Esse produto é igual ao produto do módulo de qualquer um dos vetores pela projeção do outro sobre ele. Alguns fatos decorrem imediatamente da definição do produto escalar. Por exemplo,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{se } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \text{ são ortogonais.} \quad (4.19)$$

Resulta, como caso particular das Equações 4.18 e 4.19, que os produtos escalares que envolvem os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ valem

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (4.21)$$

Da definição resulta também imediatamente que, se λ e η são dois escalares,

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot (\eta \mathbf{b}) = \lambda \eta \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.22)$$

O produto escalar também goza da propriedade distributiva, ou seja:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (4.23)$$

A demonstração da propriedade distributiva a partir da definição geométrica do produto escalar, Equação 4.17, não é simples e será omitida.

Expressando os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de seus componentes cartesianos, $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$, e utilizando as Equações 4.22 e 4.23, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &\quad + a_y b_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.24)$$

■ Definição analítica do produto escalar

A definição analítica do produto escalar apresenta conveniências. Além de ser mais útil para a realização dos cálculos, pode-se generalizá-la para espaços com número arbitrário de dimensões

Considerando as Equações 4.20 e 4.21, obtemos finalmente

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4.25)$$

A Equação 4.25 é frequentemente adotada como definição alternativa de produto escalar. A partir desta definição analítica, podem-se demonstrar as Equações 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23, e a própria Equação 4.17, que neste caso é vista como interpretação geométrica do produto escalar. Tal definição analítica apresenta conveniências. Além de ser mais útil para a realização dos cálculos, pode-se generalizá-la para espaços com número arbitrário de dimensões e também para espaços abstratos diversos.

E-E Exercício-exemplo 4.5

■ A potência exercida por uma força $\mathbf{F}$ que atua sobre um corpo em movimento é $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, sendo $\mathbf{v}$ a velocidade do corpo. Considere um carro movendo-se à velocidade $\mathbf{v} = i40 \text{ m/s}$. O atrito do ar exerce uma força $\mathbf{F}_a = -i1,1 \times 10^3 \text{ N}$ sobre o carro. O peso do carro vale $\mathbf{F}_p = -k1,2 \times 10^4 \text{ N}$. Calcule as potências realizadas pelo atrito do ar e pelo peso do carro.

■ Solução

A potência realizada pela força de atrito é dada por

$$P_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v} = (-i1,1 \times 10^3 \text{ N}) \cdot (i40 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = -4,4 \times 10^4 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}.$$

A unidade de potência no SI é o joule, cujo símbolo é J. Tem-se

$$1\text{J} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}.$$

Podemos então escrever

$$P_a = -4,4 \times 10^3 \text{ J} = -44 \text{ kJ}.$$

A potência realizada pelo peso do carro é

$$P_p = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{v} = (-k1,2 \times 10^4 \text{ N}) \cdot (i40 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 0.$$

E-E Exercício-exemplo 4.6

■ Calcule o ângulo entre as diagonais de um cubo.

■ Solução

A Figura 4.18 mostra os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ cujas flechas coincidem com duas diagonais de um cubo. Da figura, obtemos

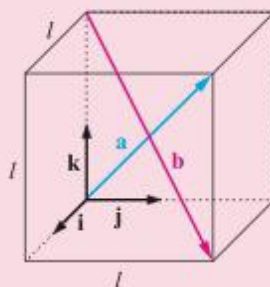


Figura 4.18

(Exercício-exemplo 4.6).

$$\mathbf{a} = l(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{b} = l(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

Calcularemos o ângulo θ entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ com base na Equação 4.17, que resulta imediatamente em

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}\right). \quad (4.26)$$

Vê-se que

$$a = b = l\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}l.$$

O produto escalar dos dois referidos vetores é

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = l^2(1 + 1 - 1) = l^2.$$

Fazendo uso da Equação 4.26 podemos agora calcular

$$\theta = \arccos\left(\frac{l^2}{3l^2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70,5^\circ.$$

Esse método é amplamente utilizado para se calcular o ângulo entre dois vetores ou duas retas.

E-E Exercício-exemplo 4.7

■ Indo para o trabalho, João caminha 200 m na direção leste (direção $\mathbf{i}$), segue depois para o sul (direção $-\mathbf{j}$) e caminha 300 m. Chega ao edifício em que trabalha, toma o elevador e sobe 100 m (direção $\mathbf{k}$). Calcule (A) o módulo do deslocamento $\mathbf{d}$ de João; (B) o ângulo entre $\mathbf{d}$ e a direção norte.

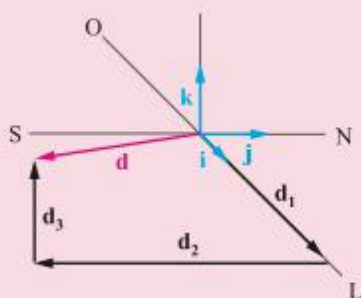


Figura 4.19
(Exercício-exemplo 4.7)

■ Solução

(A) A Figura 4.19 mostra os três deslocamentos $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ e $\mathbf{d}_3$ de João. Na sua representação cartesiana, esses deslocamentos são

$$\mathbf{d}_1 = (200 \text{ m})\mathbf{i}, \quad \mathbf{d}_2 = (-300 \text{ m})\mathbf{j}, \quad \mathbf{d}_3 = (100 \text{ m})\mathbf{k}.$$

O deslocamento efetivo $\mathbf{d}$ de João é

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 = (200\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 100\mathbf{k}) \text{ m},$$

e o módulo desse deslocamento é

$$d = \sqrt{200^2 + 300^2 + 100^2} \text{ m} = 374 \text{ m}.$$

(B) Como o vetor unitário $\mathbf{j}$ tem módulo 1, podemos escrever

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{j}}{d}\right) = \arccos\left(\frac{-300 \text{ m}}{374 \text{ m}}\right) = \arccos(-0,8021) = 143^\circ.$$

E-E Exercício-exemplo 4.8

■ O vetor **a** na Figura 4.20 tem módulo $a = 5,00$ m. Escreva a representação analítica de **a** no sistema de eixos da figura.

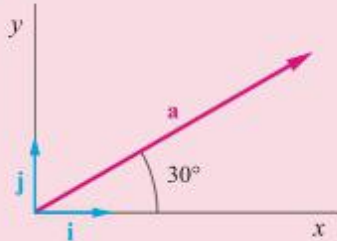


Figura 4.20
(Exercício-exemplo 4.8).

■ Solução

Em termos de suas componentes, o vetor **a** tem a forma genérica

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}.$$

Podemos ainda escrever

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_x,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_y,$$

Colocando os números nessas expressões, obtemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a \cos(30^\circ) = 5,0\text{m} \times 0,866 = 4,33 \text{ m},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a \cos(60^\circ) = 5,0\text{m} \times 0,500 = 2,50 \text{ m}.$$

Finalmente, obtemos o resultado pretendido:

$$\mathbf{a} = (4,33\mathbf{i} + 2,50\mathbf{j}) \text{ m}.$$

Exercícios

E 4.13 Calcule o ângulo entre os vetores $\mathbf{a} = 1,0\mathbf{i} + 2,0\mathbf{j} + 3,0\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = 3,0\mathbf{i} + 1,0\mathbf{j} + 2,0\mathbf{k}$.

E 4.14 Calcule (A) o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; (B) o ângulo entre os vetores **a** e **b** definidos no Exercício 12.

E 4.15 O vetor **a** na Figura 4.21 tem módulo $a = 12$ m. Escreva a representação analítica de **a** no sistema de eixos da figura.



Figura 4.21
(Exercício 4.15).

E 4.16 (A) Calcule $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$;

(B) verifique que $|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab \cos \theta}$ sendo θ o ângulo entre **a** e **b** (compare com o resultado do Exercício 4.5);

(C) mostre que, se $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, então o ângulo entre os vetores é $\pm \pi / 2$ (veja o Exercício 4.6).

Seção 4.6 ■ Produto vetorial de vetores

O produto escalar de dois vetores gera uma grandeza de natureza escalar. Uma pergunta natural a se fazer é se existe algum produto de vetores que gere uma grandeza de natureza vetorial. Abordaremos agora esta questão. Sejam os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Simbolizaremos por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ seu *produto vetorial*, cuja definição é a próxima meta. Como o produto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ precisa ter uma direção, a primeira questão a ser analisada é se, a partir de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, pode-se definir univocamente uma direção no espaço. No espaço tridimensional, a resposta é sim: se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ não são paralelos, esses dois vetores definem uma direção única, a direção perpendicular a ambos. A Figura 4.22 mostra dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ não-paralelos.

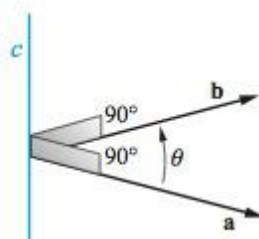


Figura 4.22

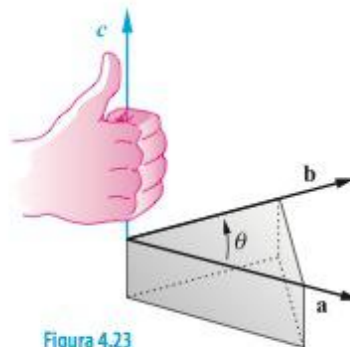


Figura 4.23

A linha reta c é perpendicular ao plano definido por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Portanto, c é a única direção a ser escolhida para o produto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Entretanto, resta uma ambigüidade na escolha do sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Este é um fato de enormes consequências. Devido a ele, a pergunta inicial tem resposta negativa: *é impossível definir um produto de vetores que gere outro vetor*. Entretanto, podemos resolver a referida ambigüidade por uma convenção. O sentido de $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ será escolhido arbitrariamente pela chamada *regra da mão direita*. Esta regra, também denominada *regra do parafuso*, é ilustrada na Figura 4.23. O “vetor” $\mathbf{c}$ tem o sentido do dedo polegar quando a mão direita se posiciona de tal modo que os outros dedos giram de $\mathbf{a}$ para $\mathbf{b}$ quando a mão se fecha. Esse é também o sentido do deslocamento da ponta de um parafuso direito quando este é girado da direção $\mathbf{a}$ para a direção $\mathbf{b}$. Daí os dois termos utilizados para designar a regra para a escolha de $\mathbf{c}$. Resta ainda uma ambigüidade no produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, uma vez que se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ forem paralelos não é possível definir uma direção a partir deles. Felizmente, essa ambigüidade pode ser resolvida naturalmente se o módulo de $\mathbf{c}$ for definido por

$$c = a b \sin \theta, \quad (4.27)$$

O produto vetorial de dois vetores não pode ser definido de maneira puramente matemática

sendo θ o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, tem-se $\mathbf{c} = 0$ e portanto o problema da sua orientação deixa de existir. A Equação 4.27, juntamente com a regra da mão direita, define o produto vetorial de vetores.

A regra da mão direita é um expediente precário para sanar um problema insolúvel ligado ao produto vetorial. Não existe um modo puramente geométrico ou puramente analítico de definir esse produto. Nem sequer existe uma combinação de linguagem geométrica e analítica capaz de gerar a desejada definição. A definição baseia-se em um conceito antrópico (referente ao homem), o de mão direita, ou equivalentemente, de parafuso direito. Tal problema inexistia com o produto escalar. Existe um modo geométrico e outro modo algébrico equivalente de defini-lo. Pode-se por isto dizer que o produto vetorial não pertence inteiramente ao domínio da matemática. Na linguagem da matemática e da física, diz-se que o produto vetorial é um *pseudovetor*. Na Seção 4.10 (*Caráter tensorial das grandezas*), veremos que o produto vetorial não é de fato um vetor. Cabe aqui a pergunta, na verdade muito relevante, se pseudovetores são úteis na formulação da física. A resposta é sim. Estas grandezas são úteis e até mesmo essenciais. Várias grandezas físicas são pseudovetores, e neste curso você tomará contato com muitas delas.

Se invertermos a ordem dos fatores, o produto vetorial troca de sentido. Diz-se então que o produto vetorial é *anticomutativo*

No produto vetorial, a ordem dos fatores altera o produto. Na verdade,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (4.28)$$

Produtos como os da álgebra comum, em que $AB = BA$, são denominados *comutativos*. Se $AB \neq BA$, diz-se que o produto é *não-comutativo*. No caso particular em que $AB = -BA$, diz-se que o produto é *anticomutativo*. O produto vetorial é um exemplo de produto anticomutativo.

Na Figura 4.17, as direções positivas dos eixos x , y e z foram escolhidas de tal modo que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Diz-se então que os unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ (listados nesta ordem) formam um *triedro direito*. Verifica-se que os unitários continuam formando um triedro direito após qualquer permutação que preserve a ordem cíclica desses três elementos. Portanto, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$. Por outro lado, tem-se $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ e $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$. Ou seja, $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ e $\mathbf{k}$, e todas as permutações cíclicas desses unitários formam um *triedro esquerdo*.

O produto vetorial também apresenta a propriedade distributiva, ou seja,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \quad (4.29)$$

Tal como no caso do produto escalar, não é fácil demonstrar essa propriedade a partir da definição geométrica do produto.

Expressando os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de componentes cartesianas em um sistema de unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ que formam um triedro direito, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{i} \\ &\quad + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Efetando os produtos vetoriais dos unitários e colocando em evidência os fatores comuns, obtém-se

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x). \quad (4.31)$$

A Equação 4.31 pode ser reescrita na forma de um determinante

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (4.32)$$

Deve-se registrar o notável fato de que o produto vetorial só é definido em um espaço de três dimensões. Para qualquer outra dimensão do espaço, maior ou menor do que três, tal produto não é definido.

■ Forma analítica do produto vetorial

O produto vetorial só é definido em um espaço de três dimensões. Para qualquer outra dimensão do espaço, maior ou menor do que três, tal produto não é definido

E-E Exercício-exemplo 4.9

■ Calcule o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dos vetores definidos no Exercício-exemplo 4.6 e mostre que o vetor resultante é ortogonal tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$.

■ Solução

A partir da Equação 4.32 obtemos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l & l & l \\ l & l & -l \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-l^2 - l^2) + \mathbf{j}(l^2 + l^2) + \mathbf{k}(l^2 - l^2) = 2l^2(-\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

Obtido esse resultado, podemos agora calcular os produtos escalares

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = l(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot 2l^2(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2l^3(-1 + 1) = 0,$$

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = l(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot 2l^2(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2l^3(-1 + 1) = 0.$$

Portanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$.

E-E Exercício-exemplo 4.10

■ Calcule o produto $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ mostrados na Figura 4.24.

■ Solução

Pela regra da mão direita, conclui-se que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é paralelo ao unitário $\mathbf{k}$. Portanto,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = uv \sin\theta \mathbf{k},$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Verifica-se imediatamente que $\theta = \pi/2$. Além disso, vê-se que $u = v = \sqrt{2}l$. Portanto,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 2l^2 \mathbf{k}.$$

O mesmo resultado pode ser obtido pelo método analítico. De fato, pela figura verifica-se que

$$\mathbf{u} = l(-\mathbf{i} + \mathbf{j}), \mathbf{v} = l(-\mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

Portanto,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -l & l & 0 \\ -l & -l & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(l^2 + l^2) = 2l^2 \mathbf{k}.$$

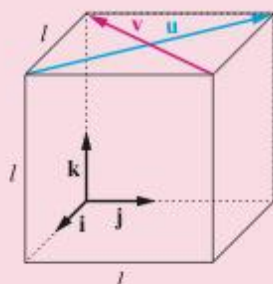


Figura 4.24
(Exercício-exemplo 4.10).

Exercícios

E 4.17 Calcule o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ definidos no Exercício 4.12.

E 4.18 Calcule $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

E 4.19 Uma partícula tem uma velocidade $\mathbf{v}$ dada por $\mathbf{v} = v_o \mathbf{i}$ e sua posição é dada por $\mathbf{r} = y_o \mathbf{j} + v_o t \mathbf{i}$. Encontre o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$.

Seção 4.7 ■ Porque o produto vetorial é um pseudovetor

Dissemos anteriormente que o produto vetorial não gera um vetor, mas sim um pseudovetor. Nesta seção, discutiremos o que venham a ser um pseudovetor e justificaremos o caráter pseudovetorial do produto vetorial. A Figura 4.25 mostra vários vetores e o modo como eles se transformam se os refletirmos em um plano M vertical ortogonal ao plano do papel. O vetor $\mathbf{a}$ transforma-se no vetor $\mathbf{a}'$, o vetor $\mathbf{b}$ no vetor $\mathbf{b}'$ etc. Observe que, se o vetor é ortogonal ao plano M , como é o caso do vetor $\mathbf{a}$, ele troca de sentido ao ser refletido. Já se um vetor é paralelo ao plano, como é o caso dos vetores $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{d}$, ele permanece o mesmo após a reflexão. No caso geral de um vetor inclinado em relação ao plano, como é o caso do vetor $\mathbf{e}$, com a reflexão sua componente ortogonal ao plano troca de sinal enquanto sua componente paralela ao plano fica invariante.

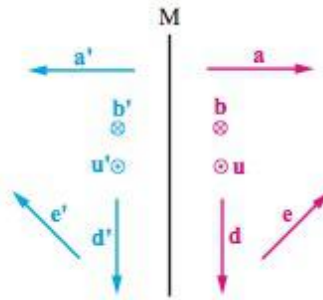


Figura 4.25

Modo como diversos vetores se transformam ao serem refletidos no plano M, vertical e ortogonal ao papel.

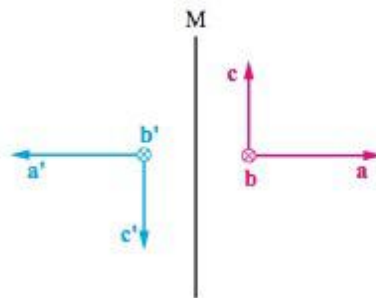


Figura 4.26

Transformação de um produto vetorial em uma reflexão. O produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, sendo $\mathbf{b}$ um vetor entrando no plano do papel, resulta no vetor $\mathbf{c}$. Se refletirmos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ no plano M, teremos respectivamente os vetores $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$, e o produto $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$ gera o vetor $\mathbf{c}'$. Observe que $\mathbf{c}'$ é antiparalelo a $\mathbf{c}$. Entretanto, se $\mathbf{c}$ fosse um vetor, $\mathbf{c}'$ seria paralelo a $\mathbf{c}$. Concluímos portanto que $\mathbf{c}$ não é um vetor.

Mediante uma reflexão em um plano, um pseudovetor faz tudo o que um vetor faria, mas além disso inverte o seu sentido

A Figura 4.26 mostra os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e também o vetor $\mathbf{c}$, que é o resultado do produto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Vejamos agora o que ocorre quando refletimos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ no plano, gerando assim os vetores $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$, e após isso realizamos o produto $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$. Como se vê imediatamente pela regra da mão direita, o resultado desse produto é o vetor $\mathbf{c}'$, que, como mostra a Figura 4.26, é antiparalelo a $\mathbf{c}$. Temos aqui um aparente paradoxo, pois ao refletirmos um vetor em um plano paralelo a ele tal vetor deve ficar inalterado. A conclusão é que $\mathbf{c}$ na verdade não se transforma como um vetor. Esse é o motivo pelo qual o produto vetorial é denominado pseudovetor. Mediante uma reflexão em um plano, um pseudovetor faz tudo o que um vetor faria, mas além disso inverte o seu sentido. A Figura 4.27 dá outra ilustração da regra anômala à qual obedece o produto vetorial em uma reflexão. Temos $\mathbf{e} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{e}' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v}'$, onde $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ são as reflexões de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ no plano M. Vê-se que $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$, mas se $\mathbf{e}$ fosse um vetor deveríamos ter $\mathbf{e}' = -\mathbf{e}$. O motivo pelo qual o produto vetorial apresenta tal anomalia em uma transformação de reflexão é facilmente entendido. A imagem de uma mão direita refletida em um espelho é uma mão esquerda. Esse é um fenômeno geral, e a operação de reflexão sempre transforma direito em esquerdo e vice-versa. Por outro lado, se adotássemos a regra da mão esquerda na definição do produto vetorial, o resultado do produto seria um vetor com sinal invertido em relação ao que obtemos com a regra da mão direita.

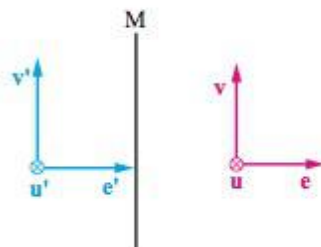


Figura 4.27

Outro exemplo de transformação de um produto vetorial em uma reflexão.

Seção 4.8 ■ Produto misto de vetores

Combinando-se os dois tipos de produtos de vetores, pode-se definir o denominado *produto misto de vetores*

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_x(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_x + a_y(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_y + a_z(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_z. \quad (4.33)$$

Combinando-se as Equações 4.31 e 4.33, obtém-se

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (4.34)$$

Considerando o fato de que o valor de um determinante é invariante mediante uma permutação cíclica de suas linhas, podemos escrever

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}). \quad (4.35)$$

Por outro lado, uma vez que $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b}$, concluímos que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}), \quad (4.36)$$

ou seja, se invertermos a ordem cíclica do produto misto o resultado terá o sinal trocado.

E-E Exercício-exemplo 4.11

- O vetor $\mathbf{c}$ mostrado na Figura 4.28 tem módulo $c = 3$. Calcule o produto $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

■ Solução

Inicialmente, temos de expressar esses três vetores em forma analítica. Pela análise da figura concluímos que

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j},$$

$$\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j},$$

$$\mathbf{c} = c\mathbf{k} = 3\mathbf{k}.$$

Com esse resultado, calculamos

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times (8 + 16) = 72 \quad (4.37)$$



Figura 4.28

(Exercício-exemplo 4.11).

O produto misto é o produto escalar de um vetor por um pseudovetor. O resultado é um pseudo-escalar, um tipo de grandeza que precisa ser explicitamente descrito a fim de ser entendido. Se refletirmos, em um plano vertical ortogonal ao papel, os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ da Figura 4.28, obteremos os vetores $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ e $\mathbf{c}'$ mostrados na Figura 4.29. Podemos escrever, com base na análise da figura,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \\ \mathbf{b}' &= 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \\ \mathbf{c}' &= 3\mathbf{k} \end{aligned}$$

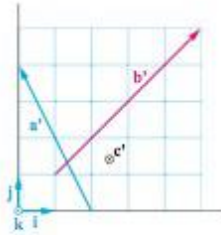


Figura 4.29

Os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ da Figura 4.28 foram refletidos em um plano vertical ortogonal ao papel.

Tal como ocorre com um pseudovetor, um pseudo-escalar troca de sinal quando esquerdo e direito são invertidos

Podemos agora calcular

$$\mathbf{c}' \cdot (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times (-8 - 16) = -72. \quad (4.38)$$

Comparando este resultado com o expresso na Equação 4.37, verificamos que o produto misto de três vetores dá um número que troca de sinal quando refletimos todos esses vetores em um mesmo plano. Vejamos as coisas de outro modo: temos três vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. João faz o produto misto desses vetores e obtém um determinado número. Enquanto isso, Maria está vendo esses mesmos três vetores (as flechas que os representam) através de um espelho, e se ela realizar o produto misto dessas imagens obterá um número cujo módulo será o mesmo obtido por João, mas o sinal do número estará invertido. Esse é o significado de um pseudo-escalar: uma grandeza que pode ser descrita por um número (com as unidades apropriadas), mas que troca de sinal quando as coisas são vistas refletidas em um espelho e, por isso, esquerdo e direito ficam invertidos. Tal como ocorre com um pseudovetor, um pseudo-escalar troca de sinal quando esquerdo e direito são invertidos.

Exercícios

- E 4.20 Mostre que $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.
 E 4.21 Mostre que, se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores contidos no mesmo plano, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$.
 E 4.22 Mostre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.
 E 4.23 Mostre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$.

Seção 4.9 ■ O que é a isotropia do espaço

Na Seção 4.1 (*Introdução*), afirmamos que o espaço é isotrópico, apesar da impressão de anisotropia que a configuração dos objetos nele contidos nos transmite. Nesta seção, buscaremos uma melhor conceituação da mencionada isotropia do espaço. Iniciaremos dizendo que as leis da Natureza não discriminam direções distintas do espaço, o que de certa maneira pode ajudar você a compreender os argumentos que levam a esse tipo de afirmação.

Se realizarmos uma dada experiência e depois a repetirmos com todas as direções envolvidas giradas da mesma maneira, o resultado será o mesmo. Esta afirmação tem sutilezas que precisam ser explicitadas para que possa ser realmente entendida. Primeiro, deve-se enfatizar que todas as direções devem ser giradas da mesma maneira; não podemos girar algumas direções e não outras, nem girá-las de modos distintos. Imagine que a experiência seja realizada em laboratório, e que um aparato — equipamentos, objetos diversos que participam diretamente da experiência e outros objetos que possam influenciar o resultado da experiência — seja utilizado para sua realização ou relevante para seu resultado. Nesse caso, devemos girar todo o aparato como se fosse um único corpo rígido. Como a Terra pode afetar o resultado devido à atuação da sua gravidade e dos seus campos elétrico e magnético, não podemos deixar de girar

também a Terra. Felizmente, não temos de fazer qualquer esforço para girar a Terra, porque ela própria gira e em sua rotação acaba também girando rigidamente todo o nosso laboratório. Portanto, para que o nosso aparato gire, basta esperarmos um pouco. Se fizermos a experiência às 10 h e a repetirmos às 15 h, teremos o tipo de rotação do aparato que mencionamos antes. Pode ser que o Sol e a Lua possam ter influência no resultado da experiência, e nesse caso realmente fica difícil girar todo o aparato. Teríamos de aguardar outro instante em que todas as orientações relativas voltassem a se repetir. Isto nem sempre é praticável, mas essa limitação acaba não sendo muito relevante porque o universo de experiências em que nem o Sol nem a Lua têm qualquer influência é tão amplo que com elas podemos obter suficiente respaldo para nossa conclusão. Como sempre, em ciência nunca podemos exaurir todas as experiências imagináveis e temos de extrair nossas conclusões com base em um conjunto limitado de experiências e extrapolá-las para todas as experiências imagináveis.

As leis físicas são expressas em forma de equações matemáticas que envolvem grandezas físicas. Ao girar todo o aparato de uma experiência, as grandezas nela envolvidas podem ser afetadas por tal operação. Se uma grandeza for um escalar, por exemplo um volume ou uma temperatura, nada lhe ocorrerá em decorrência da rotação. Dizemos que os escalares são invariantes mediante uma rotação. Entretanto, as grandezas vetoriais, por exemplo um deslocamento ou uma força, irão girar junto com o aparato. Quando giramos um vetor, suas componentes em um dado sistema de eixos se transformam de uma maneira totalmente previsível. Esse modo de transformação é tão característico dos vetores que na verdade pode ser adotado para se definir o que seja um vetor.

Seção 4.10 ■ Caráter tensorial das grandezas físicas

Para que as equações que expressam as leis da física sejam invariantes mediante uma reorientação no espaço é necessário que as grandezas físicas se transformem de modos muito especiais quando giradas no espaço. As grandezas que se transformam segundo tais regras especiais são denominadas *tensores*, e escalares e vetores são tipos especiais de tensor. Um escalar é denominado tensor de ordem 0 e um vetor é denominado tensor de ordem 1. Podemos ter tensores de qualquer ordem inteira, e para escrever um tensor de ordem n são necessários 3^n números, sendo que 3 decorre da dimensionalidade do espaço. Assim, temos

Um escalar, tensor de ordem 0, contém $3^0 = 1$ número.

Um vetor, tensor de ordem 1, contém $3^1 = 3$ números,
e assim por diante. Para que uma equação fique invariante mediante uma rotação, é necessário que ela seja algo da forma

$$\text{Escalar } A = \text{escalar } B, \quad (4.39)$$

$$\text{Vetor } A = \text{vetor } B, \quad (4.40)$$

$$\text{Tensor } T_1 \text{ de ordem } n = \text{tensor } T_2 \text{ de ordem } n. \quad (4.41)$$

Como exemplo, consideremos as equações

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (4.43)$$

A primeira delas exprime o período T de um pêndulo simples em termos do seu comprimento l e da aceleração da gravidade g . A segunda exprime a segunda lei de Newton, ou seja, regra que determina a aceleração $\mathbf{a}$ de um corpo de massa m quando submetido a uma

força $\mathbf{F}$. A Equação 4.42 estabelece a igualdade entre dois escalares, ou seja, é do tipo expresso na Equação 4.39. Já a Equação 4.3 estabelece a igualdade entre dois vetores, e portanto pertence ao tipo expresso na Equação 4.40. Se tivéssemos uma equação da forma

$$\text{Escalar } A = \text{vetor } \mathbf{B}, \quad (4.44)$$

ao realizarmos uma rotação do espaço teríamos uma inconsistência, já que o vetor $\mathbf{B}$ iria se alterar enquanto o escalar A permaneceria inalterado. Portanto, a equação não pode valer tanto antes como depois da rotação.

As leis físicas são invariantes com respeito à escolha das unidades de medida e também invariantes com respeito à orientação no espaço, e portanto à escolha da orientação do nosso sistema de coordenadas

As Equações 4.39, 4.40 e 4.41 dizem que as equações da física têm de ser tensorialmente homogêneas, ou seja, todas as suas parcelas devem ser tensores da mesma ordem. A imposição de que as equações sejam tensorialmente homogêneas tem certa afinidade com a condição, vista no Capítulo 2 (*Medidas*), de que as equações da física devem ser dimensionalmente homogêneas. Na verdade, cada uma dessas condições decorre de um tipo de simetria. A homogeneidade dimensional das equações decorre do fato de que as leis da física não podem depender do tipo de unidades que arbitramos para medir as grandezas. Já a homogeneidade tensorial das equações decorre de que as leis não podem depender do modo como orientamos nosso sistema de coordenadas. Na linguagem da física, dizemos que as leis físicas são invariantes com respeito à escolha das unidades de medida e também invariantes com respeito à orientação no espaço, e portanto à escolha da orientação do nosso sistema de coordenadas. Invariância e simetria são termos distintos que expressam o mesmo atributo. Por exemplo, uma esfera parece exatamente a mesma após qualquer tipo de rotação em torno do seu centro. Podemos dizer que a esfera tem a simetria de rotação ou que é invariante mediante uma rotação. Neste curso, usaremos os termos simetria e invariância como modos equivalentes de dizer a mesma coisa.

Seção 4.11 ■ Esquerdo e direito são equivalentes?

Nós humanos temos um corpo cujo lado direito é distinto do lado esquerdo. Nossos dois pés são distintos um do outro, e o mesmo ocorre com nossas mãos. Um pé esquerdo não se ajusta a um sapato direito, e por aí vamos. Isso parece estabelecer uma distinção fundamental entre esquerdo e direito. Entretanto, estamos aqui falando de propriedades geométricas de partes do nosso corpo. Para definir o produto vetorial, tivemos de usar essa assimetria inerente ao nosso corpo para convencionar o sentido do produto. Conforme dissemos, tal distinção não pôde ser feita com base na geometria. Isso equivale a dizer que o espaço em si parece não fazer distinção entre esquerdo e direito. Reformulando nossa questão, podemos perguntar:

Alguma lei física é capaz de distinguir entre esquerdo e direito?

Paridade é a simetria de equivalência entre esquerdo e direito

Se o espaço não conseguir distinguir esquerdo e direito, isso deve ser visto como mais uma de suas simetrias, denominada *simetria de paridade* ou simplesmente *paridade*.

O significado da paridade pode ser mais bem esclarecido por meio de uma experiência hipotética, ou seja, simplesmente imaginada. Consideremos uma experiência, e imaginemos que ela seja repetida após realizarmos uma espécie de reflexão especular em todos os componentes do aparato, de modo que tudo que é esquerdo se transforme em direito e vice-versa. Os parafusos direitos serão substituídos por parafusos esquerdos, as bobinas dos aparelhos elétricos serão enroladas no sentido oposto, os ponteiros dos relógios passarão a andar no sentido anti-horário, e assim por diante. Conforme veremos no curso de eletromagnetismo, com esse tipo de transformação os campos magnéticos que porventura estiverem presentes também terão seus sentidos invertidos, ou seja, a inversão esquerdo-direito implica também a inversão dos sentidos dos campos magnéticos. A pergunta é se isso resultará em alguma alteração nos resultados das experiências, tal que as leis anteriores não mais se apliquem ou tenham de ser de alguma maneira modificadas. Em outras palavras: existe alguma lei física capaz de discriminar esquerdo de direito?

A resposta é a seguinte: no âmbito da mecânica, do eletromagnetismo, da mecânica quântica, da relatividade, da termodinâmica, enfim de todos os fenômenos que abordaremos neste

curso, nenhuma lei distingue esquerdo de direito, e dentro desse âmbito vale a paridade. Nos fenômenos que dependem da *força nuclear fraca*, também chamada *interação fraca*, falha a simetria da paridade. Por isso, algumas formas de radioatividade, que dependem da interação fraca, distinguem entre esquerdo e direito. Não trataremos da interação fraca neste curso e, portanto, dentro do nosso escopo vale a paridade.

Uma consequência da paridade é que não podemos ter equações do tipo

$$\text{Escalar } A = \text{pseudo-escalar } B, \quad (4.45)$$

$$\text{Vetor } \mathbf{A} = \text{pseudovetor } \mathbf{B}. \quad (4.46)$$

Por exemplo, não poderemos ter uma equação na qual um produto vetorial seja igualado a um dado vetor. De fato, se tivéssemos alguma equação do tipo da Equação 4.45, ao fazermos uma operação de reflexão, que inverte esquerdo e direito, o escalar A ficaria inalterado, enquanto o pseudo-escalar B trocaria de sinal. Portanto, a equação deixaria de ficar invariante na operação. Consideração semelhante se faz sobre a existência de uma equação do tipo da Equação 4.46.

PROBLEMAS

P 4.1 Uma roda de bicicleta de raio R rola sem deslizamento sobre um piso horizontal. Uma determinada marca na roda está inicialmente em contato com o piso. Qual é o módulo do seu deslocamento se a roda dá: (A) um quarto de volta? (B) meia volta?

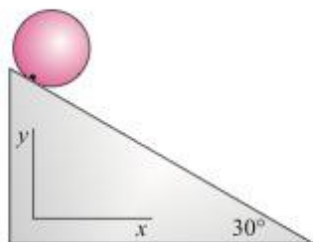


Figura 4.30
(Problema 4.1).

P 4.2 Uma esfera de raio R rola sem deslizar em uma rampa. Considere a pequena marca na esfera mostrada na Figura 4.30. Escreva as componentes x e y do deslocamento da referida marca quando a esfera dá meia volta em seu rolamento.

P 4.3 Expresse o vetor $\mathbf{r}$ da Figura 4.31 em termos das suas coordenadas cartesianas. *Sugestão:* escreva os vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ que vão, respectivamente, do centro do círculo aos pontos P_1 e P_2 , e calcule $\mathbf{r}$ pela relação $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

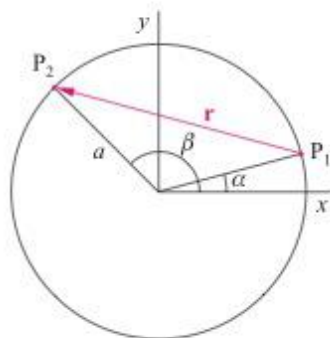


Figura 4.31
(Problema 4.3).

P 4.4 Use o produto escalar entre $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ do P 4.3 para demonstrar que o ângulo entre esses dois vetores é $\beta - \alpha$.

P 4.5 Um vetor tem módulo igual a 10 m e sua componente no eixo x vale 5,0 m. (A) Qual é o ângulo entre esse vetor e o eixo y ? (B) Quais são os valores possíveis da componente do vetor no eixo y ?

P 4.6 Considerando os vetores do Exercício 12, (A) calcule $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}$. (B) Os vetores $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}$ e $\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$ são iguais? Explique.

P 4.7 Mostre que para os vetores mostrados na Figura 4.32 vale a igualdade $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = Fd$. Este resultado é importante no estudo das rotações.

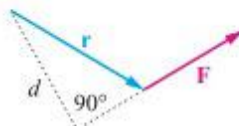


Figura 4.32
(Problema 4.7).

P 4.8 (A) Escreva a expressão analítica dos vetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ da Figura 4.33. (B) Determine os ângulos θ entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e ϕ entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$.

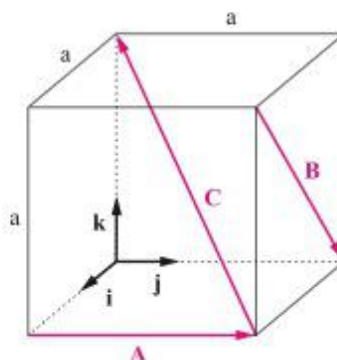


Figura 4.33
(Problema 4.8).

P 4.9 (A) Escreva as expressões analíticas dos vetores **A**, **B** e **C** vistos na Figura 4.34. (B) Calcule os ângulos entre **A** e **B**, **A** e **C**, **B** e **C**.

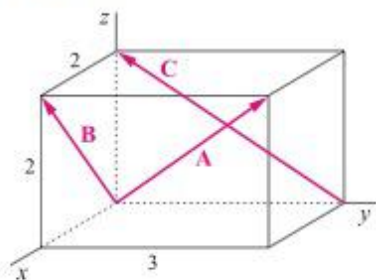


Figura 4.34
(Problema 4.9).

P 4.10 As arestas do paralelepípedo visto na Figura 4.35 são mutuamente perpendiculares. Mostre que o produto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ é igual ao volume do paralelepípedo. (Observação: isso é válido mesmo que as arestas não sejam ortogonais.)

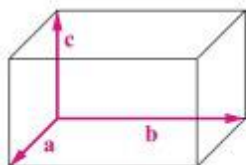


Figura 4.35
(Problema 4.10).

P 4.11 O vetor **a** da Figura 4.36 tem componentes cartesianas a_x e a_y . Ao ser girado do ângulo θ , ele se transforma no vetor **a'**. Quais são as componentes do vetor **a'**? *Sugestão:* imagine que a componente a_x é girada de θ e encontre o novo vetor; daí faça o mesmo com a componente a_y .

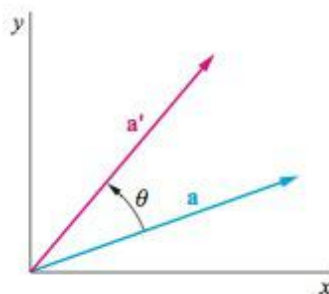


Figura 4.36
(Problema 4.11).

P 4.12 No sistema de eixos (x, y) , o vetor **a** tem componentes a_x e a_y , como mostra a Figura 4.37. Calcule as componentes $a_{x'}$ e $a_{y'}$ do vetor **a** no sistema de eixos (x', y') em termos de a_x , a_y e do ângulo θ .

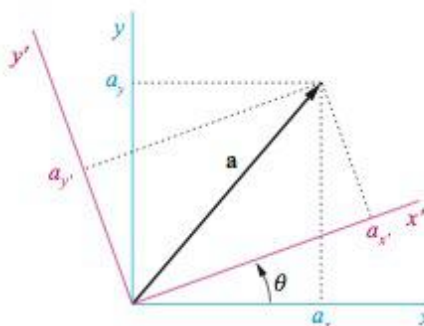


Figura 4.37
(Problema 4.12).

P 4.13 Uma partícula percorre um círculo de raio r a uma velocidade angular constante igual a ω . Em um dado instante t o raio que vai do centro do círculo até a partícula faz um ângulo igual a ωt com o eixo dos x . O sentido de rotação da partícula é do eixo x para o y . (A) Encontre o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ da partícula em um dado instante t . (B) Encontre o vetor $\mathbf{v}(t)$ dado pela derivada de $\mathbf{r}(t)$ em relação a t e o vetor $\mathbf{a}(t)$ que é a derivada de $\mathbf{v}(t)$ em relação a t . (C) Mostre que $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$ para qualquer valor de t .

P 4.14 A velocidade de uma partícula é dada por $\mathbf{v} = bt^2(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + ct^3\mathbf{k}$. (A) Encontre o vetor **a** dado pela derivada de **v** em relação a t . (B) Encontre $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$ e o unitário desse produto vetorial.

Respostas dos exercícios

E 4.1 872 m e 529 m

E 4.2 802 m

E 4.3 É nulo.

E 4.5 É nulo.

E 4.6 $\pm \pi/2$

E 4.7 $\mathbf{a} = 7,4\mathbf{i} + 8,6\mathbf{j}$; $\mathbf{b} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{c} = -8\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

E 4.8 $441,4\mathbf{i} + 141,4\mathbf{j}$, sendo **i** o unitário de oeste para leste e **j** é o de sul para norte.

E 4.9 $2,8\mathbf{i} - 0,75\mathbf{j}$, sendo **i** horizontal para a direita e **j** vertical para cima.

E 4.10 (A) 245 m; (B) $\arccos(-0,408) = 114^\circ$

E 4.11 17,3 m e 10 m

E 4.12 $20,5\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$

E 4.13 $\theta = \arccos(0,786) = 38^\circ$

E 4.14 (A) $-17,5$; (B) 107°

E 4.15 $\mathbf{a} = 10,4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

E 4.16 (A) $a^2 - b^2$; (B) $a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + b^2$; (C) $a^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + b^2$.

E 4.17 $42\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 24,5\mathbf{k}$

E 4.18 $2\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

E 4.19 $-y_0 v_0 \mathbf{k}$

Respostas dos problemas

P 4.1 $R\sqrt{2+\pi^2/4} - \pi$, $R\sqrt{4+\pi^2}$

P 4.2 $(1+\pi\sqrt{3}/2)R$ e $(\sqrt{3}-\pi/2)R$

P 4.3 $\mathbf{r} = a(\cos\beta - \cos\alpha)\mathbf{i} + a(\sin\beta - \sin\alpha)\mathbf{j}$

P 4.5 (A) 30° ou 150° ; (B) $\pm 8,7$ m

P 4.6 (A) $\hat{\mathbf{a}} = 0,58\mathbf{i} + 0,81\mathbf{j}$; $\hat{\mathbf{b}} = -0,50\mathbf{i} + 0,86\mathbf{k}$;

(B) $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}} = 0,70\mathbf{i} - 0,50\mathbf{j} + 0,40\mathbf{k}$ e

$\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = 0,74\mathbf{i} - 0,53\mathbf{j} + 0,43\mathbf{k}$. Só seriam iguais se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ fossem ortogonais entre si.

P 4.8 (A) $\mathbf{A} = a\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -a(\mathbf{i} + \mathbf{k})$, $\mathbf{C} = -a(-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$; (B) 90° e 125°

P 4.9 (A) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = -3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$;

(B) 31° , 110° , 126°

P 4.11 $a'_x = a_x \cos\theta - a_y \sin\theta$; $a'_y = a_x \sin\theta + a_y \cos\theta$.

P 4.12 $a'_x = a_x \cos\theta + a_y \sin\theta$; $a'_y = -a_x \sin\theta + a_y \cos\theta$.

P 4.13 (A) $\mathbf{r} = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}$;

(B) $\mathbf{v} = -\omega \sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega \cos(\omega t)\mathbf{j}$;

$\mathbf{a} = -\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{i} + \omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{j}$

P 4.14 (A) $\mathbf{a} = 2bt(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 3ct^2 \mathbf{k}$; (B) $bct^4(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ e $(\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$



Movimento no Plano e no Espaço

- Seção 5.1 ■ Descrição vetorial do movimento, 90
- Seção 5.2 ■ Um exemplo ilustrativo: movimento circular uniforme, 91
- Seção 5.3 ■ Movimento circular não-uniforme (Opcional), 93
- Seção 5.4 ■ Movimento de um projétil, 95
- Seção 5.5 ■ Alcance de um projétil, 98
- Seção 5.6 ■ Movimento relativo no espaço, 101
- Problemas, 104
- Respostas dos exercícios, 105
- Respostas dos problemas, 105

Seção 5.1 ■ Descrição vetorial do movimento

O conceito de vetores e a notação vetorial, apresentados no Capítulo 4 (*Vetores*), simplificam muito significativamente o estudo do movimento não-retilíneo, ou seja, o movimento em um plano ou, no caso mais geral, no espaço tridimensional. A notação fica muito mais compacta e os cálculos ficam mais simples. Em um dado sistema de coordenadas, a posição de uma partícula é definida pelo seu vetor posição $\mathbf{r}$, ou seja, o vetor que vai da origem das coordenadas até o ponto ocupado pela partícula. Exatamente por esta razão, adiamos o estudo do movimento nessas condições gerais para este momento, quando já sabemos lidar com vetores. Consideremos uma partícula movendo-se sobre uma curva. Suas posições nos instantes t e $t + \Delta t$ são respectivamente $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Seu deslocamento no intervalo de tempo Δt é $\Delta \mathbf{r}$, e nesse intervalo de tempo sua velocidade (de agora em diante, o termo velocidade significará velocidade vetorial) média será

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (5.1)$$

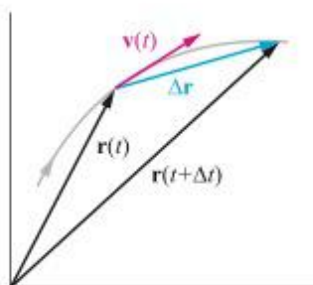


Figura 5.1

Uma partícula movendo-se sobre uma curva faz o deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ no intervalo de tempo Δt . Sua velocidade média nesse intervalo é paralela a $\Delta \mathbf{r}$, e sua velocidade (instantânea) no instante t será $\mathbf{v}(t)$, com direção tangente à trajetória no ponto $\mathbf{r}(t)$.

A velocidade da partícula em qualquer instante se alinha com a tangente da trajetória no ponto ocupado pela partícula naquele instante

A Figura 5.1 ilustra as posições inicial e final da partícula e seu deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ entre esses instantes. Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos a velocidade da partícula no instante t :

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

É claro que quando $\Delta t \rightarrow 0$ o deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ tende a ficar paralelo à tangente da trajetória no ponto $\mathbf{r}$. Portanto, $d\mathbf{r}$ e, conseqüentemente, também a velocidade $\mathbf{v}$ são paralelos à tangente da trajetória da partícula no ponto ocupado no instante t .

Se o vetor posição for decomposto em suas componentes,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (5.3)$$

considerando-se que a derivada de uma soma é a soma das derivadas, e que os unitários ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) são constantes que não se alteram no tempo, tem-se

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}. \quad (5.4)$$

Analogamente, a aceleração da partícula no instante t é obtida por um processo-limite que leva a

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dv_z}{dt} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (5.5)$$

As Equações 5.3, 5.4 e 5.5 mostram que o movimento geral da partícula, em três dimensões, pode ser imaginado como a superposição de três movimentos independentes: um com uma coordenada $x(t)$ e velocidade e aceleração dadas por v_x e a_x ; outro com $y(t)$, v_y e a_y ; e o outro com $z(t)$, v_z e a_z . Cada movimento pode ser resolvido em separado, como se fosse um movimento unidimensional, e no final os vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ estão determinados. Em movimentos que envolvem mais de uma coordenada pode-se definir tanto o movimento uniforme quanto

No movimento uniforme o vetor velocidade ($\mathbf{v}$) é constante e a aceleração ($\mathbf{a}$) é nula, enquanto que no movimento uniformemente acelerado $\mathbf{v}$ varia no tempo e $\mathbf{a}$ é constante

o movimento uniformemente acelerado da mesma maneira que foram definidos no Capítulo 3 (*Movimento Retilíneo*). No movimento uniforme o vetor velocidade ($\mathbf{v}$) é constante e a aceleração ($\mathbf{a}$) é nula, enquanto que no movimento uniformemente acelerado $\mathbf{v}$ varia no tempo e $\mathbf{a}$ é constante. O fato de se expressar por mais de uma coordenada nem sempre implica que a trajetória envolve três dimensões. No caso de um movimento uniforme com velocidade $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$, o movimento de fato é unidimensional. O eixo sobre o qual o movimento se executa tem a mesma direção de $\mathbf{v}$ e passa pela posição $\mathbf{r}_0$ da partícula no instante $t = 0$. Quando a aceleração $\mathbf{a}$ da partícula é constante mas não nula, o movimento é uniformemente acelerado e a trajetória pode estar tanto em uma como em duas dimensões. Se a aceleração e a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ forem paralelas, o movimento se dá em uma reta paralela a esses vetores e que passa pela posição inicial da partícula. Se as grandezas $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{a}$ não estão na mesma direção, então elas e a posição inicial $\mathbf{r}_0$ definem um plano que contém a trajetória da partícula.

Quando a aceleração da partícula depende do tempo, o movimento é mais geral do que os acima descritos e a trajetória pode estar tanto em uma quanto em duas ou três dimensões. De modo geral, se $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ forem paralelos o movimento é unidimensional; assim, um teste simples é verificar se o produto vetorial desses vetores é nulo para qualquer valor de t . Se $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ não forem paralelos, mas permanecerem sempre no mesmo plano, o movimento é bidimensional e um teste simples é verificar se o unitário de seu produto vetorial é sempre o mesmo para quaisquer valores de t .

Exercícios

E 5.1 A posição de um corpo em movimento varia no tempo segundo a equação

$$\mathbf{r} = (80 + 15t + 3,0t^2)\mathbf{i} - 5,0t^2\mathbf{j} + 20t\mathbf{k},$$

onde as distâncias são medidas em metros e o tempo é medido em segundos. Calcule (A) a velocidade e (B) a aceleração do corpo no instante $t = 5,0$ s. (C) Trata-se de movimento uniforme, uniformemente acelerado ou algum movimento mais geral?

E 5.2 Um corpo move-se segundo a fórmula $\mathbf{r} = 120 \text{ m/s} \cdot t - 4,9 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 + 20 \text{ m/s} \cdot t$. Mostre que trata-se de um movimento em um plano.

E 5.3 A posição de uma partícula é dada por $\mathbf{r} = 1,6\text{m} \cdot [\sin(5,0t/\text{s} + \pi/4)\mathbf{i} + \cos(5,0t/\text{s} + \pi/4)\mathbf{j}]$.

(A) Calcule sua velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\mathbf{a}$.

(B) Determine os módulos de $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ e verifique que são independentes do tempo.

Seção 5.2 ■ Um exemplo ilustrativo: movimento circular uniforme

No movimento circular uniforme a partícula percorre uma trajetória circular a uma velocidade de módulo constante. A Figura 5.2 ilustra a partícula percorrendo a circunferência de raio R , a uma velocidade de módulo v constante. Como o módulo da velocidade é igual ao tamanho de arco percorrido dividido pelo tempo ($v = d\ell / dt$) e um arco de círculo ($d\ell$) é igual ao ângulo $d\phi$ por ele envolvido multiplicado pelo raio R do círculo, a velocidade é dada por $v = R(d\phi / dt)$. A razão $\frac{d\phi}{dt}$ é a **velocidade angular** da partícula, ou seja, o número de radianos percorridos por unidade de tempo. A velocidade angular será designada pelo símbolo ω . Então as velocidades linear e angular estão relacionadas pela equação $v = \omega R$.

A **velocidade angular** ω do movimento circular é o número de radianos percorridos por unidade de tempo. As velocidades linear e angular estão relacionadas pela equação $v = \omega R$

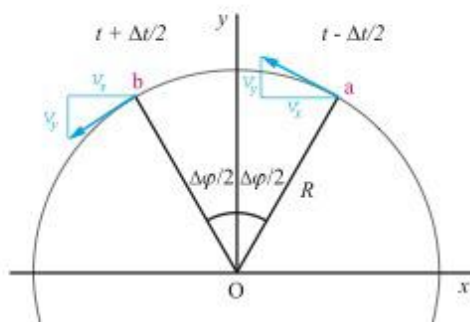


Figura 5.2

Movimento circular uniforme. A partícula percorre uma órbita circular de raio R a uma velocidade de módulo constante v . As velocidades vetoriais da partícula são mostradas nos instantes $t - \frac{1}{2}\Delta t$ e $t + \frac{1}{2}\Delta t$, estando a partícula no topo do círculo no instante t .

Vamos agora encontrar a aceleração da partícula. Consideremos que no instante t a partícula se encontra no topo do círculo, como mostra a Figura 5.1. Em $t - \frac{1}{2}\Delta t$ ela se encontra no ponto a definido pelo ângulo $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\Delta\varphi$, e em $t + \frac{1}{2}\Delta t$ ela se encontra no ponto b definido por $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\Delta\varphi$. A componente da velocidade na direção x é a mesma nos dois instantes, enquanto a componente da velocidade na direção y muda de sinal. Vê-se da figura que

$$\mathbf{v}(t - \frac{1}{2}\Delta t) = -v \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \mathbf{i} + v \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \mathbf{j}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{v}(t + \frac{1}{2}\Delta t) = -v \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \mathbf{i} - v \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \mathbf{j}. \quad (5.7)$$

Portanto, a aceleração da partícula será

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \frac{1}{2}\Delta t) - \mathbf{v}(t - \frac{1}{2}\Delta t)}{\Delta t} = -v \mathbf{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\Delta\varphi}{2}) + \sin(\frac{\Delta\varphi}{2})}{\Delta t} \quad (5.8)$$

Para $\Delta\varphi$ pequeno e medido em radianos, tem-se $\sin(\frac{\Delta\varphi}{2}) \cong \frac{\Delta\varphi}{2}$ e, portanto,

$$\mathbf{a}(t) = -v \mathbf{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = -v \mathbf{j} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5.9)$$

Como as velocidades linear e angular estão relacionadas pela equação $v = \omega R$, finalmente pode-se escrever

$$\mathbf{a}(t) = -v \omega \mathbf{j} = -\frac{v^2}{R} \mathbf{j} = -\omega^2 R \mathbf{j}. \quad (5.10)$$

Vê-se que a aceleração $\mathbf{a}(t)$ aponta para o centro do círculo. Isto obviamente ocorre em qualquer ponto da trajetória. A Figura 5.3 mostra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ em três pontos distintos da trajetória da partícula.

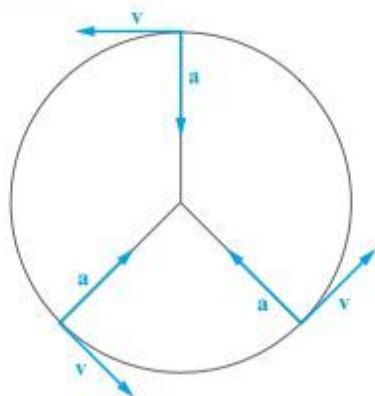


Figura 5.3

Velocidade e aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme em três momentos de sua trajetória. A aceleração sempre aponta para o centro da trajetória.

A aceleração de uma partícula proveniente do encurvamento da trajetória é denominada **aceleração centrípeta**, e seu valor é $a_c = \frac{v^2}{R}$, onde v é o módulo da velocidade e R o raio de curvatura da órbita

■ Aceleração tangencial

A aceleração de uma partícula só é nula no movimento retilíneo uniforme, ou seja, movimento retilíneo com velocidade de módulo constante

A aceleração de uma partícula proveniente do encurvamento da trajetória é denominada **aceleração centrípeta** a_c . No caso de trajetória não-circular, $a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, sendo v e R respectivamente o módulo da velocidade e o raio de curvatura da órbita naquele ponto, e sendo $\mathbf{a}_c$ normal à órbita. Se o módulo da velocidade for variável, haverá também uma **aceleração tangencial** dada por

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{v}}, \quad (5.11)$$

onde $\hat{\mathbf{v}}$ é o unitário na direção da velocidade, o qual é tangencial à trajetória. É importante notar que as acelerações centrípeta e tangencial são sempre perpendiculares entre si. Portanto, para que a aceleração seja nula é necessário que as acelerações centrípeta e tangencial sejam ambas nulas. Isto significa que somente no movimento retilíneo uniforme a partícula tem aceleração nula.

E-E Exercício-exemplo 5.1

■ Um satélite artificial terrestre move-se em uma órbita circular de raio $R = 6,700 \times 10^3$ km, ou seja, a uma altitude de 330 km. O módulo de sua velocidade é $v = 7,71$ km/s. (A) Qual é a sua aceleração centrípeta em m/s? (B) Qual é a aceleração da gravidade a 330 km de altitude?

■ Solução

(A) A aceleração centrípeta do satélite é dada por

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(7,71 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{6,7 \times 10^6 \text{ m}} = 8,87 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

(B) A aceleração centrípeta do satélite é a aceleração da gravidade nos pontos da sua órbita. Portanto, a 330 km de altitude a aceleração da gravidade é $g = 8,87 \text{ m/s}^2$.

Exercícios

E 5.4 Um satélite para observação de danos ambientais na Amazônia circunda a Terra à altitude de 600 km, onde a aceleração da gravidade vale $8,21 \text{ m/s}^2$. Sendo $R = 6,37 \times 10^3$ km o raio da Terra, qual é o período da órbita do satélite?

E 5.5 Calcule a aceleração da Terra em seu movimento em torno do Sol, aproximando sua órbita por um círculo de raio $1,50 \times 10^{11}$ m.

Seção 5.3 ■ Movimento circular não-uniforme (opcional)

Nesta seção, trataremos o movimento circular em uma forma mais geral que permite a análise completa tanto do movimento circular uniforme quanto do movimento circular não-uniforme. Essa abordagem também será útil para uma compreensão mais profunda do formalismo apresentado na Seção 5.1 (*Descrição vetorial do movimento*). Consideremos uma partícula forçada a mover-se sobre uma circunferência de raio R . Sua posição, em qualquer instante, será completamente definida pelo ângulo φ , como se vê na Figura 5.4, cujo exame permite escrever

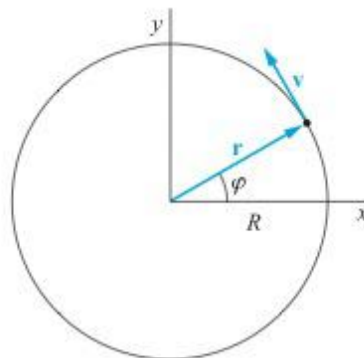


Figura 5.4

Uma partícula move-se sobre uma circunferência de raio R . Sua posição é univocamente definida pelo ângulo φ .

$$\mathbf{r}(t) = R[\cos\varphi(t) \mathbf{i} + \sin\varphi(t) \mathbf{j}]. \quad (5.12)$$

A velocidade da partícula será dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} [-\sin\varphi(t) \mathbf{i} + \cos\varphi(t) \mathbf{j}], \\ \mathbf{v}(t) &= R\omega [-\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j}], \end{aligned} \quad (5.13)$$

e sua aceleração será

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = R\omega^2[\cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j}] + R \cdot \frac{d\omega}{dt}[-\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j}]. \quad (5.14)$$

Como R é constante, $R \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = \frac{dv}{dt}$, e podemos então reescrever a Equação 5.14 na forma compacta

$$\mathbf{a} = -R\omega^2 \hat{\mathbf{r}} + \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{v}}. \quad (5.15)$$

Deve-se notar que a primeira e a segunda contribuições para a aceleração nesta equação são, respectivamente, as acelerações centrípeta e tangencial, mencionadas na Seção 5.2 (*Um exemplo ilustrativo: movimento circular uniforme*). Portanto,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_t. \quad (5.16)$$

A Figura 5.5 mostra a aceleração da partícula e suas duas componentes, centrípeta e tangencial. Deve-se notar que, se o módulo da velocidade for constante, recaímos no movimento circular uniforme, no qual a aceleração tangencial é nula e, portanto, toda a aceleração da partícula é centrípeta.

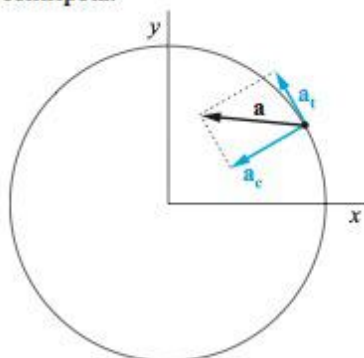


Figura 5.5

No movimento circular não-uniforme, a aceleração $\mathbf{a}$ tem duas componentes, a aceleração centrípeta $\mathbf{a}_c$ e a aceleração tangencial $\mathbf{a}_t$.

A Equação 5.14 tem validade muito mais geral do que sua dedução possa fazer crer. Na verdade, ela se aplica a qualquer tipo de trajetória que a partícula possa ter. Para entender como aplicá-la a trajetórias não-circulares, devemos notar que para qualquer ponto de uma curva podemos definir um raio de curvatura R . Pois bem, a Equação 5.14 — e também a Equação 5.15 — permanece válida para uma trajetória qualquer se R for tomado como o raio de curvatura local da curva.

E-E Exercício-exemplo 5.2

■ Um carro está num ponto de uma estrada em que o raio de curvatura é de 500 m. Sua velocidade é de 30 m/s e aumenta a uma taxa de 2,0 m/s². Calcule o módulo da aceleração do carro.

■ Solução

A aceleração centrípeta do carro terá módulo dado por

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(30 \text{ m/s})^2}{500 \text{ m}} = 1,8 \text{ m/s}^2,$$

e o módulo da aceleração tangencial será

$$a_t = 2,0 \text{ m/s}^2.$$

Uma vez que as acelerações centrípeta e tangencial são ortogonais entre si, o módulo da aceleração do carro será

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(1,8 \text{ m/s}^2)^2 + (2,0 \text{ m/s}^2)^2} = 2,7 \text{ m/s}^2.$$

Exercício

E 5.6 Um disco circular, cujo raio é de 15 cm, gira a uma velocidade angular variando na forma $\omega = 10 t/s$. Calcule (A) o módulo da velocidade de um ponto na borda de disco em $t = 12 s$; (B) o módulo da aceleração do referido ponto naquele instante.

Seção 5.4 ■ Movimento de um projétil

Conforme vimos no Capítulo 2 (*Medidas*), ignorando-se o atrito com o ar, todo corpo movendo-se próximo à superfície da Terra tem uma aceleração constante, cujo módulo é g , a aceleração da gravidade. Consideremos um corpo lançado à velocidade inicial $\mathbf{v}_o$, de módulo v_o , fazendo um ângulo θ_o com a horizontal. Tal velocidade pode ser expressa na forma analítica:

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{i} v_{ox} + \mathbf{j} v_{oy} = v_o (\mathbf{i} \cos \theta_o + \mathbf{j} \sin \theta_o), \quad (5.17)$$

onde $\mathbf{j}$ é um unitário na direção vertical dirigido para cima. A aceleração do corpo será

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}, \quad (5.18)$$

ou seja,

$$a_x = 0, \quad a_y = -g.$$

A aceleração é constante e o movimento, como vimos na Seção 5.1 (*Descrição vetorial do movimento*), é uniformemente acelerado e se desenvolve em uma reta ou um plano. O movimento só seria retilíneo se $\mathbf{v}_o$ fosse paralelo a $\mathbf{g}$, caso em que a componente de velocidade v_{ox} teria que ser nula. Das Equações 5.5 e 5.18 podemos escrever

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y = -g, \quad (5.19)$$

Essas equações podem ser integradas para se obter, respectivamente,

$$v_x = v_{ox}, \quad v_y = v_{oy} - gt. \quad (5.20)$$

As Equações 5.20, que matematicamente decorrem da Equação 5.18, exprimem fatos empíricos e não-intuitivos cuja aceitação exigiu amplo esforço de persuasão de Galileu, que primeiro os reconheceu:

(A) O fato de o corpo estar sujeito à aceleração da gravidade, na direção $-y$, não afeta a sua velocidade na direção x , que se mantém constante com o mesmo valor inicial v_{ox} .

(B) O fato de o corpo ter uma velocidade horizontal v_x não afeta a aceleração que lhe é causada pela gravidade; independentemente do valor da velocidade do corpo, tanto na horizontal quanto na vertical, sua aceleração vertical terá o mesmo valor $-g$.

Esses dois fatos empíricos são mutuamente independentes, ou seja, um não decorre logicamente do outro, e nesse caso ambos têm de ser extraídos da experiência. Portanto, com nossa matemática estamos na verdade formalizando fatos de caráter empírico descobertos por Galileu.

Integrando novamente as Equações 5.20, sendo $x_o = 0$ e y_o as coordenadas iniciais do corpo, obtemos

$$x = v_{ox} t, \quad (5.21)$$

$$y = y_o + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (5.22)$$

A aceleração da gravidade não afeta a velocidade horizontal de um projétil; além disso, tal aceleração não é afetada pela velocidade do projétil, seja na vertical ou na horizontal. É o que diz a Equação 5.20: o projétil tem aceleração vertical cujo valor independe da sua velocidade

Por não ter nenhuma velocidade inicial na direção z nem ser acelerado naquela direção, a coordenada z do corpo não se altera durante o movimento. Este fica restrito ao plano xy , ou seja, a sua trajetória é plana. A componente v_x da velocidade na direção x se mantém invariante no tempo, de acordo com a Equação 5.20, e a componente v_y decresce continuamente. Isso significa que se seu valor inicial v_{oy} for positivo ela decresce, até atingir o valor nulo no instante t_s , que pode ser obtido fazendo-se a velocidade $v_y = 0$ na Equação 5.20:

$$t_s = v_{oy} / g. \quad (5.23)$$

Neste instante a altura da partícula atinge seu valor máximo, pois $v_y = 0$. Assim, t_s é o tempo de subida da partícula. Isto pode ser visto por meio da Equação 5.22, que apresenta um máximo para y em t_s . Esta conclusão fica mais evidente após algumas transformações algébricas, e a Equação é reescrita na seguinte forma:

$$y = y_o + \frac{v_{oy}^2}{2g} - \frac{1}{2}g \left(t - \frac{v_{oy}}{g} \right)^2 = y_o + \frac{v_{oy}^2}{2g} - \frac{1}{2}g (t - t_s)^2. \quad (5.24)$$

Após t_s , a velocidade v_y continua decrescendo continuamente, ou seja, torna-se negativa com módulo crescente, como se vê de 5.20, e a altura da partícula começa a diminuir.

O tempo t_s corresponde ao tempo t_m descrito na Seção 3.10 (*Movimento uniformemente acelerado*), que define o ponto de simetria de $y(t)$ em relação ao tempo.

Uma vez que, pela Equação 5.21, $t = x / v_{ox}$, da Equação 5.22 podemos obter a relação entre as coordenadas x e y , ou seja, a equação da trajetória do projétil:

■ Equação da trajetória de um projétil

$$y = y_o + \frac{v_{oy}}{v_{ox}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{ox}^2} x^2. \quad (5.25)$$

Esta é a equação de uma parábola e, portanto, o corpo descreve uma trajetória parabólica, fato descoberto por *Galileu*, pioneiro no estudo do movimento de projéteis.

E-E Exercício-exemplo 5.3

■ Um menino rola uma bolinha sobre uma mesa, e esta cai, de uma altura $H = 80$ cm (ver Figura 5.6). Se a velocidade inicial da bolinha é $v_o = 2,1$ m/s, a que distância D da projeção da borda da mesa ela atinge o piso?

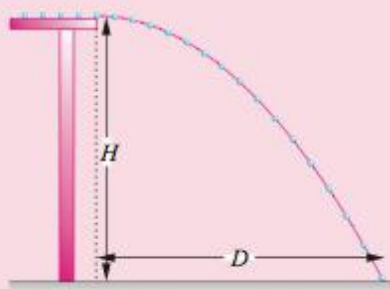


Figura 5.6
(Exercício-exemplo 5.3)

■ Solução

A componente vertical da velocidade inicial da bolinha é nula; tomando-se o nível do solo como a origem do eixo y , $y_o = H$. Podemos então usar as Equações 5.21 e 5.22 e escrever

$$x = v_o t, \quad y = H - \frac{1}{2} g t^2. \quad (5.26)$$

Eliminando t nestas duas equações, ou usando diretamente a 5.25, obtém-se a equação da trajetória:

$$y = H - \frac{1}{2} \frac{g}{v_o^2} x^2.$$

Quando a bolinha conclui sua queda, tem-se $y = 0$ e $x = D$; da equação da trajetória, podemos então escrever

$$0 = H - \frac{1}{2} \frac{g}{v_o^2} D^2, \Rightarrow D = v_o \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

$$D = 2,1 \text{ m/s} \times \sqrt{\frac{2 \times 0,80 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 85 \text{ cm}.$$

Exercício

E 5.7 Todas as partículas da Natureza, como os elétrons, prótons, e outras, estão sujeitas à ação da gravidade. Entretanto, devido às altas velocidades a que tais partículas usualmente se movimentam, a atuação da gravidade sobre elas quase sempre pode ser ignorada. Considere, por exemplo, um elétron em um tubo de tevê, que é lançado do canhão de elétrons à tela à velocidade de 6×10^7 m/s. A distância típica do trajeto é 0,3 m, maior ou menor, dependendo do tamanho do tubo. Considerando-se essa distância, quanto um elétron é desviado para baixo devido à gravidade?

A forma parabólica de $y(x)$, que está mostrada na Figura 5.7, é uma consequência da dependência quadrática de y com o tempo t e da linearidade de t com x . Isso faz com que as escalas de x e t sejam proporcionais e o gráfico $y \times t$ tenha a mesma forma do gráfico $y \times x$. Assim, toda a discussão de simetria das posições relativas ao instante em que a velocidade é nula, no movimento uniformemente acelerado unidimensional, como vimos no Capítulo 3 (*Movimento Retilíneo*), se aplica à trajetória de um projétil. As posições em y são simétricas em relação à coordenada x_m dada por

$$x_m = v_{ox} t_s = \frac{v_{ox} v_{oy}}{g}. \quad (5.27)$$

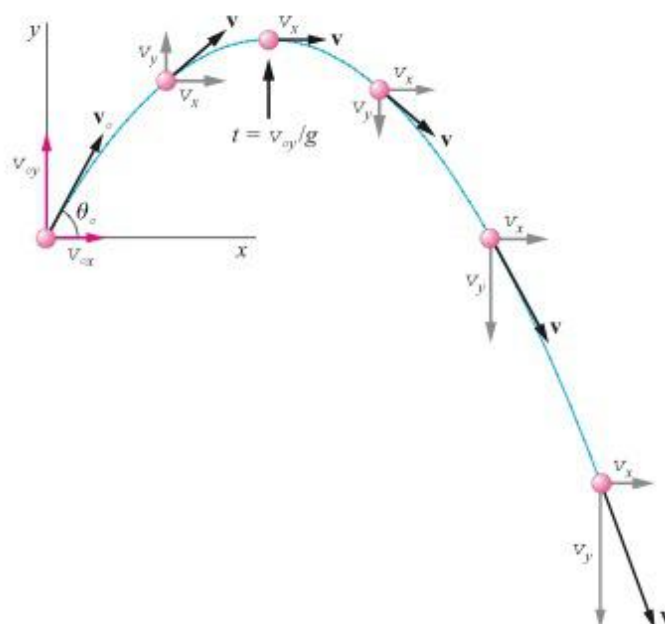


Figura 5.7

Trajetória parabólica de um projétil sob o efeito da aceleração g da gravidade.

Uma maneira interessante de se ressaltar essa simetria é reescrever $y(x)$ da Equação 5.25 da mesma maneira que fizemos para $y(t)$ na Equação 5.24. Para isso basta substituir $t = x / v_{ox}$ na 5.24:

$$y = y_o + \frac{v_{oy}^2}{2g} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{ox}^2} (x - x_m)^2. \quad (5.28)$$

Tanto a Equação 5.28 quanto a 5.25 mostram que para a mesma altura y existem duas posições x : uma na subida (menor que x_m) e outra na descida (maior que x_m). E elas são equidistantes em relação a x_m .

A Equação 5.22 mostra que a coordenada y do projétil independe de sua velocidade v_x , a qual permanece constante durante o movimento. Isto é ilustrado pela Figura 5.8, que mostra duas bolas soltas do mesmo ponto, ambas tendo $v_{oy} = 0$. Para uma das bolas, $v_{ox} = 0$, e para a outra $v_{ox} > 0$. Nota-se que uma bola cai verticalmente e a outra percorre uma trajetória parabólica, e que, apesar da distinção entre as trajetórias, a cada instante as duas bolas estão à mesma altura.

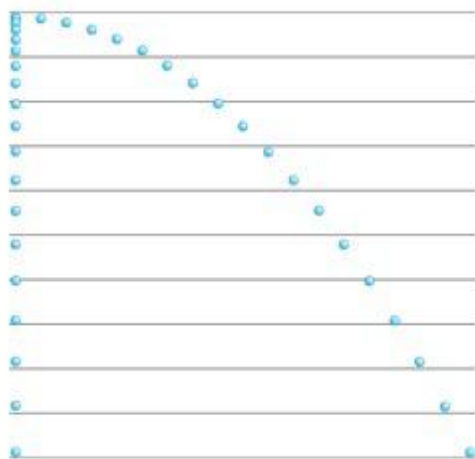


Figura 5.8

Duas bolas são soltas do mesmo ponto. Uma das bolas tem velocidade inicial nula e a outra tem velocidade inicial na direção horizontal. Em cada instante, ambas as bolas estão à mesma altura, ou seja, a velocidade horizontal da bola não afeta seu movimento na vertical.

Seção 5.5 ■ Alcance de um projétil

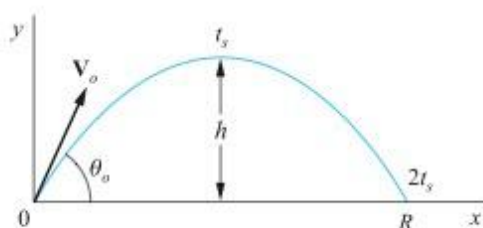


Figura 5.9

A trajetória de um projétil, com a indicação de várias grandezas relevantes.

Nesta seção retomaremos a análise do movimento de um projétil visando obter algumas características da trajetória, como a altura máxima atingida e o alcance do projétil na direção x . Algumas variáveis envolvidas na discussão estão mostradas na Figura 5.9. O tempo gasto para o projétil atingir o ápice da trajetória é t_s , dado na Equação 5.23.

$$t_s = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o \sin \theta_o}{g}. \quad (5.29)$$

Pela Equação 5.24 vê-se que a altura h atingida, igual ao valor máximo de $y - y_o$, é

$$h = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{(v_o \sin \theta_o)^2}{2g}. \quad (5.30)$$

■ Altura alcançada por um projétil

O alcance R do projétil é a sua posição horizontal (relativa ao ponto de partida) no momento em que atinge novamente o nível $y = 0$ do qual foi atirado. Considerando-se a simetria da trajetória, deduz-se que esse nível é atingido no instante $t = 2t_s$. Usando o valor de t_s da Equação 5.23 na Equação 5.21 encontramos

■ Alcance horizontal de um projétil

$$R = 2 \frac{v_o^2}{g} \sin \theta_o \cos \theta_o. \quad (5.31)$$

Usando-se a relação trigonométrica $\sin 2\theta_o = 2 \sin \theta_o \cos \theta_o$, pode-se reescrever a Equação 5.31 na forma

$$R = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta_o. \quad (5.32)$$

Percebe-se imediatamente que o maior valor de R , para um valor fixo do módulo da velocidade inicial, ocorre quando $2\theta_o = \pi/2$, ou seja, $\theta_o = 45^\circ$. Para esse ângulo, temos o alcance máximo do projétil, dado por

$$R_{\max} = \frac{v_o^2}{g}. \quad (5.33)$$

E-E Exercício-exemplo 5.4

■ Um canhão atira suas balas à velocidade inicial de módulo v_o . Portanto, seu raio de tiro (o alcance máximo de seus tiros), estando o canhão em terreno plano, é $R_{\max} = v_o^2/g$, conforme com a Equação 5.33. (A) Mostre que, para atirar em um alvo à distância $R < R_{\max}$, o operador do canhão pode optar por dois ângulos θ_o . (B) Calcule os dois valores de θ_o para o alvo à distância de 800 m, supondo $v_o = 100$ m/s.

■ Solução

(A) Pela Equação 5.32,

$$\sin 2\theta_o = \frac{gR}{v_o^2} = \frac{R}{R_{\max}} < 1.$$

Portanto, como se vê na Figura 5.10, onde para simplificar usamos a notação compacta $\varphi = 2\theta_o$, há duas soluções para o ângulo $2\theta_o$.

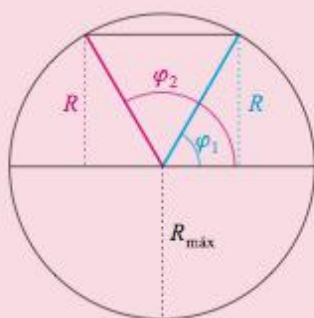


Figura 5.10

Os dois ângulos φ_1 e φ_2 têm o mesmo seno:
 $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = R/R_{\max}$.

(B) Usando os dados numéricos do problema temos $R_{\max} = 1019$ m, e podemos escrever

$$\sin 2\theta_o = \frac{800}{1019} = 0,785,$$

cujas soluções são

$$2\theta_{o1} = 52^\circ, \quad 2\theta_{o2} = 128^\circ,$$

Portanto,

$$\theta_{o1} = 26^\circ,$$

$$\theta_{o2} = 64^\circ,$$

são os dois ângulos de tiro possíveis. A Figura 5.11 ilustra os dois ângulos de tiro com os quais o canhão pode acertar o alvo. Nota-se que os ângulos 26° e 64° são simétricos (igualmente afastados) em relação ao ângulo de 45° . A existência dos dois ângulos de tiro, equidistantes do ângulo de 45° , foi descoberta por Galileu.

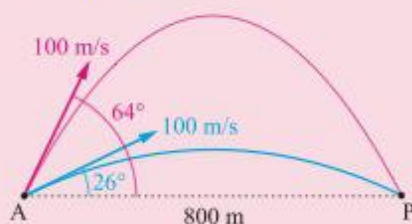


Figura 5.11

O canhão, no ponto A, atira balas à velocidade de 100 m/s. O alvo no ponto P, a 800 m, pode ser acertado com dois ângulos de tiro, 26° e 64° , simétricos em relação ao ângulo de 45° .

E-E Exercício-exemplo 5.5

■ A pedra atira o mico? Um menino vê um mico pendurado em uma árvore e lhe atira uma pedra usando seu estilingue. Exatamente no instante em que a pedra é atirada, o mico solta-se do galho pretendendo cair ao solo e depois escapar da perseguição. Ficar livre de ser atingido pela pedra (Figura 5.12)?

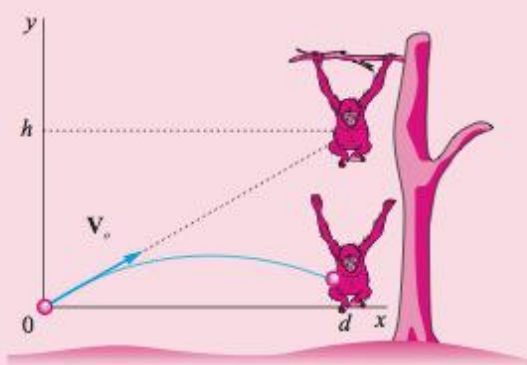


Figura 5.12

Um garoto atira uma pedra em um mico pendurado no galho de uma árvore. Quando a pedra é atirada, o mico se solta do galho para evitar o choque, mas não logra sucesso. Melhor tivesse ficado quieto.

■ Solução

As coordenadas da pedra e do mico variam no tempo nas formas

$$x_p = v_{ox} t,$$

$$y_p = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$y_m = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

Uma vez que o garoto mirou o mico pendurado no galho, devemos ter

$$\frac{v_{oy}}{v_{ox}} = \frac{h}{d}, \Rightarrow v_{oy} = v_{ox} \frac{h}{d}$$

e, portanto,

$$y_p = v_{ox} \frac{h}{d} t - \frac{1}{2} g t^2.$$

A pedra atinge a coordenada horizontal $x_p = d$ no instante

$$t_d = \frac{d}{v_{ox}},$$

e neste instante sua coordenada vertical será

$$y_p = v_{oy} \frac{h}{d} \frac{d}{v_{ox}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{ox}} \right)^2 = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{ox}} \right)^2.$$

No mesmo instante t_d , a coordenada vertical do mico será

$$y_m = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{ox}} \right)^2.$$

Assim, vemos que as coordenadas da pedra e do mico coincidem no instante t_d e, portanto, que a pedra acerta o mico.

Exercícios

E 5.8 Uma pedra é atirada à velocidade de 20 m/s, fazendo um ângulo de 60° com a horizontal. (A) Quanto tempo a pedra leva para atingir sua altura máxima? (B) Qual é a altura máxima atingida? (C) Qual é o alcance da pedra?

E 5.9 Uma pedra é atirada do alto de um edifício cuja altura é de 20,0 m, à velocidade de módulo igual a 15,0 m/s, a um ângulo de 45° com a horizontal. (A) Quanto tempo leva a pedra para atingir o solo? (B) Qual é o alcance horizontal da pedra? (C) A que velocidade escalar ela atinge o solo?

Seção 5.6 ■ Movimento relativo no espaço

Consideremos duas partículas cujas posições no instante t sejam $\mathbf{r}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$. A posição da partícula 2 relativamente à partícula 1 é definida pelo vetor

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t) \quad (5.34)$$

A velocidade e a aceleração da partícula 2 em relação à partícula 1 são, respectivamente,

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{A} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} \quad (5.36)$$

Vê-se imediatamente que as Equações 5.35 e 5.36 podem ser escritas nas formas equivalentes

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad (5.37)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \quad (5.38)$$

onde $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são respectivamente as velocidades e acelerações das partículas 1 e 2.

E-E Exercício-exemplo 5.6

■ Um barco é capaz de se deslocar à velocidade escalar V em relação à água. O barqueiro quer atravessar um rio, cuja corrente tem velocidade escalar v_r , na direção ortogonal à corrente. (A) A que ângulo deve orientar o barco em relação à corrente do rio? (B) Com essa inclinação, qual é a velocidade escalar do barco em relação às margens do rio?

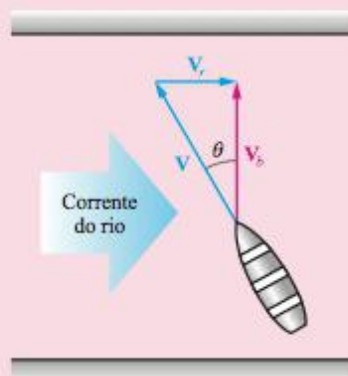


Figura 5.13

Um barco desenvolve velocidade V em relação às águas de um rio que flui à velocidade v_r . Como se deve orientar a proa do barco para que este possa atravessar o rio perpendicularmente à corrente?

■ Solução

A velocidade V do barco em relação à água do rio é

$$V = v_b - v_r$$

onde v_b é a velocidade do barco em relação às margens do rio. Da Figura 5.13, podemos ver que

$$v_r = V \sin \theta,$$

o que determina o ângulo de inclinação do barco em relação à corrente:

$$\theta = \arcsen(v_r / V).$$

Da figura, também obtemos

$$v_b = \sqrt{V^2 - v_r^2}$$

Deve-se observar que só é possível realizar tal tipo de travessia se $v_r < V$.

E-E Exercício-exemplo 5.7

■ No cruzamento de duas ruas, uma na direção oeste-leste e a outra na direção sul-norte, há um sinal luminoso. Um carro, indo para o norte, passa pelo cruzamento à velocidade de 70 km/h, a qual é mantida constante. 10 s depois, o sinal abre para a outra rua e outro carro, indo para o leste, arranca com aceleração constante de 5,0 (km/h)/s. Calcule a velocidade e a aceleração do segundo carro em relação ao primeiro 15 s após a arrancada do carro.

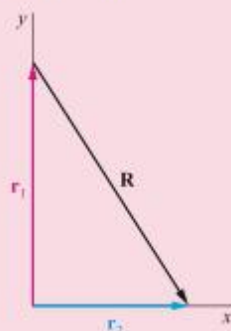


Figura 5.14

(Exercício-exemplo 5.7).

■ Solução

Definindo os eixos x e y nas direções oeste-leste e sul-norte, respectivamente, e tomando a origem das coordenadas no cruzamento das ruas (ver Figura 5.14) e a origem do tempo no instante em que o carro 2 arranca, podemos escrever

$$\mathbf{v}_1 = v_{10}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_2 = a_2 t \mathbf{i}.$$

Portanto,

$$\mathbf{V} = a_2 t \mathbf{i} - v_{10} \mathbf{j}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{a}_2 = a_2 \mathbf{i}.$$

Colocando os números nestas duas fórmulas, obtemos

$$\mathbf{V} = \mathbf{i} \frac{5,0 \text{ km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \times 15 \text{ s} - \mathbf{j} \frac{70 \text{ km}}{\text{h}},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{i} \frac{5,0 \text{ km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \times 15 \text{ s} - \mathbf{j} \frac{70 \text{ km}}{\text{h}} = (75\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} \frac{5,0 \text{ km}}{\text{h} \cdot \text{s}} = \mathbf{i} \frac{5000}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \mathbf{i}.$$

E-E Exercício-exemplo 5.8

■ Um menino, viajando na carroçaria de uma caminhonete que se move em uma pista horizontal, tenta descobrir em que direção tem de jogar uma pedra para cima para que ela caia de volta em suas mãos. Depois de algumas tentativas, descobre que tem de jogá-la na direção que lhe parece ser a vertical. Demonstre esse resultado.

■ Solução

Sejam $\mathbf{v}_c$ a velocidade da caminhonete e $\mathbf{v}_{om}$ a velocidade à qual o menino atira a pedra. Esta é a velocidade à qual o menino vê a pedra sair da sua mão. Alguém parado à margem da estrada vê a pedra ser atirada a uma velocidade $\mathbf{v}_o$ igual à soma vetorial de $\mathbf{v}_c$ com $\mathbf{v}_{om}$. A Figura 5.15 mostra a composição de $\mathbf{v}_c$ com $\mathbf{v}_{om}$ para gerar a velocidade $\mathbf{v}_o$. A figura também mostra a trajetória da pedra, segundo a visão de quem está parado à margem da estrada.

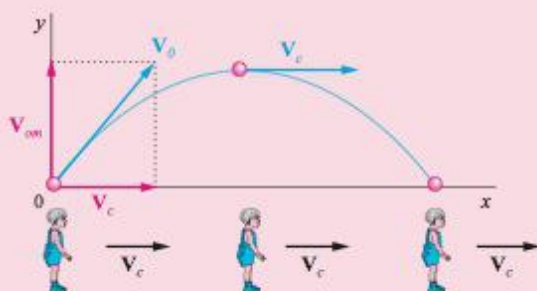


Figura 5.15

Um menino, à velocidade horizontal $\mathbf{v}_c$, atira uma pedra em direção que lhe parece ser a vertical, à velocidade $\mathbf{v}_{om}$. Para alguém que esteja parado, a pedra é vista à velocidade $\mathbf{v}_o = \mathbf{v}_{om} + \mathbf{v}_c$. Para o menino, a bola sobe e desce na vertical e retorna à sua mão. Para um observador parado, a bola descreve uma parábola e retorna à mão do menino. Em qualquer instante esse observador vê a pedra verticalmente sobre o menino.

Para esse observador externo, o componente horizontal da velocidade da pedra sempre permanecerá inalterado, igual à velocidade $\mathbf{v}_c$ da caminhonete, que também é a velocidade do menino. Portanto, a pedra sempre estará verticalmente acima da mão do menino, e acabará voltando a ela.

A falta de compreensão do fenômeno que acabamos de descrever retardou por muito tempo a aceitação de que a Terra pudesse estar girando em torno de seu eixo. As pessoas argumentavam que os corpos em queda seriam desviados para um lado — para o oeste — e, portanto, o corpo não poderia cair na vertical. Analogamente, um corpo atirado verticalmente para cima acabaria caindo bem longe do ponto de partida. Galileu foi quem descobriu a explicação do aparente paradoxo.

Exercícios

E 5.10 A bolinha que percorre a parábola na Figura 5.8 do texto tem velocidade inicial $\mathbf{v}_0 = i v_0$. Calcule (A) sua velocidade e (B) sua aceleração em relação à outra bolinha no instante genérico t .

E 5.11 Calcule a distância entre os dois carros do Exercício-exemplo 5.7, 15 s após a arrancada do carro que estava parado.

PROBLEMAS

P 5.1 Um corpo está no instante inicial $t = 0$, na posição $\mathbf{r}_0 = i3,0 \text{ m} + \mathbf{k}5,0 \text{ m}$, e com velocidade $\mathbf{v}_0 = j7,0 \text{ m/s}$. Sua aceleração evolui no tempo segundo a equação $\mathbf{a}(t) = -j10 \text{ m/s}^2 + \mathbf{k}3,0t \text{ m/s}^2$. Calcule (A) a velocidade do corpo e (B) a posição em $t = 3,0 \text{ s}$. (Sugestão: analise o movimento em cada direção i , j e k independentemente do movimento nas outras duas direções.)

P 5.2 Faça gráficos das coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ do corpo cujo movimento é descrito no Problema 5.1.

P 5.3 Um elétron sujeito a um campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ descreve um movimento helicoidal uniforme cujo raio é de $2,00 \text{ mm}$ e cujo período de oscilação é de $3,00 \text{ ns}$. O passo da hélice é de $6,00 \text{ mm}$. Calcule (A) o módulo da velocidade do elétron e (B) o módulo da sua aceleração.

P 5.4 Um próton sujeito a um campo magnético realiza um movimento helicoidal uniforme, em torno do eixo z , com os seguintes parâmetros: $v_{x0} = 5,00 \times 10^5 \text{ m/s}$, $a = 4,00 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$; $v_z = 2,00 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Calcule o passo da hélice.

P 5.5 Um avião, voando na horizontal à altitude de 300 m e à velocidade de 360 km/h , solta uma bomba cuja velocidade inicial, em relação ao avião, é nula. (A) Quanto tempo a bomba leva para cair? (B) Qual é o deslocamento horizontal da bomba durante a queda? (C) Quanto tempo a bomba leva para que sua velocidade faça um ângulo de 45° com a horizontal?

P 5.6 Um avião pretende lançar equipamento de salvamento para um naufrago. Voa à altitude de 200 m , numa linha horizontal que passa sobre o naufrago, à velocidade de 300 km/h . O naufrago é observado por uma luneta que faz um ângulo θ com a horizontal. A que ângulo θ de visão o equipamento deve ser solto, para que caia próximo do naufrago?

P 5.7 Um garoto atira uma pedra à velocidade inicial de 15 m/s , a um ângulo de 60° com a horizontal. (A) Qual é a altura máxima atingida pela pedra? (B) Qual é o módulo da sua velocidade no ponto de altura máxima?

P 5.8 A Figura 5.16 mostra dados sobre um projétil que atinge um ponto em um plano elevado de uma altura H em relação ao ponto de lançamento. Sua trajetória faz um ângulo de 45° com o plano. (A) Calcule o módulo da velocidade do projétil no final de sua trajetória. (B) Determine H .

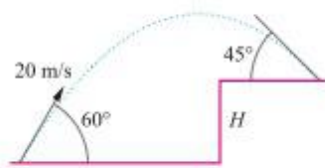


Figura 5.16

(Problema 5.8).

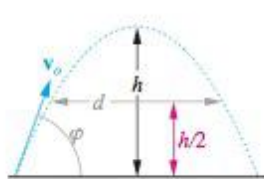


Figura 5.17

(Problema 5.9).

P 5.9 A Figura 5.17 mostra alguns dados da trajetória de um projétil. Calcule d em termos de v_0 , ϕ e g .

P 5.10 Um índio atira flechas à velocidade de 30 m/s . (A) Com que inclinação θ deve ele atirar uma flecha se pretende atingir um ponto, à mesma altitude em que se encontra e à distância de 65 m , de modo que a trajetória tenha o menor comprimento possível?

P 5.11 Um rifle atira balas à velocidade inicial de 440 m/s . Ao atirar em um alvo distante 50 m , no mesmo nível do rifle, quanto acima do alvo o atirador deve mirar?

P 5.12 A Figura 5.18 mostra duas bolinhas realizando movimento circular uniforme em sentidos opostos, sobre círculos de mesmo raio deslocados um do outro na direção vertical. Tomando como tempo $t = 0$ aquele instante correspondente à configuração da figura, calcule (A) a velocidade e (B) a aceleração da bolinha ocre relativamente à bolinha azul.

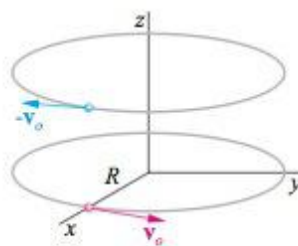


Figura 5.18

(Problema 5.12).

P 5.13 Duas partículas saem no instante $t = 0$ do mesmo ponto, cada qual seguindo uma linha reta com aceleração constante a . Sendo θ o ângulo entre as duas trajetórias, como a distância d entre as partículas varia com o tempo?

P 5.14 O vidro traseiro de um carro faz um ângulo de 45° com a horizontal. O carro trafega em uma região onde cai uma chuva vertical à velocidade de 80 km/h . Qual deve ser a velocidade mínima do carro para que o vidro não molhe?

P 5.15 Um rio tem corrente homogênea cuja velocidade é de $3,00 \text{ m/s}$ e cuja largura é de 150 m . Um atleta, cuja velocidade máxima em piscina é de $2,00 \text{ m/s}$, cruza o rio no menor tempo que lhe é possível. (A) Quantos metros, rio abaixo, o atleta desce ao cruzar o rio? (B) Qual é a sua velocidade, em relação à margem, nessa travessia?

P 5.16 O piloto de um avião quer fazer o percurso da cidade A à cidade B, que se situa 600 km a nordeste de A, em um tempo de $40,0 \text{ min}$. Sopra um vento à velocidade escalar de 100 km/h na direção norte-sul. A que velocidade escalar, em relação ao ar, tem de ser realizado o voo?

Respostas dos exercícios

E 5.1 (A) $\mathbf{v} = i45 \text{ m/s} - j50 \text{ m/s} + k20 \text{ m/s}$; (B) $\mathbf{a} = i6,0 \text{ m/s}^2 - j10 \text{ m/s}^2$; (C) movimento uniformemente acelerado.

E 5.3 $a = 40 \text{ m/s}^2$

E 5.4 $T = 96,5 \text{ min}$

E 5.5 $a = 5,95 \text{ mm/s}^2$

E 5.6 (A) 18 m/s ; (B) $2,16 \times 10^3 \text{ m/s}^2$

E 5.7 $h = 1 \times 10^{-16} \text{ m}$

E 5.8 (A) $1,77 \text{ s}$; (B) $15,3 \text{ m}$; (C) $35,3 \text{ m}$

E 5.9 (A) $3,4 \text{ s}$; (B) $35,8 \text{ m}$; (C) $24,8 \text{ m/s}$

E 5.10 (A) $\mathbf{V} = \mathbf{v}_o$; (B) $\mathbf{A} = 0$

E 5.11 $d = 0,51 \text{ km}$

Respostas dos problemas

P 5.1 (A) $\mathbf{v} = -j23 \text{ m/s} + k13,5 \text{ m/s}$; (B) $\mathbf{r} = i3,0 \text{ m} - j24 \text{ m} + k18,5 \text{ m}$

P 5.3 (A) $v = 4,64 \times 10^6 \text{ m/s}$; (B) $a = 8,77 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$

P 5.4 $h = 1,57 \text{ cm}$

P 5.5 (A) $7,8 \text{ s}$; (B) $7,8 \times 10^2 \text{ m}$; (C) Levaria $10,2 \text{ s}$, mas atingirá o chão antes disso

P 5.6 $\theta = 20,6^\circ$

P 5.7 (A) $h = 8,6 \text{ m}$; (B) $v = 7,5 \text{ m/s}$

P 5.8 (A) $14,1 \text{ m/s}$; (B) $10,2 \text{ m}$

P 5.9 $d = \sqrt{2} \frac{v_o^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g}$

P 5.10 $\theta = 22,5^\circ$

P 5.11 $h = 6,3 \text{ cm}$

P 5.12 (A) $\mathbf{V} = 2v_o \cos(v_o t / R) \mathbf{j}$;

(B) $\mathbf{A} = -2(v_o^2 / R) \sin(v_o t / R) \mathbf{j}$

P 5.13 $d = at^2 \sin(\theta / 2)$

P 5.14 80 km/h

P 5.15 (A) 225 m ; (B) $3,6 \text{ m/s}$

P 5.16 973 km/h





Leis Fundamentais da Mecânica

- Seção 6.1 ■ Introdução, 108
- Seção 6.2 ■ O pensamento aristotélico, 108
- Seção 6.3 ■ De Galileu a Newton, 109
- Seção 6.4 ■ A lei da inércia, 109
- Seção 6.5 ■ Medidas de força, 110
- Seção 6.6 ■ Segunda lei de Newton, 111
- Seção 6.7 ■ Peso de um corpo, 113
- Seção 6.8 ■ Força de atrito, 114
- Seção 6.9 ■ Lei da ação e reação, 120
- Seção 6.10 ■ Atrito hidrodinâmico e velocidade-limite, 128
- Problemas, 130
- Respostas dos exercícios, 132
- Respostas dos problemas, 132

Seção 6.1 ■ Introdução

Os próximos capítulos deste livro são dedicados à área da física denominada *mecânica newtoniana*. A estruturação desta ciência deve-se ao célebre físico inglês *Isaac Newton* (1642–1727) e está descrita em sua obra monumental *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), que se traduz para *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. Tal obra, freqüentemente referida simplesmente por *Principia*, contém também, entre outras coisas, a formulação da lei do inverso do quadrado para a atração entre as massas, conhecida como *lei da gravitação de Newton*, e a descrição do movimento dos planetas. A mecânica newtoniana e a lei da gravitação teriam sido concebidas no curto período de 18 meses, em 1665–1666, em que Newton se retirou na fazenda da família fugindo da peste negra, logo após graduar-se na Universidade de Cambridge. A elaboração das conseqüências das leis da mecânica newtoniana e da lei da gravitação requeria uma matemática que não se limitasse a operações com elementos discretos. Para isso, Newton, com base no conceito de derivada, criado anteriormente por *Pierre de Fermat* (1601–1665), desenvolveu também o *cálculo integral e diferencial*, que é a maneira adequada de se manipularem matematicamente elementos contínuos. A invenção do cálculo foi feita também independentemente pelo filósofo e matemático alemão *Gottfried Wilhelm Leibnitz* (1646–1716). A obra de Newton foi a culminância de uma revolução filosófico-científica que se desenvolveu em um período de quase um século.

Seção 6.2 ■ O pensamento aristotélico

Teleologia, ou determinismo teleológico, é o conceito de que os fenômenos são determinados por um objetivo final. O movimento determinado teleologicamente era por Aristóteles chamado movimento natural

Para se entender o âmbito e o espírito da revolução que levou à mecânica newtoniana, é importante fazer uma breve apresentação da física de Aristóteles, principalmente no que se refere ao movimento e suas causas. Como antecipamos em parte no Capítulo 1 (*O que é a Física*), Aristóteles se apoiava fortemente na **teleologia**, ou **determinismo teleológico**, ou seja, no conceito de que os fenômenos são determinados por algum objetivo final. Assim, os corpos pesados, ricos nos elementos água e terra, caíam em busca do seu lugar natural, que era o centro do cosmo, coincidentemente também o centro da Terra. Já os corpos leves, ricos nos elementos ar e fogo, ascendiam também em busca do seu lugar natural, o espaço entre a Terra e a Lua. Tal tipo de movimento teleologicamente determinado era por ele denominado **movimento natural**.

A teleologia era obviamente insuficiente para explicar todos os movimentos observados. Uma pedra levantada por uma mão ou arrastada sobre uma superfície horizontal apresentava um movimento não natural, um movimento forçado. Assim, Aristóteles de alguma maneira também reconhecia o determinismo causal, ou seja, um fenômeno — no caso, um movimento — determinado por um agente causador, uma causa. O movimento forçado cessaria tão logo se interrompesse a ação da força, seu agente causador. Corpos diferentes responderiam de maneiras distintas a uma força igual, mas para um dado corpo a velocidade do movimento seria proporcional à intensidade da força. Essas idéias aristotélicas sobre o movimento forçado são em parte consistentes com nossa intuição. Na ausência de experiências de caráter quantitativo, parece razoável pensar que uma pedra levantada por uma força se mova para cima a uma velocidade constante e proporcional à força. Analogamente, ao arrastarmos uma caixa sobre um piso horizontal, pode nos parecer que ela se mova a uma velocidade constante e proporcional à força que lhe aplicamos. É verdade que qualquer análise mais cuidadosa desses fenômenos irá revelar inconsistências nesse tipo de visão. Por exemplo, uma vez posto em movimento sobre uma superfície polida, um corpo também polido tende a preservar seu movimento por tempo apreciável, e para que possamos freá-lo mais rapidamente temos de lhe aplicar uma força oposta à sua velocidade. Tomando um exemplo mais atual, para que um carro que se move em uma pista plana pare rapidamente não basta que lhe desliguemos o motor; temos também de pisar no freio! Entretanto, é fato notório que o ser humano convive de modo surpreendentemente pacífico com contradições, sempre que idéias salvadoras não lhe ocorram. Na atualidade, o método científico costuma expor as eventuais contradições de nossas idéias de maneira tão clara que fica difícil continuar ignorando-as, e por isso nossa capacidade de adaptação ao paradoxo se tornou menos evidente.

Outro tipo de movimento visto como natural por Aristóteles era o dos planetas e das estrelas, que diariamente faziam, admitia-se então, seu circuito em torno da Terra. O movimento natural dos corpos celestes seria o círculo, a mais perfeita das curvas. Corpos celestes poderiam realizar trajetórias circulares, ou até movimentos resultantes da combinação de várias trajetórias circulares, sem que qualquer força lhes fosse aplicada, o que obviamente não é possível para os corpos terrestres. Assim, as leis naturais que regem o movimento dos corpos celestes eram, segundo atestava Aristóteles, distintas daquelas que regem o movimento dos corpos terrestres. Essa é a oposição entre o céu e a terra, já comentada no Capítulo 1 (*O que é a Física*).

Seção 6.3 ■ De Galileu a Newton

Apesar da sua obra revolucionária e seminal para o desenvolvimento da mecânica, Galileu preservou em parte conceitos aristotélicos. Ele foi incapaz de definir-se inteiramente acerca da questão do determinismo e, como vimos no Capítulo 1 (*O que é a Física*), afirma que “*O presente não parece o momento próprio para se investigar a causa da aceleração natural...*” Suas experiências o convenceram de que um corpo terrestre, quando livre de forças, permanece em repouso ou se move em movimento retilíneo e uniforme. Entretanto, não estendeu tal conclusão aos corpos celestes, que para ele poderiam permanecer em movimento circular sem a necessidade de qualquer força.

As leis de Kepler foram indispensáveis para a síntese de Newton. Qualquer teoria correta sobre o movimento dos corpos celestes teria de dar uma explicação para elas

Destaca-se naquele período efervescente os trabalhos de *Tycho Brahe* (1546–1601), que dedicou parte da sua vida a medir diariamente a posição dos cinco planetas visíveis a olho nu em relação às estrelas fixas, e os de *Johannes Kepler* (1571–1630), que, após dedicar grande esforço à análise dos dados de Brahe, formulou as leis cinemáticas que regem o movimento dos planetas, conhecidas como *leis de Kepler*. As leis de Kepler foram absolutamente indispensáveis para que Newton fizesse a sua grande síntese, pela sua capacidade de discriminar hipóteses alternativas sobre as causas do movimento, principalmente do movimento dos corpos celestes. Qualquer teoria correta sobre o assunto teria de dar uma explicação para as leis de Kepler.

René Descartes (1596–1650) teve uma influência na evolução das idéias correntes cuja importância merece destaque. Para Descartes, os mesmos princípios deveriam reger o comportamento de todo o Universo, não apenas no que se refere ao movimento, mas no âmbito de todos os fenômenos. Portanto, as leis dos céus teriam de ser as mesmas leis da terra. Assim, Descartes generalizou a descoberta de Galileu para concluir que qualquer corpo livre de forças deveria permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Nesse caso, alguma força teria de atuar para que os planetas e a Terra realizassem suas órbitas em torno do Sol, e aí está a semente da lei da gravitação. Na verdade, Descartes também se equivocou sobre o assunto porque a idéia de uma força de atuação a distância parecia, não só a ele mas também a outros que cogitaram da gravitação, contrariar preconceitos arraigados. A gravitação, que estava na cabeça de alguns, era pejorativamente qualificada como *força oculta*. Descartes postulou a existência de vórtices que forçavam os astros a realizarem trajetórias curvas. Foi preciso um Newton para render-se às evidências e postular a existência das forças de atuação a distância, adiando para a posteridade a elucidação desse aparente mistério.

Seção 6.4 ■ A lei da inércia

Newton fundamentou sua mecânica em três leis de caráter matemático, as leis de Newton. A primeira delas é a lei da inércia. Inércia é a resistência que os corpos oferecem a qualquer alteração na sua velocidade. Como já vimos, Galileu foi quem primeiro reconheceu a inércia, ao enunciar a hipótese de que, se uma bola apoiada sobre um plano horizontal recebesse um impulso inicial em uma direção qualquer, e não houvesse atrito entre a bola e a superfície do plano, ela se moveria em movimento retilíneo uniforme. Tal hipótese foi obtida por extrapolação, a partir de experiências feitas pelo próprio Galileu sobre o movimento de esferas rígidas e polidas apoiadas em planos inclinados de superfícies também rígidas e polidas. Havendo um declive, a bola rola em movimento uniformemente acelerado em que a aceleração é proporcional ao declive do plano. Havendo um auge, a bola apresenta uma aceleração negativa

Primeira lei de Newton, ou *lei da inércia*: todo corpo persiste em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a modificar seu estado pela ação de forças a ele impressas

Um exemplo de afirmação *tautológica* é: um quadrado tem quatro lados

também proporcional ao aclave do plano. Os dados sugerem que em um plano horizontal, na ausência de atrito, a bola rolaria com aceleração nula. As experiências de Galileu envolviam condições incomuns na vida diária. Nesta, o atrito é sempre uma força muito significativa que leva os corpos a cessarem rapidamente o movimento obtido com um impulso inicial. Por isto, a lei da inércia é contrária à intuição. Newton formulou a lei da inércia na forma já reconhecida por Descartes:

Todo corpo persiste em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a modificar seu estado pela ação de forças a ele impressas (lei da inércia).

A primeira lei, na formulação acima dada por Newton, apresenta duas deficiências lógicas que merecem uma discussão mais cuidadosa. A primeira é que essa lei parece puramente *tautológica*, ou seja, parece não dizer nada de novo. A menos que se tenha uma definição prévia e independente do que seja força, ela parece estar simplesmente definindo força como aquilo que altera o estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme dos corpos. Visto assim, outra leitura da primeira lei seria:

Todo corpo persiste em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, exceto quando não permanece em nenhum desses estados.

Essa crítica é freqüentemente feita, mas se apóia na maneira sucinta pela qual Newton formulou algumas de suas idéias. Força sobre um corpo pressupõe algum agente externo atuando sobre ele, o qual em princípio pode ser identificado. Existem forças de contato (de natureza eletromagnética, como veremos mais adiante neste livro), tais como a força sentida em um aperto de mão. Existem forças gravitacionais, como o peso deste livro. Existem ainda duas outras forças, denominadas forças nucleares, que não se manifestam em nenhuma situação da vida diária e que eram desconhecidas na época de Newton. Em todos os casos, o aparecimento de uma força sobre um corpo exige a presença de outros corpos em suas imediações, cuja atuação pode ser identificada. Newton não julgou necessário fazer essas considerações, achando talvez óbvio que a existência de forças atuando sobre o corpo poderia ser reconhecida independentemente da observação do movimento.

A segunda deficiência da formulação da primeira lei é o fato de ela não dizer em relação a que referencial o corpo tem aceleração nula quando livre da ação de outros corpos. Newton acreditava no *espaço absoluto*, em relação ao qual os corpos se moveriam ou ficariam parados. Um referencial em relação ao qual valeriam as leis de Newton, incluindo a primeira lei, estaria parado ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto. Tal tipo de referencial foi por ele denominado *referencial inercial*.

Referencial inercial é aquele no qual valem as leis de Newton, incluindo a lei da inércia. Um referencial que esteja em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação às estrelas é, com boa aproximação, inercial

Hoje se sabe que não existe espaço absoluto, e portanto também não existe movimento absoluto. Só tem sentido falar de movimento relativo de um corpo (em relação a outro ou a outros corpos). Por outro lado, porém, a enorme experiência acumulada desde a época de Newton demonstrou que realmente existe uma classe de referenciais inerciais, ou seja, referenciais nos quais vale a lei de inércia e também as outras leis de Newton. Tais referenciais estariam em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao espaço absoluto. Para Newton, as estrelas estariam em repouso em relação ao espaço absoluto, e portanto um referencial inercial estaria em repouso ou movimento retilíneo uniforme em relação às estrelas. Configura-se assim uma questão de grande e até hoje insolúvel mistério: por um lado, não existe movimento absoluto; mas, por outro, existe uma classe de referenciais privilegiados, os referenciais inerciais. Para se acelerar em relação a um referencial inercial, qualquer corpo tem que estar sob a ação de outro corpo. Com boa aproximação, os referenciais inerciais são de fato aqueles que estejam parados ou em movimento retilíneo uniforme em relação às estrelas.

Seção 6.5 ■ Medidas de força

As forças de contato, de natureza eletromagnética, são facilmente mensuráveis. Um modo simples de medir essas forças faz uso de um instrumento denominado *dinamômetro*. A

operação da maioria dos dinamômetros baseia-se no fato de que os corpos são elásticos, ou seja, deformam-se sob a ação de forças de contato. Uma mola, por exemplo, se alonga sob o efeito de uma força de estiramento, como mostra a Figura 6.1. Esse fenômeno foi utilizado desde a Antiguidade para se pesarem corpos pela chamada balança de mola. Na Figura 6.1A, a mola (balança) é vista sem qualquer “peso” preso a ela. Em 6.1B, um cilindro é suspenso pela mola, cujo peso é a força de módulo F , e a mola se distende do valor ΔL . Em 6.1C, outro cilindro idêntico ao primeiro é colocado na balança, e a mola se distende do valor $2\Delta L$. A hipótese, aceita desde a Antiguidade, é de que, se um cilindro tem peso F , dois cilindros (idênticos) têm peso $2F$, e o fato empírico verificado é que dois cilindros causam na mola uma distensão duas vezes maior que aquela causada por um cilindro. N cilindros causam uma distensão N vezes maior, e assim por diante. Assim, o peso dos corpos constituiu o primeiro método para se definir e quantificar força, e por generalização uma mola passou a ser usada para se medir força.

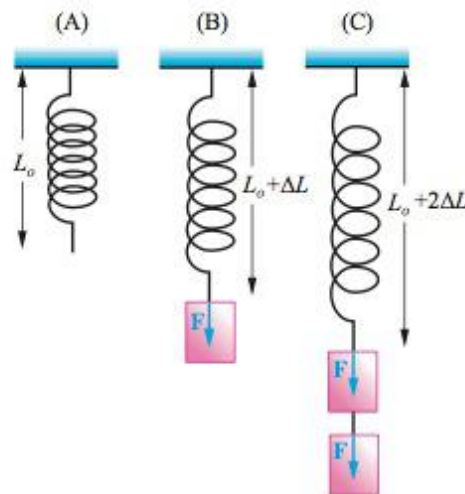


Figura 6.1

Uma força de estiramento faz uma mola se alongar, e a elongação é proporcional ao módulo da força. Esse fenômeno é utilizado para a medição de forças no dispositivo denominado *dinamômetro*.

A linearidade entre a força e a elongação da mola pode ser expressa matematicamente na forma

■ Lei de Hooke

$$F = k\Delta L,$$

(6.1)

sendo k uma constante característica da mola denominada *constante de mola*. A Equação 6.1 é denominada *lei de Hooke*, em homenagem ao físico inglês *Robert Hooke* (1635–1703) que a escreveu pela primeira vez. Na verdade, Hooke fez um estudo mais amplo da deformação de corpos elásticos pela ação de forças externas, no esforço de desenvolver um relógio preciso que pudesse funcionar nas condições dos navios no mar, e a Equação 6.1 é um caso particular de seus resultados.

Seção 6.6 ■ Segunda lei de Newton

A Figura 6.1 na verdade mostra de forma esquemática um *dinamômetro de mola*. Tal instrumento foi amplamente utilizado para medir o peso dos corpos, ou seja, como balança de mola. Com o uso do dinamômetro, é possível investigar o efeito de forças de contato sobre o movimento dos corpos. A Figura 6.2 mostra um bloco polido deslizando sobre um plano horizontal também polido, sob o efeito de uma força $\mathbf{F}$, realizada por meio de um dinamômetro. Pela escala do dinamômetro, a intensidade da força pode ser controlada. O polimento das superfícies pode reduzir a força de atrito até torná-la pouco significativa na experiência. Medidas desse tipo, feitas em um referencial inercial, irão mostrar que o bloco sofre uma aceleração proporcional e na mesma direção da força $\mathbf{F}$ que atua sobre ele.

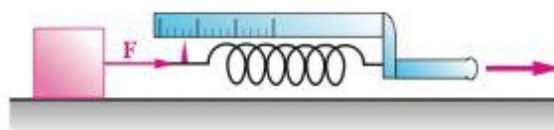


Figura 6.2

Um corpo é puxado, sobre uma superfície horizontal sem atrito, por uma força F cuja intensidade (módulo) é medida pelo dinamômetro. Observa-se que sua aceleração é proporcional à força.

Tem-se assim uma manifestação da *segunda lei de Newton*. Matematicamente, a segunda lei é expressa na forma

■ Segunda lei de Newton

$F = ma$, sendo m um escalar positivo

(6.2)

Em palavras, a segunda lei diz que sob a ação de uma força F um corpo apresenta uma aceleração proporcional à força e na direção e no sentido desta. Se o experimento for realizado com um bloco do mesmo material, porém duas vezes maior, a mesma força provocará uma aceleração igual a metade da anterior. Assim, aumentando-se a quantidade de matéria varia-se a constante de proporcionalidade m que aparece na Equação 6.2. A constante m é denominada *massa inercial*, ou simplesmente *massa* do corpo. Quanto maior a massa, maior a força necessária para gerar uma dada aceleração. Portanto, massa é a grandeza que quantifica a inércia do corpo, daí o nome massa inercial.

A massa do corpo é um escalar. Isto significa que seu valor independe da direção em que o corpo é acelerado. Significa também que a aceleração e a força têm a mesma direção. Essas duas conclusões decorrem diretamente da isotropia do espaço. De fato, a força define univocamente uma direção no espaço e, portanto, a aceleração só tem aquele norte. Se a aceleração ocorresse em qualquer direção que não fosse aquela, ficaria violada a propriedade da isotropia. Analogamente, não há como o corpo apresentar inércias diferentes para diferentes direções do espaço, já que todas as direções são equivalentes.

Força é obviamente uma grandeza orientada. Para que seja um vetor, é necessário que obedeça a determinadas regras. A Equação 6.2 somente pode ser consistente se F for um vetor. De fato, a aceleração é um vetor, pois é obtida pela derivação em segunda ordem do vetor posição em relação ao tempo:

$$a \equiv \ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (6.3)$$

Na Equação 6.3, foi introduzida uma notação, criada por Newton, de uso muito frequente em Física, ou seja,

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}, \quad \ddot{f} \equiv \frac{d^2 f}{dt^2}.$$

Uma vez que a massa m é um escalar, o produto ma é um vetor. Para que se possa operar matematicamente com a Equação 6.2 sem riscos de inconsistências, é necessário que F seja um vetor. Em especial, é necessário que forças obedeçam à regra de soma dos vetores. Esta não é, porém, uma questão matemática, e sim de caráter *empírico*. A questão empírica a ser respondida é a seguinte: Considere um corpo C sujeito à ação do corpo C_1 , situado no ponto $\mathbf{r}_1$. A força sobre C é dada por F_1 . O corpo C_1 é agora retirado e um terceiro corpo C_2 é colocado no ponto $\mathbf{r}_2$. Verifica-se que este exerce sobre o corpo C uma força F_2 . Recoloca-se finalmente o corpo C_1 na antiga posição $\mathbf{r}_1$ e mede-se a força F sobre o corpo. A Figura 6.3 ilustra as três situações em sua seqüência.

■ **Questão empírica** é aquela cuja resposta só pode ser obtida por meio de experimentos

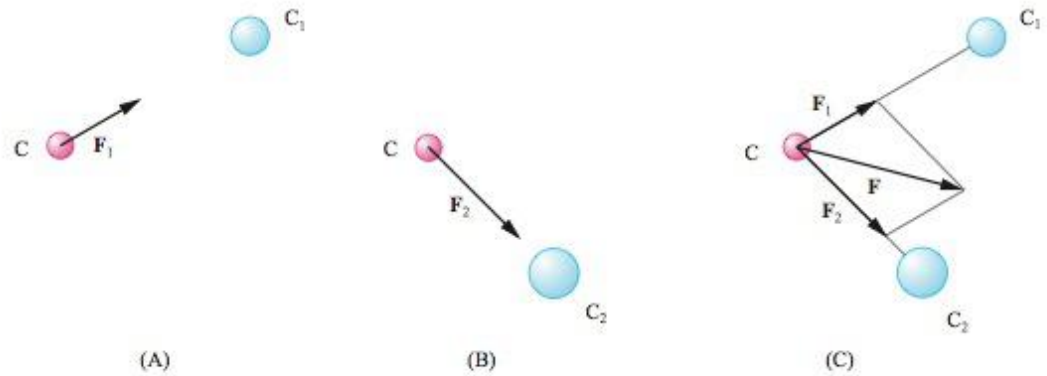


Figura 6.3

A força F que os corpos C_1 e C_2 exercem conjuntamente sobre o corpo C é a soma vetorial das forças F_1 e F_2 que os corpos C_1 e C_2 , respectivamente, fariam sozinhos sobre C . Esta regra é denominada *princípio da superposição das forças*.

Pergunta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2?$$

(6.4)

A questão tem sutilezas. Primeiro, deve-se notar que os corpos C_1 e C_2 também atuam entre si, e que isto pode modificar as suas propriedades. Considere, por exemplo, o caso de corpos C_1 e C_2 carregados eletricamente. Nesse caso, quando C_1 e C_2 ficam próximos, a distribuição de cargas elétricas nesses corpos pode se modificar e isso pode naturalmente alterar a força elétrica que cada um deles exerce sobre C . Devemos excluir esses corpos de nossos testes. Por exemplo, no caso de forças de natureza elétrica devemos fazer experiências com corpos de dimensões minúsculas, de modo que a redistribuição de cargas seja irrelevante. De modo geral, devemos nos certificar de que os corpos C , C_1 e C_2 não estejam sendo modificados durante a experiência.

A Equação 6.4, se verdadeira, exprime o denominado *princípio da superposição das forças*. Em todas as situações consideradas neste livro, o princípio da superposição é válido. Quando há mais de uma força atuando sobre o corpo, a força a que se refere a segunda lei de Newton é a soma de todas essas forças, denominada *força resultante*. A segunda lei assume nesse caso a seguinte forma:

$$\mathbf{F}_R = \sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}.$$

(6.5)

Força resultante é a soma vetorial $\mathbf{F}_R$ de todas as forças que atuam sobre um dado corpo. Esta é a força a que se refere a segunda lei de Newton quando um corpo está sujeito a mais de uma força.

■ Segunda lei de Newton para um corpo sujeito a mais de uma força

Exercícios

E 6.1 O gás expelido de um foguete lançado para cima na vertical exerce sobre ele uma força de empuxo igual a 120×10^3 N. Sendo 3,00 toneladas a massa do foguete, calcule a sua aceleração.

E 6.2 Um carro, cuja massa vale 1200 kg, roda a 100 km/h quando o motorista pisa fortemente no freio. O atrito do pneu com a pista faz então uma força $F_a = 7,7 \times 10^3$ N, que permanece constante durante a frenagem. (A) Qual é a aceleração do carro? (B) Que distância o veículo percorre até parar?

Seção 6.7 ■ Peso de um corpo

O peso de um corpo é a força que a gravidade da Terra exerce sobre ele. Uma vez que em um dado ponto todos os corpos caem com a mesma aceleração g , pela segunda lei de Newton o *peso* de um corpo de massa m é

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$$

(6.6)

■ Peso de um corpo de massa m

É importante reconhecer a distinção entre peso e massa de um corpo. Peso é a força que a gravidade exerce sobre um corpo, e essa força depende de onde está o corpo. Nos pólos, um corpo pesa mais do que no equador. Entretanto, a inércia do corpo, que mede a sua massa, independe da posição no espaço. Seja em um ponto qualquer da superfície da Terra, ou no espaço interplanetário, onde a atuação da Terra sobre o corpo pode ser desprezível, a massa do corpo tem o mesmo valor m .

Exercício

E 6.3 Uma pedra cuja densidade é $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ afunda em um lago. Sabendo que a água exerce sobre a pedra uma força de empuxo para cima igual ao peso do volume de água deslocada pela pedra, e que a densidade da água é $\rho = 1,0 \text{ g/cm}^3$, calcule a aceleração da pedra. Ignore o atrito da pedra com a água.

Seção 6.8 ■ Força de atrito

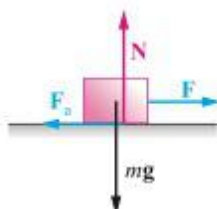


Figura 6.4

Um bloco de peso mg apóia-se sobre uma plataforma plana e horizontal. Se aplicarmos uma força horizontal F sobre o bloco, a plataforma exercerá sobre ele uma força de atrito F_a .

O atrito é uma força presente em quase todos os movimentos do cotidiano. Além disso, a maioria das situações de equilíbrio só é possível devido a forças de atrito. O ar oferece resistência — uma força de atrito — sobre qualquer corpo em movimento. Outra força de atrito bastante familiar é aquela sofrida por um corpo sólido que desliza sobre outro. A Figura 6.4 mostra um bloco apoiado sobre uma plataforma plana. Uma vez que o corpo não se move na direção vertical, a segunda lei de Newton permite concluir que o seu peso mg é exatamente compensado por uma força N que a plataforma exerce sobre o corpo. Tal força é normal (ortogonal) à plataforma, e por isso denomina-se simplesmente *força normal*. Enquanto não tentarmos mover o bloco ($F = 0$), a força de atrito também será nula. Mas, se tentarmos mover o bloco aplicando-lhe uma força F , a superfície exercerá sobre ele uma força de atrito F_a , paralela ao plano das superfícies em contato; e se a força F não for excessiva, a força de atrito a compensará exatamente, ou seja,

$$F_a = -F. \quad (6.7)$$

Enquanto valer a Equação 6.7, o corpo permanecerá imóvel, pois a soma das quatro forças que atuam sobre ele, mostradas na Figura 6.4, será nula.

Entretanto, a força de atrito não pode crescer indefinidamente para evitar o movimento do corpo. Seu valor máximo é proporcional à força normal entre as duas superfícies. Assim, temos

$$F_a \leq \mu_e N, \quad (6.8)$$

sendo μ_e o *coeficiente de atrito estático*, uma grandeza adimensional característica do par de superfícies plataforma-bloco.

■ A força de atrito estático varia de zero ao valor máximo $\mu_e N$

E-E Exercício-exemplo 6.1

■ Uma caixa com massa de 10 kg apóia-se em um piso horizontal, e o coeficiente de atrito estático entre a caixa e o piso vale 0,65. Qual é a força horizontal máxima que se pode aplicar sobre a caixa sem que esta se mova?

■ Solução

As forças atuantes sobre o corpo são exatamente aquelas mostradas na Figura 6.4. Para que o corpo permaneça imóvel, a resultante das forças que atuam sobre ele tem de ser nula, ou seja,

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_a = \mathbf{0}.$$

Desta equação, obtemos

$$N = mg,$$

$$F = F_a.$$

Considerando ainda a Equação 6.8, podemos escrever

$$F \leq \mu_e N = \mu_e mg.$$

Portanto, para que o corpo permaneça imóvel, a força $\mathbf{F}$ tem de satisfazer a condição

$$F \leq 0,65 \times 10 \text{ kg} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,65 \times 10 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 64 \text{ N}.$$

E-E Exercício-exemplo 6.2

■ No Exercício-exemplo anterior, suponha que a força aplicada sobre o corpo não seja horizontal mas faça um ângulo de 27° com essa direção, como mostra a Figura 6.5. Determine o valor máximo da força aplicada para que o corpo não se mova.

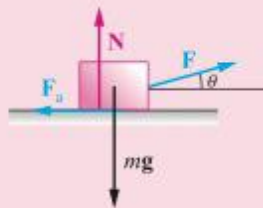


Figura 6.5

Bloco de peso mg sobre plataforma plana e horizontal submetido a uma força $\mathbf{F}$ fazendo um ângulo θ com a horizontal. A normal $\mathbf{N}$ será menor que o peso mg . Assim, a força de atrito é menor que $\mu_e mg$.

■ Solução

De novo pode-se usar o fato de que a força resultante é nula, pois o corpo não está acelerado. Assim, teremos

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_a = \mathbf{0}.$$

Esta relação, quando decomposta em componentes, dará

$$N + F \sin \theta = mg; \quad (6.9)$$

$$F_a = F \cos \theta. \quad (6.10)$$

Como $F_a \leq \mu_e N$, tem-se que

$$F \cos \theta \leq \mu_e N. \quad (6.11)$$

É importante perceber que agora a normal N não é igual ao peso mg , porque a componente vertical de $\mathbf{F}$ estará ajudando a normal a equilibrar o peso como se vê da Equação 6.9. Usando o valor de N da Equação 6.9 na Equação 6.11, obtemos

$$F \cos \theta \leq \mu_e (mg - F \sin \theta).$$

Logo,

$$F(\cos \theta + \mu_e \sin \theta) \leq \mu_e mg \Rightarrow F \leq \frac{\mu_e mg}{\cos \theta + \mu_e \sin \theta}. \quad (6.12)$$

Usando os valores de m , μ_e e θ , obtemos

$$F \leq \frac{0,65 \times 10 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2}{(\cos 27^\circ + 0,65 \times \sin 27^\circ)} = 53,8 \text{ N}.$$

Observe que esse valor é menor que o do exemplo anterior, em que a força era horizontal. Isso acontece porque a força normal entre as superfícies ficou menor e, em consequência, diminuiu a força de atrito máxima.

Exercício

E 6.4 Com relação ao Exercício-exemplo 6.2, mostre: (A) que a força F necessária para que o bloco se mova deve ser maior que $F_o = mg \frac{\sin \alpha}{\cos(\theta - \alpha)}$, onde se definiu $\tan \alpha \equiv \mu$; (B) e que essa força-limite F_o será a menor possível quando o ângulo θ for dado por $\tan \theta = \mu$.

A força de atrito cinético é $\mu_c N$ e geralmente é menor que o valor máximo da força de atrito estático

Se o bloco mostrado na Figura 6.4 estiver deslizando sobre o piso, este exercerá sobre ele uma força de atrito cinético. Essa força, com boa aproximação, pode ser considerada independente da velocidade do deslizamento, e seu valor será dado por

$$F_c = \mu_c N, \quad (6.13)$$

onde μ_c é o **coeficiente de atrito cinético** entre as duas superfícies. O coeficiente de atrito cinético geralmente é menor que o coeficiente de atrito estático. Isso tem consequências interessantes. Por exemplo, se o valor de F no Exercício-exemplo 6.1 exceder ligeiramente ao limite de 64 N, o bloco começará a mover-se não com uma aceleração muito pequena, mas com uma aceleração que pode ser bastante grande. Ou seja, enquanto $F < 64 \text{ N}$, o bloco permanecerá parado, mas tão logo se atinja a condição $F > 64 \text{ N}$, o bloco começa a se mover com aceleração significativa, pois a força de atrito passará a ser $F_c < 64 \text{ N}$. No dia-a-dia temos evidência desse fenômeno. Por exemplo, se escorregamos em uma rampa, o processo é brusco e já arrancamos com grande aceleração. Devido à diminuição da força de atrito quando o corpo começa a deslizar, os sistemas de freio mais avançados para automóveis têm um dispositivo que libera o freio quando o carro começa a derrapar.

E-E Exercício-exemplo 6.3

■ O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso tratados no Exercício-exemplo 6.1 vale 0,45. Calcule a aceleração do bloco, sabendo o módulo da força aplicada F vale 65 N.

■ Solução

Pelo visto no Exercício-exemplo 6.1, a intensidade da força supera o limiar a partir do qual o corpo começa a deslizar. A força resultante sobre o corpo tem direção horizontal e sentido para a direita, e seu módulo vale

$$F_R = F - F_c = 65\text{N} - 0,45 \times 10 \times 9,81\text{N} = 65\text{N} - 44\text{N} = 21\text{N}.$$

Pela segunda lei de Newton, obtemos

$$21\text{N} = 10\text{kg} \times a,$$

$$a = \frac{21}{10\text{kg}} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 2,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

E-E Exercício-exemplo 6.4

■ Considere um bloco apoiado em um plano inclinado, tal como mostra a Figura 6.6. Ignorando o atrito entre as duas superfícies, calcule (A) a aceleração do bloco; (B) a força que o plano exerce sobre o bloco.

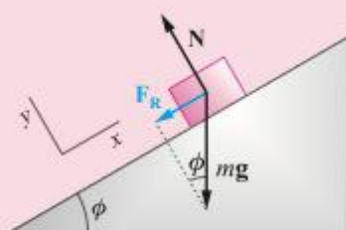


Figura 6.6
(Exercício-exemplo 6.4).

■ Solução

Uma vez que não há atrito, a força N que o plano exerce sobre o bloco é normal àquele. É claro também que o movimento do bloco se dá na direção paralela ao plano, ou seja, sua coordenada y se mantém constante. Pode-se então escrever

$$N = N\mathbf{j}$$

$$mg = -mg \sin\phi \mathbf{i} - mg \cos\phi \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{N} + mg = -mg \sin\phi \mathbf{i} + (N - mg \cos\phi)\mathbf{j}$$

A segunda lei de Newton nos permite escrever

$$m\mathbf{a} = m\ddot{x}\mathbf{i} + m\ddot{y}\mathbf{j} + \mathbf{F}_R.$$

Uma vez que a componente da aceleração na direção y é nula, ($a_y = 0$), as componentes da equação vetorial acima são

$$m\ddot{x} = -mg \sin\phi$$

$$m\ddot{y} = 0 = N - mg \cos\phi.$$

Das duas equações acima, pode-se concluir, respectivamente, que

$$(a) \quad \mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} = -g \sin\phi \mathbf{i}.$$

$$(b) \quad \mathbf{N} = mg \cos\phi \mathbf{j}$$

E-E Exercício-exemplo 6.5

■ Considere agora que entre as duas superfícies do Exercício-exemplo 6.4 haja um coeficiente de atrito estático μ_e . Qual é o ângulo máximo de inclinação do plano para que o bloco fique em repouso?

■ Solução

A força de atrito terá direção e sentido $\hat{i}$ e, pelo que vimos sobre atrito estático, podemos escrever

$$F_a \leq \mu_e N \hat{i}.$$

Utilizando o valor de N obtido no Exercício-exemplo 6.1, obtemos

$$F_a \leq \mu_e mg \cos\phi.$$

Portanto, a resultante F_R das forças na direção x será

$$F_{Rx} = F_a - mg \sin\phi \leq mg (\mu_e \cos\phi - \sin\phi).$$

Para que o corpo fique em repouso, deve-se ter $F_{Rx} = 0$. Portanto,

$$\mu_e \cos\phi - \sin\phi \geq 0,$$

$$\mu_e \geq \frac{\sin\phi}{\cos\phi}.$$

Finalmente,

$$\tan\phi_{\text{máx}} = \mu_e.$$

E-E Exercício-exemplo 6.6

■ Uma estrada foi projetada para os veículos se moverem a 100 km/h. Em uma curva com raio de curvatura $R = 500$ m, qual é o ângulo de declive que a pista de rolamento deve ter para dentro a fim de que o carro possa percorrê-la sem que haja atrito lateral entre os pneus e a pista de rolamento?

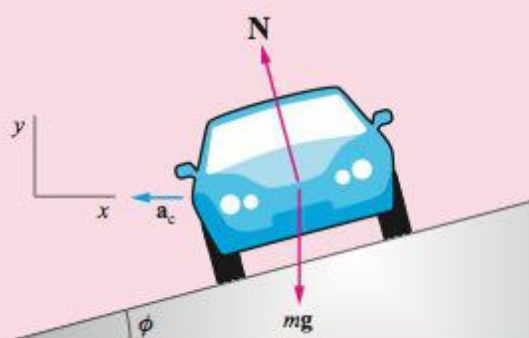


Figura 6.7

Uma pista de rolamento apresenta uma curva com raio de curvatura R . A pista na curva deve ser inclinada para dentro, de um ângulo ϕ . Se o carro trafegar à velocidade $\sqrt{gR \tan\phi}$, não haverá atrito lateral entre os pneus e a pista.

■ Solução

A Figura 6.7 mostra o carro e o sistema de coordenadas a ser utilizado. Esta escolha de eixos é conveniente porque a aceleração resultante do carro, que é a centrípeta, está no eixo x . Observe que ela é perpendicular ao peso do carro. Então, é a força normal da pista sobre o carro que fornece a esta a força centrípeta necessária para que sua velocidade mude de direção. Podemos escrever a segunda lei de Newton da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 m a_x &= -m \frac{v^2}{R} = -N \sin \phi, \\
 m a_y &= 0 = N \cos \phi - m g.
 \end{aligned}
 \tag{6.14}$$

A segunda equação em 6.14 resulta em $N = mg / \cos \phi$. Substituindo este resultado na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned}
 m \frac{v^2}{R} &= mg \frac{\sin \phi}{\cos \phi}, \\
 \tan \phi &= \frac{v^2}{gR} = \frac{(27,8)^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{9,81 \text{ ms}^{-2} \times 500 \text{ m}} = 0,157, \\
 \phi &= 8,9^\circ.
 \end{aligned}$$

Exercícios

E 6.5 Com relação ao Exercício 6.2, suponha que o peso do carro se distribui igualmente sobre os quatro pneus e que estes atuaram igualmente sobre o chão; determine o coeficiente de atrito cinético entre os pneus e o chão.

E 6.6 Uma caixa de massa m é arrastada sobre um piso horizontal através de uma corda fazendo um ângulo de 45° com a horizontal. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre a caixa e o piso são, respectivamente, 0,70 e 0,50. (A) Estando a caixa inicialmente em repouso, qual é a força mínima necessária para iniciar o movimento? (B) Quando a força atinge esse valor mínimo, com que aceleração se inicia o movimento da caixa?

E 6.7 Refaça o exercício anterior supondo que a corda faz um ângulo de 45° com a horizontal.

E 6.8 Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e a parede da Figura 6.8 valem, respectivamente, 0,60 e 0,40. (A) Qual é o valor mínimo da força F para que o bloco não deslize? (B) Com que aceleração o bloco desliza se $F = 30 \text{ N}$?



Figura 6.8
(Exercício 6.8).

E 6.9 Um bloco desliza para baixo sobre uma rampa de inclinação variável.

(A) Quando a inclinação α da rampa é igual a 31° o bloco desce a uma velocidade constante. Determine o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa.

(B) Mudando a inclinação da rampa para um novo ângulo θ , o bloco desce a uma aceleração a constante. Mostre que θ é dado por $\sin(\theta - \alpha) = \frac{a}{g} \cos \alpha$, em que $\tan \alpha \equiv \mu$.

(C) Use a fórmula do item B e encontre a inclinação θ necessária para se obter uma aceleração igual a $0,606g$.

(D) Se o bloco for lançado para cima a uma velocidade inicial igual a 10 m/s , que distância ele se moverá até parar (observe que agora a força de atrito atua para baixo, no plano)?

Seção 6.9 ■ Lei da ação e reação

A terceira lei de Newton, também denominada **lei da ação e reação**, estabelece uma importante relação que envolve a interação entre dois corpos e que pode ser expressa da seguinte maneira:

■ Terceira lei de Newton ou lei da ação e reação

Se o corpo A exerce sobre o corpo B uma força $\mathbf{F}_{BA}$, o corpo B exerce sobre o corpo A uma força $\mathbf{F}_{AB}$. Essas duas forças são iguais e opostas, ou seja, $\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}$. Além disso, as duas forças estão sobre a mesma linha de ação.

Ilustrações da lei da ação e reação podem ser vistas na Figura 6.9. Na Figura 6.9A, dois corpos A e B interagem com as forças iguais e opostas $\mathbf{F}_{BA}$ e $\mathbf{F}_{AB}$, e na Figura 6.9B os três corpos A, B e C interagem com pares de forças opostas. Qualquer que seja o número de corpos mutuamente interagentes, as forças de interação sempre aparecerão aos pares, como na Figura 6.9.

Pelo menos de modo qualitativo, a terceira lei é bastante intuitiva para as forças de contato. A experiência diária a evidencia de vários modos. Quando você tropeça em uma pedra e machuca o pé, a culpa é da terceira lei: seu pé empurra a pedra para frente e ela empurra seu pé para trás com a mesma intensidade.

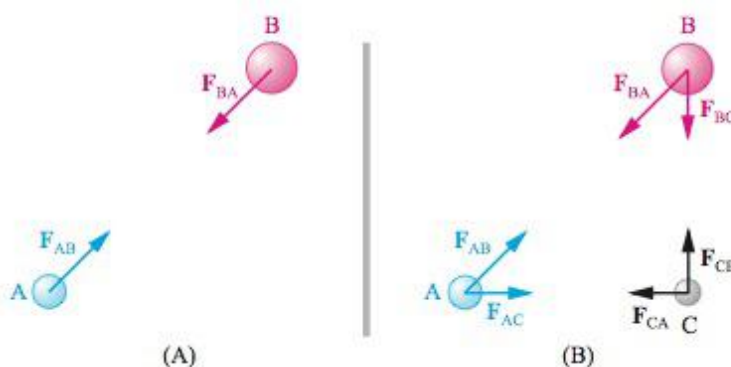


Figura 6.9
Ilustrações da lei da
ação e reação.

Precessão dos equinócios é uma precessão do eixo de rotação da Terra em torno do eixo normal à sua órbita

O passo inovador e audaz de Newton foi estender tal conceito também às outras forças, como, por exemplo, a gravitação. Não há evidências de que a maçã que cai sob a ação do seu peso também esteja puxando a Terra para cima. Talvez as únicas evidências experimentais disponíveis naquela época sobre o aparecimento de uma força de reação para a atração gravitacional fossem as marés e uma anomalia existente na rotação da Terra em torno do seu eixo, denominada **precessão dos equinócios**. A causa principal tanto das marés quanto da precessão dos equinócios é a força de atração da Lua sobre a Terra. Entretanto, a conexão desses fenômenos com suas causas não é nada simples, e na verdade foi estabelecida pelo próprio Newton no *Principia*.

A lei da ação e reação garante que, sempre que um corpo sofre uma força, ele também exerce outra força de reação. Entretanto, é importante frisar que somente as forças atuantes sobre o corpo são capazes de lhe imprimir aceleração. Em outros termos, ao calcularmos a força resultante sobre um corpo, somamos apenas as forças que atuam sobre ele. Por exemplo, a força resultante sobre o corpo A da Figura 6.9B é

$$\mathbf{F}_{AR} = \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{F}_{AB}, \quad (6.15)$$

e a forma correta de aplicar a segunda lei de Newton ao movimento desse corpo é

$$\mathbf{F}_{AC} + \mathbf{F}_{AB} = m_A \mathbf{a}, \quad (6.16)$$

em que m_A é a sua massa.

A lei de ação e reação está presente em vários fenômenos do nosso cotidiano. Quando andamos, por exemplo, aplicamos sobre o chão uma força que tem uma componente paralela ao chão e para trás e recebemos do chão uma força que tem uma componente para a frente, graças ao atrito estático com o chão. Obviamente, se tentarmos obter uma força para frente maior do que o limite máximo da força de atrito estático entre nossos pés e o chão, escorregaremos. A aceleração de um carro, da mesma maneira, é obtida quando os pneus, no seu movimento de rotação, aplicam ao chão uma força para trás obtendo uma força igual de sentido contrário. O limite para essa força também é dado pelo atrito, ou seja, a força máxima é igual ao coeficiente de atrito estático entre os pneus e o chão, multiplicado pela força normal que este faz sobre o carro. Quando uma pessoa sobe uma escada, faz uma força para baixo em um degrau da escada e o degrau faz sobre a pessoa uma força para cima. Quando uma pessoa está em um barco dentro de um lago e puxa a extremidade de uma corda, cuja outra extremidade está presa à margem do lago, recebe uma força que levará o barco para a margem. Estes são apenas alguns poucos exemplos de uma quantidade imensa de situações em que a terceira lei de Newton se faz presente.

E-E Exercício-exemplo 6.7

■ Considere dois corpos sob a ação da gravidade e suspensos por um fio sem massa, como mostra a Figura 6.10. Uma força vertical $\mathbf{F}$ puxa os dois corpos para cima. (A) Qual é a aceleração dos dois corpos? (B) Qual é a força de tensão T no fio que une os dois blocos?

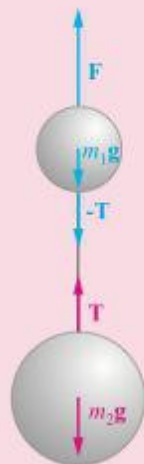


Figura 6.10
(Exercício-exemplo 6.7).

■ Solução

Para resolver o problema, faz-se um diagrama em que aparecem todas as forças que atuam sobre os dois corpos. O segmento superior do fio exerce uma força $\mathbf{F}$ sobre o corpo 1. Este exerce uma força $\mathbf{T}$ sobre o segmento intermediário do fio e essa força é transmitida ao corpo 2. O corpo 2 reage com uma força $-\mathbf{T}$ sobre o fio e esta é transmitida ao corpo 1. Para simplificar, na figura foram omitidas as forças que os corpos exercem sobre o fio e colocadas somente as forças que o fio exerce sobre os corpos. As forças-peso $m_1\mathbf{g}$ e $m_2\mathbf{g}$ também atuam sobre os dois corpos. A questão (A) pode ser facilmente respondida se os dois corpos forem tratados como um só corpo de massa $m_1 + m_2$, sobre o qual atuam a força $\mathbf{F}$ e a força-peso $(m_1 + m_2)\mathbf{g}$. Todas as forças são paralelas e portanto o problema pode ser tratado algebricamente. Vamos escolher força para cima como positiva e força para baixo como negativa. As forças $\mathbf{T}$ e $-\mathbf{T}$ são forças internas do conjunto e não afetam o movimento deste, uma vez que se anulam mutuamente. Portanto, da segunda lei obtemos

$$F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a,$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} - g. \quad (6.17)$$

Sabendo-se que ambos os corpos têm a mesma aceleração dada pela Equação 6.17, pode-se agora responder à questão (B). De fato, para o corpo 2 vale a equação

$$T - m_2g = m_2a.$$

Substituindo o valor da aceleração a na equação acima, obtemos

$$T = m_2g + m_2\left(\frac{F}{m_1 + m_2} - g\right)$$

$$\Rightarrow T = F \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Alternativamente, podemos responder à questão (B) examinando o movimento do corpo 1. Vale então a equação de movimento

$$F - m_1g - T = m_1a$$

$$\Rightarrow T = F - m_1g - m_1a = F - m_1g - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2} - g\right)$$

$$\Rightarrow T = F - F \frac{m_1}{m_1 + m_2} = F \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Digamos, entretanto, que o “macete” de considerar inicialmente os dois corpos como um único corpo não fosse imaginado. Nesse caso, o problema seria analisado a partir das equações de movimento individuais para os dois corpos. A segunda lei aplicada aos corpos 1 e 2 resulta, respectivamente, em

$$F - m_1g - T = m_1a, \quad (6.18)$$

$$T - m_2g = m_2a.$$

Obtém-se assim um sistema de duas equações com duas incógnitas a e T . Para resolver o sistema, pode-se inicialmente somar as Equações 6.18 para se obter a eliminação da incógnita T :

$$F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a, \quad (6.19)$$

que reproduz a Equação 6.17.

No exemplo anterior, o fio que transmite a força tem massa nula. O fio sem massa simplesmente transmite a força de um extremo ao outro sem qualquer perda, e portanto podemos ignorar as forças que atuam sobre ele. Um fio com massa submetido a uma aceleração apresenta uma tensão não uniforme, como se mostrará no exemplo a seguir.

E-E Exercício-exemplo 6.8

■ Um cabo homogêneo de massa M e comprimento L é puxado para cima por uma de suas extremidades com força F , como se vê na Figura 6.11. Calcule (A) a aceleração do cabo e (B) a variação da tensão ao longo do mesmo.

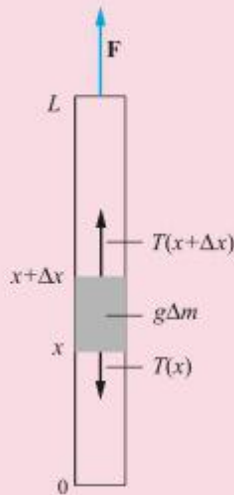


Figura 6.11
(Exercício-exemplo 6.8).

■ Solução

Para se calcular a aceleração, basta aplicar a segunda lei de Newton ao cabo como um todo. As forças que atuam sobre ele são F e sua força-peso Mg . Portanto,

$$F - Mg = Ma. \quad (6.20)$$

Para calcular a variação da força de tensão, considera-se a equação de movimento de um segmento do cabo de comprimento Δx , como mostra a Figura 6.11. As forças que atuam sobre esse segmento são $T(x + \Delta x)$, $-T(x)$ e a força-peso $-g\Delta M = -gM\Delta x / L$. Portanto, podemos escrever

$$T(x + \Delta x) - T(x) - M \frac{\Delta x}{L} g = M \frac{\Delta x}{L} a.$$

Dividindo essa equação por Δx , obtemos

$$\frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} = \frac{M}{L} g + \frac{M}{L} a.$$

Tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$ e substituindo a aceleração a dada pela Equação 6.20, obtemos

$$\frac{dT}{dx} = \frac{F}{L}. \quad (6.21)$$

Integrando a Equação 6.21, considerando que $T(0) = 0$, obtemos

$$T(x) = \frac{F}{L} x.$$

E-E Exercício-exemplo 6.9

■ Uma caixa está sobre uma esteira horizontal. O coeficiente de atrito estático entre a caixa e a esteira vale μ . Mostre que a aceleração horizontal máxima que a esteira pode sofrer sem que o bloco deslize é μg .

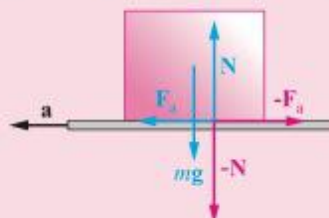


Figura 6.12
(Exercício-exemplo 6.9).

■ Solução

A Figura 6.12 mostra (em azul) todas as forças que atuam sobre o bloco: seu peso mg , a força normal N que a esteira exerce sobre ele e a força de atrito F_a , também exercida pela esteira. Mostra também as forças $-N$ e $-F_a$ que o bloco exerce sobre a esteira. Como o bloco não se move na vertical, $N = mg$. A condição para que o bloco não deslize é que a sua aceleração seja igual à aceleração a da esteira. A força que acelera o bloco é o atrito F_a que a esteira exerce sobre ele. Portanto,

$$F_a = ma.$$

Por outro lado,

$$F_a \leq \mu N = \mu mg.$$

Concluimos então que

$$ma \leq \mu mg \Rightarrow a \leq \mu g.$$

Portanto,

$$a_{\text{máx}} = \mu g.$$

E-E Exercício-exemplo 6.10

■ Uma caixa apóia-se sobre uma tábua que, por sua vez, apóia-se sobre uma mesa horizontal. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre a caixa e a tábua valem 0,50 e 0,30, respectivamente, e o atrito entre a tábua e a mesa é desprezível. A caixa tem massa $m = 10$ kg e a tábua tem massa $M = 20$ kg. Uma força horizontal F de módulo igual a 200 N é aplicada sobre a tábua, como mostra a Figura 6.13. Calcule as acelerações a_t da tábua e a_c da caixa.

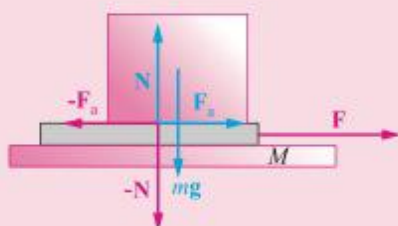


Figura 6.13
(Exercício-exemplo 6.10).

■ Solução

A Figura 6.13 mostra as forças relevantes para a solução do problema. Vê-se que $N = mg$. As equações de movimento da tábua e da caixa são, respectivamente,

$$\begin{aligned} F - F_a &= Ma_t, \\ F_a &= ma_c. \end{aligned} \quad (6.22)$$

A primeira questão a ser resolvida é se a caixa desliza ou não sobre a tábua. Caso não deslize, sua aceleração será a mesma da tábua, ou seja, $a_c = a_t$ e, portanto, somando as duas equações na Equação 6.22, obtemos

$$\begin{aligned} F &= (M + m)a_c, \\ a_c &= \frac{200 \text{ N}}{30 \text{ kg}} = 6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Nesse caso, a força de atrito entre a caixa e a tábua teria o módulo

$$F_a = ma_c = 10 \text{ kg} \times 6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 67 \text{ N}.$$

Porém, essa força é maior que o valor máximo da força de atrito entre a caixa e a tábua, dado por

$$F_{a,\text{máx}} = \mu mg = 0,50 \times 10 \text{ kg} \times 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 49 \text{ N}.$$

Isso nos leva a concluir que a caixa desliza sobre a mesa, e nesse caso a força de atrito vale

$$F_a = \mu_c mg = 0,30 \times 10 \times 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29 \text{ N}.$$

Com esse resultado, podemos calcular as duas acelerações:

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{F - F_a}{M} = \frac{(200 - 29) \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 8,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \\ a_c &= \frac{F_a}{m} = \frac{29 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

E-E Exercício-exemplo 6.11

■ Qual é a intensidade mínima da força F aplicada ao bloco da Figura 6.14 capaz de evitar que este deslize para baixo, se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede é μ ?

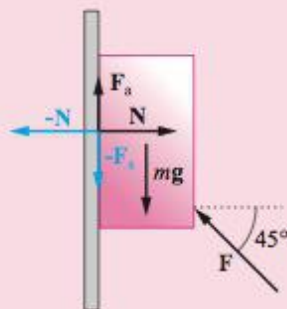


Figura 6.14
(Exemplo-exemplo 6.11).

■ Solução

As setas impressas em preto indicam as forças aplicadas sobre o bloco, e elas são as únicas necessárias para a solução do problema. Pelo fato de o bloco não se mover na horizontal, podemos concluir que

$$N = F \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} F.$$

Se a intensidade da força $\mathbf{F}$ é o mínimo $F_{\min}$ suficiente para evitar que o bloco deslize para baixo, podemos concluir que a força de atrito sobre o bloco aponta para cima, como mostra a Figura 6.14. Seu valor será o máximo possível para aquele valor de N , ou seja,

$$F_s = \mu N = \mu \frac{\sqrt{2}}{2} F_{\min}.$$

Como o bloco permanece em repouso, as componentes verticais das forças que atuam sobre ele somam valor nulo, ou seja,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} F_{\min} + \mu \frac{\sqrt{2}}{2} F_{\min} - mg = 0.$$

Portanto,

$$F_{\min} \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \mu) = mg,$$

$$F_{\min} = \sqrt{2} \frac{mg}{1 + \mu}.$$

E-E Exercício-exemplo 6.12

■ Quando um avião viaja a velocidade vetorial constante na horizontal, suas turbinas ou hélices sentem uma força horizontal para a frente. A atuação do ar no corpo e nas asas do avião exerce uma força com uma componente horizontal para trás, que é uma força de atrito, e outra componente ($\mathbf{E}$) vertical para cima, que sustenta o avião. (A) Por que o avião não consegue fazer uma curva na horizontal sem inclinar as asas? (B) De que ângulo devem as asas ser inclinadas para que o avião realize uma curva na horizontal de raio R ?

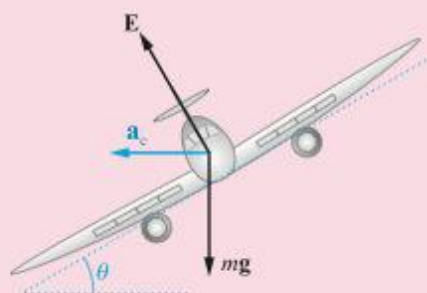


Figura 6.15
(Exercício-exemplo 6.12).

■ Solução

(A) Porque nesse caso não há nenhuma força lateral ao avião.

(B) A Figura 6.15 mostra as forças que têm componentes verticais que atuam sobre o avião. As forças sobre as turbinas, que impulsionam o avião para a frente, e a força de atrito do ar, oposta à velocidade do avião, são omitidas na figura. A força $\mathbf{E}$ é denominada empuxo do ar sobre o avião. Seu componente vertical sustenta o avião no ar, equilibrando o seu peso mg . Podemos escrever

$$E \cos \theta = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{\cos \theta}. \quad (6.23)$$

O componente horizontal de $\mathbf{E}$ gera a aceleração centrípeta do avião, que o força a realizar uma curva.

Podemos escrever

$$E \sin \theta = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow E = \frac{mv^2}{R \sin \theta} \quad (6.24)$$

Combinando as Equações 6.23 e 6.24, $\frac{mv^2}{R \sin \theta} = \frac{mg}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{v^2}{gR}$.

Finalmente, $\theta = \arctg\left(\frac{v^2}{gR}\right)$.

E-E Exercício-exemplo 6.13

■ Um operário está usando seu próprio esforço braçal para elevar-se juntamente com sua plataforma de trabalho, como mostra a Figura 6.16. Os cabos e a roldana têm pesos desprezíveis, e a roldana roda livre de atrito. Calcule a intensidade das forças que atuam sobre o operário, a roldana e a plataforma, indicadas na figura, quando o operário, juntamente com a plataforma, têm aceleração cujo componente vertical vale a .

■ Solução

Aplicando a segunda lei ao operário e depois à plataforma, obtemos, respectivamente,

$$T_1 + N = M(g + a), \quad (6.25)$$

$$T_1 - N = m(g + a). \quad (6.26)$$

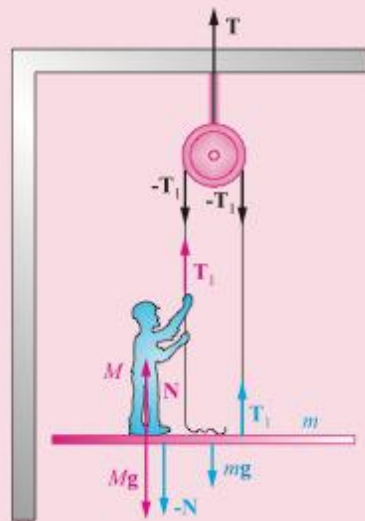


Figura 6.16
(Exercício-exemplo 6.13).

Somando as Equações (6.25) e (6.26)

$$2T_1 + (M + m)(g + a) \Rightarrow T_1 = \frac{M + m}{2}(g + a).$$

Subtraindo a Equação (6.26) da Equação (6.25), obtemos

$$2N = (M - m)(g + a) \Rightarrow N = \frac{M - m}{2}(g + a).$$

Como a roldana permanece em equilíbrio, temos

$$T = 2T_1 = (M + m)(g + a).$$

Deve-se notar que essa solução só vale se $m \leq M$.

Exercícios

E 6.10 Suponha que o cabo da Figura 6.11 não seja homogêneo mas tenha uma densidade de massa dada por $\rho(x) = \rho_0 x$, sendo $x = 0$ a extremidade inferior e $x = L$ a superior. Sua massa total é M e sua aceleração para cima é a . Determine, em termos de M , L , a e g : (A) o parâmetro ρ_0 ; (B) a tensão $T(x)$.

E 6.11 Um bloco de massa igual a 1000 kg cai de uma altura de 100 m. De quanto se move a Terra nesse processo?

E 6.12 Uma pessoa de massa igual a 70 kg está em um elevador que tem aceleração igual a $2,5 \text{ m/s}^2$ para cima. Qual é o valor da força que os pés da pessoa exercem sobre o piso do elevador?

E 6.13 Um carro de tração dianteira tem massa m , e metade do seu peso se apóia nas rodas dianteiras. Sendo μ o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista, e supondo-se que o motor do carro seja suficientemente possante, qual é a aceleração máxima que o carro pode atingir em pista plana?

E 6.14 Reconsiderando o Exercício-exemplo 6.11, suponha que o bloco tenha massa de 5,0 kg e que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a parede valha 0,60. Qual é o valor mínimo do módulo da força F a partir do qual o bloco desliza para cima?

E 6.15 A Terra faz uma órbita aproximadamente circular em torno do Sol, cujo raio é de $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$. Qual é a intensidade da força que a Terra exerce sobre o Sol?

E 6.16 Ignore a atmosfera da Terra. A que velocidade um corpo teria de ser atirado horizontalmente do alto do monte Everest para que realizasse uma volta ao mundo e chegasse ao ponto inicial?

E 6.17 Uma pedra de massa m gira no ar, presa por um fio de comprimento l tal como mostra a Figura 6.17. (A) Qual é a tensão no fio? (Ignore a gravidade.) (B) Se o fio arrebentar quando a pedra estiver na posição mostrada na figura, qual será seu movimento subsequente?

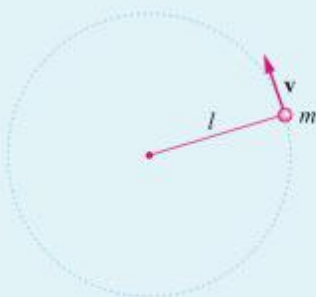


Figura 6.17

(Exercício 6.17).

E 6.18 Dois blocos estão suspensos por uma roldana, como mostra a Figura 6.18. A roldana tem massa desprezível e gira sem atrito em torno do seu eixo. Calcule (A) a aceleração dos blocos; (B) a tensão T no cabo.

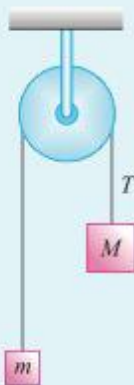


Figura 6.18

(Exercício 6.18).

Seção 6.10 ■ Atrito hidrodinâmico e velocidade-limite

Quando um corpo move-se no interior de um fluido, ou seja, um gás ou um líquido, fica sujeito a uma força de atrito. Trataremos aqui do caso específico de movimento no ar. Se o corpo não for muito pequeno e sua velocidade também não for muito pequena, tal força é, com boa aproximação, descrita pela lei

$$F_a = \frac{1}{2} CA \rho v^2 \quad (6.27)$$

Nesta equação, ρ é a densidade do ar, cujo valor em condições normais de temperatura e pressão é $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, A é a área de corte frontal do corpo, ou seja, a área de sua sombra se o corpo for iluminado por luz colimada na direção da sua velocidade. C é um número adimensional dependente da forma do corpo, denominado coeficiente de arraste ou coeficiente de penetração aerodinâmica. Por exemplo, no caso de um carro, A é a área de um corte vertical que divide o carro em duas metades, a da frente e a de trás, somada à área de corte de dois pneus, e o valor de C vai de 0,30 a 0,45, dependendo do modelo do carro. No caso de um pára-quedas, A é a área da sua sombra vertical e C vale aproximadamente 1,4.

E-E

Exercício-exemplo 6.14

■ Qual é a força de atrito do ar sobre um carro cujo coeficiente de arraste vale 0,38 e cuja área de corte frontal vale $2,5 \text{ m}^2$, viajando a 35 m/s (126 km/h)?

■ Solução

Por aplicação direta da Equação 6.27, obtemos

$$F = \frac{1}{2} \times 0,38 \times 2,5 \text{ m}^2 \times 1,3 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \cdot \text{m}^{-3} \times (35)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 756 \text{ N}.$$

Corpos em queda na atmosfera ficam sujeitos a duas forças, seu peso e a força de atrito do ar, que se opõe à sua velocidade. A equação de movimento do corpo se escreve da seguinte maneira:

$$ma = mg - F_a, \quad (6.28)$$

ou

$$ma = mg - \frac{1}{2} CA \rho v^2. \quad (6.29)$$

O exame da Equação 6.29 mostra que o corpo, quando parte do repouso, tem inicialmente aceleração igual a g . Na medida em que sua velocidade cresce, a força de atrito aumenta de intensidade e com isso a aceleração do corpo diminui, ou seja, a velocidade aumenta cada vez mais lentamente. Por fim, o corpo atinge a denominada velocidade-limite à qual a força de atrito hidrodinâmico neutraliza exatamente o peso do corpo. Alcançado esse limite, temos

$$0 = mg - \frac{1}{2} CA \rho v_{\text{lim}}^2. \quad (6.30)$$

Esta equação define a velocidade limite alcançada pelo corpo:

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2mg}{CA\rho}}. \quad (6.31)$$

E-E Exercício-exemplo 6.15

■ Uma pára-quedista cuja massa é de 60 kg salta de um pára-quedas cuja área frontal é de 20 m^2 . Qual é a velocidade-limite da pára-quedista?

■ Solução

Alimentando os dados do problema na Equação 6.31, obtemos

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2 \times 60 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{1,4 \times 20 \text{ m}^2 \times 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}} = 5,7 \text{ m/s}.$$

Exercícios

E 6.19 A resistência do ar sobre um pára-quedas exerce uma força $F_a = 8,0(\text{N} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2)v^2$, em que v é a velocidade de queda. Qual é a velocidade-limite (velocidade máxima) de uma pára-quedista de massa igual a 60 kg, ao saltar com esse pára-quedas?

E 6.20 Um carro cujo coeficiente de penetração aerodinâmica vale 0,32 e cuja área frontal mede $2,4 \text{ m}^2$ tem um motor que pode lhe imprimir uma força máxima de 1000 N. Qual é a velocidade máxima que tal carro pode atingir no plano?

PROBLEMAS

P 6.1 A aceleração lateral máxima que um carro pode ter sem derrapar, trafegando em pista horizontal, é denominada *aderência lateral*, e geralmente é expressa em termos da aceleração da gravidade. Assim, se um carro tem aderência lateral igual a X_L , pode atingir acelerações laterais de gX_L . (A) Calcule a velocidade máxima à qual um carro cuja aderência lateral é 0,90 pode fazer uma curva de raio $R = 200 \text{ m}$, em uma pista horizontal. (B) Qual é o valor máximo do componente lateral da força de atrito que a pista pode exercer sobre os pneus do carro, se a sua massa vale 1000 kg?

P 6.2 Uma pista de corrida tem raio R e o coeficiente de atrito estático entre os pneus de um carro e o asfalto é μ . (A) Mostre que, se a pista for plana, a velocidade máxima que o carro pode realizar sem deslizar é dada por $v = \sqrt{Rg\mu}$, sendo g a aceleração da gravidade. (B) Usando o valor de 0,9 para μ , calcule essa velocidade-limite para uma pista plana de $R = 500 \text{ m}$ (compare com a velocidade do Exercício-exemplo 6.6). (C) Calcule o limite de velocidade para uma pista que tem um ângulo de inclinação φ e mostre que o resultado pode ser colocado na forma $v = \sqrt{Rg \tan(\varphi + \alpha)}$, em que $\tan \alpha \equiv \mu$. (D) Use esse resultado e calcule a velocidade-limite para a mesma inclinação de pista do Exercício-exemplo 6.6 e $\mu = 0,9$. (E) Quando $\varphi + \alpha > \frac{\pi}{2}$ o resultado acima não tem solução física.

Isto acontece porque a pista está tão inclinada que, para qualquer velocidade, a tendência do carro é deslizar para baixo; assim a força de atrito é invertida em relação aos casos anteriores. Mostre que, nessa condição, a velocidade mínima para o carro não descer é $v = \sqrt{Rg \tan(\varphi - \alpha)}$.

P 6.3 Um avião cuja massa é 50.000 kg viaja na horizontal à velocidade constante de 720 km/h. Suas turbinas exercem um empuxo de $7,0 \times 10^4 \text{ N}$ na direção horizontal. Calcule a força que o ar exerce sobre o avião.

P 6.4 O sistema mostrado na Figura 6.19 está em equilíbrio. Calcule as tensões T_1 e T_2 nos cabos.

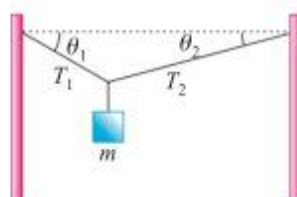


Figura 6.19

(Problema 6.4).

P 6.5 A coluna mostrada na Figura 6.20 repousa apoiada em um piso. Sabendo que a pressão sobre uma superfície é a força normal a ela dividida pela área da mesma, calcule a pressão na coluna à altura h do piso.

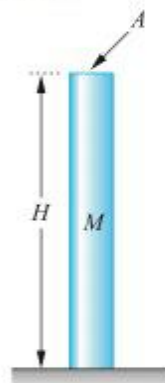


Figura 6.20

(Problema 6.5).

P 6.6 Um fio de comprimento l e massa desprezível, com uma pequena esfera de massa m presa à sua extremidade, é fixado ao teto de um ônibus. O ônibus realiza uma curva de raio r à velocidade de módulo constante v no plano horizontal. Calcule (A) o ângulo que o fio faz com a vertical e (B) a tensão no fio.

P 6.7 Um garoto anda em uma roda gigante de raio R que gira a uma velocidade angular ω . A força que a cadeira faz para sustentar o garoto varia durante o ciclo, e seu valor máximo é $F_{\text{máx}}$. (A) Qual é a massa do garoto? (B) Qual é o valor mínimo da força da cadeira sobre o garoto?

P 6.8 Uma pedra de massa m , amarrada a uma linha de comprimento L com uma extremidade fixa, gira em um círculo no plano vertical. Qual é a velocidade mínima da pedra ao passar pelo ponto mais alto para que esse movimento seja possível?

P 6.9 A Terra realiza um giro em torno do seu eixo em um dia sideral, cuja duração é de 86.164 s. (A) Qual é a redução percentual do peso aparente de um objeto situado na linha do equador devido à rotação da Terra? (B) Qual deve ser a duração T do dia para que o peso aparente do objeto seja nulo? (C) O que ocorreria se o dia fosse menor que T ?

P 6.10 Um garçom empurra um copo sobre o balcão para seu cliente à velocidade inicial de 5,0 m/s. Dois metros adiante, o cliente pega o copo, que nesse momento já perdeu 40% de sua velocidade. (A) Qual foi a aceleração do copo ao deslizar sobre o balcão, supostamente constante? (B) Qual é o coeficiente de atrito cinético entre o balcão e o copo?

P 6.11 Um bloco desliza em uma rampa de inclinação 60° no mesmo tempo que deslizaria em uma rampa sem atrito de igual comprimento e inclinação de 30° . Qual é coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa?

P 6.12 O atrito entre os dois blocos mostrados na Figura 6.21 é nulo, mas o bloco grande tem uma aceleração a tal que mantém o bloco pequeno sem deslizar sobre o outro. (A) Qual é o valor da aceleração a do sistema? (B) Sendo m a massa do bloco pequeno, qual é o módulo da força de contato entre os dois blocos?

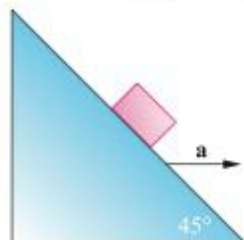


Figura 6.21
(Problema 6.12).

P 6.13 Uma corda de massa m envolve um cilindro de raio r , como mostra a Figura 6.22. O cilindro gira à alta velocidade angular ω . Qual é a tensão na corda, que acompanha o giro do cilindro sem deslizar?

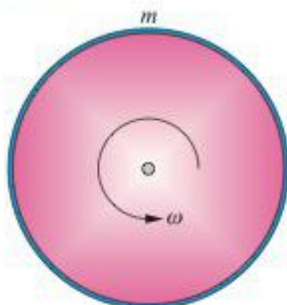


Figura 6.22
(Problema 6.13).

P 6.14 Uma pedra de massa m suspensa por um fio tem uma órbita circular em um plano horizontal, como mostra a Figura 6.23. (A) Identifique as forças que atuam sobre a pedra. (B) Qual é a tensão T no fio? (C) Qual é a relação entre v e θ ? (D) Qual é o período τ da oscilação?

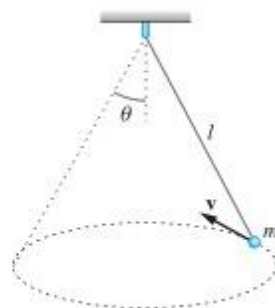


Figura 6.23
(Problema 6.14).

P 6.15 O bloco da Figura 6.24 desliza sem atrito da altura $h = 10$ m, partindo do repouso. Sendo $\phi = 30^\circ$, calcule (A) o tempo gasto no deslizamento até o fim da rampa. (B) A velocidade final do bloco.

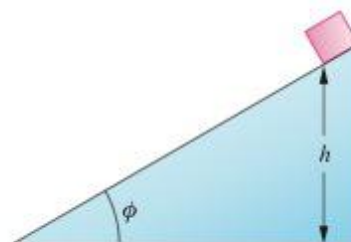


Figura 6.24
(Problema 6.15).

P 6.16 Mostre que, na ausência de atrito, a velocidade final do bloco visto na Figura 6.24, fixados os valores de h e da velocidade inicial, independe do ângulo ϕ .

P 6.17 Suponha que entre o bloco e a superfície da rampa da Figura 6.24 haja um coeficiente de atrito cinético $\mu_c < \tan \phi$. Sendo v_0 a velocidade inicial do bloco, calcule: (A) o tempo gasto no deslizamento; (B) a velocidade final do bloco.

P 6.18 Ignorando qualquer forma de atrito no sistema mostrado na Figura 6.25, (A) encontre a relação entre as massas m e M para que o sistema fique em equilíbrio; (B) Calcule a aceleração dos blocos se $M = 2m$.

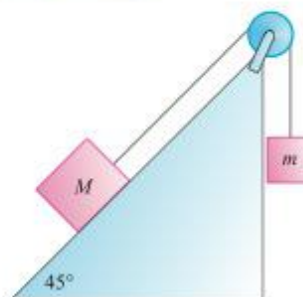


Figura 6.25
(Problema 6.18).

P 6.19 As esferas vistas na Figura 6.26 têm cada qual massa m e estão em equilíbrio mecânico. Supondo que não haja atrito entre as bolas e nem entre elas e a caixa, identifique todas as forças que atuam sobre as esferas e calcule o seu valor.

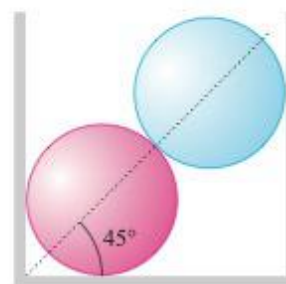


Figura 6.26
(Problema 6.19).

P 6.20 Dois carros idênticos, cada qual com massa igual a 1200 kg, chocam-se frontalmente, à velocidade inicial de 60 km/h. Durante a colisão, os dois carros se deformam de modo que a frente de cada um retrocede um comprimento igual a 60 cm. Supondo-se que a força durante a colisão seja constante, (A) Qual é a aceleração sofrida pelo corpo do carro? (B) Qual é a força exercida durante a colisão?

P 6.21 Um carro de massa igual a 1200 kg e velocidade inicial de 60 km/h choca-se com uma parede de concreto. Durante a colisão, o carro se deforma de modo que sua frente retrocede um comprimento igual a 60 cm. Supondo-se que a força durante a colisão seja constante, (A) qual é a aceleração sofrida pelo corpo do carro? (B) Qual é a força exercida pela parede sobre o carro?

P 6.22 Pergunta: Do ponto de vista dos danos sobre o carro ou seus passageiros, existe alguma diferença entre um carro com velocidade v_0 colidir frontalmente com outro carro igual de velocidade $-v_0$ ou com uma parede de concreto?

P 6.23 Pergunta: Os dois cabos que prendem os blocos na Figura 6.27 só resistem a uma tensão igual a $1,5mg$. O bloco de baixo é repentinamente abandonado, de modo que, ao se completar a queda permitida pelo cabo de baixo, um dos cabos irá se romper. Qual deles? Sugestão: Faça a experiência para testar a sua resposta.

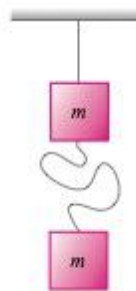


Figura 6.27
(Problema 6.23).

P 6.24 Pergunta: Os dois pequenos blocos da Figura 6.28 se apóiam sobre uma fita de papel. Quando a esfera em queda livre atingir a fita, esta cairá sem se arrebeitar. Você acha provável que os pequenos blocos caiam?

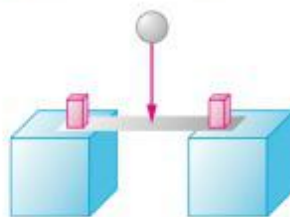


Figura 6.28
(Problema 6.24).

Respostas dos exercícios

E 6.1 40 m/s².

E 6.2 (A) 6,4 m/s²; (B) 60 m.

E 6.3 0,60 g, sendo g a aceleração da gravidade.

E 6.5 0,64.

E 6.6 (A) $F_{\min} = 0,70 mg$; (B) $a = 0,20 g$.

E 6.7 (A) $F_{\min} = 0,58 mg$; (B) $a = 0,11 g$.

E 6.8 (A) $1,6 \times 10^3$ N; (B) 8,6 m/s².

E 6.9 (A) 0,60; (C) 62°; (D) 43 m.

E 6.10 (A) $\rho_o = \frac{2M}{L^2}$; (B) $T(x) = M(a + g)\frac{x^2}{L^2}$.

E 6.11 $d = 1,67 \times 10^{-20}$ m.

E 6.12 861 N.

E 6.13 $a = \mu g / 2$.

E 6.14 $1,7 \times 10^2$ N.

E 6.15 $F = 3,6 \times 10^{22}$ N.

E 6.16 $v = 7,91$ km/s.

E 6.17 (A) $m v^2 / l$; (B) ficará em movimento uniforme à velocidade v em uma trajetória tangente ao círculo no ponto em que se soltou.

E 6.18 (A) $a = \frac{M - m}{M + m} g$; (B) $T = \frac{2mM}{M + m} g$.

E 6.19 -8,6 m/s.

E 6.20 162 km/h.

Respostas dos problemas

P 6.1 (A) $v = 151$ km/h; (B) $F = 8,8 \times 10^3$ N.

P 6.2 (A) 239 km/h; (D) 279 km/h.

P 6.3 $4,95 \times 10^5$ N.

P 6.4 $T_1 = \frac{mg \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$, $T_2 = \frac{mg \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$.

P 6.5 $p = \frac{Mg}{A} \left(\frac{H - h}{H} \right)$.

P 6.6 (A) $\theta = \arctg \left(\frac{v^2}{rg} \right)$, (B) $T = mg \sqrt{1 + \frac{v^4}{r^2 g^2}}$.

P 6.7 (A) $m = \frac{F_{\max}}{g + \omega^2 R}$; (B) $F_{\min} = F_{\max} \frac{g - \omega^2 R}{g + \omega^2 R}$.

P 6.8 $v_{\min} = \sqrt{gL}$.

P 6.9 (A) $\frac{\Delta P}{P} = 0,345\%$; (B) $T = 1h25min$. (C) A Terra se desintegraria, ou melhor, não teria se formado em seu estado atual.

P 6.10 (A) $a = -4,0$ m/s²; (B) $\mu_c = 0,41$.

P 6.11 $\mu_c = 0,73$.

P 6.12 (A) $a = g$; (B) $\sqrt{2}mg$.

P 6.13 $F = m\omega^2 r / 2\pi$.

P 6.14 (B) $mg \sec\theta$; (C) $\sqrt{gR \tan\theta}$.

P 6.15 (A) 28s; (B) 14 m/s.

P 6.17 (A) $\sqrt{2gh(1 - \mu_c \cot\phi) + v_o^2}$; (B) $\sqrt{\frac{2h}{g \sin\phi (\sin\phi - \mu_c \cos\phi)}}$.

P 6.18 (A) $M = \sqrt{2}m$; (B) $a = \frac{\sqrt{2}-1}{3}g$.

P 6.19 Peso de cada bola = mg ; normal do piso sobre a bola da esquerda = $2mg$; força normal de cada parede sobre a bola que toca nela = mg ; força de contato entre as duas bolas = $\sqrt{2}mg$.

P 6.20 (A) 231 m/s²; (B) $2,78 \times 10^5$ N.

P 6.21 (A) 231 m/s²; (B) $2,78 \times 10^5$ N.

P 6.22 Não.





Trabalho e Energia

- Seção 7.1 ■ Introdução, 136
- Seção 7.2 ■ Trabalho de uma força constante, 136
- Seção 7.3 ■ Trabalho de uma força variável, 139
- Seção 7.4 ■ Energia cinética, 144
- Seção 7.5 ■ Potência, 147
- Seção 7.6 ■ Energia potencial, 149
- Seção 7.7 ■ Conversação da energia mecânica, 152
- Seção 7.8 ■ Aplicações da lei de conservação da energia mecânica, 155
- Seção 7.9 ■ Lei da conservação da energia, 158
- Seção 7.10 ■ Cálculo da força a partir do potencial, 159
- Seção 7.11 ■ Forças conservativas em uma dimensão, 161
- Seção 7.12 ■ Energia e massa relativísticas, 163
- Problemas, 165
- Respostas dos exercícios, 167
- Respostas dos problemas, 167

Seção 7.1 ■ Introdução

Em física, trabalho é um termo usado com significado distinto do que se entende na linguagem diária. Considere, por exemplo, uma pessoa caminhando em um plano horizontal, com velocidade constante, carregando um corpo de peso $P = mg$. Na linguagem da física, tal pessoa não estará realizando qualquer trabalho sobre o corpo. Por outro lado, se o referido carregador subir uma rampa carregando o corpo, também com velocidade uniforme, realizará sobre ele um trabalho dado por

$$W(\text{subir}) = mgh, \quad (7.1)$$

onde h é o deslocamento do corpo na direção vertical, ou seja, quanto o carregador sobe carregando o corpo. Se o carregador descer a rampa, irá realizar sobre o corpo um trabalho

$$W(\text{descer}) = -mgh. \quad (7.2)$$

Vê-se que o trabalho realizado ao descer é negativo e de magnitude igual ao realizado na subida. No circuito completo de subida e descida, o carregador terá realizado um trabalho de valor nulo. Vemos aqui outra característica do conceito de trabalho em física: trabalho é uma grandeza que pode ser positiva ou negativa. O conceito de trabalho é estreitamente ligado ao de energia, e este capítulo será dedicado à investigação desses dois conceitos e da sua interconexão. Neste capítulo será também introduzido o que constitui possivelmente o mais fundamental dos princípios da física: a lei da conservação da energia.

Seção 7.2 ■ Trabalho de uma força constante

O trabalho feito pelo carregador sobre o corpo de peso mg transladado com velocidade uniforme entre dois pontos com diferença de nível h só depende de h e do peso do corpo. Muitas questões, entretanto, ainda estão sem resposta: qual será o trabalho (A) se a trajetória for curva, ou seja, se a velocidade tiver direção variável? (B) se o módulo da velocidade for variável? (C) Além do carregador, a Terra também está atuando sobre o corpo por meio da força-peso. Nesse caso, qual é o trabalho realizado por esse outro agente? A resposta a essas perguntas irá aparecendo na evolução do texto. Nosso ponto de partida será a definição

■ Trabalho de uma força constante

O trabalho realizado por uma força constante $\mathbf{F}$ sobre uma partícula enquanto esta se desloca de uma quantidade $\mathbf{d}$ em linha reta é dado por

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \theta, \quad (7.3)$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores $\mathbf{F}$ e $\mathbf{d}$.

Como a definição de W envolve o produto escalar dos vetores força $\mathbf{F}$ e deslocamento $\mathbf{d}$, resulta que no cálculo do trabalho só interessa a componente do deslocamento na direção da força, ou então a componente da força na direção do deslocamento.

No SI, a unidade de trabalho é o joule, símbolo J. O joule é o trabalho realizado por uma força constante de um newton quando desloca um corpo uma distância de um metro na sua direção e no seu sentido. Portanto,

$$1 \text{ J} \equiv \text{N} \times \text{m} \quad (\text{unidade de trabalho no SI}).$$

Quando a partícula se move sob a ação de várias forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$, etc., o trabalho total, ou trabalho líquido, realizado sobre ela é a soma dos trabalhos W_1, W_2, W_3 , etc., que cada uma das forças realiza. Veja que agora estamos falando em partícula. Isso porque um corpo com dimensões finitas pode girar, além de transladar, e não queremos no momento envolver essas complicações na discussão. O trabalho líquido é igual ao trabalho da força resultante, $\mathbf{F}_R$, que atua sobre a partícula, pois

$$W_{\text{liq}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{d} = W_{F_R} \quad (7.4)$$

O trabalho líquido é igual ao trabalho da força resultante

O trabalho líquido sobre uma partícula em movimento retilíneo é nulo se a velocidade for constante, pois nesse caso a força resultante é nula. Se a velocidade da partícula se modificar, a força resultante não será nula e, assim, o trabalho líquido também não será nulo.

Note-se que na definição do trabalho nos referimos a uma partícula e seu deslocamento. Tal definição se aplica também a um corpo se este for transladado sem sofrer qualquer rotação. A situação em que rotações são envolvidas será tratada no Capítulo 10 (*Rotações*).

E-E Exercício-exemplo 7.1

■ Um bloco de massa m desliza sobre uma rampa fazendo um deslocamento $\mathbf{d}$ cuja componente vertical é h , como mostra a Figura 7.1. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa vale μ_c . (A) Calcule o trabalho de cada uma das várias forças que atuam sobre o bloco durante o deslizamento. (B) Calcule o trabalho líquido e verifique que ele será nulo quando o corpo descer com velocidade constante.

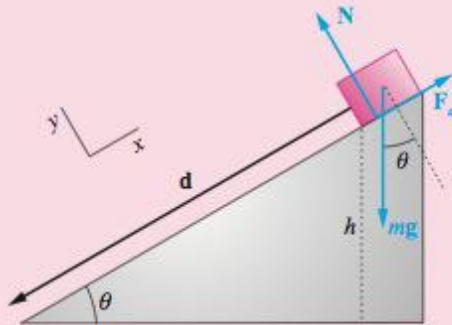


Figura 7.1

Um corpo desliza sobre uma rampa, deslocando-se $\mathbf{d}$ e descendo uma altura h .

■ Solução

(A) As forças que atuam sobre o bloco são o seu peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ (exercido pela ação da Terra), a normal $\mathbf{N}$ e a força de atrito $\mathbf{F}_a$ provenientes da ação da superfície do plano sobre o bloco.

Trabalho da normal: o ângulo entre $\mathbf{N}$ e o deslocamento $\mathbf{d}$ é $\pi/2$ e, neste caso,

$$W_N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = Nd \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Trabalho do peso. O ângulo entre $\mathbf{P}$ e $\mathbf{d}$ é $\pi/2 - \theta$. Assim, o trabalho será

$$W_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} = mgd \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = mgd \sin \theta = mgh.$$

Trabalho da força de atrito. O ângulo entre $\mathbf{F}_a$ e o deslocamento $\mathbf{d}$ é π . Assim,

$$W_{F_a} = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{d} = F_a d \cos \pi = -F_a d. \quad (7.5)$$

Para que a solução fique completa, temos de determinar o valor de F_a na Equação 7.5. Como vimos anteriormente, $F_a = \mu_c N$. Mas a normal deve ser igual à componente do peso na direção perpendicular à superfície do plano, pois nesta direção não há aceleração: $N = mg \cos \theta$. Assim, $F_a = \mu_c mg \cos \theta$. Desta forma, o trabalho realizado pela força de atrito será

$$W_{F_a} = -\mu_c mgd \cos \theta.$$

(B) **Trabalho líquido:** o trabalho líquido é a soma dos trabalhos das três forças:

$$W_{\text{liq}} = W_N + W_P + W_{F_a} = mgh - \mu_c mgd \cos \theta. \quad (7.6)$$

Se o corpo desce com velocidade constante, a força de atrito é igual e de sinal contrário à componente do peso na direção de movimento. Ou seja, $\mu_c mg \cos \theta = mg \sin \theta$. Substituindo-se este resultado na Equação 7.6 conclui-se que o trabalho líquido é nulo.

Exercício

E 7.1 Um bloco de massa igual a 40,0 kg está sobre uma superfície horizontal e é arrastado por uma força F igual a 160 N através de uma corda que faz um ângulo de 37° com a superfície. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é 0,4. Ao se realizar um deslocamento igual a 5 m, qual será o trabalho realizado pelas forças: (A) peso; (B) normal; (C) F ; e (D) força de atrito; (E) da força resultante?

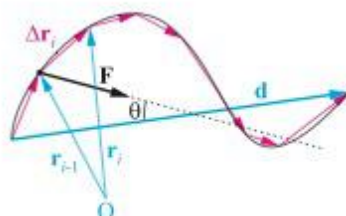


Figura 7.2

Uma partícula descreve uma trajetória curva. Para se calcular o trabalho da força F sobre a partícula, sua trajetória pode ser aproximada por uma sequência de pequenos deslocamentos retilíneos $\Delta \mathbf{r}_i$.

O trabalho realizado por uma força constante sobre uma partícula que se move entre duas posições não depende da trajetória seguida pela partícula

Analizamos até aqui o trabalho realizado por forças constantes em movimentos retilíneos. Consideremos agora uma partícula percorrendo uma trajetória curvilínea sob a ação de uma força constante $\mathbf{F}$. Neste caso, podemos aproximar a trajetória curva C da partícula por uma sequência de pequenos passos retilíneos $\Delta \mathbf{r}_i$, como mostra a Figura 7.2. Cada deslocamento $\Delta \mathbf{r}_i$ é igual à diferença entre uma posição $\mathbf{r}_i$ e a sua posição anterior $\mathbf{r}_{i-1}$. Em cada passo retilíneo a força realizará um trabalho

$$\Delta W_i = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (7.7)$$

onde se vê que só contribui para ΔW_i a componente do passo na direção da força. O trabalho total ao longo da trajetória pode ser aproximado pela soma dos trabalhos ΔW_i realizados nos passos sucessivos:

$$W \cong \sum_i \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (7.8)$$

Por ser uma grandeza constante, a força $\mathbf{F}$ pode ser colocada em evidência no somatório da Equação 7.8:

$$W \cong \mathbf{F} \cdot \left(\sum_i \Delta \mathbf{r}_i \right) \quad (7.9)$$

A Equação 7.9 se tornará exata se tomarmos o limite em que os passos tenham amplitude infinitesimal. Portanto,

$$W = \mathbf{F} \cdot \lim_{|\Delta \mathbf{r}_i| \rightarrow 0} \left(\sum_i \Delta \mathbf{r}_i \right) \quad (7.10)$$

O somatório que aparece nas Equações 7.9 e 7.10 tem como resultado o deslocamento da partícula. Portanto,

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \theta, \quad (7.11)$$

o que reproduz a Equação 7.3. Ou seja, se a força é constante, o trabalho por ela realizado só depende do deslocamento líquido da partícula, mas não da sua trajetória.

Observe que se a força for constante em módulo durante a trajetória da partícula mas não em direção e sentido, como é o caso da força de atrito cinético descrita anteriormente, o vetor $\mathbf{F}$ não é constante e não pode ser colocado em evidência na Equação 7.9. Nesse caso, o trabalho dependerá da trajetória da partícula.

E-E Exercício-exemplo 7.2

■ Um corpo de massa m desliza em uma montanha-russa tal como mostra a Figura 7.3. Calcule o trabalho realizado sobre o corpo pela força da gravidade entre os pontos A e B de sua trajetória.

■ Solução

$$W_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} = mgd \cos \theta = -mgd \sin \alpha = -mgh.$$

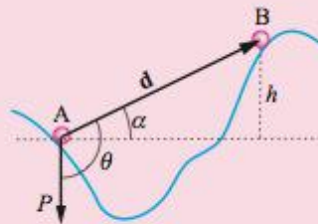


Figura 7.3

(Exercício-exemplo 7.2).

Exercício

E 7.2 Uma pessoa de massa m está sentada em um banco de uma roda-gigante cujo diâmetro é d . O banco está subindo e passando pela posição $\mathbf{r}_0$ situada a $1/4$ de circunferência em relação à posição mais baixa possível. Qual é o trabalho realizado pela força de gravidade sobre essa pessoa quando a roda gira as seguintes frações de circunferência: (A) $1/4$; (B) $1/2$; (C) $3/4$; (D) $4/4$?

Seção 7.3 ■ Trabalho de uma força variável

7.3.1 Movimento em uma dimensão

Consideremos o caso particular em que tanto o movimento como a força tenham direções constantes, digamos a direção $\mathbf{i}$. Nesse caso, podemos escrever

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{i} \Delta x_i, \quad \mathbf{F} = \mathbf{i} F. \quad (7.12)$$

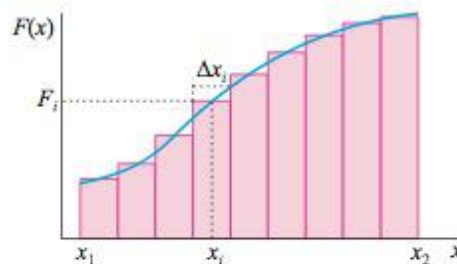


Figura 7.4

A partícula se desloca de x_1 até x_2 sob o efeito da força cujo valor varia com a posição x na forma $F(x)$, como mostra a linha azul. O intervalo (x_1, x_2) é dividido em pequenos intervalos Δx_i , dentro de cada um dos quais a força é aproximada pelo valor F_i . O trabalho é então aproximadamente igual à área sombreada na figura.

A força que varia com a posição está representada pela linha contínua no gráfico da Figura 7.4. Para cada deslocamento Δx_i da partícula, consideraremos a força como constante, igual a F_i . O trabalho realizado quando a partícula se desloca do ponto inicial x_1 ao ponto final x_2 é expresso aproximadamente por

$$W \cong \sum_i F_i \Delta x_i. \quad (7.13)$$

Este valor aproximado para o trabalho é igual à área sombreada da Figura 7.4. No limite em que os deslocamentos Δx_i tendem para zero, a área sombreada cobre exatamente a região sob a curva $F(x)$, como mostra a Figura 7.5. Nesse limite, o somatório visto na Equação 7.13 exprime exatamente o trabalho e se transforma na integral.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (7.14)$$

O trabalho é então igual à área sombreada na Figura 7.5.

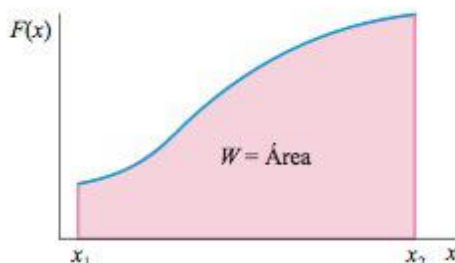


Figura 7.5

O trabalho de uma força variável $F(x)$ atuando sobre uma partícula quando esta se desloca do ponto x_1 ao ponto x_2 é igual à área sombreada sob a curva que descreve $F(x)$.

E-E Exercício-exemplo 7.3

■ (A) Calcule o trabalho realizado pela força, descrita pela função $F(x) = ax^2 + bx^4$, sobre uma partícula enquanto esta se desloca entre os pontos x_1 e x_2 . (B) Se $a = 3,0 \text{ N/m}^2$ e $b = 5,0 \text{ N/m}^4$, obtenha também o valor numérico do trabalho para os casos em que $x_1 = 2,0 \text{ m}$, $x_2 = 3,0 \text{ m}$ e $x_1 = 1,0 \text{ m}$, $x_2 = 2,0 \text{ m}$.

■ Solução

(A) Pela Equação 7.14, podemos escrever

$$W = \int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx^4) dx = \frac{1}{3} a(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{5} b(x_2^5 - x_1^5).$$

(B) Substituindo os valores numéricos do primeiro caso teremos

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{3} \frac{3,0 \text{ N}}{\text{m}^2} [(3,0 \text{ m})^3 - (2,0 \text{ m})^3] + \frac{1}{5} \frac{5,0 \text{ N}}{\text{m}^4} [(3,0 \text{ m})^5 - (2,0 \text{ m})^5] \\ &= 230 \text{ N/m} = 230 \text{ J}. \end{aligned}$$

Se $x_1 = 1,0 \text{ m}$, $x_2 = 2,0 \text{ m}$, a substituição dará $W = 38 \text{ J}$.

Exercícios

E 7.3 Um bloco está sobre uma mesa e é preso por uma mola a uma parede. Quando a mola está em seu tamanho natural o bloco está na posição $x = 0$. Se a posição x do bloco for positiva a mola estará esticada e se x for negativo a mola estará comprimida. Assim, a força que a mola fará sobre o bloco é $F = -kx$, onde k é a constante elástica da mola. Calcule o trabalho que a mola fará sobre o bloco quando este se mover (A) de x_1 até x_2 ; (B) de 0 até x_1 ; (C) de 0 até $-x_1$; (D) de $-x_1$ até x_1 .

E 7.4 A molécula de água (H_2O) é polar e por isso tem a capacidade de interagir com cargas elétricas. Uma molécula de água, na origem de coordenadas, está disposta de tal modo que realiza uma força sobre uma carga q dada por $F = 2 \frac{kpq}{|x|^3}$, onde p é o momento de dipolo da molécula e k é uma

constante. (A) Calcule o trabalho que a molécula faz sobre uma carga q que se desloca de uma posição x_1 até outra posição x_2 ; (B) encontre o valor para esse trabalho para o caso em que a carga é a de um próton, sabendo-se que nesse caso o produto kpq vale $8,39 \times 10^{-39} \text{ Nm}^3$ e que o próton moveu-se da posição $1,0 \times 10^{-9} \text{ m}$ até a posição $2,0 \times 10^{-10} \text{ m}$.

7.3.2 Movimento em três dimensões

Resta agora considerar o caso geral de uma força variável atuando sobre a partícula. A força pode ser variável por mais de uma razão. Seu módulo pode variar, sua direção pode variar, ou ambos podem variar ao mesmo tempo. Não faremos hipótese restritiva sobre o modo de variação da força. Novamente, iniciaremos a análise aproximando a trajetória da partícula por uma sequência de deslocamentos retilíneos $\Delta \mathbf{r}_i$, como descreve a Figura 7.2. Mesmo que a força não seja constante durante cada passo i , poderá ser aproximada por um vetor constante $\mathbf{F}_i$. O trabalho será, assim, aproximado pela soma

$$W \cong \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i. \quad (7.15)$$

Note-se que o valor $\mathbf{F}_i$ da força não pode mais ser posto em evidência na soma. A Equação 7.15 deve ser lida como um algoritmo na forma: *em cada passo $\Delta \mathbf{r}_i$ da trajetória, considere somente sua componente na direção da força naquele instante. Multiplique tal componente pela força e some as parcelas assim obtidas. O resultado será uma aproximação para o valor do trabalho.* No limite de passos infinitesimais, o resultado se tornará exato. O trabalho será então representado pela equação

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.16)$$

O símbolo C visto na integral significa que os deslocamentos infinitesimais $d\mathbf{r}$ devem ser tomados sobre a curva C .

Quando várias forças atuam sobre uma partícula, pode-se definir o trabalho líquido sobre ela da mesma maneira que foi feito na Equação 7.4 para forças constantes. O trabalho líquido é definido pela soma dos trabalhos realizados por todas as forças e é igual ao trabalho da força resultante:

$$W_{\text{liq}} = \sum_i W_i = \sum_i \int_C \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_C \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r} \equiv W_{F_R}. \quad (7.17)$$

Pode-se ver que o trabalho líquido será nulo sempre que a força resultante for nula ou perpendicular à trajetória da partícula em todos os seus pontos.

E-E Exercício-exemplo 7.4

■ Uma pequena pedra é girada em um círculo sob a ação de um fio que a prende a um ponto fixo. Calcule o trabalho realizado sobre a pedra em cada ciclo.

■ Solução

O trabalho é nulo porque a força que o fio exerce sobre a pedra tem direção radial e portanto é sempre perpendicular à direção de movimento da pedra. Assim, na integral que exprime o trabalho, expressa pela Equação 7.16, tem-se que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é sempre nulo.

E-E Exercício-exemplo 7.5

■ Um automóvel freia e percorre uma distância d até parar. Supondo que a força de atrito sofrida pelo carro tenha módulo constante F , (A) calcule o trabalho feito por essa força durante a frenagem. (B) Como se modifica a resposta se durante a frenagem o carro percorre exatamente um círculo (para no mesmo ponto em que começou a frear)?

■ Solução

(A) A força $\mathbf{F}$ é sempre oposta ao deslocamento do carro. Portanto, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F dr$, onde dr é o módulo de $d\mathbf{r}$. O trabalho da força de atrito vale

$$W = -\int F dr = -F \int dr = -Fd.$$

(B) A resposta não se modifica em nada, pois a relação $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F dr$ utilizada é válida e, assim, o resultado obtido não exigiu que a trajetória fosse retilínea.

E-E Exercício-exemplo 7.6

■ Considere uma nave de massa m que se move sob a ação de seu sistema propulsor e da força $\mathbf{F}$ de gravitação da Terra. A nave se encontra inicialmente à distância r_1 do centro da Terra e se move para outro ponto à distância r_2 . Calcule o trabalho feito pela força da gravidade sobre a nave.



Figura 7.6

Uma nave, sob efeito da gravitação terrestre, vai do ponto inicial r_1 ao ponto final r_2 pela trajetória C.

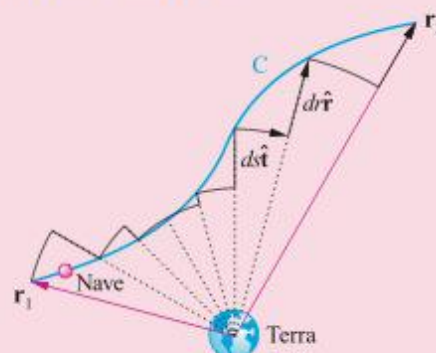


Figura 7.7

Uma nave, sob a ação gravitacional da Terra, desloca-se do ponto inicial r_1 ao ponto final r_2 ao longo da trajetória C (traçada em azul). Tal trajetória pode ser aproximada por uma sequência de deslocamentos alternadamente angulares e radiais, como mostra a linha sólida preta. Somente nos deslocamentos radiais há trabalho realizado pela força gravitacional da Terra.

■ Solução

À primeira vista, o problema parece ter formulação incompleta. Não foi informado o tipo de trajetória seguido pela nave, o que faz crer que o problema não tenha solução única. Tal impressão é incorreta. No decorrer da solução ficará claro que o trabalho independe da trajetória da nave. A Figura 7.6 mostra a nave indo do ponto r_1 para o ponto r_2 pela trajetória C. Conforme você estudará com mais detalhe no Capítulo 12 (*Gravitação*), a força da gravidade sobre ela obedece à lei

$$\mathbf{F} = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (7.18)$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição da nave em um sistema de coordenadas com origem no centro da Terra, M é a massa da Terra e G é a constante de gravitação. O sinal de menos na equação indica que a força aponta para a Terra, ou seja, tem sentido oposto ao de $\mathbf{r}$. Evidentemente, o módulo r de $\mathbf{r}$ é a distância da nave ao centro da Terra. Porém, o diferencial $d\mathbf{r}$ do deslocamento não representa quanto a nave se afasta do centro da Terra, exceto quando $\mathbf{r}$ e $d\mathbf{r}$ são paralelos. Existem dois modos especiais de deslocamento da nave: radial e angular. O deslocamento radial é paralelo e o deslocamento angular é perpendicular ao vetor posição $\mathbf{r}$. Conforme ilustra a Figura 7.7, podemos cobrir o espaço em torno da Terra por uma malha composta de deslocamentos que são puramente radiais ou angulares. Assim, cada $d\mathbf{r}$ pode ser decomposto da seguinte maneira

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + ds \hat{\mathbf{t}}, \quad (7.19)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}$ é um unitário sempre paralelo a algum raio saindo do centro da Terra e $\hat{\mathbf{t}}$ é um unitário sempre tangente a alguma superfície esférica concêntrica com a Terra. A trajetória C da partícula pode ser aproximada por uma linha seguindo a malha. Fazendo o tamanho dos passos tender para zero, no limite a linha representa exatamente a trajetória C .

Nos deslocamentos angulares, $\mathbf{r} \cdot ds \hat{\mathbf{t}} = 0$. Portanto, no cálculo do trabalho feito pela força da gravitação, podemos ignorar todos os deslocamentos angulares. Uma vez que para os deslocamentos radiais $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}} = r dr$, onde agora dr é o incremento diferencial na distância da nave ao centro da Terra, podemos escrever

$$\begin{aligned} W &= -GMm \int_C \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{r^3} = -GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned} \quad (7.20)$$

O trabalho realizado pela força gravitacional sobre um corpo que se move entre duas posições quaisquer não depende da trajetória utilizada pelo corpo

Vê-se então que o trabalho depende somente das distâncias inicial e final entre a nave e a Terra. A trajetória da nave não é relevante no problema. A Figura 7.8 mostra a nave indo do ponto $\mathbf{r}_1$ ao ponto $\mathbf{r}_2$ por outra trajetória na qual fica evidente que o trabalho realizado pela Terra só depende dos valores de r_1 e r_2 . Primeiro, a nave faz todo o deslocamento angular, atingindo o ponto P ; nesse trajeto, nenhum trabalho é realizado. Após isso, a nave faz o deslocamento radial, indo de P , à distância r_1 , até $\mathbf{r}_2$, à distância r_2 do centro da Terra. Todo o trabalho sobre a nave é realizado neste último trajeto radial.

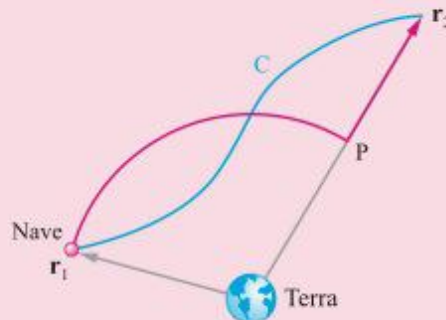


Figura 7.8

Uma nave vai do ponto $\mathbf{r}_1$, à distância r_1 , ao ponto $\mathbf{r}_2$, à distância r_2 do centro da Terra. Em um trajeto possível, traçado em verde, a nave primeiro faz todo o deslocamento angular até atingir o ponto P . Após isso, faz todo o deslocamento radial, até atingir o ponto $\mathbf{r}_2$. Todo o trabalho realizado pela Terra sobre a nave se dá nesse deslocamento radial.

Exercícios

E 7.5 (A) Qual é o trabalho feito pela gravidade da Terra sobre um satélite em órbita circular de raio R quando ele realiza meia volta? (B) E sobre um satélite em órbita elíptica quando ele realiza uma volta inteira?

E 7.6 Um objeto está submetido a uma força dada por $\mathbf{F} = k_1 x \mathbf{i} - k_2 y \mathbf{j}$. Calcule o trabalho realizado por essa força sobre o objeto quando este: (A) se move sobre o eixo dos x do ponto $(0,0)$ até $(a,0)$ e então vai de $(a,0)$ até (a,b) paralelamente ao eixo dos y ; (B) se move sobre o eixo dos y do ponto $(0,0)$ a $(0,b)$ e então vai de $(0,b)$ até (a,b) paralelamente ao eixo dos x . (Dica: como $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$, quando o movimento é paralelo ao eixo dos x $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i}$ e quando é paralelo ao eixo dos y $d\mathbf{r} = dy \mathbf{j}$.)

E 7.7 A posição mais próxima de um planeta em relação ao Sol é chamada de periélio e a mais distante é chamado de afélio. Essas posições valem respectivamente 46 e 70 milhões de quilômetros para o planeta Mercúrio, cuja massa é de $3,34 \times 10^{23}$ kg. Sabendo que a massa do Sol é $1,99 \times 10^{30}$ kg e que a constante G de gravitação vale $6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$, calcule o trabalho realizado pela força de gravitação do Sol sobre Mercúrio quando este se move de seu periélio até seu afélio. (Dica: veja Exercício-exemplo 7.6.)

Seção 7.4 ■ Energia cinética

É interessante o fato de que, sempre que algum trabalho líquido é fornecido à partícula, o módulo de sua velocidade se modifica. Pode-se demonstrar isso tomando-se a derivada temporal do quadrado do módulo da velocidade e, após isso, aplicando-se a segunda lei de Newton:

$$\frac{d v^2}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{2}{m} \mathbf{v} \cdot m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{2}{m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_R. \quad (7.21)$$

Portanto, para que v^2 fique constante, é necessário que a força resultante seja nula ou perpendicular a $\mathbf{v}$, ou seja, perpendicular à trajetória da partícula. Em qualquer dos casos, o trabalho líquido sobre a partícula será nulo. Se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_R$ não for nulo, trabalho líquido estará sendo feito sobre a partícula e o módulo da sua velocidade irá variar no tempo.

Isso sugere que alguma propriedade relacionada ao módulo da velocidade da partícula tenha capacidade de realizar trabalho, o que de fato ocorre. Se uma força realiza trabalho sobre um corpo, inicialmente em repouso, e com isso lhe imprime uma velocidade, o corpo é capaz de devolver o trabalho gasto com ele e retornar ao seu repouso original. Para demonstrar isso, suponhamos que uma força constante F_1 atue sobre um corpo durante o tempo necessário para levá-lo do repouso à velocidade v . Sabemos do Capítulo 3 (*Movimento em Uma Dimensão*) que a distância percorrida será $d_1 = v^2 / 2a_1$, onde a_1 é a aceleração. Aplicando a segunda lei de Newton, temos que $d_1 = mv^2 / 2F_1$. Ou seja, o trabalho $F_1 d_1$ realizado pela força é igual a $mv^2 / 2$. O corpo, agora em movimento, tem a capacidade de realizar um trabalho igual ao que recebeu.

Podemos quantificar essa capacidade imaginando um dispositivo que aplique uma força constante ao corpo para freá-lo. O corpo receberá uma aceleração a_2 contrária a seu movimento — aceleração negativa, se a velocidade for considerada como positiva — e irá parar a uma distância dada por $d_2 = v^2 / 2(-a_2)$. No seu trajeto, a força F_2 que o corpo exerce sobre o dispositivo terá o mesmo sentido de movimento e seu trabalho será positivo. De novo, aplicando-se a segunda lei de Newton tem-se que $F_2 = -ma_2$ e o trabalho $F_2(-a_2)$ que o corpo faz até parar será $mv^2 / 2$. Ou seja, o corpo tem a capacidade de devolver todo o trabalho realizado sobre ele. Portanto, a grandeza $mv^2 / 2$ representa a capacidade de realizar trabalho de um corpo em movimento e recebe o nome de **energia cinética**, designada pelo símbolo K :

$$\text{Energia cinética} \equiv K \equiv \frac{1}{2} m v^2. \quad (7.22)$$

A discussão anterior sobre a transformação de trabalho em energia cinética e vice-versa utilizou uma força constante. Entretanto, os mesmos resultados podem ser obtidos para qualquer tipo de força. Para mostrar isso vamos multiplicar a Equação 7.21 por $m/2$ e integrá-la no tempo:

Energia cinética é a energia que um corpo possui em decorrência do seu movimento

■ Energia cinética

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv^2}{dt} dt &= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_R \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Princípio do trabalho-energia

A variação da energia cinética de um corpo é igual ao trabalho líquido realizado sobre ele, quaisquer que sejam as forças sobre ele atuantes

O primeiro termo da Equação 7.23 representa a variação de energia cinética e, o último, o trabalho da força resultante, que é o trabalho líquido sobre o corpo. Podemos então escrever o denominado **princípio do trabalho-energia**:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{\text{liq}}, \text{ ou } K_2 - K_1 = W_{\text{liq}}. \quad (7.24)$$

No SI, a unidade de energia tem que ser a mesma que a unidade de trabalho, ou seja, o joule.

E-E Exercício-exemplo 7.7

■ Um carro, cuja massa vale 1200 kg, viaja inicialmente a 30 m/s em pista plana, quando o motorista freia fortemente. A força de atrito dos pneus com o piso vale 7200 N. Calcule o deslocamento d do carro durante a frenada.

■ Solução

O carro está sujeito a 4 forças: seu peso, a força normal (vertical) da pista, a força de atrito do vento sobre o corpo do carro e a força de atrito da pista sobre os pneus. As duas primeiras forças são ortogonais ao deslocamento do carro e, portanto, não realizam trabalho. A força de atrito do vento será ignorada. A força de atrito F_a sobre os pneus realiza um trabalho $-F_a d$ durante a frenada. Pela Equação 7.24, podemos escrever

$$-F_a d = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_o^2.$$

Como $v = 0$, obtemos

$$d = \frac{m v_o^2}{2 F_a} = \frac{1200 \times 900 \text{ N s}^2 \text{ m}^2}{2 \times 7200 \text{ ms}^2 \text{ N}} = 75 \text{ m}.$$

Note-se que d varia com o quadrado de v_o . Por exemplo, se v_o fosse 40 m/s, o carro percorreria 133 m até parar. Portanto, cuidado com as implicações desse fato não-intuitivo!

E-E Exercício-exemplo 7.8

■ Qual é a variação da energia cinética do bloco no movimento descrito no Exercício-exemplo 7.1?

■ Solução

O trabalho líquido sobre o bloco foi calculado no Exercício-exemplo 7.1 como sendo $W_{\text{liq}} = mgh - \mu_c mgd \cos \theta$. Assim, usando-se o princípio do trabalho-energia, Equação 7.24, tem-se $K - K_o = mgh - \mu_c mgd \cos \theta$. Se o bloco partiu do repouso, $K_o = 0$, a energia cinética final será

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = mgh - \mu_c mgd \cos \theta.$$

No caso particular em que a força de atrito é nula, este resultado se simplifica para a relação $mv^2/2 = mgh$, que se obtém facilmente da Equação 3.34 obtida no estudo de movimento uniformemente acelerado.

E-E Exercício-exemplo 7.9

■ Uma esfera de massa m desliza sem atrito sobre um tobogã tal como mostra a Figura 7.9. Ela parte do repouso de um ponto A (a uma altura h de uma referência arbitrária), passa pelo ponto B de altura mínima igual a zero e começa a subir. (A) Determine a velocidade da esfera quando ela passa por B. (B) Determine a altura final em que a esfera irá parar. (C) Calcule a velocidade da esfera quando sua altura for igual a $h/2$.



Figura 7.9
(Exercício-exemplo 7.9).

■ Solução

(A) As forças que atuam na esfera são a força-peso e a força normal exercida pela superfície do tobogã. Como esta é sempre normal à trajetória, só a força-peso realiza trabalho. A energia cinética inicial da esfera, no ponto A, é nula e assim, pelo princípio do trabalho-energia, a energia cinética em um ponto final P qualquer é igual ao trabalho realizado pela força-peso entre A e P:

$$K_P = \int_A^P \mathbf{mg} \cdot d\mathbf{r} = mg \int_A^P (-\hat{j}) \cdot d\mathbf{r} = mg \int_A^P (-dy) = mg(h_A - h_P) \quad (7.25)$$

Assim, para calcular a velocidade da esfera no ponto B deve-se substituir h_P por $h_B = 0$ e h_A por h :

$$K_B = \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

(B) O ponto P em que a esfera vai atingir sua altura máxima é o ponto onde ela terá velocidade nula e, assim, energia cinética também nula. Sendo assim, pela Equação 7.25, se K_P é zero $h_P = h_A = h$. Assim, o ponto P terá a mesma altura h do ponto A.

(C) Quando a altura da partícula for $h/2$, pela Equação 7.24 tem-se

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = mg \frac{h}{2} \Rightarrow v = \sqrt{gh}.$$

Observe-se que há dois pontos com altura $h/2$, um à esquerda e outro à direita do ponto de altura mínima. Em ambos o módulo da velocidade terá o mesmo valor.

Exercícios

E 7.8 Calcule a energia cinética (*A*) de um elétron movendo-se em um tubo de tevê com velocidade de $6,5 \times 10^7$ m/s; (*B*) da Terra em seu movimento orbital em torno do Sol com velocidade de 30 km/s.

E 7.9 Um corpo de massa m , sobre uma superfície sem atrito, está amarrado a uma extremidade de uma mola cuja outra extremidade está fixa. A mola é inicialmente esticada de $x = 0$ até x_1 e então é liberada. Use o princípio do trabalho-energia e determine a energia cinética do corpo quando a sua posição for $x = 0$. (Veja Exercício 7.3.)

E 7.10 A velocidade do planeta Mercúrio quando está em seu periélio é de 59 km/s. (*A*) Calcule sua energia cinética; (*B*) use o princípio do trabalho-energia e calcule a energia cinética do planeta em seu afélio; (*C*) qual é a sua velocidade quando na posição de afélio? (Ver Exercício 7.7, Exercício-exemplo 7.6 e Equação 7.20.)

Seção 7.5 ■ Potência

O termo potência sempre indica taxa temporal de alguma troca de energia. A potência realizada por uma força é dada pela definição

■ Potência realizada por uma força

$$P \equiv \frac{dW}{dt}. \quad (7.26)$$

Considerando que $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, podemos escrever

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (7.27)$$

Se considerarmos a potência realizada pela resultante $\mathbf{F}_R$ das várias forças que atuam sobre uma partícula de massa m , pela Segunda Lei de Newton podemos substituir $\mathbf{F}_R$ por $m\dot{\mathbf{v}}$ e, assim, obter

$$P = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right), \quad (7.28)$$

$$P = \frac{dK}{dt} \quad (7.29)$$

A taxa de variação temporal da energia cinética de uma partícula é igual à potência realizada pela resultante das forças que atuam sobre ela.

Esta equação diz que a potência realizada sobre uma partícula pela força resultante que atua sobre ela é igual à taxa de variação temporal da energia cinética da partícula.

A unidade de potência no SI é joule/segundo. Tal unidade recebe um nome especial, watt, cujo símbolo é W. Assim,

$$W = \frac{J}{s}. \quad (7.30)$$

Há muitas outras unidades de potência em uso, a mais importante delas o cavalo-vapor, de símbolo cv. Seu valor é dado por

$$cv = 745,7 \text{ W}. \quad (7.31)$$

Na indústria mecânica, a potência dos motores é quase sempre especificada em cavalo-vapor.

E-E Exercício-exemplo 7.10

■ Um objeto de 10 kg está em queda livre sob a ação da gravidade terrestre e a ação do atrito com o ar. Essas duas forças se cancelam e o objeto desce com uma velocidade de 20 m/s. Calcule as potências das forças atuantes sobre o corpo e a taxa de variação temporal da energia cinética do objeto. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

■ Solução

A potência realizada pela força-peso é

$$P_{mg} = \mathbf{mg} \cdot \mathbf{v} = mgv = 10 \text{ kg} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,0 \text{ kW}.$$

Como a força de atrito é igual e de sentido contrário ao peso, sua potência é igual a

$$P_{F_a} = -2,0 \text{ kW}.$$

A taxa de variação temporal de K , de acordo com a Equação 7.29, é igual à potência realizada pela força resultante. Mas esta é nula, e assim a taxa de variação da energia cinética também é nula. Isso é consistente com o fato de que o corpo tem velocidade constante.

E-E Exercício-exemplo 7.11

■ Como vimos no Capítulo 6 (*Leis Fundamentais da Mecânica*), Seção 6.10 (*Atrito hidrodinâmico e velocidade-limite*), a força de atrito do ar sobre um carro com velocidade v é dada por $F_{ar} = \frac{1}{2} CA\rho v^2$, onde $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do ar, C é o coeficiente de penetração aerodinâmica e A é a área de corte frontal do carro. Considere um carro para o qual $A = 2,6 \text{ m}^2$ e $C = 0,35$; seja ainda $P_{\text{máx}} = 100 \text{ cv}$ a potência útil máxima do carro. Qual é a velocidade máxima que o carro pode atingir no plano?

■ Solução

A potência realizada pelo atrito do ar vale

$$P_{ar} = \mathbf{F}_{ar} \cdot \mathbf{v} = -F_{ar} \cdot v = -\frac{1}{2} CA\rho v^3.$$

Tal potência, que é negativa porque o atrito se opõe ao movimento, tem de ser suprida pelo sistema de tração. A velocidade máxima que o carro pode atingir no plano é

$$v_{\text{máx}} = \left(\frac{2P_{\text{máx}}}{CA\rho} \right)^{1/3}.$$

Alimentando os dados do problema, obtemos

$$v_{\text{máx}} = \left(\frac{2 \times 0,7457 \times 100 \text{ kW}}{0,35 \times 2,6 \text{ m}^2 \times 1,3 \text{ kgm}^{-3}} \right)^{1/3} = 50,1 \text{ m/s} = 180 \text{ km/h}.$$

Exercícios

E 7.11 A energia elétrica é usualmente medida em kWh, ou seja, a energia fornecida durante uma hora a uma potência de 1 kW. Uma família tem 4 pessoas, e cada uma toma um banho diário de 15 min em um chuveiro elétrico cuja potência é 4,4 kW. Calcule o gasto mensal de energia pelo chuveiro em kWh.

E 7.12 Calcule a potência gasta em um elevador, que juntamente com sua carga tem massa de 800 kg, quando ele sobe a uma velocidade de 4,0 m/s.

E 7.13 A potência energética consumida pela humanidade é cerca de 4×10^{15} W. Com esta potência de consumo, quantos anos a humanidade gastaria para usar energia equivalente à energia cinética da Terra calculada no Exercício 7.8?

E 7.14 Um bloco de massa igual a 5 kg está submetido a uma força resultante $F(t)$ que lhe imprime uma velocidade dada por $v(t) = 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,30 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2$. Encontre $F(t)$ e a potência $P(t)$ que essa força faz sobre o bloco.

Seção 7.6 ■ Energia potencial

Força conservativa é aquela que realiza um trabalho nulo em qualquer circuito fechado da partícula na qual atua

Vimos que o trabalho feito por uma força constante ou por uma força gravitacional sobre uma partícula, quando esta se desloca entre dois pontos, não depende da trajetória particular seguida pela partícula, mas somente dos pontos inicial e final. É claro que nesses casos o trabalho feito em um circuito fechado qualquer é nulo, já que os pontos inicial e final da trajetória são coincidentes. Uma força que realiza um trabalho nulo em qualquer circuito fechado é denominada **força conservativa**. Uma força constante e a força gravitacional são exemplos de força conservativa. A força de atrito não é conservativa. De fato, o trabalho realizado por esta força depende da distância total percorrida pela partícula, a qual não é nula em um circuito fechado.

Se o trabalho realizado por uma força sobre uma partícula que se desloca entre dois dados pontos não depende da trajetória, o trabalho em um circuito fechado é nulo. A recíproca é verdadeira, ou seja, se o trabalho da força em qualquer circuito fechado é nulo, o trabalho realizado no deslocamento entre dois dados pontos 1 e 2, quaisquer que sejam, independe da trajetória. De fato, consideremos as duas trajetórias C_1 e C_2 ligando os pontos 1 e 2, como se vê na Figura 7.10. A soma dos trabalhos do ponto 1 ao ponto 2 pela trajetória C_1 e do ponto 2 ao ponto 1 pela trajetória C_2 é nula. Formalmente, isto se exprime pela equação

$$\int_{1, C_1}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{2, C_2}^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.32)$$

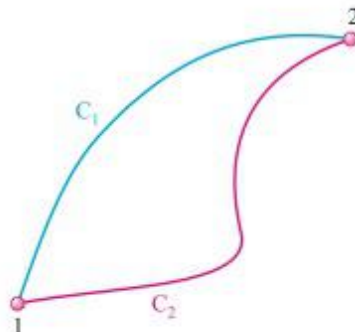


Figura 7.10

O segundo termo da equação é igual ao trabalho feito de 1 a 2 pela trajetória C_2 , pois trocar o sinal da integral é o mesmo que inverter os dois limites da integração. Portanto, o trabalho de 1 a 2 pela trajetória C_1 é igual ao trabalho de 1 a 2 pela trajetória C_2 :

$$\int_{1, C_1}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1, C_2}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.33)$$

Definição de energia potencial. A energia potencial $U(\mathbf{r})$ de uma partícula no ponto $\mathbf{r}$, sujeita a uma força conservativa $\mathbf{F}$, é o trabalho realizado por esta força quando a partícula se desloca do ponto $\mathbf{r}$ até o ponto de referência P .

Em alguns textos, a força é definida como conservativa quando o trabalho que ela realiza no deslocamento da partícula entre dois dados pontos, arbitrariamente definidos, independe da trajetória seguida pela partícula. Pelo que vimos, as duas definições são perfeitamente equivalentes.

A invariância do trabalho com relação à trajetória permite que seja definida uma função que atribui um valor escalar a cada posição $\mathbf{r}$ da partícula, conforme veremos a seguir. Consideremos uma força conservativa $\mathbf{F}$ e escolhamos um ponto arbitrário P como referência. Existe, neste caso, uma função unívoca dos pontos $\mathbf{r}$ do espaço associada a $\mathbf{F}$, denominada **energia potencial**, definida por:

A energia potencial $U(\mathbf{r})$ de uma partícula no ponto $\mathbf{r}$, sujeita a uma força conservativa $\mathbf{F}$, é o trabalho realizado por esta força quando a partícula se desloca do ponto $\mathbf{r}$ até o ponto de referência P . Ou:

$$U(\mathbf{r}) \equiv \int_{\mathbf{r}}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.34)$$

Observa-se que, se escolhermos outro ponto P' como referência, a energia potencial em todos os pontos do espaço irá ser acrescida de um valor constante. Tal valor é igual ao trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ quando a partícula se desloca de P até P' . Portanto, a energia potencial é definida a menos de uma constante. Uma vez escolhido o ponto de referência, ou seja, o ponto de energia potencial nula, a energia potencial ficará univocamente definida em todos os pontos do espaço. Essa liberdade de escolher qualquer ponto como referência na prática não influi em nada nos resultados físicos, pois em qualquer situação estaremos tratando da diferença de potencial entre dois pontos. Suponha que uma partícula se mova sob a ação de uma força conservativa $\mathbf{F}$ do ponto 1 ao ponto 2. Então a diferença de potencial entre esses dois pontos será:

$$U_2 - U_1 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_1^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_2^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W_{2,1} = -W_{1,2}. \quad (7.35)$$

A diferença entre as energias potenciais $U_2 - U_1$ não depende da referência escolhida e é igual ao trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre a partícula quando esta vai do ponto 2 para o ponto 1. Portanto, quando uma partícula viaja no sentido da força conservativa que atua sobre ela, sua energia potencial diminui.

Se uma partícula viaja no mesmo sentido da força conservativa, sua energia potencial diminui.

E-E Exercício-exemplo 7.12

■ **Energia potencial de um corpo sob gravidade uniforme.** Calcule a energia potencial, em relação ao solo, de uma partícula de massa m na proximidade da superfície da Terra.

■ Solução

“Em relação ao solo”, no enunciado do problema, é um modo abreviado de dizer “tomando um ponto no solo como referência”. Consideremos um ponto à altura h do solo. O trabalho realizado pela gravidade quando a partícula se desloca desse ponto até o solo é igual a mgh . Portanto, a energia potencial é $U(h) = mgh$.

E-E Exercício-exemplo 7.13

■ **Energia potencial de um corpo sob gravidade não-uniforme.** Calcule a energia potencial de um corpo de massa m , sujeito à ação da gravidade da Terra, em relação ao infinito.

■ Solução

Conforme foi dito no enunciado, o ponto de referência está a uma distância infinita da Terra. Portanto,

$$U(r) = W_{(r \rightarrow \infty)} = -GMm \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -GMm \frac{1}{r}. \quad (7.36)$$

■ **Energia potencial gravitacional entre dois corpos de massas M e m , cujos centros estejam afastados da distância r**

Vê-se que a energia potencial é negativa. Isto ocorre sempre que a força que gera o potencial faz um trabalho negativo no deslocamento da partícula até o ponto de referência.

E-E Exercício-exemplo 7.14

■ **Energia potencial de uma mola.** Calcule a energia potencial de uma mola em função da sua variação de comprimento.

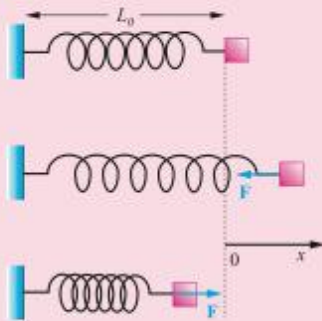


Figura 7.11

A força exercida por uma mola sempre se opõe à sua distensão ou compressão. Portanto, a força tende a restaurar a configuração de equilíbrio da mola. Forças desse tipo, muito comuns na Natureza, são denominadas forças de restauração.

■ Solução

Seja $L = L_0 + x$ o comprimento da mola, onde L_0 é seu comprimento de equilíbrio, ou seja, quando livre de força externa. A **força de restauração** da mola é dada por

$$F = -kx. \quad (7.37)$$

Quando distendida, a mola exerce uma força negativa (para a esquerda) e, quando comprimida, a sua força é positiva (para a direita), como ilustrado na Figura 7.11. A energia potencial, em relação à posição de equilíbrio, no ponto de coordenada x será

$$U(x) = \int_x^0 F(x') dx' = \int_x^0 -kx' dx' = \int_0^x kx' dx'. \quad (7.38)$$

Calculando a integral acima, obtemos

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (7.39)$$

Deve-se notar que o valor da energia potencial é positivo tanto para a mola distendida como para a mola comprimida.

Configuração de equilíbrio de um sistema é aquela na qual ele pode ficar em repouso quando livre de forças externas.

Retirado de sua configuração de equilíbrio, o sistema pode apresentar forças internas, forçando-o para o equilíbrio. Quando isto acontece, o equilíbrio é estável e as forças são denominadas **forças de restauração**.

■ **Energia potencial de uma mola**

Exercício

E 7.15 Um pêndulo simples consiste em uma pequena esfera de massa m pendurada em um ponto fixo através de um cordão de tamanho l . Calcule a energia potencial gravitacional da esfera quando ela estiver em uma posição tal que o cordão faça um ângulo θ com a vertical. Use como referência de energia potencial a posição em que $\theta = 0$

Até aqui, temos considerado um corpo sob o efeito de uma força conservativa $\mathbf{F}$ e falado da energia potencial do corpo. Entretanto, deve-se lembrar que tal força é exercida por outro corpo, ou outros corpos, com o qual o primeiro está interagindo. O que ocorre quando o mencionado corpo se desloca é uma mudança da configuração dos corpos interagentes, e a variação da energia potencial decorre dessa mudança de configuração. Nesse caso, não faz sentido associar a energia potencial à posição do corpo, nem falar em energia potencial do corpo. A energia potencial é uma grandeza associada ao sistema de partículas interagentes e não podemos associá-la a somente um dos corpos do sistema. Por exemplo, a energia potencial de uma pedra sob o efeito gravitacional da Terra está associada ao sistema pedra – Terra. Apesar disso, é freqüente nos referirmos à energia potencial da pedra sempre que tal forma abreviada de expressar não envolva risco de confusão. Note-se que a energia potencial de uma mola distendida ou comprimida está associada às alterações nas posições relativas dos átomos que compõem a mola.

Energia potencial é sempre uma grandeza associada a um sistema de corpos interagentes e pertence ao sistema como um todo

A energia potencial significa potencial para realizar um certo trabalho, conforme explicitaremos. Retomemos o exemplo do corpo elevado à altura h em relação ao solo. Você, ou um outro corpo qualquer, pode fazer o corpo retornar ao solo sem alteração na velocidade, se aplicar sobre ele uma força $\mathbf{F}'$ igual a $-\mathbf{F}$, onde $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ é o peso do corpo. Pode lhe parecer que o corpo não irá descer se as forças tiverem exatamente o mesmo módulo F . Imagine, nesse caso, que no momento inicial F' seja menor do que F por um valor infinitesimal suficiente para imprimir ao corpo uma velocidade muito pequena. Logo após isso, F' poderá ser igual a F e o corpo continuará descendo com velocidade constante. Durante a descida, você irá efetuar um trabalho igual a $-mgh$ sobre o corpo. Pela terceira lei de Newton, o corpo irá realizar um trabalho mgh sobre você. No final da descida, para que o corpo pare é necessário apenas que F' fique maior que F por um valor infinitesimal. Generalizando o argumento, se um corpo sujeito a uma força conservativa tiver uma energia potencial $U(\mathbf{r})$ em relação ao ponto de referência P , é possível fazê-lo retornar de $\mathbf{r}$ ao ponto P num processo no qual ele realiza um trabalho $U(\mathbf{r})$. Portanto, energia potencial é uma espécie de trabalho disponível. Você eleva um corpo até a altura h e nesse processo realiza um trabalho mgh . Tal trabalho fica “armazenado” enquanto o corpo não descer. Você fica com esse trabalho “em haver” e pode obtê-lo de volta quando lhe aprouver.

Seção 7.7 ■ Conversação da energia mecânica

Quando um corpo está em queda livre, sua energia potencial vai diminuindo enquanto aumenta sua energia cinética. Se ele inicia a queda no instante $t = 0$, partindo da altura inicial h , sua velocidade v e altura x no instante genérico t serão, respectivamente, $v = -gt$ e $x = h - gt^2/2$. Destas relações, obtemos

$$x = h - \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}, \quad (7.40)$$

$$mgh = mgx(t) + \frac{1}{2} m[v(t)]^2. \quad (7.41)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma

$$mgh = U(t) + K(t), \quad (7.42)$$

ou seja, a soma das energias potencial e cinética permanece constante e igual a mgh durante a queda. A evolução temporal de $U(t)$ e $K(t)$ pode ser vista na Figura 7.12.

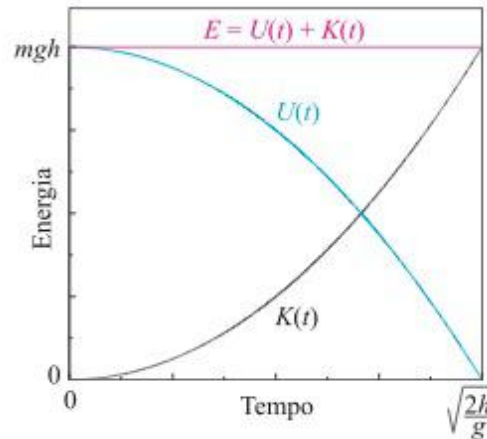


Figura 7.12

Varição no tempo das energias potencial $U(t)$ e cinética $K(t)$ de um corpo de massa m caindo de uma altura h , partindo do repouso. Inicialmente, toda a energia do corpo está na forma potencial; essa energia vai sendo convertida continuamente em energia cinética. No fim da queda, toda a energia está na forma cinética. A grandeza $U(t) + K(t)$ permanece constante durante a queda.

E-E Exercício-exemplo 7.15

■ A Usina de Itaipu gera energia elétrica a uma potência de 12,6 GW, utilizando a queda da água do rio Paraná represada em uma barragem. Tal potência será ampliada para 14,0 GW com a instalação de novas turbinas. A água desce uma altura de 155 m antes de passar pelas turbinas. Calcule a vazão mínima de água necessária para gerar essa potência final.

■ Solução

Para calcular a vazão mínima de água, ignoraremos o atrito da água e sua velocidade após passar pelas turbinas. Faremos ainda a idealização de que o gerador de energia elétrica tenha eficiência de 100%. Assim, toda a perda de energia potencial da água ao descer é transformada em energia elétrica. Podemos então escrever

$$P = \frac{dm}{dt} gh, \quad \frac{dm}{dt} = \frac{P}{gh}.$$

Substituindo os números na equação,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{14 \times 10^9 \text{ kg}}{9,8 \times 155 \text{ s}} = 9,2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Expressa em volume por unidade de tempo, a vazão é

$$\Phi = 9,2 \times 10^3 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Nota: a vazão média do rio Paraná tem sido de $10,7 \times 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$, o que mostra que a usina é altamente eficiente.

As considerações feitas no parágrafo anterior podem ser estendidas para um contexto muito geral. Consideremos uma partícula de massa m se movendo do ponto 1 ao ponto 2 sob a ação da força resultante $\mathbf{F}_R$. O princípio trabalho-energia, representado pela Equação 7.24, estabelece que a diferença $K_2 - K_1$ entre as energias cinéticas dos dois pontos é igual ao trabalho $W_{1,2}$ da força resultante sobre a partícula quando ela vai de 1 para 2. Se a força resultante for composta de uma parte conservativa e outra não-conservativa, o trabalho pode ser decomposto nas duas partes correspondentes a cada uma das duas forças. Assim teremos:

$$K_2 - K_1 = W_{c,1,2} + W_{nc,1,2}. \quad (7.43)$$

Mas sabemos da Equação 7.35 que o trabalho da força conservativa $W_{c,1,2}$ é igual à diferença de potencial $U_1 - U_2$. Substituindo esse resultado na Equação 7.43 temos

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_{nc,1,2}. \quad (7.44)$$

Reorganizando os termos da Equação 7.44, temos

$$U_2 + K_2 = U_1 + K_1 + W_{nc,1,2}. \quad (7.45)$$

Concluímos que a soma da energia cinética e potencial no final (ponto 2) é igual à soma da energia cinética e potencial no início (ponto 1) mais o trabalho realizado pelas forças não-conservativas. Se o sistema estiver sujeito apenas a forças conservativas, teremos

$$U_2 + K_2 = U_1 + K_1. \quad (7.46)$$

■ Lei da conservação da energia mecânica

Lei de conservação da energia mecânica
Quando uma partícula se movimenta sob o efeito de uma força conservativa, a soma das suas energias cinética e potencial permanece constante

Esta equação mostra que a soma das energias potencial e cinética é a mesma antes e depois do deslocamento. Portanto, a soma da energia potencial com a energia cinética se mantém constante, ou seja, se conserva, se a força que atua sobre o corpo for conservativa. Essa invariância é denominada **lei de conservação da energia mecânica**.

Definindo-se a energia mecânica pela expressão

$$E \equiv U + K \equiv U + \frac{1}{2}mv^2, \quad (7.47)$$

a lei da conservação da energia mecânica pode ser posta na forma

$$E_1 = E_2. \quad (7.48)$$

Quando o corpo se desloca do ponto 1 ao ponto 2, suas energias potencial e cinética sofrem as variações

$$\Delta U = U_2 - U_1, \quad \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (7.49)$$

A Equação 7.47 pode então ser reescrita na forma

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = 0 \quad (7.50)$$

■ Lei da conservação da energia mecânica

Esta é outra forma de expressar a lei da conservação da energia mecânica.

Um exemplo de força não-conservativa é a força de atrito cinético. O caráter não-conservativo dessa força pode ser entendido sem dificuldade, como veremos. O trabalho realizado pela força de atrito $\mathbf{F}_a$ quando o corpo tem um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$ é

$$dW_a = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.51)$$

Uma vez que a força de atrito sempre se opõe ao deslocamento do corpo, $\mathbf{F}_a$ e $d\mathbf{r}$ são antiparalelos, o que implica $\mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r} = -F_a dr$, onde dr é o módulo de $d\mathbf{r}$, ou seja, o comprimento do deslocamento do corpo. Portanto,

$$dW_a = -F_a dr. \quad (7.52)$$

Assim, em qualquer deslocamento infinitesimal do corpo o trabalho da força de atrito sobre ele é negativo. O trabalho realizado em um circuito fechado é, portanto, a soma de valores negativos e conseqüentemente tem de ser um valor negativo, e não um valor nulo, como ocorreria se a força fosse conservativa. No contexto da mecânica, o atrito é a única força não-conservativa. Por isso, quando um sistema mecânico é livre de forças de atrito sua energia mecânica sempre será conservada. Pelo fato de o trabalho da força de atrito ser sempre negativo, ela contribui para diminuir a energia mecânica do corpo sobre o qual atua. Por essa razão, diz-se que a força de atrito é dissipativa.

E-E Exercício-exemplo 7.16

■ Um corpo move-se, em uma dimensão, sujeito a uma força conservativa F e a uma força de atrito F_a . Calcule a taxa de variação da energia mecânica do corpo quando ele tem uma velocidade v .

■ Solução

A derivada temporal da energia mecânica do corpo é

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt}.$$

Podemos agora escrever

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Levando em conta que $\frac{dU}{dx} = -F$, obtemos

$$\frac{dE}{dt} = m v \frac{dv}{dt} - F v = m a v - F v,$$

$$\frac{dE}{dt} = (F + F_a) v - F v = F_a v.$$

Uma vez que a força de atrito é antiparalela à velocidade do corpo, podemos escrever

$$\frac{dE}{dt} = -|F_a| v.$$

Este resultado tem interpretação muito simples: a potência dissipada pela força de atrito é $|F_a| v$, e esse valor corresponde à taxa de perda de energia mecânica pelo corpo.

Seção 7.8 ■ Aplicações da lei de conservação da energia mecânica

Existem na Natureza várias leis de conservação semelhantes à lei de conservação da energia. Tais leis são muito úteis na análise de processos físicos já que, não importa o que ocorra no meio do processo, a grandeza conservada será a mesma antes e depois do mesmo. Em alguns casos, isto é o suficiente para a solução do problema de nosso interesse. Daremos a seguir alguns exemplos de aplicação da lei de conservação da energia mecânica na solução de problemas.

E-E Exercício-exemplo 7.17

■ Um bloco de massa igual a 2,0 kg, movendo-se inicialmente à velocidade $v_0 = 4,0$ m/s, é freado por uma mola cuja constante elástica vale 800 N/m. Calcule (A) a compressão máxima x_m da mola; (B) a velocidade do bloco quando a compressão da mola é $x_m/2$ (ver Figura 7.13).

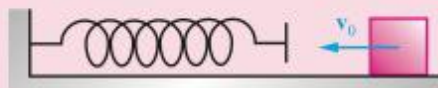


Figura 7.13

(Exercício-exemplo 7.17).

■ Solução

No início, toda a energia do sistema bloco–mola está na forma cinética. Tal energia vale

$$E = K_o = \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{2 \times 16 \text{ N s}^2}{2} \times \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 16 \text{ J}.$$

(A) Quando a compressão é máxima, a energia cinética do sistema é nula e toda a sua energia é potencial. Nesse instante tem-se

$$\frac{1}{2} k x_m^2 = E = \frac{1}{2} m v_o^2. \quad (7.53)$$

$$\Rightarrow x_m = \sqrt{\frac{m}{k}} v_o = \sqrt{\frac{2 \text{ N s}^2 \text{ m}}{800 \text{ N}}} \times 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,20 \text{ m}.$$

(B) Quando $x = x_m/2$ a energia é parcialmente cinética e parcialmente potencial. Uma parte da energia cinética se deve ao movimento da mola. Entretanto, o enunciado não contém informação sobre a massa da mola e, portanto, não sabemos lidar com essa parcela da energia. Vamos supor que a mola tenha massa desprezível e ignorar a sua energia cinética. Nesse caso,

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k \frac{x_m^2}{4} = \frac{1}{2} m v_o^2.$$

Considerando a Equação 7.53, obtemos

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{1}{8} m v_o^2 = \frac{3}{8} m v_o^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{4}} v_o = 3,5 \text{ m/s}.$$

E-E Exercício-exemplo 7.18

■ Um trenzinho de montanha-russa passa no ponto de máxima altura h com a velocidade v_o . Qual é a sua velocidade quando descer para a altura $h/2$? (Ignore a dimensão finita do trenzinho.)

■ Solução

Sobre o trenzinho atuam a força da gravidade e a força do trilho. Esta tem uma componente normal $\mathbf{N}$ e uma componente tangencial, que é a força de atrito cinético. Esta última não é conservativa, e para aplicar a lei de conservação da energia mecânica teremos que desprezá-la. A força normal é sempre perpendicular à trajetória do trenzinho, e neste caso não faz trabalho sobre ele. Portanto, a energia do sistema não é afetada pela força $\mathbf{N}$. Tem-se então

$$\frac{1}{2} m v_o^2 + mgh = \frac{1}{2} m v^2 + mg \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_o^2 + gh}.$$

E-E Exercício-exemplo 7.19

■ O bloco da Figura 7.14 cai a partir do repouso sobre a plataforma. Calcule a compressão máxima $x_{\text{máx}}$ atingida pela mola.

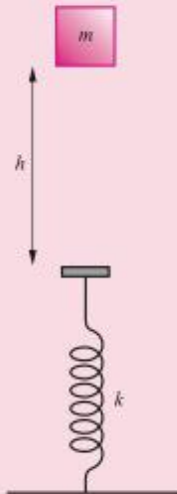


Figura 7.14

(Exercício-exemplo 7.19).

■ Solução

Tomando-se o nível inicial da base do bloco como ponto de referência para a energia potencial gravitacional, a energia mecânica do sistema é nula. Então, no ponto de compressão máxima da mola o bloco tem energia mecânica nula. Pela conservação da energia mecânica podemos escrever

$$-mg(h + x_{\text{máx}}) + \frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{máx}}^2 - \frac{2mg}{k}x_{\text{máx}} - \frac{2mgh}{k} = 0.$$

$$\text{Portanto, } x_{\text{máx}} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mgh}{k}}.$$

$$\text{Como } x_{\text{máx}} \text{ é positivo, podemos escrever } x_{\text{máx}} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mgh}{k}}.$$

Exercícios

E 7.16 Os dois blocos da Figura 7.15 iniciam seu movimento, da configuração mostrada, com velocidades nulas. Com que velocidade o bloco grande atinge o piso?

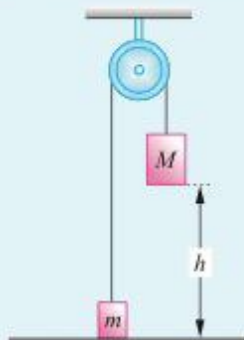


Figura 7.15

(Exercício 7.16).

E 7.17 Uma criança de 50 kg escorrega em um tobogã, partindo do repouso, de seu ponto mais alto, que está a 30 m de altura. Quando passa pela altura de 10 m, sua velocidade é de 14 m/s. Qual foi o trabalho realizado pela força de atrito?

Seção 7.9 ■ Lei da conservação da energia

A lei da conservação da energia mecânica tem validade restrita: vale quando apenas forças conservativas realizam trabalho sobre o corpo — ou corpos — em movimento. Como vimos, a força de atrito é não-conservativa, e quando ela realiza um trabalho W_{Fa} sobre um sistema a energia mecânica deste diminui exatamente do valor W_{Fa} , como mostra a Equação 7.45. O trabalho da força de atrito gera calor (experimente esfregar as mãos!), que, conforme veremos ao estudar a termodinâmica, é uma forma de energia, a energia térmica. Portanto, quando o atrito cinético realiza trabalho W_{Fa} sobre o sistema, a energia mecânica deste diminui do valor $|W_{Fa}|$, mas sua energia térmica aumenta do valor $|W_{Fa}|$. Logo, a soma das energias mecânica e térmica do sistema se conserva no processo. Esse importante fato foi descoberto em meados do século XIX. Desde então, descobriu-se que energia é uma grandeza que pode se manifestar de formas muito diversas: energia cinética e energia potencial — que juntas compõem a energia mecânica —, energia térmica, energia química, energia eletromagnética etc. Processos diversos podem destruir energia de uma forma e recriá-la de outra, ou seja, transformar energia de uma forma em outra. Por exemplo, uma reação química pode gerar aquecimento do sistema convertendo energia química em energia térmica. Isso é exatamente o que ocorre quando queimamos algo. Um corpo quente pode perder energia térmica emitindo radiação eletromagnética, que contém energia. Também pode ocorrer o processo inverso: um corpo pode aquecer-se absorvendo radiação eletromagnética. No processo de fotossíntese, as plantas absorvem luz do Sol e convertem sua energia em energia química. Com o advento da teoria da relatividade, Einstein descobriu uma nova forma de transformação de energia: a massa de repouso m_o de um corpo é equivalente a uma energia dada por

$$E_{m_o} = m_o c^2, \quad (7.54)$$

onde c é a velocidade da luz. Desta forma define-se a energia relativística de uma partícula como sendo a sua energia cinética mais a energia devida à sua massa de repouso. Assim, quando uma partícula se transforma em outras, ou se duas ou mais partículas se fundem em uma só, pode aparecer energia cinética ou radiação eletromagnética proveniente da diminuição das massas das partículas. E haja espaço para mencionarmos mais exemplos de conversão de energia! A investigação empírica de todas as formas de conversão de energia já reconhecidas levou a um dos princípios mais fundamentais da Natureza, a **lei da conservação da energia**. Tal lei diz que toda perda de alguma forma de energia é compensada pelo aparecimento do mesmo valor de energia, em outra forma. Assim, a energia pode aparecer em diversas formas, mas sua quantidade nunca se altera em um **sistema isolado**. A energia total do Universo se conserva, o mesmo ocorrendo em qualquer sistema isolado.

Várias formas de energia de um corpo macroscópico, tais como a energia térmica ou química, são de fato provenientes de energia mecânica (cinética e potencial) de suas partículas constituintes. Entretanto, ao tratarmos um corpo macroscópico, às vezes é conveniente denominarmos energia interna E_i todas as suas formas de energia associadas aos movimentos relativos e à interação dos seus átomos. Então, denominando E_r a energia de radiação eletromagnética, podemos generalizar a Equação 7.50 da seguinte maneira:

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_i + \Delta E_r = 0, \quad (7.55)$$

Lei da conservação da energia

A quantidade total de energia em um sistema isolado nunca se altera

Sistema isolado é aquele livre de qualquer interação dinâmica com seu ambiente; não realiza trabalho sobre qualquer sistema, não troca calor com seu exterior, não emite nem absorve radiação eletromagnética ou outras formas de radiação

E-E Exercício-exemplo 7.20

■ Um lançador de granadas (M79) lança uma granada de massa igual a 230g, que sai do cano com uma velocidade de 75 m/s. Determine a energia interna liberada nas reações químicas do explosivo supondo que 90% dela foram aproveitados pela granada.

■ Solução

Energia cinética da granada ao sair do cano

$$\equiv K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} 0,23\text{kg} \cdot \left(75 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 647 \text{ J}.$$

Chamando-se de E_i a energia interna liberada, então

$$0,9E_i = T \Rightarrow E_i = 719 \text{ J}.$$

E-E Exercício-exemplo 7.21

■ O átomo de hidrogênio consiste em um próton e um elétron ligados devido à força elétrica entre eles. Para ionizar o átomo de hidrogênio, transformando-o em um próton e um elétron separados, é necessário que lhe forneçamos uma quantidade de energia igual a 13,6 eV. Qual é a diferença entre a massa do átomo de hidrogênio e a soma das massas do próton e do elétron?

■ Solução

$$E_{\text{H}} + 13,6\text{eV} = E_p + E_e \Rightarrow m_{\text{H}}c^2 + 13,6\text{eV} = m_p c^2 + m_e c^2 \Rightarrow$$

$$\Delta m \equiv (m_p + m_e) - m_{\text{H}} = \frac{13,6\text{eV}}{c^2}.$$

Usando-se $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ e $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$, obtém-se:

$$\Delta m = 2,42 \times 10^{-35} \text{ kg}.$$

Exercícios

E 7.18 Um menino atira 100 g de gelatina em um carrinho, de 400 g, que está parado sobre uma superfície plana. A gelatina atinge o carrinho a 5,0 m/s e gruda nele. O conjunto sai com uma velocidade de 1,0 m/s. Qual foi a variação de energia mecânica do sistema? Qual foi o seu destino?

E 7.19 O dêuteron, que é o núcleo do átomo de deutério, consiste em um próton e um nêutron ligados devido a uma força nuclear. Incidindo-se sobre ele um fóton de raio γ com energia 3 MeV, o dêuteron se quebra em seus dois componentes e cada qual sai com uma energia cinética de 0,4 MeV. (A) Qual é a diferença entre a massa do dêuteron e a soma das massas do próton e do nêutron? (B) Expresse essa diferença em termos da massa do elétron.

Seção 7.10 ■ Cálculo da força a partir do potencial

Já sabemos como calcular a energia potencial a partir do conhecimento da força que atua sobre uma partícula. Será agora abordado o problema inverso de calcular a força a partir do conhecimento do potencial U . Consideremos inicialmente uma partícula que se move em uma única direção x . Sua energia potencial, definida na Equação 7.34, é uma função da posição:

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx', \quad (7.56)$$

onde x_0 é o ponto de referência utilizado para o cálculo de U . Derivando a Equação 7.56 em relação a x , obtemos

$$F(x) = - \frac{dU}{dx}. \quad (7.57)$$

Vê-se que a força é a derivada do potencial em relação à posição, com sinal trocado. O ponto de referência não afeta o valor da força calculada. Isto é uma consequência natural do fato de que a escolha de outro ponto de referência irá simplesmente adicionar uma constante à função $U(x)$ e, portanto, não afetará suas derivadas.

No caso geral de movimento em três dimensões, de acordo com a Equação 7.34 o potencial é dado por

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (7.58)$$

O diferencial da função $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ é, neste caso,

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz. \quad (7.59)$$

Portanto,

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (7.60)$$

E-E Exercício-exemplo 7.22

■ Um átomo dentro de um cristal está sujeito a um potencial da forma

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (ax^2 + by^2 + cz^2),$$

onde a , b e c são constantes características do cristal e x , y , z são as componentes do deslocamento do átomo em relação à sua posição de equilíbrio. Calcule a força atuante sobre o átomo.

■ Solução

Aplicando a Equação 7.60 obtemos

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = -ax, \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y} = -by, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z} = -cz.$$

Portanto,

$$\mathbf{F} = -ax \mathbf{i} - by \mathbf{j} - cz \mathbf{k}. \quad (7.61)$$

Vê-se que as forças atuantes sobre o átomo equivalem ao efeito de molas com constantes elásticas iguais a a , b , e c , respectivamente nas direções x , y e z . A Figura 7.16 representa o átomo sobre o efeito das molas, em duas dimensões. Como na figura aparecem duas molas para cada direção, as molas têm constantes elásticas iguais a metade dos valores indicados na Equação 7.61. A Figura 7.16 representa um modelo das forças internas de um cristal. Modelos como este são muito úteis e freqüentemente utilizados em física.

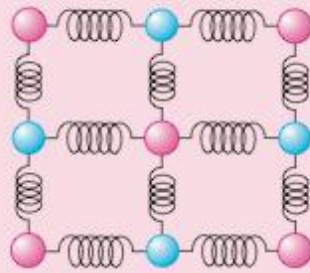


Figura 7.16

Modelo esquemático das ligações entre os átomos em um cristal. As ligações entre átomos vizinhos são representadas por molas. Este modelo, apesar de enormemente simplificado, é capaz de explicar muitas das propriedades elásticas dos cristais.

Exercício

E 7.20 A energia potencial de uma partícula é dada por $U = \frac{1}{2}kx^2 + mgy$. Determine a força que atua sobre ela.

Seção 7.11 ■ Forças conservativas em uma dimensão

Consideremos uma partícula realizando movimento em uma única dimensão, digamos a do eixo dos x , sujeita à força F . Pode-se demonstrar que, se a força for função da posição, $F = F(x)$, ela será conservativa. Com efeito, consideremos um trajeto em circuito fechado da partícula em que ela sai do ponto x_o , vai até o ponto x_f e retorna então a x_o . O trabalho realizado sobre a partícula será

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_o}^{x_f} F(x)dx + \int_{x_f}^{x_o} F(x)dx \\ &= \int_{x_o}^{x_f} F(x)dx - \int_{x_o}^{x_f} F(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Portanto, pela definição dada anteriormente, a força é conservativa. Na verdade, ao analisar a energia potencial de uma mola, já havíamos admitido sem prova que a força de uma mola tencionada é conservativa.

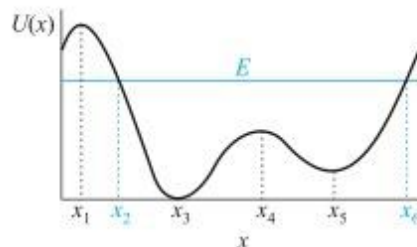


Figura 7.17

Movimento unidimensional de uma partícula sujeita a uma força conservativa descrita pela energia potencial $U(x)$. Sendo E a energia mecânica da partícula, seu movimento ficará restrito ao intervalo $x_2 \leq x \leq x_6$. Os pontos x_2 e x_6 são denominados pontos de retorno da partícula. Para o caso em que a energia mecânica da partícula seja arbitrária, ela poderá ficar em equilíbrio nos pontos x_1 , x_3 , x_4 e x_5 . Entretanto, nos pontos x_1 e x_4 o equilíbrio será instável.

O movimento unidimensional de uma partícula sob força conservativa apresenta alguns aspectos de caráter geral que merecem ser analisados. A Figura 7.17 mostra a variação do potencial $U(x)$ de uma partícula em um dado intervalo de coordenadas. Nota-se de imediato, que nos pontos x_1 , x_3 , x_4 e x_5 , a derivada da função $U(x)$ é nula e, portanto, nesses pontos é nula a força sobre a partícula. Tais pontos são por isso denominados *posições de equilíbrio*, ou *pontos de equilíbrio* da partícula. Em uma posição de equilíbrio, a partícula pode permanecer em repouso. Entretanto, nota-se uma importante distinção entre os pontos x_1 e x_4 e os pontos

Ponto de equilíbrio instável é aquele do qual a partícula se afasta quando levemente perturbada

Ponto de equilíbrio estável é aquele ao qual a partícula retorna quando levemente perturbada

Pontos de retorno são pontos onde uma partícula com movimento limitado reverte sua velocidade

x_3 e x_5 . Nos dois primeiros pontos, se a partícula sofrer um pequeno deslocamento, por menor que seja, irá se afastar dali com aceleração crescente. Essas posições são então denominadas pontos de **equilíbrio instável**.

Contrastando com isso, se a partícula sofrer um pequeno deslocamento de um dos pontos x_3 ou x_5 , ficará sujeita a uma força de restauração para o ponto de equilíbrio. Tal força aumenta com o valor do deslocamento da partícula em relação ao ponto de equilíbrio. Essas posições são então denominadas **pontos de equilíbrio estável**.

Quando próxima de um ponto de equilíbrio estável, a partícula apresenta um comportamento oscilatório.

Suponhamos que a partícula sujeita ao potencial da Figura 7.17 tenha energia mecânica E . Assim, sua energia cinética irá variar com a posição na forma $K(x) = E - U(x)$. Nesse caso, se no instante inicial a partícula estava no intervalo $x_2 \leq x \leq x_6$, seu movimento ficará restrito a esse domínio. Com efeito, imaginemos a partícula indo para a direita. No ponto x_6 , sua energia cinética e sua velocidade serão nulas, e se a partícula ultrapassasse esse ponto sua energia cinética seria negativa, e portanto sua velocidade seria a raiz quadrada de um número negativo. Analisando-se de outra forma, no ponto x_6 a partícula tem velocidade nula, e uma vez que dU/dx é positivo nesse ponto, a partícula fica sujeita a uma força negativa (apontando para a esquerda). Nesse caso, a partícula inverte o sentido de sua velocidade. Argumento análogo se aplica quando a partícula, vindo para a esquerda, atinge o ponto x_2 . Os pontos x_2 e x_6 são denominados **pontos de retorno** da partícula.

E-E Exercício-exemplo 7.23

■ Uma partícula está sujeita a uma força $F(x)$ que lhe confere um potencial $U(x) = ax^4 - bx^3 + cx^2$, onde $a = 24 \frac{\text{J}}{\text{m}^4}$, $b = 32 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$ e $c = 9 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$. (A) Determine a força $F(x)$. (B) Encontre os pontos de equilíbrio e analise para cada um se o equilíbrio é estável ou instável. (C) Supondo que a partícula tenha uma energia mecânica total igual a $-0,5 \text{ J}$, analise a região em que ela pode ser encontrada.

■ Solução

(A) A força é dada por

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{dU}{dx} = -(4ax^3 - 3bx^2 + 2cx) = -x(4ax^2 - 3bx + 2c) \\ &= -x(4ax^2 - 3bx + 2c) = -x\left(96 \frac{\text{J}}{\text{m}^4} x^2 - 96 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} x + 18 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}\right). \end{aligned} \quad (7.63)$$

(B) Os pontos de equilíbrio são aqueles onde $F(x) = 0$. Assim, fazendo-se o resultado acima igual a zero obtêm-se três valores de x :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{4} \text{ m} \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{3}{4} \text{ m}. \quad (7.64)$$

Para analisarmos a natureza de cada ponto de equilíbrio é necessário termos os valores da derivada segunda $U''(x)$ em cada um dos pontos de equilíbrio. Como $U''(x) = -F'(x)$, podemos usar o resultado da Equação 7.63 e obter:

$$U''(x) = 3 \times 96 \frac{\text{J}}{\text{m}^4} x^2 - 2 \times 96 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} x + 18 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}. \quad (7.65)$$

Usando os valores de x da Equação 7.64 na Equação 7.65 teremos:

$$U''(0) = 18 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}, \quad U''\left(\frac{1}{4} \text{ m}\right) = -12 \frac{\text{J}}{\text{m}^2} \quad \text{e} \quad U''\left(\frac{3}{4} \text{ m}\right) = 36 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}.$$

Assim, os pontos de equilíbrio $x_1 = 0$ e $x_3 = \frac{3}{4} \text{ m}$ são pontos de mínimo para $U(x)$ e a partícula tem equilíbrio estável nesses pontos. Já em $x_2 = \frac{1}{4} \text{ m}$, a energia potencial tem um máximo e a partícula estará em equilíbrio instável neste ponto.

(C) Para se saber em que região ou regiões a partícula pode ser encontrada, é importante que se calculem os valores de energia potencial que ela teria nos vários pontos de equilíbrio. Assim, calculando a função $U(x)$ nos três pontos

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{4} \text{ m} \text{ e } x_3 = \frac{3}{4} \text{ m} \text{ temos:}$$

$U(0) = 0$, $U(\frac{1}{4} \text{ m}) \cong 0,156 \text{ J}$ e $U(\frac{3}{4} \text{ m}) \cong -0,844 \text{ J}$. Assim, a energia total de $-0,5 \text{ J}$ é menor que a energia potencial que a partícula teria no ponto de mínimo $x_1 = 0$, mas é maior que a energia potencial em $x_3 = \frac{3}{4} \text{ m}$. Então ela só pode ficar nas proximidades de x_3 . Quando estiver em x_3 , terá energia cinética igual $-0,5 \text{ J} - (-0,844 \text{ J}) = 0,344 \text{ J}$. Quando se move para valores acima e abaixo de x_3 , atingirá dois pontos, um de cada lado, onde o valor de $U(x)$ será igual a $-0,5 \text{ J}$. Assim, sua energia cinética se anula. Esses serão os pontos de retorno para esse valor de energia da partícula.

Exercícios

E 7.21 O movimento de uma partícula é descrito pela seguinte energia potencial $U(x) = -x^3/3 + 7x^2/2 - 10x$, onde V deve ser medido em joules e x em metros. (A) Encontre os pontos onde a força sobre a partícula é nula. (B) Faça um gráfico de $V(x)$ e identifique os pontos de equilíbrio estável e instável.

E 7.22 Dois átomos de gases nobres interagem eletricamente através do modelo proposto por Lennard-Jones. Essa interação, para uma dimensão, pode ser expressa pela relação para a energia potencial

entre os átomos: $U = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$, onde σ e ϵ são parâmetros que dependem dos tipos de átomos

e x é a distância entre eles. (A) Encontre a força entre dois átomos. (B) Mostre que para $x = \sqrt[6]{2}\sigma$ a força é nula.

Seção 7.12 ■ Energia e massa relativísticas

Na Equação 7.54, diz-se que uma partícula em repouso, e com a massa de repouso m_0 , tem uma energia $m_0 c^2$. Se de alguma maneira tal partícula for aniquilada, essa é a energia gerada no processo de aniquilação. Exemplos de aniquilação de partículas são comuns na Natureza. Por exemplo, se um elétron encontra sua antipartícula, o pósitron, em tudo idêntico ao elétron exceto no sinal da sua carga elétrica, que é positivo para o pósitron, as duas partículas mutuamente se aniquilam e em seu lugar aparecem dois fótons cuja soma de energias é igual a $2m_0 c^2$. Isso é o que ocorre se o elétron e o pósitron estiverem em repouso. A pergunta que surge naturalmente é: e se as duas partículas estiverem em movimento, tendo assim energia cinética além da energia contida nas suas massas de repouso? A resposta é que toda a energia provém das massas das duas partículas, mas que tais massas ficam aumentadas em decorrência do movimento. Quando uma partícula, cuja massa de repouso é m_0 , move-se com velocidade v , sua massa adquire o valor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.66)$$

A energia relativística total dessa partícula é

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.67)$$

O acréscimo de energia devido ao movimento é a energia cinética da partícula. Assim, a expressão relativística para a energia cinética é

$$K = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2, \quad (7.68)$$

onde escrevemos apenas E_0 para designar E_{m0} .

E-E Exercício-exemplo 7.24

- Calcule a energia cinética de uma partícula cuja energia seja muito menor do que a velocidade da luz.

■ Solução

Consideremos a fórmula da energia cinética dada pela Equação 7.68. Se $v/c \ll 1$, podemos fazer a aproximação, resultante de uma expansão em série:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Com tal aproximação, a expressão para a energia cinética torna-se:

$$K \cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Vemos, portanto, que a expressão relativística para a energia cinética recai na fórmula newtoniana quando a velocidade da partícula é muito menor do que a velocidade da luz.

E-E Exercício-exemplo 7.25

- No acelerador de partículas do Fermilab, em Chicago, prótons podem ser acelerados até que sua energia fique 500 vezes maior do que a energia de repouso. Qual é a velocidade do próton com tal energia?

■ Solução

Pela relação massa-energia, a massa do próton fica 500 vezes maior do que sua massa de repouso, o que implica:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 500.$$

Portanto,

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{(500)^2} = 4 \times 10^{-6}.$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - 4 \times 10^{-6}}.$$

Como, para $x \ll 1$,

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2,$$

$$\frac{v}{c} \approx 1 - 2 \times 10^{-6} = 1 - 0,000002 = 0,999998.$$

Finalmente,

$$v = 0,999998c$$

Exercícios

E 7.23 Um elétron e um pósitron, ambos com 99% da velocidade da luz, colidem e se aniquilam. Qual é a energia gerada na aniquilação?

E 7.24 Partículas subatômicas de altíssima energia, chamadas raios cósmicos, chegam continuamente à Terra provenientes do espaço. A partícula de maior energia já observada (em maio de 2005) é supostamente um próton, e sua energia é de 5×10^4 J. Calcule a velocidade de um próton com tal energia em termos da velocidade da luz.

PROBLEMAS

P 7.1 Um bloco de massa m é empurrado, com velocidade constante, por uma força F para cima sobre um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o plano e o bloco é μ . Após ter realizado um deslocamento igual a d , qual foi o trabalho realizado (A) pela força peso; (B) pela normal do plano sobre o bloco; (C) pela força de atrito; (D) pela força F ?

P 7.2 A força que um campo magnético $\mathbf{B}$ exerce sobre uma partícula de carga elétrica q é expressa por $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, onde $\mathbf{v}$ é a velocidade da partícula. Calcule o trabalho do campo quando a partícula percorre uma trajetória C.

P 7.3 Uma força alinhada com os eixo dos x atua sobre um corpo de massa m . Tal força varia com a posição na forma $F(x) = a + bx$. (A) Calcule a energia potencial do corpo no ponto x , tomando como referência o ponto $x = 0$, ou seja, $U(0) = 0$. (B) Se no ponto $x = 0$ o corpo tem velocidade v_0 , qual é sua velocidade no ponto x ?

P 7.4 Uma capa cilíndrica metálica muito delgada, de raio de 20 cm e massa igual a 2,0 kg, pode girar em torno de um eixo central preso a mancais. A capa, inicialmente em repouso, é acelerada através de uma correia esticada abrangendo seu eixo e o eixo de um motor. Após 30 s, ela atinge uma velocidade angular de 600 rpm (rotações por minuto). (A) Calcule a velocidade v de um ponto qualquer da capa. (B) Calcule a energia cinética obtida pela capa após os 30 segundos. (C) Qual foi a potência fornecida pelo motor à capa nesses 30 segundos?

P 7.5 *Pêndulo de Galileu* Um pêndulo consistindo em uma esfera de massa igual a 250 g, pendurado em um prego por um cordão de 2,70 m, é levado até uma altura H de 90 cm em relação à sua posição de equilíbrio O, mantendo-se o cordão esticado, e então é liberado. Despreze o atrito. (A) Quais são a energia cinética e a velocidade da esfera ao passar pela posição O? (B) Quando o pêndulo passa por O, o cordão dobra devido a um segundo prego fixo a uma altura h acima de O. Quais serão as novas alturas que ele atingirá se h for 1,50 m, 90 cm, 50 cm? (C) Qual é o valor máximo de h para que o cordão se enrole no segundo prego percorrendo órbita circular, como mostra a Figura 7.18?

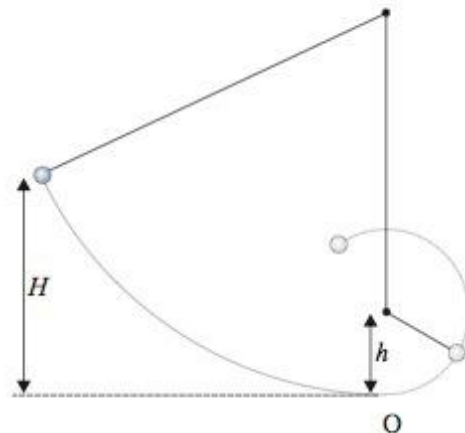


Figura 7.18
(Problema P7.5).

P 7.6 A Figura 7.19 mostra uma parte de uma montanha-russa. O carrinho, de massa m , tem velocidade v_0 na posição mostrada na figura e move-se com atrito desprezível pelos trilhos. (A) Encontre a velocidade do carrinho nos pontos A, B e C. (B) Qual é a força de contato (força normal) do carrinho com o trilho nesses pontos? (Lembre-se da força centrípeta em A e B.)

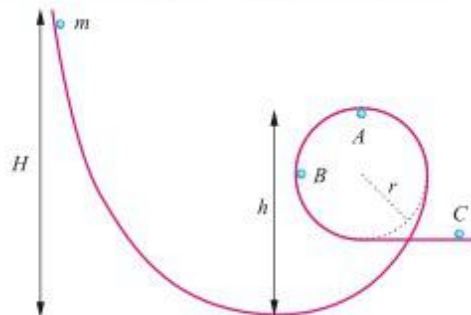


Figura 7.19
(Problema P7.6).

P 7.7 Uma pedra é atirada para cima com velocidade fazendo um ângulo θ com a horizontal. Qual deve ser o valor de θ para que, ao atingir sua altura máxima, a pedra tenha perdido metade de sua energia cinética inicial?

P 7.8 Uma mola está em repouso sobre o chão, em posição vertical, quando um corpo é soltado de uma altura igual a 20 cm acima do topo da mola e cai sobre ela. Verifica-se que a mola foi comprimida de 5,0 cm. De quanto ela será comprimida se o mesmo corpo for soltado de uma altura igual a 42 cm?

P 7.9 Um objeto de massa m cai sob ação da gravidade e sofre uma força de atrito do ar dada por $F_a = -\alpha v^2$. Portanto, quanto maior sua velocidade maior é a força de atrito. Assim, se sua altura inicial for suficiente ele poderá atingir um regime de velocidade constante. (A) Calcule essa velocidade terminal; (B) Calcule a potência da força da gravidade e a potência da força de atrito quando esse regime é alcançado.

P 7.10 Um garoto observou que toda vez que soltava uma bola, e esta descia verticalmente até o chão, após o choque ela voltava a uma altura 18% menor do que a altura de onde caiu. (A) Por que a bola não volta à mesma altura? (B) Calcule a velocidade inicial v_0 com a qual devemos lançar a bola para baixo, de uma altura de 5,0 m, para que ela volte à mesma altura.

P 7.11 Uma certa quantidade de gás está confinada em um recipiente cilíndrico que tem uma das tampas circulares de área A que pode se mover sem atrito (Figura 7.20). Quando o volume do recipiente varia muito lentamente, a pressão, $p \equiv F/A$, que o gás exerce na tampa pode sempre ser determinada. Mostre que o trabalho que o gás realiza sobre a tampa, quando o gás sofre uma variação ΔV de volume, passando de V_i a V_f , é igual a (A) $W = p \cdot \Delta V$ se p é constante; (B) $W = \int_{V_i}^{V_f} p dV$ se p não permanece constante quando o volume varia.

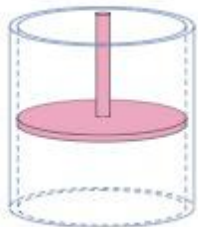


Figura 7.20
(Problema 7.11).

P 7.12 Um corpo de massa m é lançado verticalmente da superfície da Terra com velocidade v_1 . Sendo M a massa da Terra e R seu raio, (A) use o princípio do trabalho-energia e o resultado do Exercício-exemplo 7.6 (Equação 7.20) e determine a energia cinética do corpo quando a sua distância ao centro da Terra for $r = r_2$; (B) calcule a energia cinética do corpo quando ele escapa da atração da Terra (Dica: neste caso $r_2 = \infty$); (C) determine a menor velocidade inicial, $v_{1,min}$, necessária para que o corpo escape (Dica: neste caso $v_2 = 0$).

P 7.13 Um poste delgado de seção transversal uniforme tem massa M e altura h . (A) Calcule a energia potencial do poste apoiado no solo na posição vertical considerando nula sua energia potencial quando na horizontal. (Sugestão: divida o poste em pequenas pastilhas finas e some a energia potencial das pastilhas). (B) Generalizando, calcule a energia potencial do poste em função do ângulo θ que ele faz com a horizontal.

P 7.14 Uma barra delgada de massa M e comprimento L gira em torno de um eixo preso a uma de suas extremidades com velocidade angular ω . Calcule a energia cinética da barra. (Sugestão: divida a barra em pastilhas finas e some as energias das pastilhas).

P 7.15 Uma barra de massa m apóia-se sobre uma cunha de massa M , como mostra a Figura 7.21. A barra pode deslizar verticalmente guiada por anéis. Não há atrito da barra com os anéis nem com a cunha, e esta também pode deslizar sem atrito sobre a mesa horizontal em que se apóia. O sistema está inicialmente em repouso e após certo intervalo de tempo a barra desce uma distância h . Qual é a velocidade da cunha após esse deslocamento da barra?

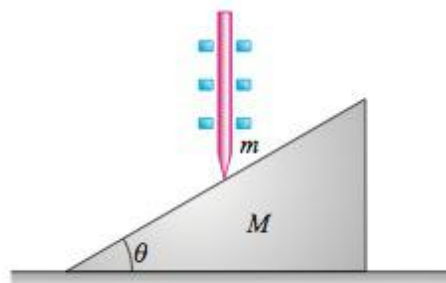


Figura 7.21
(Problema 7.15).

P 7.16 A energia do Sol é proveniente de uma série de reações nucleares que transformam prótons ($^1\text{H}^+$) em partículas α (núcleo de hélio, $^4\text{He}^{++}$):

- 1) $^1\text{H}^+ + ^1\text{H}^+ \rightarrow ^2\text{H}^+ + e^+ + \nu$, ($Q_1 = 0,42\text{MeV}$),
- 2) $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$, ($Q_2 = 1,02\text{MeV}$),
- 3) $^2\text{H}^+ + ^1\text{H}^+ \rightarrow ^3\text{He}^{2+} + \gamma$, ($Q_3 = 5,49\text{MeV}$),
- 4) $^3\text{He}^{2+} + ^3\text{He}^{2+} \rightarrow ^4\text{He}^{2+} + 2(^1\text{H}^+)$, ($Q_4 = 12,86\text{MeV}$),

onde e^+ é um pósitron (antielétron, com mesma massa do elétron porém carga contrária à dele), ν é um neutrino, que imediatamente escapa do Sol, e γ representa um fóton de radiação gama. Todas as reações liberam energia (Q), sendo que a energia Q_1 é a energia do neutrino. São necessárias duas ocorrências de cada uma das três primeiras reações para uma ocorrência da última reação.

(A) Determine a energia total liberada no processo.

(B) Sabendo que as energias de repouso do elétron e do próton são 0,511 MeV e 938,272 MeV respectivamente, determine as energias de repouso do deuteron ($^2\text{H}^+$) e da partícula α ($^4\text{He}^{++}$).

(C) Determine as massas dessas partículas.





Conservação do Momento

Seção 8.1 ■ Introdução, 170

Seção 8.2 ■ O momento linear, 170

Seção 8.3 ■ Sistema de duas partículas, 172

Seção 8.4 ■ Sistemas com um número qualquer de partículas, 177

Seção 8.5 ■ Sistema de partículas sob ação externa, 184

Seção 8.6 ■ Movimento de um foguete, 185

Seção 8.7 ■ Simetria, 189

Problemas, 194

Respostas dos exercícios, 195

Respostas dos problemas, 196



Seção 8.1 ■ Introdução

Até aqui consideramos o movimento de uma única partícula submetida a uma dada força. Em alguns casos, tratamos também do movimento de objetos extensos, tais como uma nave ou uma pedra. Entretanto, sempre consideramos que a disposição do corpo no espaço pudesse ser completamente descrita por um vetor posição $\mathbf{r}$. Claramente, necessitamos de esquemas de abordagem capazes de contemplar situações mais gerais do que esta. Um corpo pode girar enquanto seu centro se move. Ou o movimento pode envolver mudanças na própria forma do corpo, como ocorre com uma nuvem cruzando o céu. Este capítulo aborda essas situações mais gerais. É conveniente observar inicialmente que a posição de um corpo cuja forma não se altera fica perfeitamente definida pelo vetor posição de um ponto preestabelecido do corpo e a orientação deste no espaço. Corpos cuja forma não se altera são denominados *corpos rígidos*. O movimento dos corpos rígidos será estudado em detalhe no Capítulo 10 (*Rotações*). No presente capítulo, não faremos hipóteses restritivas sobre a forma do corpo. Neste caso, teremos que dividir o corpo em partes minúsculas e descrever o movimento das partes. Na linguagem mais freqüente, o corpo não é mais denominado corpo, mas sim sistema. Sistema é de fato um termo amplamente utilizado em física e pode designar qualquer conjunto de entidades físicas que tenhamos distinguido para análise. Um sistema pode ser o Sol e seus planetas e demais objetos (sistema solar), um par de bolas de sinuca que se chocam, ou simplesmente uma pedra que se move sob o efeito da gravidade terrestre.

A descrição feita anteriormente para o movimento de partículas pode ser estendida para o caso de sistemas, se visualizarmos estes como um conjunto de partículas. É o que faremos. Este capítulo poderia então ser denominado *movimento de sistemas de partículas*. Entretanto, o estudo do movimento de sistemas de partículas irá revelar uma lei física muito importante, a *conservação do momento*, o que acabou resultando no título do capítulo.

Seção 8.2 ■ O momento linear

O momento linear de uma partícula é definido por

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}. \quad (8.1)$$

Para uma partícula de massa constante, sujeita a uma força $\mathbf{F}$ ou a um conjunto de forças cuja resultante é $\mathbf{F}$, podemos escrever

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (8.2)$$

ou

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (8.3)$$

Portanto, a taxa de variação no tempo do momento linear da partícula é igual à força resultante que atua sobre ela. Deve-se notar que a Equação 8.3 é consequência imediata da segunda lei de Newton para partículas cuja massa seja constante no tempo. Na verdade, Newton formulou sua lei na forma da Equação 8.3, e não na forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ em que geralmente a expressamos. *Se a força resultante sobre uma partícula for nula, seu momento linear permanecerá constante.* Isso é uma consequência imediata e óbvia da Segunda Lei de Newton. Entretanto, quando aplicamos as leis de Newton a um sistema de partículas, obtemos um importante resultado que, como veremos, não é imediatamente óbvio.

A Equação 8.3 pode também ser usada para se calcular a força média sobre uma partícula:

$$\bar{\mathbf{F}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F} dt' = \frac{\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}. \quad (8.4)$$

Em um dado intervalo de tempo Δt , a força média é dada pela razão entre $\Delta \mathbf{p}$ por Δt .

■ Momento linear $\mathbf{p}$ de uma partícula

Newton formulou sua segunda lei da mecânica na forma expressa pela Equação 8.3, não na forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Se a força resultante sobre uma partícula for nula, seu momento linear permanecerá constante

E-E Exercício-exemplo 8.1

■ Um bloco de massa m desliza sem atrito e desce uma distância d sobre um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal. Calcule a variação de seu momento linear sabendo que sua velocidade inicial era v_o .

■ Solução

O movimento é unidimensional; assim sendo, omitiremos o caráter vetorial de $\mathbf{p}$.

$\Delta p = p_f - p_o = m(v_f - v_o)$, onde os índices f e o representam os valores finais e iniciais das grandezas, respectivamente.

Mas $v_f^2 = v_o^2 + 2ad$, onde a é a aceleração e $a = g \sin \theta$.

Então: $\Delta p = m \left(\sqrt{v_o^2 + 2g \sin \theta d} - v_o \right)$.

E-E Exercício-exemplo 8.2

■ Um corpo de massa m é lançado com velocidade v_o verticalmente para cima, sobe sob a ação da gravidade, chega a uma altura máxima e volta ao seu ponto de partida. Supondo que a ação do atrito possa ser desprezada, determine (A) a variação do momento linear na subida, na descida e total; (B) usando a variação total e a definição de momento linear acima, determine o tempo total do movimento.

■ Solução

(A) Vamos supor que o sentido de subida seja positivo e usar o resultado já conhecido de que na descida o corpo chegará ao mesmo ponto de partida com velocidade $-v_o$.

Assim, na subida $v_f = 0 \Rightarrow \Delta p_s = m(0 - v_o) = -mv_o$;

na descida, $\Delta p_d = m(-v_o - 0) = -mv_o$.

e, no total, $\Delta p = \Delta p_s + \Delta p_d = -2mv_o$.

(B) Como a força é constante, $F = -mg$, podemos usar a Equação 8.4 para determinar o tempo: $-mg\Delta t = \Delta p = -2mv_o \Rightarrow \Delta t = 2v_o/g$.

Este é o resultado que já obtivemos anteriormente, e não poderia ser diferente, pois para obtê-lo anteriormente usamos a segunda lei de Newton e agora ela foi utilizada duas vezes, explicitamente através da Equação 8.4 e indiretamente quando usamos a velocidade final da queda como sendo $-v_o$.

E-E Exercício-exemplo 8.3

■ Uma partícula de massa m executa movimento circular uniforme com velocidade angular ω em trajetória de raio r . Calcule a variação de seu momento linear quando ela percorre um deslocamento angular igual a $\pi/2$. Escolha eixos de coordenadas para expressar o resultado.

■ Solução

Supondo que no instante inicial a velocidade linear da partícula esteja na direção $\mathbf{i}$ (positiva no eixo dos x) e que, após o deslocamento angular de $\pi/2$, esteja na direção $\mathbf{j}$ (positiva no eixo dos y), teremos:

$$\mathbf{p}_o = m\omega r \mathbf{i}; \mathbf{p}_f = m\omega r \mathbf{j} \Rightarrow \Delta \mathbf{p} = \sqrt{2}m\omega r \frac{\mathbf{j} - \mathbf{i}}{\sqrt{2}}.$$

Exercícios

E 8.1 Calcule o momento linear (A) de um elétron com velocidade de $3,0 \times 10^6$ m/s; (B) da Terra, com sua velocidade orbital de 30 km/s.

E 8.2 Um jogador chuta uma bola de futebol, cuja massa é 450 g, inicialmente parada, e lhe imprime uma velocidade de 30 m/s. (A) Calcule o valor do momento linear transmitido à bola. (B) Supondo que a colisão dure 2,0 ms, calcule o valor médio no tempo da força exercida sobre a bola.

E 8.3 Uma metralhadora atira 10 balas/s, cada qual com massa de 5,0 g, à velocidade de 2000 km/h. Qual é a força média que as balas fazem sobre a metralhadora?

E 8.4 Um corpo de massa m é atirado do solo com velocidade inicial v_0 fazendo um ângulo θ com a horizontal. Mostre que a variação do momento linear do corpo até o instante em que ele atinge novamente o solo é igual ao produto do seu peso pelo tempo total que ele permanece no ar.

Seção 8.3 ■ Sistema de duas partículas

8.3.1 Equação de movimento do centro de massa

Para iniciarmos o estudo de sistemas de partículas imaginemos inicialmente um sistema bem simples constituído apenas por duas partículas de massas m_1 e m_2 , respectivamente, que interagem entre si. Sejam $\mathbf{F}_{1,2}$ a força da partícula 2 sobre a partícula 1 e $\mathbf{F}_{2,1}$ a da partícula 1 sobre a 2, e $\mathbf{F}_{1,\text{ext}}$ e $\mathbf{F}_{2,\text{ext}}$ as forças externas sobre as respectivas partículas. Podemos analisar o movimento do sistema usando a Segunda Lei de Newton para cada partícula:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{1,\text{ext}} + \mathbf{F}_{1,2}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{2,\text{ext}} + \mathbf{F}_{2,1} \quad (8.5)$$

Este par de equações pode ser de difícil solução, devido às forças internas ao sistema ($\mathbf{F}_{1,2}$ e $\mathbf{F}_{2,1}$). Entretanto, se abrirmos mão de buscar informação sobre cada partícula, é possível fundir as Equações 8.5 em apenas uma equação que terá informação do sistema como um todo. Como a terceira lei de Newton garante que

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}, \quad (8.6)$$

a soma das duas Equações 8.5 resulta em uma única equação mais simples:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (8.7)$$

onde definiram-se uma grandeza $\mathbf{P}$ chamada *momento linear do sistema*, dada por

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (8.8)$$

e a *força externa total* que atua sobre o sistema, que é

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{1,\text{ext}} + \mathbf{F}_{2,\text{ext}}. \quad (8.9)$$

Vemos assim que o conjunto de Equações 8.5 se reduziu à Equação 8.7, que é semelhante à Equação 8.3 de uma única partícula. Isto sugere a possibilidade de se atribuir ao sistema um ponto representando uma única partícula fictícia de momento $\mathbf{P}$ e massa M igual à massa total do sistema:

$$M = m_1 + m_2. \quad (8.10)$$

Esse ponto é chamado *centro de massa* (cm) do sistema e deve ter uma *velocidade de centro de massa* $\mathbf{v}_{\text{cm}}$ dada por

$$M\mathbf{v}_{\text{cm}} \equiv \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}. \quad (8.11)$$

■ Momento linear de um sistema de duas partículas

■ Força externa sobre o par de partículas

■ Velocidade do centro de massa de um sistema de duas partículas

A Equação 8.7 pode agora ser expressa na forma

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}} = M\dot{\mathbf{v}}_{\text{cm}}, \quad (8.12)$$

onde $\mathbf{a}_{\text{cm}} \equiv \dot{\mathbf{v}}_{\text{cm}}$ é a *aceleração do centro de massa*, que pode ser obtida derivando-se a Equação 8.11.

Já obtivemos as definições da velocidade e da aceleração do centro de massa, mas a sua posição ainda não foi definida. Como sua velocidade é a derivada temporal de sua posição, $\mathbf{v}_{\text{cm}} = \dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}$, vamos reescrever a Equação 8.11 na forma

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \right) \equiv \dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}},$$

de onde vemos que a expressão dentro dos parênteses pode ser usada para se definir a *posição do centro de massa*:

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}. \quad (8.13)$$

■ Posição do centro de massa de um sistema de duas partículas

A Equação 8.7, ou sua equivalente 8.12, é a *equação de movimento do centro de massa*. Vejamos agora algumas de suas consequências.

8.3.2 Conservação do momento linear

Uma das consequências da Equação 8.7 é que, se a soma das forças externas que atuam sobre as duas partículas for nula, o momento linear do sistema, $\mathbf{P} \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, será constante. Ou seja, quaisquer que sejam as forças de interação entre as partículas e os movimentos devidos a elas, o momento do sistema é constante:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \text{constante} &\Rightarrow \mathbf{P}_{\text{inicial}} = \mathbf{P}_{\text{final}} \\ m_1 \mathbf{v}_{1,\text{inicial}} + m_2 \mathbf{v}_{2,\text{inicial}} &= m_1 \mathbf{v}_{1,\text{final}} + m_2 \mathbf{v}_{2,\text{final}} \end{aligned} \quad (8.14)$$

e, como consequência da Equação 8.11 ou 8.12, a velocidade do centro de massa também será constante:

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \right) = \text{constante}. \quad (8.15)$$

Como caso particular da Equação 8.15 vemos que, quando a soma das forças externas é nula, se em algum momento a velocidade do centro de massa for nula, ela permanecerá sempre nula. Então, quaisquer que sejam os movimentos das duas partículas, a posição do centro de massa será fixa:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0, \mathbf{v}_{\text{cm}} = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_{\text{cm}} = \text{constante} \Rightarrow m_1 \Delta \mathbf{r}_1 + m_2 \Delta \mathbf{r}_2 = 0. \quad (8.16)$$

Usamos $\Delta \mathbf{r}_i$ para representar variações das posições das partículas.

E-E Exercício-exemplo 8.4

■ Um sistema é constituído de duas partículas, uma de massa m na posição $(0, 0, 0)$ e outra de massa $2m$ na posição $(L, 0, 0)$, como mostra a Figura 8.1. Determine a posição do centro de massa.

■ Solução

Pela Equação 8.13, obtemos para a coordenada x do centro de massa

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{3m} (m \times 0 + 2m \times L) = \frac{2}{3} L.$$

Como as coordenadas y e z das partículas são iguais a zero, a Equação 8.13 leva a $y_{\text{cm}} = 0$, $z_{\text{cm}} = 0$. Vê-se, portanto, que o centro de massa se situa sobre o seguimento de reta que une as duas partículas e é mais próximo da partícula de massa maior. A distância de cada partícula até o centro de massa é inversamente proporcional à massa da partícula.

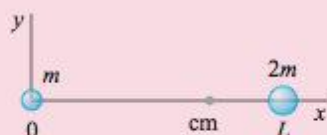


Figura 8.1

Configuração de duas partículas e posição do centro de massa (cm) do sistema. Observe-se que o centro de massa é mais próximo da partícula de maior massa.

E-E Exercício-exemplo 8.5

■ Um carro com massa de 1200 kg move-se para o norte com velocidade constante de 25 m/s. Outro carro, com massa de 1500 kg e movendo-se para o oeste, tem velocidade de 10 m/s em $t = 0$ e mantém aceleração constante de $1,0 \text{ m/s}^2$ até $t = 20 \text{ s}$. Calcule a velocidade e a aceleração do centro de massa do sistema entre 0 e 20 s.

■ Solução

Tomando o eixo dos x ao longo da direção oeste-leste, sentido leste, e o eixo dos y na direção sul-norte, sentido norte, podemos escrever

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{j}25 \text{ m/s},$$

$$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i}(10 \text{ m/s} + 1,0 \text{ m/s}^2 \times t).$$

Aplicando a Equação 8.11, que define a velocidade do centro de massa, temos:

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{2700} \left[-1500 \times \left(10 + \frac{t}{s} \right) \mathbf{i} + 1200 \times 25 \mathbf{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{9} \left[-5 \times \left(10 + \frac{t}{s} \right) \mathbf{i} + 100 \mathbf{j} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Derivando essa velocidade em relação ao tempo,

$$\mathbf{a}_{\text{cm}} = -\mathbf{i} \frac{5}{9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

E-E Exercício-exemplo 8.6

■ Um canhão (Figura 8.2), juntamente com sua pequena plataforma sobre rodas, tem massa $M = 100 \text{ kg}$. O canhão atira a bala de massa $m = 1,0 \text{ kg}$ com velocidade $v_r = 300 \text{ m/s}$ em relação a si próprio, em direção próxima da horizontal. Calcule a velocidade inicial V_o de recuo do canhão e a velocidade inicial v_o da bala em relação ao solo.

■ Solução

Antes do tiro, o momento linear do sistema é nulo. Depois do tiro, a gravidade passa a atuar de forma não-neutralizada sobre a bala e forças de atrito começam a atuar sobre a bala e o canhão. Imediatamente após o tiro, porém, a gravidade e o atrito ainda não terão alterado o momento do sistema e este será então também nulo. Portanto,

$$MV_o + mv_o = 0 ; v_o - V_o = v_r = 300 \text{ m/s}.$$

Resolvendo o sistema de equações acima, obtemos

$$V_o = -\frac{m}{M+m} v_r = -2,97 \text{ m/s}; v_o = 297 \text{ m/s}.$$

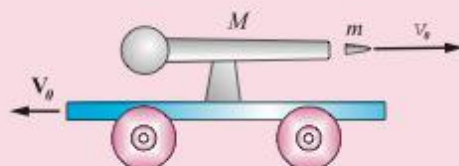


Figura 8.2
(Exercício-exemplo 8.6).

E-E Exercício-exemplo 8.7

■ João e Maria estão sobre patins em uma pista de patinação no gelo. Encontram-se inicialmente parados, separados pela distância de 12 m , cada qual segurando uma das extremidades de uma corda. Puxando-se mutuamente pela corda, eles se aproximam um do outro. Sabendo que as massas de João e Maria são respectivamente 80 kg e 60 kg , determine o ponto em que eles se encontrarão.

■ Solução

A resultante das forças externas que atuam sobre o casal é nula, desprezando-se a força de atrito. Como o centro de massa do casal está inicialmente em repouso, permanecerá nesse estado durante todo o movimento, ou seja, $\Delta \mathbf{r}_{\text{cm}} = 0$ (ver Equação 8.16). Portanto, quando o casal se encontrar, suas posições $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são iguais e, assim, coincidirão com seu ponto de centro de massa. Seja x a direção da reta que une o casal e $x = 0$ a posição inicial de João. O centro de massa tem coordenada

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{140 \text{ kg}} (0 + 60 \text{ kg} \times 12 \text{ m}) = 5,1 \text{ m}.$$

E-E Exercício-exemplo 8.8

■ Um homem com massa de 70 kg está parado na extremidade de uma canoa também parada, cuja massa é de 60 kg e cujo comprimento é de 4,0 m. Ele corre até a outra extremidade e salta na água com velocidade de 2,0 m/s na direção horizontal. (A) Com que velocidade recua a canoa? (B) Quanto a canoa recua até o instante do salto? (C) Quais seriam as respostas anteriores se, em vez de saltar, o homem parasse na extremidade oposta àquela em que estava inicialmente?

■ Solução

Desprezando o atrito da canoa com a água, o centro de massa do sistema homem–canoa permanece imóvel até o momento do salto. Isto significa que seu momento linear permanece nulo. Podemos então escrever

$$m_h v_h + m_c v_c = 0.$$

Portanto,

$$(A) \ v_c = -\frac{m_h v_h}{m_c} = \frac{70\text{kg} \times 2,0\text{m/s}}{60\text{kg}} = -2,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(B) a posição do centro de massa do sistema é dada por

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_h x_h + m_c x_c}{m_h + m_c}.$$

Como $\Delta x_{\text{cm}} = 0$, podemos escrever

$$m_h \Delta x_h + m_c \Delta x_c = 0.$$

Além disso, a diferença entre os deslocamentos do homem e da canoa é $L = 4,0$ m, ou seja,

$$\Delta x_h - \Delta x_c = L \Rightarrow \Delta x_h = \Delta x_c + L.$$

Portanto,

$$m_h (\Delta x_c + L) + m_c \Delta x_c = 0,$$

$$\Delta x_c = -\frac{m_h L}{m_h + m_c} = -\frac{70\text{kg} \times 4,0\text{m}}{130\text{kg}} = -2,2 \text{ m}.$$

(C) Se o homem não saltasse, sua velocidade final em relação à canoa seria nula. Mas o momento final do sistema canoa–homem seria igual ao inicial, ou seja, nulo. Assim, a velocidade final da canoa seria nula. Porém, seu deslocamento continuaria medindo 2,2 m, pois este resultado foi obtido independentemente do valor da velocidade final do homem.

Exercícios

E 8.5 João tem massa de 75 kg e está procurando Maria, cuja massa é de 50 kg. O centro de massa do casal está a 15 m de Maria. Qual é a distância entre João e Maria?

E 8.6 Um pescador, com massa de 70 kg, está em uma extremidade de uma canoa de 50 kg, ambos inicialmente em repouso. O pescador se move 2 m, em relação às margens, rumo à outra extremidade da canoa, pára, e então resolve pular na água. Sua velocidade foi de 4,5 m/s em relação à canoa. (A) Qual foi o deslocamento da canoa devido ao movimento inicial do pescador? (B) Quando o pescador pulou, qual foi sua velocidade no referencial da água?

E 8.7 Um automóvel, cuja massa vale 1500 kg, viajando a 120 km/h, colide com a traseira de um caminhão com massa de 6000 kg, viajando a 80 km/h. Calcule a velocidade do centro de massa do sistema carro–caminhão (A) antes da batida; (B) logo após a batida.

E 8.8 Um avião voa na horizontal (direção $\hat{i}$) com velocidade 350 km/h quando se fragmenta em duas partes de igual massa. Uma parte sai com a velocidade inicial $\mathbf{v}_1 = \hat{i}280 \text{ km/h} - \hat{j}210 \text{ km/h}$. (A) Qual é a velocidade da outra metade logo após a explosão? (B) A energia mecânica é conservada na explosão?

E 8.9 *Questão:* nos filmes é comum ver-se uma pessoa ser arremessada para trás pelo impacto de uma bala de pistola, com massa típica de 3,0 g e velocidade de 300 m/s. Você acha isto realista?

Seção 8.4 ■ Sistemas com um número qualquer de partículas

As definições e os resultados apresentados na Seção 8.2 (*O momento linear*), para duas partículas, podem ser generalizados para sistemas com qualquer número de partículas, como veremos a seguir.

8.4.1 Centro de massa

Consideremos o sistema constituído de N partículas i , $i = 1, 2, 3 \dots N$, cujas respectivas massas são m_i . O *centro de massa* do sistema, analogamente à definição dada pela Equação 8.13, é o ponto definido pelo vetor

■ Definição de centro de massa

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \text{ onde } M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (8.17)$$

E-E Exercício-exemplo 8.9

■ Calcule o centro de massa de um sistema de quatro partículas iguais dispostas nos vértices de um quadrado de lado L .

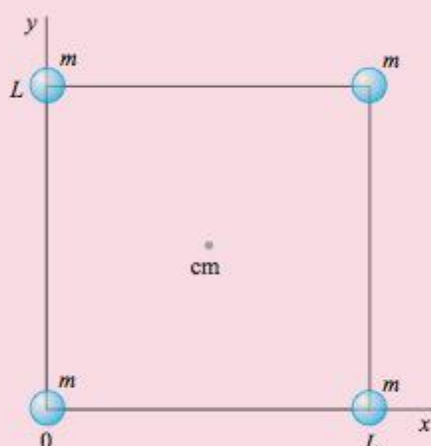


Figura 8.3

Posição do centro de massa de um sistema de quatro partículas. Observe-se que o centro de massa se situa no centro geométrico do sistema.

■ Solução

Seja (x, y) o plano contendo o sistema de partículas. Adotando um sistema de coordenadas com os eixos paralelos aos lados do quadrado e origem no seu vértice esquerdo inferior, como mostra a Figura 8.3, temos

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{4m} (0 + 0 + mL + mL) = \frac{L}{2}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{4m} (0 + mL + mL + 0) = \frac{L}{2}.$$

Vê-se portanto que o centro de massa coincide com o centro geométrico do quadrado. Como veremos posteriormente, esse é um resultado que podemos obter por argumentos de simetria, sem ter de fazer cálculos.

Exercício

E 8.10 Determine a posição do centro de massa do sistema visto na Figura 8.4.

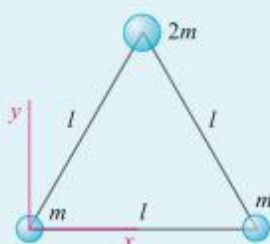


Figura 8.4

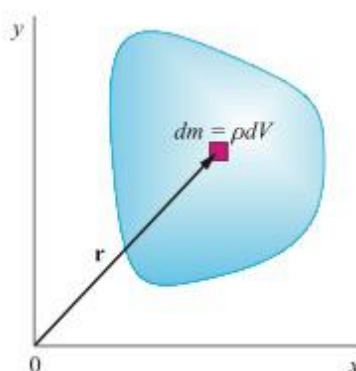


Figura 8.5

Se o sistema sob análise for um corpo extenso, é mais conveniente tratá-lo como um contínuo. As partículas de massas m_i são substituídas por células infinitesimais de massas $dm = \rho dV$, onde dV é o volume da célula e ρ é a densidade de massa no ponto $\mathbf{r}$, como mostra a Figura 8.5. Nesse caso, a Equação 8.17 assume a forma

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} \equiv \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho dV, \quad (8.18)$$

$$\text{onde } M = \int dm = \int \rho dV. \quad (8.19)$$

E-E Exercício-exemplo 8.10

■ Uma barra de densidade uniforme e igual a ρ tem seção ortogonal de área uniforme A e comprimento L . Determine a distância, ao longo da barra, do seu centro de massa a uma das extremidades.

■ Solução

Orientando o eixo dos x ao longo da barra, e sendo $-L/2$ e $L/2$ as coordenadas das extremidades, podemos usar a definição dada pela Equação 8.18 para encontrar a coordenada x_{cm} :

$$x_{\text{cm}} \equiv \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int x \rho dV = \frac{\rho}{M} \int x dV = \frac{\rho A}{M} \int_{-L/2}^{L/2} x dx = 0.$$

Vê-se que o centro de massa está no centro da barra, à distância igual a $L/2$ de qualquer das extremidades. Consideramos a barra muito fina de modo a não nos preocuparmos com as coordenadas y_{cm} e z_{cm} . Entretanto, mesmo que a área A seja considerável pode-se mostrar, por cálculos ou apenas por simetria, que o centro da barra é o centro de massa.

E-E Exercício-exemplo 8.11

■ Duas barras de mesmo comprimento L e mesma seção ortogonal de área uniforme A , com densidades uniformes valendo ρ_1 e ρ_2 , são soldadas de modo a compor uma barra de comprimento $2L$, como mostra a Figura 8.6. Determine a posição do centro de massa da barra composta.



Figura 8.6

(Exercício-exemplo 8.11).

■ Solução

Considere a barra situada sobre o eixo dos x , com a emenda na coordenada $x = 0$, como mostra a Figura 8.6. A coordenada do centro de massa será

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} \int_{-L}^L \rho x A dx = \frac{1}{M} \int_{-L}^0 \rho_1 x A dx + \frac{1}{M} \int_0^L \rho_2 x A dx \\ &= \frac{M_1}{M} \int_{-L}^0 \frac{1}{M_1} \rho_1 x A dx + \frac{M_2}{M} \int_0^L \frac{1}{M_2} \rho_2 x A dx, \end{aligned} \quad (8.20)$$

onde M_1 e M_2 são as massas das metades esquerda e direita da barra, respectivamente. Vê-se que cada uma das duas últimas integrais nesta equação representa a coordenada do centro de massa de uma metade da barra composta. Portanto,

$$x_{\text{cm}} = \frac{M_1 x_{1\text{cm}} + M_2 x_{2\text{cm}}}{M}. \quad (8.21)$$

Pelo que vimos no Exercício-exemplo 8.10, o centro geométrico de cada metade uniforme da barra é o seu centro de massa. Assim, $x_{1\text{cm}} = -L/2$ e $x_{2\text{cm}} = L/2$. A Equação 8.21 então resulta em

$$x_{\text{cm}} = \frac{-M_1 L + M_2 L}{2M} = \frac{L}{2} \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} = \frac{L}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

O mesmo resultado pode ser obtido se fizermos diretamente as integrais na Equação 8.20 e nos utilizarmos do fato de que $M_i = AL\rho_i$.

É interessante analisar a Equação 8.21. Ela diz que, sabendo as posições dos centros de massa de duas partes com massas M_1 e M_2 de um sistema, podemos considerar essas massas concentradas em seus respectivos centros de massas e então usar a Equação 8.13 para encontrar o centro de massa do sistema completo. Essa regra é geral: vale para mais do que apenas uma dimensão e também para sistemas compostos de várias partes, em vez de apenas duas.

E-E Exercício-exemplo 8.12

■ Uma barra com seção ortogonal de área uniforme A e comprimento L é feita de modo que a densidade $\rho(x)$ ao longo da mesma varia linearmente do valor ρ_1 na extremidade esquerda ao valor ρ_2 na extremidade direita. Determine a posição do seu centro de massa.

■ Solução

A expressão algébrica para a densidade da barra é

$$\rho(x) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{x}{L},$$

onde se pode observar que $\rho(0) = \rho_1$ e $\rho(L) = \rho_2$.

O elemento de volume dV na integração será $dV = A dx$. Obtém-se, portanto,

$$Mx_{\text{cm}} = \int_0^L x \left[\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{x}{L} \right] A dx = \rho_1 A \frac{L^2}{2} + \rho_2 A \frac{L^3}{3L} - \rho_1 A \frac{L^3}{3L}, \quad (8.22)$$

onde

$$M = \int_0^L \left[\rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{x}{L} \right] A dx = \rho_1 AL + \rho_2 A \frac{L^2}{2L} - \rho_1 A \frac{L^2}{2L} = AL \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}. \quad (8.23)$$

Combinando as Equações 8.22 e 8.23, obtemos

$$x_{\text{cm}} = \frac{\rho_1 + 2\rho_2}{3(\rho_1 + \rho_2)} L.$$

Quando $\rho_1 = \rho_2$, obtém-se x_{cm} no centro da barra, como era de se esperar.

E-E Exercício-exemplo 8.13

- Determine o centro de massa de um cone homogêneo de base circular

■ Solução

Sendo homogêneo, o cone tem densidade uniforme. Como tal densidade aparecerá no numerador e no denominador da Equação 8.18, ficará ausente na resposta. Podemos, portanto, fazer $\rho = 1$ sem alterar o resultado. Para simplificar os cálculos, consideraremos o cone com a base para cima, como mostra a Figura 8.7. Por simetria, o centro de massa estará localizado sobre o eixo do cone e basta então calcular sua coordenada vertical. O elemento de volume na integração será $dV = \pi r^2 dy$; por semelhança de triângulos vemos que $\frac{r}{R} = \frac{y}{h}$,

onde R é o raio da base e h é a altura do cone. Temos então $dV = \pi R^2 \frac{y^2}{h^2} dy$ e

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{V} \int_0^h y \pi R^2 \frac{y^2}{h^2} dy = \frac{1}{4V} \pi R^2 h^2, \text{ onde } V = \int_0^h \pi R^2 \frac{y^2}{h^2} dy = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Combinando essas duas equações, temos $y_{\text{cm}} = \frac{3}{4} h$.

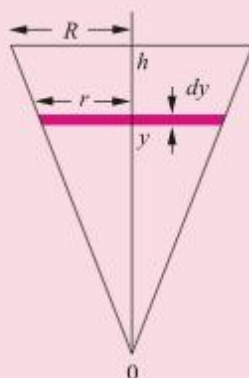


Figura 8.7

Cone de base circular. A área sombreada representa o elemento de volume de altura dy .

Exercícios

E 8.11 Determine o centro de massa de uma caixa cúbica de lado a , com paredes finas de mesma espessura e do mesmo material, sem a tampa superior.

E 8.12 Três barras de tamanho ℓ , duas com massa m cada e a terceira com massa $2m$, são soldadas entre si, com três extremidades em comum, de modo que fiquem todas ortogonais entre si. Determine o centro de massa do sistema, supondo que o vértice formado é a origem de coordenadas e as duas de menor massa estejam sobre os eixos x e y .

8.4.2 Equação de movimento do centro de massa

Derivando em relação ao tempo a Equação 8.17, que define o centro de massa, obtemos sua velocidade $\mathbf{v}_{cm}$:

$$M\mathbf{v}_{cm} = M \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (8.24)$$

Definindo o *momento linear* $\mathbf{P}$ do sistema como a soma dos momentos das partículas, temos

$$M\mathbf{v}_{cm} = \sum_i \mathbf{p}_i \equiv \mathbf{P}. \quad (8.25)$$

Ou seja, o momento linear de um sistema de partículas é o produto da sua massa total pela velocidade do seu centro de massa.

Derivando a Equação 8.25 em relação ao tempo e aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (8.26)$$

As forças que atuam sobre as partículas podem ser separadas em forças externas, ou seja, forças exercidas por agentes externos, e forças internas, ou seja, forças de interação mútua entre as várias partículas do nosso sistema. Com essa separação, a Equação 8.26 assume a forma

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_{i,int} + \sum_i \mathbf{F}_{i,ext}. \quad (8.27)$$

Chamando de $\mathbf{F}_{ij}$ a força da partícula j sobre a partícula i , teremos

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{1,int} &= \mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{1,3} + \dots + \mathbf{F}_{1,N} \\ \mathbf{F}_{2,int} &= \mathbf{F}_{2,1} + \mathbf{F}_{2,3} + \dots + \mathbf{F}_{2,N} \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{F}_{N,int} &= \mathbf{F}_{N,1} + \mathbf{F}_{N,2} + \dots + \mathbf{F}_{N,N-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_i \mathbf{F}_{i,int} = \mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1} + \mathbf{F}_{1,3} + \mathbf{F}_{3,1} + \dots$$

Entretanto, a lei da ação e reação nos diz que $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$, e por isso a soma na Equação 8.27 será:

$$\sum_i \mathbf{F}_{i,int} = 0. \quad (8.28)$$

Assim, a Equação 8.27 se simplifica para

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \mathbf{F}_{ext}, \text{ onde } \mathbf{F}_{ext} \equiv \sum_i \mathbf{F}_{i,ext}. \quad (8.29)$$

Esta é a *equação de movimento do centro de massa* de um sistema que contém um número qualquer de partículas. Se esse número for 2, cai-se na mesma Equação 8.7 utilizada anteriormente.

8.4.3 Conservação do momento linear

Se o sistema de partículas for isolado, não haverá força externa resultante atuando sobre ele, ou seja, $\mathbf{F}_{i,ext} = 0$. Nesse caso, ou em qualquer outra situação em que a soma das forças externas sobre todas as partes do sistema for nula, da equação de movimento do centro de massa concluímos:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = 0, \quad (8.30)$$

■ Momento linear de um sistema de partículas

O momento linear de um sistema de partículas é o produto da sua massa total pela velocidade do seu centro de massa

■ Equação de movimento do centro de massa

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \text{constante.} \quad (8.31)$$

A Equação 8.31 exprime a lei da conservação do momento linear. Em palavras, a lei estabelece:

Se a resultante das forças externas atuantes sobre um sistema for nula, seu momento linear será constante no tempo.

Uma vez que o momento linear é o produto da massa do sistema pela velocidade do centro de massa, a lei diz também que

Se a resultante das forças externas que atuam sobre um sistema for nula, seu centro de massa se manterá em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

A lei da conservação do momento linear é uma das leis fundamentais da física.

O momento linear de um sistema é constante no tempo sempre que a resultante das forças externas que atuam sobre ele for nula

O centro de massa de um sistema se manterá em repouso ou em movimento retilíneo uniforme se a resultante das forças externas que atuam sobre ele for nula

E-E Exercício-exemplo 8.14

■ Quatro pessoas estão em um barco parado sobre as águas de um lago, dispostas de modo a formar um retângulo, como mostra a Figura 8.8, com lados iguais a 3 m e 4 m. Suas massas são $m_1 = 70$ kg, $m_2 = 40$ kg, $m_3 = 50$ kg e $m_4 = 40$ kg, e a massa do barco é $m_b = 100$ kg. Considere apenas movimentos horizontais, despreze o atrito entre o barco e a água e determine:

(A) o deslocamento do centro de massa do barco no caso de as três pessoas mais leves se deslocarem para a posição da primeira e aí permanecerem;

(B) a velocidade de translação do barco no caso de todas as pessoas saltarem para fora dele com a mesma velocidade $v = 2$ m/s em relação às águas, cada qual de sua posição original e na direção da diagonal do retângulo que passa por sua posição.

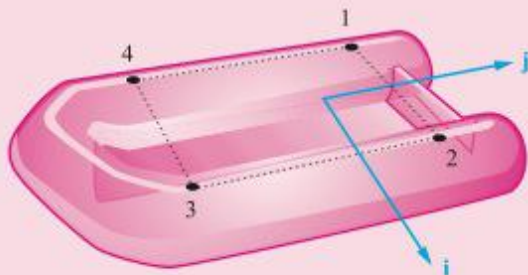


Figura 8.8
(Exercício-exemplo 8.14).

■ Solução

(A) Como a soma de todas as forças externas é nula, de acordo com a Equação 8.29 a velocidade do centro de massa do sistema não varia. Mas, se inicialmente a velocidade do centro de massa era nula, ela continuará nula quaisquer que sejam os movimentos de suas partes. Assim, a posição do centro de massa não se modificará, ou seja, $\Delta \mathbf{r}_{\text{cm}} = 0$. Podemos então escrever:

$$\sum_{i=1}^4 m_i \Delta \mathbf{r}_i + m_b \Delta \mathbf{r}_b = 0,$$

onde o índice b representa o barco e $\Delta \mathbf{r}_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$, representa os deslocamentos das pessoas em relação às águas. Mas de fato os dados do problema fornecem os seus deslocamentos $\Delta \mathbf{r}'_i$ em relação ao barco. Então podemos usar $\Delta \mathbf{r}_i = \Delta \mathbf{r}'_i + \Delta \mathbf{r}_b$ e obter:

$$\Delta \mathbf{r}_b = -(m_1 \Delta \mathbf{r}'_1 + m_2 \Delta \mathbf{r}'_2 + m_3 \Delta \mathbf{r}'_3 + m_4 \Delta \mathbf{r}'_4) / (m_b + m_1 + m_2 + m_3 + m_4).$$

Utilizando os dados da Figura 8.8, obtemos

$$\Delta \mathbf{r}_b = -[40\text{kg}(-3\mathbf{m}\mathbf{i}) + 50\text{kg}(4\mathbf{m}\mathbf{j} - 3\mathbf{m}\mathbf{i}) + 40\text{kg}(4\mathbf{m}\mathbf{j})]/300\text{kg}.$$

$$\Delta \mathbf{r}_b = \frac{270\mathbf{m}\mathbf{i} - 360\mathbf{m}\mathbf{j}}{300} = \frac{3\mathbf{m}}{10}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}).$$

Como o vetor $(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})/5$ tem módulo igual a 1 e está na direção do deslocamento da posição 1 para a 3, vamos representá-lo por $\hat{\mathbf{d}}_{13}$. Assim, o deslocamento do barco é igual a 1,5 m nessa direção:

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{15\mathbf{m}}{10} \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} = 1,5\mathbf{m} \hat{\mathbf{d}}_{13}.$$

(B) Quando as pessoas saltam do barco, podemos usar a Equação 8.31, que nos garante que o momento linear do sistema será constante porque a resultante das forças externas é nula. Mas o momento linear do sistema era nulo antes dos saltos; então, após os saltos será também nulo. Assim sendo, teremos

$$\sum_{i=1}^4 m_i \Delta \mathbf{v}_i + m_b \Delta \mathbf{v}_b = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_b = -(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 + m_4 \mathbf{v}_4) / m_b.$$

Como as direções de salto são as diagonais do retângulo, vamos representar por $\hat{\mathbf{d}}_{13}$ o unitário da diagonal da posição 1 para a posição 3 e por $\hat{\mathbf{d}}_{24}$ o unitário da posição que vai de 2 para 4. Assim, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_b &= -(-m_1 \hat{\mathbf{d}}_{13} - m_2 \hat{\mathbf{d}}_{24} + m_3 \hat{\mathbf{d}}_{13} + m_4 \hat{\mathbf{d}}_{24})v / m_b = \\ &= (70\text{kg} \hat{\mathbf{d}}_{13} + 40\text{kg} \hat{\mathbf{d}}_{24} - 50\text{kg} \hat{\mathbf{d}}_{13} - 40\text{kg} \hat{\mathbf{d}}_{24})v / m_b = \\ &= (70\text{kg} \hat{\mathbf{d}}_{13} - 50\text{kg} \hat{\mathbf{d}}_{13})v / m_b = (20\text{kg} \hat{\mathbf{d}}_{13})v / m_b = \\ &= \frac{20\text{kg}}{100\text{kg}} \times \frac{2\mathbf{m}}{\text{s}} \hat{\mathbf{d}}_{13} = 0,4 \frac{\mathbf{m}}{\text{s}} \hat{\mathbf{d}}_{13}. \end{aligned}$$

Portanto, o barco sofrerá um recuo de 0,4 m/s na direção da diagonal de 1 para 3.

E-E Exercício-exemplo 8.15

■ Um avião, cuja massa vale 10.000 kg, viaja com velocidade $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i}400$ km/h quando explode em três pedaços. Imediatamente após a explosão, o primeiro fragmento, com massa de 3.000 kg, tem velocidade $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}800$ km/h; o segundo fragmento, com massa de 5.000 kg, tem velocidade $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{j} + \mathbf{k})200$ km/h. Qual é a velocidade do terceiro fragmento logo após a explosão?

■ Solução

O momento linear do sistema se conserva na explosão, que só envolve forças internas. Sendo M a massa do avião, seu momento linear antes da explosão vale $M\mathbf{v}_0$. Podemos então escrever

$$M\mathbf{v}_0 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3.$$

Podemos agora expressar a velocidade do terceiro fragmento na forma

$$\mathbf{v}_3 = \frac{M\mathbf{v}_0 - m_1 \mathbf{v}_1 - m_2 \mathbf{v}_2}{m_3}.$$

Obviamente, a massa do terceiro fragmento é de 2.000 kg. Portanto,

$$\mathbf{v}_3 = \frac{10.000 \times 400\mathbf{i} - 3.000 \times 800\mathbf{i} - 5.000 \times 200(\mathbf{j} + \mathbf{k})}{2.000} \text{ km/h}.$$

Realizando os cálculos,

$$\mathbf{v}_3 = (800\mathbf{i} - 500\mathbf{j} - 500\mathbf{k}) \text{ km/h}.$$

Exercícios

E 8.13 Num jogo de sinuca a bola da vez é a azul. Entretanto, ela está colada na bola preta. O jogador dá uma tacada lançando a bola branca com velocidade v_0 , na direção do conjunto e a bola da vez sai na mesma direção com a mesma velocidade v_0 , enquanto que a bola preta sai com velocidade $0,11 v_0$ na direção perpendicular a v_0 . As bolas azul e preta têm a mesma massa m e a bola branca tem massa 10% maior do que as outras. Determine (A) a velocidade final da bola branca; (B) a variação de energia mecânica do sistema.

E 8.14 Três patinadores se encontram parados, juntos, em uma pista de patinação e conseguem, cada um impulsionando os outros dois, se afastar do ponto inicial em trajetórias retilíneas que fazem 120° entre si. Dois deles têm massas iguais a m e saem com velocidade v . Sabendo-se que o outro tem massa $3m/2$, qual será sua velocidade?

Seção 8.5 ■ Sistema de partículas sob ação externa

Até aqui nos restringimos a estudar as consequências da equação de movimento do centro de massa, tanto de sistemas que contêm duas partículas quanto de sistemas mais complicados, nos casos em que é nula a soma das forças externas sobre o sistema. Vamos agora analisar situações em que isso não acontece. A descrição da dinâmica do centro de massa é dada pela Equação 8.29. Ela prescreve que, independentemente da complexidade do movimento, a aceleração do centro de massa do sistema só depende da sua massa total e da força externa resultante que atua sobre ele. A Figura 8.9 mostra o movimento de uma faca atirada ao alvo. Enquanto evolui em sua trajetória, a faca gira em torno do seu centro de massa, o qual descreve uma trajetória parabólica. Isso é exatamente o que determina a Equação 8.29. A soma das forças externas que atuam sobre cada parte da faca, digamos sobre cada um dos seus átomos, dá o valor Mg , onde M é a massa da faca e g é a aceleração da gravidade. Pela Equação 8.29, o centro de massa da faca segue a parábola característica de uma partícula de massa M sujeita ao seu peso Mg .

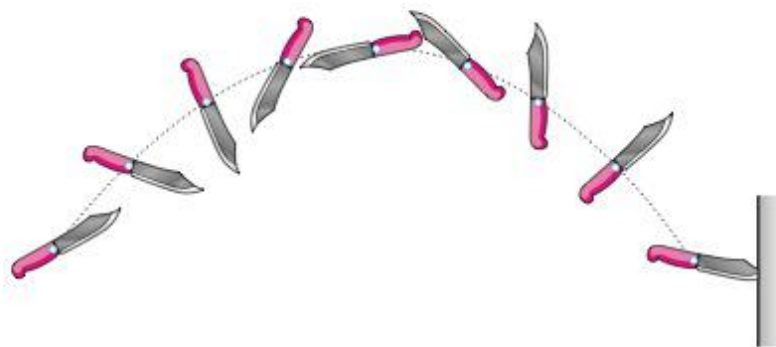


Figura 8.9

Uma faca movendo-se sob a ação da gravidade. O movimento da faca é um tanto complexo, mas o seu centro de massa, destacado com um ponto branco, move-se de forma muito simples. Este descreve uma trajetória parabólica idêntica à de uma partícula atirada no espaço.

A Equação 8.29 se aplica mesmo no caso mais geral em que o corpo em movimento tem forma variável. Isto é o que ocorre, por exemplo, com um atleta que executa um salto ornamental de trampolim. Enquanto no ar, o atleta realiza uma série de movimentos corporais que podem ser muito complexos. Entretanto, a qualquer instante é possível definir-se um centro de massa para o atleta e esse ponto se movimenta como se fosse uma partícula de massa M igual à massa total do atleta submetida a uma força Mg . Portanto, o centro de massa do atleta descreve uma parábola até o instante em que este inicia a sua penetração na água.

E-E Exercício-exemplo 8.16

■ Um avião voa na horizontal à altitude de 500 m com velocidade $v_0 = 360$ km/h quando se parte em duas partes de massas iguais (Figura 8.10). Um dos fragmentos do avião cai em um ponto 300 m à frente do ponto da explosão. Os dois fragmentos atingem o solo ao mesmo tempo. Ignorando o atrito do ar, determine em que ponto cai o outro fragmento.

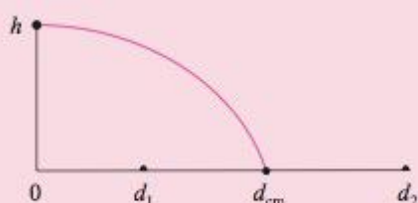


Figura 8.10

Um avião se fragmenta em duas partes de massas iguais. Seu centro de massa percorre uma trajetória parabólica até o instante em que algum dos seus fragmentos atinge o solo.

■ Solução

O centro de massa do avião segue uma órbita parabólica até o momento do impacto dos fragmentos com o solo. O tempo de queda é $\sqrt{2h/g}$, onde h é a altura do avião ao explodir. Uma vez que a componente horizontal da velocidade do cm é constante até o final da queda e igual a v_0 , sua distância percorrida na horizontal é

$$d_{\text{cm}} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{1000 \text{ms}^2}{9,81 \text{ m}}} = 1010 \text{ m}.$$

Podemos então escrever

$$d_{\text{cm}} = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \Rightarrow d_2 = 2d_{\text{cm}} - d_1 = 1720 \text{ m}.$$

Exercícios

E 8.15 *Questão:* no Exercício-exemplo 8.16, se os dois fragmentos do avião não atingissem o solo simultaneamente, a trajetória do cm seria parabólica até que os dois fragmentos estivessem no solo?

E 8.16 Um corpo de massa m cai livremente, sob a ação da gravidade, de uma posição P, a uma altura h em relação ao chão. No mesmo momento em que ele começa a cair um outro corpo de igual massa, numa posição O, na mesma altura h e a uma distância d do primeiro, é atirado com velocidade v_0 contra ele. Considerando-se $t = 0$ no instante inicial, no instante t_1 eles se chocam e permanecem grudados e no instante t_2 o conjunto cai no chão. Determine:

- (A) a posição e a velocidade iniciais do centro de massa;
- (B) a aceleração do centro de massa;
- (C) os tempos t_1 e t_2 ;
- (D) a posição em que o conjunto atingirá o solo.

Escolha O como origem de coordenadas, o eixo x apontando de O para P, e o eixo y na vertical apontando para baixo.

Seção 8.6 ■ Movimento de um foguete

Um foguete é propulsionado pelo princípio da ação e reação. Gás quente produzido na câmara de combustão é ejetado para fora do foguete com uma velocidade u em relação a este, como se vê na Figura 8.11. As partículas (moléculas) do gás expelido apresentam uma certa distribuição de velocidades. Cada molécula tem velocidade distinta, e o vetor u é apenas

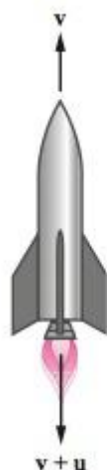


Figura 8.11

Foguete sendo propulsionado pela força de reação do gás quente ejetado pelo mesmo. O gás é expelido com uma velocidade de módulo u constante em relação ao foguete. Portanto, quando o foguete tem velocidade v em relação à plataforma, em relação a esta o gás é expelido com velocidade $v + u$.

Taxa de combustão R de um foguete é a massa de gás ejetada por unidade de tempo

o valor médio das velocidades. Dentro da câmara de combustão as moléculas também têm velocidades variáveis, com valor médio nulo em relação ao foguete. Vistas de um referencial inercial, digamos ligado à plataforma de lançamento, as moléculas têm inicialmente (antes de serem ejetadas) velocidade média igual à velocidade v do foguete e velocidade final média $v + u$. Cada molécula ejetada sofre, portanto, uma variação de momento linear igual a $m_m u$, onde m_m é a massa da molécula. É importante salientar que a variação de momento da molécula independe da velocidade do foguete. No pequeno intervalo de tempo dt é ejetada uma quantidade de gás cuja massa é igual a Rdt , onde R é a taxa de combustão. Tanto R quanto u , o módulo da velocidade de ejeção do gás, são constantes características do foguete, e assim podem-se escrever as seguintes relações para a variação da massa do foguete com o tempo:

$$dm = -Rdt \Rightarrow m(t) = m_0 - Rt, \quad (8.32)$$

onde m_0 é a massa no instante $t = 0$. Usando-se a Equação 8.7 para o sistema no intervalo de tempo dt , obtém-se

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{(m - |dm|)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + |dm|(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - m\mathbf{v}}{dt}. \quad (8.33)$$

Simplificando a Equação 8.33 teremos

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{m d\mathbf{v} + \mathbf{u} |dm| - |dm| d\mathbf{v}}{dt}. \quad (8.34)$$

O termo $|dm| d\mathbf{v}$ é muito menor que os outros, pois é um produto de duas quantidades muito pequenas. No limite em que essas quantidades tendem a zero, esse termo pode ser desprezado. Considerando que dm é negativo, substituímos $|dm|$ por $-dm$ e obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt} = \frac{m d\mathbf{v}}{dt}. \quad (8.35)$$

Esta equação evidencia que, além da força externa, o gás também exerce uma força sobre o foguete, dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{u} \frac{dm}{dt} = -\mathbf{u}R. \quad (8.36)$$

O empuxo do foguete é a intensidade da força exercida sobre ele pelo gás expelido. O empuxo é expresso por uR , onde u é a velocidade do gás expelido

O módulo da força exercida sobre o foguete pelo gás ejetado é igual a uR . A constante uR é denominada empuxo do foguete e é o que o propulsiona. O sinal negativo na Equação 8.36 pode dar a impressão de que essa força atuará no sentido de atrapalhar o movimento, mas isto não é verdade, pois o sinal negativo da velocidade relativa $\mathbf{u}$ compensará o primeiro.

Quando o foguete está livre de forças externas, ou seja, quando o momento linear do sistema como um todo se conserva, a Equação 8.35 se simplifica para

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}, \text{ ou } \frac{dv}{dm} = \frac{u}{m}. \quad (8.37)$$

No caso mais geral, a velocidade u de ejeção do gás não precisa ser antiparalela à velocidade v do foguete. A possibilidade de ejeção lateral é de fato essencial para a eventual correção de rota do foguete. Portanto, a Equação 8.37 tem que ser corretamente tratada como uma equação vetorial. No caso em que u e v são antiparalelos, essa equação pode ser tratada como uma equação escalar. Sendo i o vetor unitário na direção e sentido de v , pode-se escrever $v = v i$, $u = -u i$. Portanto, sendo v_0 a velocidade em $t = 0$, momento em que $m = m_0$, pela Equação 8.37 teremos

$$dv = -u \frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^v dv = - \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m}, \quad (8.38)$$

onde $\ln$ indica a função logaritmo neperiano. Substituindo o valor da massa obtido na Equação 8.32, teremos

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_0 - Rt}. \quad (8.39)$$

É claro que esta equação só vale até o instante em que acaba o combustível do foguete. A Figura 8.12 mostra a evolução da velocidade de um foguete, cuja taxa de combustão é $R = 0,005 m_0/s$, partindo do repouso no instante $t = 0$.

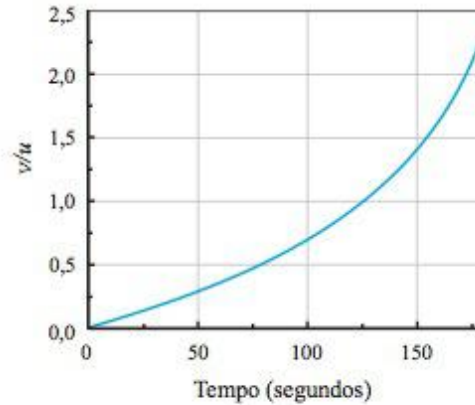


Figura 8.12

Variação no tempo da velocidade reduzida v/u de um foguete cuja taxa de combustão é $R = 0,005 m_0/s$, onde m_0 é a massa inicial do foguete. v e u são respectivamente a velocidade do foguete e a velocidade do gás expelido em relação a ele.

Pelo que acabamos de ver, a velocidade u de ejeção das partículas é o parâmetro essencial para se definir o ganho de velocidade do foguete após queimar uma certa massa de combustível. O ideal seria, portanto, que ele fosse propelido por um farol de popa muito possante. Todavia, a tecnologia atual não é capaz de produzir uma fonte de luz com a potência necessária. Ainda estamos na fase do gás quente. O item mais importante na tecnologia corrente de foguetes é o desenvolvimento de materiais capazes de resistir a temperaturas mais elevadas para a fabricação da câmara de combustão. A velocidade u de ejeção do gás cresce com o aumento da temperatura dentro da câmara.

E-E Exercício-exemplo 8.17

■ O foguete Saturno V, que lançou a nave Apolo 11 em 16/7/1969 no primeiro voo tripulado à Lua, tinha, no momento de sua arrancada, massa total de 2,77 mil toneladas e seu primeiro estágio, S-IC, levava 1,96 mil toneladas de combustível, que era ejetado à velocidade relativa de 2,58 km/s e à taxa de 12,9 toneladas por segundo. (A) Qual era o empuxo do estágio S-IC? Qual foi a aceleração do foguete (B) logo após seu lançamento e (C) ao esgotar-se o combustível do estágio S-IC? (D) Se não fosse a gravidade da Terra, qual seria a velocidade do foguete ao esgotar-se o combustível do seu primeiro estágio?

■ Solução

(A) O empuxo do estágio S-IC era

$$F = Ru = 12,9 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times 2,58 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,33 \times 10^7 \text{ N}.$$

A equação de movimento do foguete é

$$F - mg = ma,$$

$$a = \frac{F}{m} - g.$$

Colocando os números, obtemos

$$(B) \quad a = \frac{3,33 \times 10^7 \text{ N}}{2,77 \times 10^6 \text{ kg}} - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = (12,0 - 9,8) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$(C) \quad a = \frac{3,33 \times 10^7 \text{ N}}{(2,77 - 1,96) \times 10^6 \text{ kg}} - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = (41,1 - 9,8) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 31 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

(D) Ao esgotar-se o combustível do primeiro estágio, a massa do foguete é

$$m = 2,77 \times 10^3 \text{ ton} - 1,96 \times 10^3 \text{ ton} = 0,81 \times 10^3 \text{ ton}.$$

Considerando que a velocidade inicial do foguete é nula, pela Equação 8.39 obtemos

$$v = 2,58 \text{ km/s} \times \ln \frac{2,77 \times 10^3 \text{ ton}}{0,81 \times 10^3 \text{ ton}} = 3,17 \text{ km/s}.$$

Exercícios

E 8.17 Qual deve ser a relação entre a massa de um foguete com combustível e sem combustível, para que, saindo do repouso, ele possa atingir velocidade igual a $4u$? Ignore a gravidade.

E 8.18 Um foguete, que com seu combustível possui massa de 8000 kg, está posicionado verticalmente na plataforma de lançamento. Dado que o foguete pode ejetar gás à velocidade de 2000 m/s, a que taxa o gás deve ser ejetado para que o foguete arranque com aceleração igual a 3 g?

O foguete é o exemplo mais usual de vários tipos de sistemas em que a massa é variável. O foguete perde massa, e por isso usamos um dm negativo nas equações anteriores. Entretanto, vários sistemas podem ter acréscimo de massa com o tempo, e então dm será positivo. Mas, mesmo neste caso, mostra-se que a Equação 8.35 continua válida (ver Problema P 8.22). Portanto, quando um corpo recebe acréscimo de massa isso lhe imprime uma força dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{u} \frac{dm}{dt}, \quad (8.40)$$

onde $\mathbf{u}$ é a velocidade de uma pequena quantidade de massa dm em relação ao corpo, antes do acréscimo.

E-E Exercício-exemplo 8.18

■ Um barco a motor de massa igual a 100 kg está se movendo sobre a superfície de um lago com velocidade constante igual a 36 km/h. Repentinamente, sofre uma avaria que causa um pequeno buraco na parte da frente de seu casco e a água começa a entrar no barco a uma taxa de 12 l/min. Determine a potência extra solicitada ao motor para que o barco continue com a mesma velocidade.

■ Solução

Se a velocidade estava constante, então a força exercida inicialmente pelo motor se igualava em módulo às forças de atrito:

Antes: $F_m + F_a = 0 \Rightarrow \text{aceleração} = 0 \Rightarrow v = \text{constante} = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$.

Após a avaria, haverá uma força $\mathbf{F}$ exercida pela variação de massa e o motor deverá realizar uma força extra $\Delta \mathbf{F}$ igual e contrária a $\mathbf{F}$. Portanto,

$$\Delta F = -F = -u \frac{dm}{dt}. \text{ A velocidade da água em relação ao barco é } u = -v; \text{ assim,}$$

$$\Delta F = v \frac{dm}{dt} = \frac{10 \text{ m}}{\text{s}} \frac{12 \text{ kg}}{60 \text{ s}} = 2,0 \text{ N}. \text{ A potência será } P = v \Delta F = \frac{10 \text{ m}}{\text{s}} \times 2,0 \text{ N} = 20 \text{ W}.$$

Exercício

E 8.19 Uma esteira transportadora de minério tem velocidade constante de 3,0 m/s. Minério é despejado nela a uma taxa de 1000 kg/min. (A) Que força o sistema de arraste faz sobre a esteira? (B) Qual é potência exercida pelo sistema de arraste?

Seção 8.7 ■ Simetria

O conceito de simetria permeia toda a física, e talvez seja mesmo o conceito mais importante desta ciência. Cada vez se utiliza mais a simetria na investigação das leis da Natureza e na aplicação dessas leis à análise de sistemas físicos. Frequentemente, neste curso, analisaremos problemas com base em conceitos de simetria e você irá se familiarizando com a exploração da simetria nas situações mais diversas. Simetria é, na verdade, um conceito familiar às pessoas. É um conceito importante em estética. A beleza dos objetos está intimamente ligada à sua simetria. A Natureza está cheia de objetos simétricos. Várias flores, os cristais, as estrelas do mar, uma colméia, são objetos simétricos. Falamos neste caso de simetrias espaciais. Há também outros tipos de simetria. A beleza da música está associada à maneira como os conjuntos de notas se agregam em padrões com determinadas simetrias. Entretanto, se queremos transformar simetria em conceito aplicável à análise de fenômenos naturais, precisamos criar antes uma linguagem formal em que todos os termos tenham significados precisamente definidos. É o que faremos agora.

Consideremos as três bolinhas idênticas repousando nos vértices de um triângulo equilátero, como mostra a Figura 8.13. O triângulo de bolinhas cairá sobre si mesmo se alguém girá-lo de 120° no sentido horário ou anti-horário. Se você estiver olhando para o triângulo, verá que houve uma certa operação. Entretanto, se a operação for feita enquanto você estiver dando uma olhada para a janela, você será incapaz de reconhecer que a operação foi feita. Operações desse tipo são denominadas simetria, conforme a definição a seguir.

Operação de simetria sobre um sistema é qualquer operação após a qual o sistema pareça exatamente o mesmo.

Para completeza da linguagem, definimos como *operação identidade* aquela que não faz nada. Aplicar a operação identidade é sinônimo de deixar como está. Todos os sistemas

Operação de simetria sobre um sistema é qualquer operação após a qual o sistema pareça exatamente o mesmo

possuem obviamente a simetria da identidade, E. Eles parecerão sempre os mesmos se não fizermos qualquer operação sobre eles.

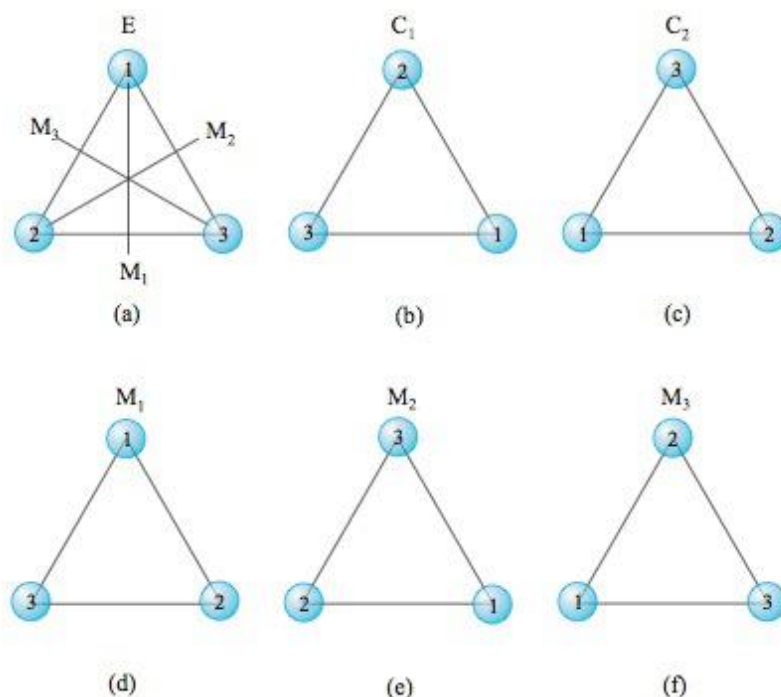


Figura 8.13

Três bolinhas idênticas se localizam nos vértices de um triângulo. Este sistema tem seis operações de simetria, que são descritas no texto. Após cada operação de simetria, o sistema assume uma das configurações mostradas na figura.

A Figura 8.13 mostra as operações de simetria do sistema de bolinhas. Para se visualizar cada operação executada, as três bolinhas foram numeradas. Após as rotações de 120° nos sentidos horário e anti-horário, o triângulo cairá nas configurações mostradas em (b) e (c), respectivamente. Denominamos tais operações C_1 e C_2 , respectivamente, e a operação identidade foi designada pelo símbolo E. Além das rotações que mencionamos, o sistema de bolinhas possui ainda três operações de simetria que são reflexões em planos indicados na Figura 8.13. Tais operações serão denominadas M_1 , M_2 e M_3 e as configurações das bolinhas após essas operações são mostradas em (d), (e) e (f). Estas são as seis operações de simetria do sistema. Elas formam o chamado **grupo de simetria** do sistema. Note-se que, se os hemisférios de cima (de fora do papel) e de baixo (de dentro do papel) forem idênticos, aparecerão ainda outras operações de simetria para o triângulo. Suporemos que os hemisférios sejam diferentes, de modo que temos somente 6 operações de simetria para o triângulo.

Existe um ramo da matemática, denominado *teoria dos grupos*, que manipula formalmente operações de simetria. O grupo das simetrias do triângulo de bolinhas discutido anteriormente é denominado C_{3v} . Com a teoria dos grupos, vários problemas de física podem ser resolvidos mais facilmente, ou então pode-se encontrar solução para problemas de outro modo insolúveis. Neste curso, exploraremos simetria sem utilizar a teoria dos grupos. Isto sem dúvida é uma exploração elementar do tema, mas mesmo assim muito compensadora.

É claro que em vez de um conjunto discreto de bolinhas poderíamos estar analisando um sistema contínuo, como, por exemplo, um bloco triangular de um certo material homogêneo. Se o triângulo for equilátero, com uma face diferente da outra, possuirá a mesma simetria do conjunto de bolinhas que analisamos.

Grupo de simetria de um sistema é o conjunto de todas as operações de simetria – operações que deixam o sistema invariante – do mesmo

No Exercício-exemplo 8.13, ao calcular a posição do centro de massa de um cone, admitimos como óbvio que tal ponto se situava sobre o eixo de simetria do cone. Veremos agora que isto pode ser demonstrado formalmente. Quando efetuamos uma operação de simetria sobre um determinado corpo, estamos simplesmente permutando suas partículas. Neste caso, o somatório da Equação 8.17 que exprime a posição do centro de massa (cm) sofrerá um mero rearranjo de seus termos e permanecerá com resultado inalterado. O mesmo argumento pode ser estendido para a integral da Equação 8.18. Vê-se assim que uma operação de simetria de um sistema não pode deslocar o seu cm. Portanto, já que em uma rotação os únicos pontos fixos estão sobre o eixo, se um sistema tiver um eixo de simetria o seu cm necessariamente se situa sobre tal eixo. Analogamente, conclui-se que, se um sistema tem um plano de simetria, seu cm se situa sobre tal plano. Considere, por exemplo, uma banana. Ela possui um plano de simetria e sobre esse plano se encontra certamente o seu cm. Quando um eixo de simetria cruza outro eixo de simetria ou um plano de simetria, fica determinado um ponto fixo das operações de simetria do sistema. Tal ponto é denominado *centro de simetria* do sistema. O cm obviamente terá que se encontrar no centro de simetria, pois, do contrário, seria deslocado por alguma operação de simetria do sistema. Olhando em retrospecto, o cm calculado no Exercício-exemplo 8.9 para um sistema de quatro partículas de massas iguais formando um quadrado se encontra realmente no centro de simetria do sistema.

E-E Exercício-exemplo 8.19

■ Determine o centro de massa dos seguintes sistemas com o auxílio de argumentos de simetria: (A) três bolinhas idênticas, com massa m cada, formando um triângulo isósceles de altura h e base de comprimento b ; (B) uma chapa com espessura e densidade uniformes, cortada no formato de um paralelogramo não-reto; (C) uma caixa cúbica de lado a , com paredes de igual espessura e mesmo material, sem a tampa superior; (D) de uma molécula de CO_2 .

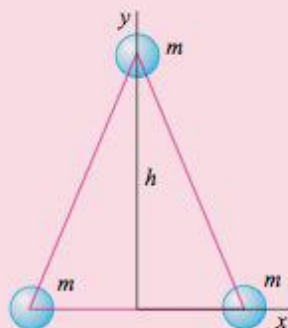


Figura 8.14
(Exercício-exemplo 8.19).

■ Solução

- (A) O triângulo isósceles tem dois lados iguais; então uma operação de rotação através de um eixo perpendicular à sua base, passando pelo seu ponto médio, deixará o sistema invariante. Pelo que vimos, esse eixo, que na Figura 8.14 é o eixo dos y , deve conter o centro de massa (cm). Assim, fica definido que $x_{\text{cm}} = 0$. Devemos agora determinar a altura y_{cm} do cm em relação à base. As duas bolinhas que estão no eixo x , pelo mesmo argumento de simetria, têm seu cm em $y = 0$. Portanto, teremos

$$y_{\text{cm}} = \frac{2m \times (0) + m \times h}{3m} = \frac{h}{3}.$$

- (B) Qualquer paralelogramo fica invariante quando é girado 180° em torno de um eixo perpendicular a ele passando pelo cruzamento de suas diagonais. Assim, esse ponto é a localização do cm.

- (C) A caixa fica invariante para rotações de $\pi/2$ em torno de um eixo perpendicular à base e ao quadrado da tampa ausente, passando pelos seus centros. Assim, o cm deve estar nesse eixo. Para encontrar sua coordenada no eixo, vamos escolher o centro da caixa como origem de coordenadas e o eixo de simetria como eixo dos z . Também o cm de cada face está em seu centro de simetria. Assim, o cm do conjunto das quatro faces laterais será no centro do cubo. Supondo que cada face tenha massa m , podemos escrever para o cm do sistema todo:

$$z_{\text{cm}} = \frac{4m \times (0) + m \times (-a/2)}{5m} = -\frac{a}{10}.$$

- (D) A molécula de CO_2 é linear com o átomo de carbono no ponto médio entre os átomos de oxigênio. Assim, o núcleo do átomo de carbono fica no centro da molécula e é um ponto fixo em várias operações que deixam a molécula invariante. Consequentemente, aí está o centro de massa.

Exercício

E 8.20 Identifique as operações de simetria que o sistema da Figura 8.4 possui, supondo que as faces visíveis e invisíveis dos corpos nela contidos sejam (A) diferentes, (B) iguais.

8.7.1 Simetrias do espaço e do tempo

Estivemos falando em simetria de objetos. Entretanto, a Natureza apresenta também outras simetrias. Algumas delas se referem às propriedades do próprio espaço. Primeiramente, o espaço parece ter *simetria de translação*, ou seja, parece ser invariante com respeito a qualquer translação. Isso significa que, se fizermos uma dada experiência e depois a repetirmos em outro ponto, obteremos o mesmo resultado. Atente-se para o fato de que repetir a experiência em um outro ponto implica transportar todo o laboratório, ou seja, tudo que possa influir no resultado. Se houver algum corpo na vizinhança que tenha alguma atuação sobre o sistema investigado, esse corpo tem que ser transportado como parte do laboratório. Por exemplo, em uma experiência sobre o comportamento de um elétron, os campos elétrico e magnético da Terra podem estar influenciando e, nesse caso, se repetirmos a experiência na Lua os resultados podem ser diferentes. Por isso, nem sempre é possível carregar todo o laboratório para outro ponto. Felizmente, porém, a Natureza faz isto continuamente por nós. O sistema solar viaja com uma velocidade de cerca de 370 km/s em relação ao conjunto das galáxias. Isto significa um deslocamento de cerca de $3,9 \times 10^{15}$ m desde a época de Newton, e jamais foi observado qualquer efeito que possa ser atribuído a esse deslocamento.

Podemos questionar com muita razão que 10^{15} m não são nada comparados com o raio do universo conhecido, que vale 10^{26} m. Permaneceria assim aberta a questão da simetria de translação do espaço na escala muito grande. Entretanto, a Natureza nos permite também a observação de fenômenos nas estrelas e galáxias e, desse modo, a investigação de como os sistemas se comportam alhures. A observação mais relevante nesse contexto é a do espectro da luz das galáxias. Os átomos emitem e absorvem luz somente em frequências bem definidas. O conjunto dessas frequências é denominado *espectro atômico*. Tal espectro é característico de cada átomo e possibilita sua identificação inquestionável. As frequências de absorção, também chamadas *raias de absorção*, contêm boa parte do espectro atômico e são suficientes para a identificação do átomo. Pois bem, a luz emitida pelas estrelas e outros objetos estelares é parcialmente absorvida pelos átomos na parte mais fria da sua atmosfera, deixando raias escuras em seu espectro. O estudo dessas raias de absorção possibilitou a obtenção de um grande número de informações sobre o nosso Universo. Em primeiro lugar, constata-se que nas estrelas existem átomos, de fato os mesmos átomos vistos aqui. Predominam os átomos

mais leves, como hidrogênio e hélio, mas toda a Tabela Periódica pode ser observada nos objetos estelares. Na verdade, conforme observou o astrônomo americano *Erwin Hubble* (1889–1953) nos anos 1920, todas as frequências de absorção de todos os átomos em uma dada galáxia parecem deslocadas de um certo fator, que é fixo e característico da galáxia. Isso provém do *efeito Doppler*, que é o deslocamento da frequência da luz ou do som quando a fonte ou o observador se desloca. Hubble observou ainda que, em média, as galáxias estão se afastando de nós, com velocidade proporcional à sua distância da Terra. Isso significa que o Universo está em expansão.

Após corrigidos para compensar o efeito Doppler, os espectros atômicos nos mais distantes pontos do Universo parecem idênticos aos obtidos de átomos aqui na Terra. Isso demonstra que as leis que determinam as propriedades dos átomos são as mesmas em qualquer ponto do Universo. Ou seja, o eletromagnetismo e a mecânica quântica daqui são os mesmos de alhures. Uma vez que a mecânica clássica, tanto a de Newton como a de Einstein, é simplesmente o limite da mecânica quântica para corpos macroscópicos, conclui-se que *as leis da física são as mesmas em qualquer ponto do espaço*. Este é o significado da *simetria de translação do espaço*.

O espaço é também isotrópico. Isto significa que, se fizermos uma experiência e depois a repetirmos com o laboratório girado, incluindo nesse tudo que possa afetar o sistema investigado, obteremos o mesmo resultado. Devido à rotação da Terra, os nossos laboratórios terrestres estão constantemente mudando de direção, mas, exceto por pequenas correções que possam ser feitas pelo fato de o laboratório não ser inercial, as experiências não são afetadas. A Terra é constantemente submetida a uma radiação eletromagnética de fundo na faixa de microondas. A radiação de fundo do Universo também é quase isotrópica, e as pequenas anisotropias são explicadas sem requerer um espaço anisotrópico.

O céu é um enorme museu. Ao contemplá-lo, estamos olhando para o passado. Quanto mais longínquo o objeto observado, mais antiga a imagem que obtemos dele. Remoto no espaço, remoto no tempo. A conexão entre os dois fatos é a velocidade da luz. Enquanto a luz do Sol viaja até nós, são decorridos mais de 8 minutos. Isso já é significativo em um pôr-do-sol. Você vê um Sol que na verdade já se pôs. A viagem da luz proveniente de Andrômeda, a grande galáxia mais próxima da nossa, leva 2 milhões de anos. A luz leva cerca de 13,7 bilhões de anos para vir até nós partindo dos objetos estelares mais longínquos. Essa é a idade do Universo. Portanto, temos o privilégio único de poder testemunhar fenômenos de um passado longínquo, e dessa forma investigar as leis da física desse passado. Dadas as evidências colhidas, parece que as leis da física não se alteraram desde a origem do Universo. Portanto, o espaço é isotrópico e homogêneo, e o tempo é homogêneo. Três importantes leis de conservação resultam dessas simetrias. A lei da conservação do momento linear decorre da simetria de translação do espaço, e a lei da conservação da energia decorre da *simetria de translação do tempo*. A simetria de rotação do espaço tem como consequência a lei da conservação do momento angular, que será estudada no Capítulo 10 (*Rotações*).

Simetria de translação do espaço.
As leis da física são as mesmas em qualquer ponto do espaço

As leis da física são as mesmas em todos os pontos do Universo observável. Além disto, tais leis independem da orientação espacial do sistema observado. Portanto, o espaço é homogêneo (invariante mediante uma translação) e isotrópico (invariante mediante uma rotação)

Simetria de translação do tempo.
As leis da física não se alteram com o passar do tempo

Simetria de rotação do espaço.
As propriedades do espaço são as mesmas em todas as direções

PROBLEMAS

P 8.1 Um jogador de futebol rola a bola (massa de 450 g) para seu parceiro com velocidade de 15 m/s. O parceiro chuta a bola com velocidade de 30 m/s em direção perpendicular à da trajetória inicial. Calcule o módulo da variação do momento linear transmitido à bola no chute.

P 8.2 A velocidade orbital da Terra é de 30 km/s. Quais são a variação do momento linear e a força média da atração do Sol sobre a Terra: (A) em um quarto de ano? (B) em um ano?

P 8.3 Uma partícula de massa m_1 e velocidade v_1 viaja na direção de outra partícula parada de massa m_2 , como mostra a Figura 8.15. Calcule as velocidades das duas partículas no referencial do centro de massa (referencial estacionário em relação ao centro de massa) do sistema.

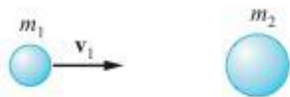


Figura 8.15
(Problema 8.3).

P 8.4 Nas proximidades da Terra, a radiação eletromagnética do Sol faz incidir uma energia igual a 1340 J por segundo em uma placa de 1 m² com face ortogonal à radiação. Para a luz, a energia e o momento linear estão ligados pela relação $E = pc$. Uma nave utiliza luz solar para se propelir, e para isto usa um espelho com 4,0 m² de área. Estando o espelho ortogonal à radiação e supondo que toda a luz incidente sobre ele seja refletida, calcule a força que a luz solar exerce sobre a nave.

P 8.5 Considerando os dados disponíveis no problema anterior, e supondo que toda a luz solar incidente sobre a Terra seja por ela absorvida, calcule a força que essa radiação faz sobre o planeta. Para você realizar o cálculo, a Terra pode ser substituída por um disco de mesmo raio, com face ortogonal à radiação.

P 8.6 Uma partícula de massa m move-se com velocidade v na direção de outra partícula parada de massa M . Calcule a energia cinética no referencial do centro de massa do sistema.

P 8.7 Um núcleo de urânio, parado, fragmenta-se em duas partes, uma partícula α e um átomo de tório. Uma quantidade E de energia é liberada na fragmentação, em forma de energia cinética das duas partes. Dado que a massa tório é cerca de 58,5 vezes a massa da partícula α , calcule a energia cinética e o momento linear das duas partículas emitidas em termos de E e da massa da partícula α .

P 8.8 A Figura 8.16 mostra um reservatório cilíndrico cujas paredes têm espessura e densidade uniformes. O reservatório tem massa m_r e contém uma massa m_a de água. Determine a posição do centro de massa do sistema, supondo que a espessura das paredes do reservatório seja muito menor do que as outras dimensões do sistema.

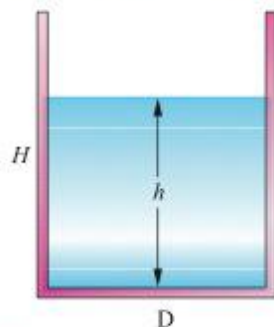


Figura 8.16
(Problema 8.8).

P 8.9 Um reservatório de água tem forma cúbica, de lado l e massa m_r (incluindo a tampa). (A) Mostre que, quando o reservatório estiver totalmente cheio e totalmente vazio, seu centro de massa é o mesmo e está em uma altura $l/2$ do fundo. (B) Então, quando o reservatório estiver totalmente vazio e começar a ser enchido de água (até uma altura h), seu centro de massa começa a baixar. Considerando que a água tem densidade ρ_a , determine a altura y_{cm} do centro de massa e mostre que ela passará por um mínimo quando seu valor coincidir com a altura h da água.

P 8.10 Considere que as massas da Terra e da Lua estivessem cada qual no centro de cada um destes corpos. (A) Determine a posição do centro de massa do sistema Terra-Lua. (B) Se a Lua, repentinamente, perdesse toda a sua velocidade orbital e começasse a cair sobre a Terra, qual seria o deslocamento de cada um desses corpos até o momento da colisão? (C) Qual seria a velocidade de cada um dos corpos no momento da colisão?

P 8.11 Determine a posição do centro de massa do hemisfério homogêneo de raio R , visto na Figura 8.17.

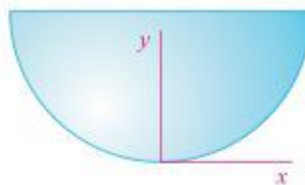


Figura 8.17
(Problema 8.11).

P 8.12* Um bloco de massa m desliza a partir do repouso sobre uma rampa de massa M , como mostra a Figura 8.18. A rampa apóia-se sobre um piso, e não há atrito entre a rampa e o piso nem entre a rampa e o bloco. Calcule (A) a energia cinética somada do bloco e da rampa quando o bloco atinge o piso. (B) A velocidade do bloco quando atinge o piso, supondo-se que $\theta = 45^\circ$. (C) A velocidade do bloco quando atinge o piso, para θ qualquer. Despreze a dimensão do bloco.

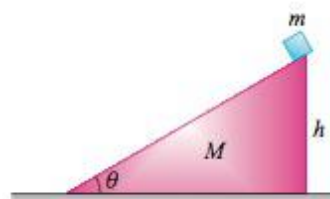


Figura 8.18
(Problema 8.12).

P 8.13 Um avião, com sua carga, tem massa igual a 5000 kg e transporta uma bomba com massa de 500 kg. O avião viaja na horizontal com a velocidade constante de 360 km/h, e no instante $t = 0$ solta sua bomba, a qual inicialmente tem a mesma velocidade do avião. Determine, em função do tempo, (A) a posição do centro de massa do sistema avião-bomba, até o instante em que a bomba atinge o solo, tomando como origem das coordenadas o ponto em que a bomba foi solta; (B) a velocidade do centro de massa.

P 8.14* A barra que liga as duas esferas da Figura 8.19 tem massa desprezível. O corpo é abandonado no instante $t = 0$, com o centro de massa parado e girando no sentido anti-horário com velocidade angular ω . A posição inicial do corpo é vista na figura. Estando o

sistema sob a ação da gravidade, calcule (A) a evolução temporal da posição do centro de massa, $\mathbf{r}_{\text{cm}}(t)$. (B) A evolução temporal da posição do centro da esfera 1, $\mathbf{r}_1(t)$.

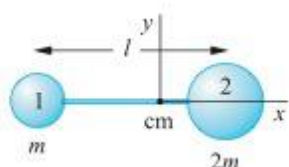


Figura 8.19
(Problema 8.14).

P 8.15 Um projétil, com velocidade de 30 m/s a um ângulo de 60° com a horizontal e à altitude de 20 m, explode em duas partes iguais. Uma delas é lançada verticalmente para cima com velocidade de 20 m/s. Qual é a distância entre os pontos em que as duas metades atingem o solo?

P 8.16 Um foguete ejeta gás à taxa $R = 10,0 \text{ kg/s}$ e velocidade relativa $u = 3000 \text{ m/s}$. (A) Qual é o empuxo sobre o foguete? Se o foguete é lançado verticalmente com velocidade inicial nula e massa inicial $m_0 = 5000 \text{ kg}$, (B) qual é a aceleração inicial do foguete? (C) Qual é a velocidade do foguete 60 s após o lançamento? Despreze a gravidade.

P 8.17 Por que um foguete com vários estágios pode atingir maiores velocidades?

P 8.18 Um foguete tem dois estágios. O primeiro tem massa de 100 toneladas, das quais 90 são de combustível, e o segundo tem massa de 12,0 toneladas, das quais 11,0 são de combustível. Ambos os estágios expõem seu gás com velocidade de 2,60 km/s. Ao completar a queima de seu combustível, o primeiro estágio é desconectado do segundo, e este começa a queimar seu combustível. (A) Qual é a velocidade do foguete quando o primeiro estágio é descartado? (B) Que velocidade terá o segundo estágio quando o seu combustível acaba? Ignore a gravidade.

P 8.19 Um bombeiro usa uma mangueira d'água para combater um incêndio. Da mangueira saem $4,0 \text{ l}$ de água por segundo, à velocidade de 15 m/s. Que força a mangueira exerce sobre o bombeiro?

P 8.20 Imagine um foguete cuja propulsão fosse realizada por um poderoso *laser* emitindo luz para trás. Sabendo-se que a energia e o momento linear de um fóton são ligados pela equação $E = pc$, onde c é a velocidade da luz, mostre que o empuxo do foguete seria $F = P/c$, onde P é a potência emitida pelo *laser*.

P 8.21 Identifique todas as operações de simetria de um cilindro.

P 8.22 Reescreva a Equação 8.33 considerando que o sistema inicial seja constituído de dois corpos, um de massa m , com velocidade v , e o outro de massa dm , com velocidade u em relação ao primeiro, e que o sistema final seja apenas um corpo de massa $m + dm$ com velocidade $v + dv$. Mostre que a Equação 8.35 continua válida para o sistema com acréscimo de massa.

P 8.23 Um caminhão anda sob a chuva com velocidade constante igual a $(25 \text{ m/s})\mathbf{i}$. O caminhão tem uma caçamba na qual caem $2,0 \text{ kg}$ de água por segundo. Segundo um observador parado na estrada, a chuva cai na direção vertical com velocidade $-(40 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Calcule a força que a água da chuva exerce sobre o caminhão.

P 8.24 Uma tábua está pendurada por um cordão de massa desprezível, sob a ação da gravidade, e um jato de água incide sobre ela, de baixo para cima, fazendo um ângulo θ com a vertical. O jato foi controlado de modo que a tábua fica em equilíbrio quando o cordão também faz com a vertical o mesmo ângulo θ . Sabendo que esse ângulo é igual a $11,5^\circ$, a vazão do jato é de 12 l/min e sua velocidade ao atingir a tábua é de 10 m/s , determine a massa da tábua, supondo que o jato não reflete após incidir sobre a tábua.

P 8.25* Considere um foguete lançado verticalmente, e leve em conta o efeito da gravidade sobre seu movimento. (A) Escreva a equação de movimento para o foguete (na Equação 8.35 a força externa será a da gravidade). (B) Após integrar essa equação, utilize a relação 8.32 para $m(t)$ e encontre $v(t)$.

Respostas dos exercícios

E 8.1 (A) $2,7 \times 10^{-24} \text{ N}\cdot\text{s}$; (B) $1,8 \times 10^{-29} \text{ N}\cdot\text{s}$

E 8.2 (A) $13,5 \text{ N}\cdot\text{s}$; (B) $6,75 \text{ kN}$

E 8.3 28 N

E 8.5 25 m

E 8.6 (A) $2,8 \text{ m}$ em sentido oposto ao do pescador; (B) $1,9 \text{ m/s}$

E 8.7 (A) 88 km/h ; (B) 88 km/h

E 8.8 (A) $(420\mathbf{i} + 210\mathbf{j}) \text{ km/h}$; (B) Não

E 8.9 Não, a velocidade seria desprezível devido à diferença de massas entre a bala e a pessoa.

E 8.10 $\mathbf{i}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

E 8.11 $0,4a$ acima do fundo no eixo central perpendicular a ele.

E 8.12 $\frac{\sqrt{6}}{8}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

E 8.13 (A) $(0,09\mathbf{i} - 0,1\mathbf{j})v_0$; (B) $\Delta E = -6,2\% E_0 = -0,062 \frac{1,1mv_0^2}{2}$

E 8.14 $2v/3$

E 8.15 Não; no momento em que um fragmento atinge o solo, este faz uma força externa sobre o fragmento, anulando sua velocidade.

E 8.16 (A) $\mathbf{r}_{\text{cm}}(0) = \frac{d}{2}\mathbf{i}$; $\mathbf{v}_{\text{cm}}(0) = \frac{v}{2}\mathbf{i}$; (B) $-g\mathbf{j}$;

(C) $t_1 = \frac{d}{v}$; $t_2 = \sqrt{2h/g}$; (D) $\mathbf{r}_f = \left(\frac{v}{2}\sqrt{2gh} + \frac{d}{2}\right)\mathbf{i} - h\mathbf{j}$

E 8.17 $m_0 = 55 m_f$

E 8.18 157 kg/s

E 8.19 (A) 50 N ; (B) 150 W

E 8.20 (A) $M \equiv$ reflexão no plano vertical passando pela bolinha de maior massa;

(B) M (definido na letra A); $M' \equiv$ reflexão no plano do desenho que leva as faces frontais das bolinhas nas de trás e vice-versa; $C_2 \equiv$ rotação de 180° em torno do eixo paralelo a y que passa pela bolinha de maior massa.

Respostas dos problemas

P 8.1 15 Ns

P 8.2 $|\Delta \mathbf{p}| = 2,5 \times 10^{20}$ Ns; $|\vec{F}| = 4,6 \times 10^{22}$ NP 8.3 $v'_1 = m_2 v_1 / (m_1 + m_2)$; $v'_2 = m_1 v_1 / (m_1 + m_2)$ P 8.4 $3,6 \times 10^{-5}$ NP 8.5 $5,7 \times 10^8$ NP 8.6 $\frac{1}{2} \frac{mMv^2}{M+m}$ P 8.7 $E_\alpha = 0,98E$; $E_{Th} = 0,017E$; $|p_\alpha| = |p_{Th}| = 1,40\sqrt{m_\alpha E}$ P 8.8 $\frac{2m_r H^2 + m_a h}{m_r + m_a}$ P 8.9 (B) $y_{cm} = \frac{1}{2} \frac{m_r \ell + \rho_a \ell^2 h^2}{m_r + \rho_a \ell^2 h}$ P 8.10 (A) $4,64 \times 10^6$ m do centro da Terra; (B) Terra: $4,54 \times 10^6$ m; Lua: $3,7 \times 10^8$ m; (C) Terra: 18m/s; Lua: 1,4 km/sP 8.11 $\left(0, \frac{5}{8}R, 0\right)$ P 8.12 (A) $K = mgh$; (B) $\sqrt{2gh \frac{2\alpha^2 + 2\alpha + 1}{(\alpha + 1)(2\alpha + 1)}}$ (C) $v = \sqrt{2gh \frac{\alpha^2 + (1+2\alpha)\sin^2 \theta}{(\alpha + 1)(\alpha + \sin^2 \theta)}}$, onde $\alpha \equiv m/M$.P 8.13 (A) $\mathbf{r}_{cm} = 190 \frac{m}{s} t - \mathbf{j} \frac{gt^2}{20}$; (B) $\mathbf{v}_{cm} = 1100 \frac{m}{s} - \mathbf{j} \frac{gt}{10}$ P 8.14 (A) $\mathbf{r}_{cm} = -\mathbf{j} \frac{gt^2}{2}$ (B) $\mathbf{r}_l = -\mathbf{i} \frac{2}{3} l \cos \omega t - \mathbf{j} \left(\frac{gt^2}{2} + \frac{2}{3} l \sin \omega t \right)$ P 8.15 $d = 213$ mP 8.16 (A) 30,0 kN; (B) 6,0 m/s²; (C) 385 m/s

P 8.17 Porque ao descartar estágios com combustível esgotado sua massa diminui.

P 8.18 (A) $v = 4,23$ km/s. (B) $V = 10,7$ km/s.

P 8.19 60 N

P 8.21 (A) Rotação de qualquer ângulo em torno de seu eixo; (B) reflexão em qualquer plano contendo o seu eixo; (C) rotação de 180° em torno de qualquer reta ortogonal ao seu eixo e passando pelo seu centro.

P 8.23 $\mathbf{F} = -(50\mathbf{i} + 80\mathbf{j})$ N

P 8.24 400 g



Colisões

Seção 9.1 ■ O que é colisão, 198

Seção 9.2 ■ Leis de conservação e colisões, 198

Seção 9.3 ■ Colisões em uma dimensão, 200

Seção 9.4 ■ Colisões elásticas em duas dimensões (opcional), 206

Problemas, 208

Respostas dos exercícios, 209

Respostas dos problemas, 210

Seção 9.1 ■ O que é colisão

Uma colisão é uma interação com duração limitada entre dois ou mais corpos. O choque entre duas bolas de sinuca é um exemplo de colisão. As bolas se aproximam uma da outra, interagem fortemente entre si durante o choque e em seguida se afastam. Neste caso, o termo colisão tem o mesmo significado que na linguagem comum. Em outras situações, entretanto, o termo colisão tem em física significado distinto do que se entende no dia-a-dia. Se um meteoro vindo de um ponto distante se aproxima da Terra e depois se afasta da sua influência, a interação temporária entre o meteoro e a Terra é, em física, também chamada colisão. Não se requer que haja um contato entre os dois corpos nem que a interação dure muito pouco. O importante é que haja uma interação para a qual se possa definir um antes e um depois. Neste capítulo, estudaremos colisões envolvendo somente dois corpos. Estes estarão livres de qualquer força externa não-neutralizada, ou seja, a resultante das forças externas que atuam sobre qualquer deles será nula. Ou então as forças externas que atuam sobre o sistema serão muito menores que as forças envolvidas na colisão, de modo que possam ser desprezadas durante a colisão. Por exemplo, na colisão de uma bola contra uma parede pode-se ignorar, sem muito erro, a força da gravidade que atua sobre a bola.

Seção 9.2 ■ Leis de conservação e colisões

A utilidade das leis de conservação no estudo das colisões destaca-se imediatamente: as grandezas que se conservam têm os mesmos valores antes e depois da colisão. Frequentemente, isto é o bastante para a obtenção dos resultados desejados

A determinação completa do movimento das partículas envolvidas em uma colisão é um problema de mecânica muitas vezes de difícil solução ou até mesmo insolúvel na prática. Entretanto, muito frequentemente não estamos interessados na evolução do sistema durante a colisão, mas somente em estabelecer relações entre os estados do sistema antes e depois da mesma. As relações pretendidas podem frequentemente ser obtidas pela mera aplicação das leis de conservação da física. Há em física muitas grandezas que se conservam, ou seja, que se mantêm constantes em um sistema isolado. Já estudamos duas grandezas que se conservam: energia e momento linear. No Capítulo 10 (*Rotações*), estudaremos outra grandeza que se conserva, o momento angular. Momento angular é uma grandeza associada ao movimento de rotação dos corpos. No estudo de colisões entre partículas atômicas e subatômicas, são consideradas várias outras grandezas que se conservam, muitas das quais serão estudadas mais adiante neste livro. A utilidade das leis de conservação no estudo das colisões pode ser antecipada de modo óbvio: tais grandezas não se alteram durante a colisão e terão portanto o mesmo valor antes e depois desta. Frequentemente, isto é o bastante para a obtenção dos resultados desejados. Neste capítulo, utilizaremos as leis de conservação da energia e do momento linear no estudo de colisões. No próximo capítulo veremos como a investigação pode ser ampliada e aprofundada pela utilização da lei da conservação do momento angular.

9.2.1 Conservação de momento

Na Seção 9.1 (*O que é colisão*) vimos que, durante uma colisão, as forças externas sobre o sistema ou são nulas ou podem ser desprezadas. Sabemos do Capítulo 8 (*Conservação do Momento*) que, durante o processo em que se considera $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$, o momento total $\mathbf{P}$ do sistema é constante. Assim, o momento inicial $\mathbf{P}_i$ antes da colisão é igual ao momento final $\mathbf{P}_f$ depois da colisão. Supondo-se massas m_1 e m_2 para os dois corpos que colidem, esta relação se exprime matematicamente por

$$\mathbf{P}_{1f} + \mathbf{P}_{2f} = \mathbf{P}_{1i} + \mathbf{P}_{2i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} = m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i}. \quad (9.1)$$

9.2.2 Conservação de energia (colisões elásticas e inelásticas)

A energia se conserva em qualquer colisão. Entretanto, frequentemente pelo menos um dos corpos que colidem altera seu estado interno e com isto muda a sua *energia interna* no processo de colisão. Devido a isso, a energia mecânica, ou seja, a soma das energias potencial

Colisão elástica é aquela na qual a energia mecânica é conservada

Colisão inelástica é aquela na qual a energia mecânica não é conservada

e cinética do sistema, não se conserva. Considere, por exemplo, uma colisão entre dois carros. O processo envolve aquecimento e deformação dos carros, o que rouba parte significativa da energia cinética do sistema. Após a colisão, os carros terão sua energia mecânica reduzida. Dois carros em colisão são um exemplo do que se denomina *sistema complexo*. Para se saber o resultado da colisão, é melhor fazer a experiência, como se faz frequentemente na indústria automobilística. Uma colisão em que a energia mecânica é conservada denomina-se **colisão elástica**. No caso da colisão do meteoro com a Terra, citado na Seção 9.1 (*O que é colisão*), se o meteoro não chegar a penetrar na atmosfera a colisão será elástica. Numa colisão de bolas de sinuca, a perda de energia cinética das bolas é mínima e a colisão pode ser aproximada por uma colisão elástica. A colisão de uma bola de basquete com o piso da quadra é inelástica e por isso a bola sobe com velocidade menor do que desceu. Quanto maior a pressão do ar no interior da bola, mais a colisão se aproxima da condição elástica.

Uma colisão em que a energia mecânica não é conservada denomina-se **colisão inelástica**. Nas experiências do dia-a-dia, é muito mais comum que a energia mecânica decresça. Isso ocorre porque a colisão gera calor nos corpos envolvidos, usando para isso uma parte da energia mecânica. O processo imaginário em que na colisão os corpos macroscópicos se esfriariam, cedendo assim parte da sua energia interna para que a energia mecânica aumentasse, não ocorre na Natureza. A razão por que isso não ocorre será estudada na parte deste livro que trata da Termodinâmica. Porém, para sistemas microscópicos, na escala atômica, são frequentes processos de colisão em que parte da energia interna de um dos corpos é cedida para que o sistema aumente sua energia mecânica.

O balanço de energia durante uma colisão pode se expressar na seguinte forma:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 - \Delta U, \quad (9.2)$$

onde ΔU representa a perda de energia mecânica ou o aumento da energia interna do sistema. Note-se que, nessa equação, quando o sistema diminui a sua energia interna, ou seja, $\Delta U < 0$, a energia cinética aumenta no processo de colisão. E, quando $\Delta U = 0$, a colisão é elástica.

As Equações 9.1 e 9.2 formam a base para a solução dos problemas de colisão entre dois corpos.

E-E Exercício-exemplo 9.1

- Mostre que a Equação 9.1 é invariante a uma mudança de referencial.

■ Solução

Suponha que queiramos analisar a colisão em um referencial R2 que se move com velocidade $\mathbf{v}_o$ em relação ao referencial R1 utilizado para escrever a Equação 9.1. Assim as velocidades $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ de um corpo em relação a R1 e R2, respectivamente, se relacionam por $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_o$. Aplicando esta relação às velocidades das partículas antes e após o choque na Equação 9.1 teremos:

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{v}'_{1f} + \mathbf{v}_o) + m_2(\mathbf{v}'_{2f} + \mathbf{v}_o) &= m_1(\mathbf{v}'_{1i} + \mathbf{v}_o) + m_2(\mathbf{v}'_{2i} + \mathbf{v}_o) \Rightarrow \\ m_1\mathbf{v}'_{1f} + m_2\mathbf{v}'_{2f} + (m_1 + m_2)\mathbf{v}_o &= m_1\mathbf{v}'_{1i} + m_2\mathbf{v}'_{2i} + (m_1 + m_2)\mathbf{v}_o \Rightarrow \\ m_1\mathbf{v}'_{1f} + m_2\mathbf{v}'_{2f} &= m_1\mathbf{v}'_{1i} + m_2\mathbf{v}'_{2i} \end{aligned}$$

Observe que na mudança de referencial o momento linear total, tanto antes quanto depois da colisão, se modifica.

Exercício

E 9.1 Mostre, usando as Equações 9.1 e 9.2, que uma mudança de referencial não modifica o valor de ΔU .

Seção 9.3 ■ Colisões em uma dimensão

Quando duas partículas sofrem uma colisão frontal, todo o movimento, tanto antes como depois da colisão, ocorrerá em uma única direção. Esta é uma colisão em uma dimensão e as velocidades poderão ser então manipuladas como grandezas escalares. Analisaremos primeiramente colisões em uma dimensão e deixaremos a análise de colisões em duas dimensões para uma seção posterior.

E-E Exercício-exemplo 9.2

■ Uma bola com massa de 100 g é atirada com uma velocidade de 5,00 m/s contra outra bola com massa de 250 g que se encontra em repouso. Após uma colisão frontal a bola que estava parada adquire uma velocidade igual a 1,60 m/s na mesma direção e no mesmo sentido da primeira. (A) Calcule a velocidade da primeira bola após o choque. (B) Analise o balanço energético dessa colisão.

■ Solução

(A) Utilizando índices 1 e 2 para a primeira e a segunda bolas, respectivamente, a relação de conservação do momento nos permite determinar v_{1f} :

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} \Rightarrow 100g \times v_{1f} + 250g \times 1,60 \text{ m/s} = 100g \times 5,00 \text{ m/s}$$

$$v_{1f} = \frac{100 \times 5,00 \text{ m/s} - 250 \times 1,60 \text{ m/s}}{100} = 1,00 \text{ m/s}$$

A primeira bola continua no mesmo sentido, porém com velocidade menor.

(B) As energias cinéticas inicial e final do sistema são, respectivamente:

$$K_i = \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} = \frac{100g \times (5,00 \text{ m/s})^2}{2} = \frac{0,100 \text{ kg} \times 25,0 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2} = 1,25 \text{ J.}$$

$$K_f = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2} = \frac{0,100 \text{ kg} \times (1,00 \text{ m/s})^2}{2} + \frac{0,250 \text{ kg} \times (1,60 \text{ m/s})^2}{2} = 0,740 \text{ J.}$$

Vemos que o choque é inelástico porque o sistema perdeu energia mecânica. O valor da perda é $\Delta U = K_i - K_f = 1,25 \text{ J} - 0,740 \text{ J} = 0,51 \text{ J}$.

E-E Exercício-exemplo 9.3

■ Uma bola com massa de 200 g, com velocidade de 20 m/s, colide frontalmente com outra bola com massa de 400 g, em repouso, e na colisão o sistema perde metade de sua energia cinética. Calcule as velocidades das bolas após a colisão.

■ Solução

As equações que exprimem a conservação do momento linear e a perda de metade da energia cinética são vistas a seguir:

$$m v_{1f} + 2m v_{2f} = m v_{1i}; \quad m v_{1f}^2 + 2m v_{2f}^2 = \frac{m v_{1i}^2}{2}.$$

Deve-se notar que o valor $m = 200 \text{ g}$ da bola mais leve pode ser eliminado das equações. Isso significa que somente a razão entre as duas massas afeta o resultado dos cálculos. Resolvendo esse par de equações, e observando que $v_{1f} \leq v_{2f}$ (porque a primeira bola não pode passar adiante da segunda), obtemos

$$v_{1f} = 0, \quad v_{2f} = \frac{v_{1i}}{2} = 10 \text{ m/s.}$$

E-E Exercício-exemplo 9.4

■ Uma bola de massa m e velocidade v_o realiza uma colisão unidimensional com outra bola de massa $2m$, em repouso. Após o choque, a primeira bola recua com velocidade igual a $-v_o/3$. Determine a velocidade final da segunda bola e a perda de energia mecânica do sistema.

■ Solução

Conservação de momento: $m(-v_o/3) + 2m v_{2f} = m v_o \Rightarrow v_{2f} = 2v_o/3$.

$$\Delta U = K_i - K_f = \frac{m v_o^2}{2} - \left(\frac{m(-v_o/3)^2}{2} + \frac{2m(2v_o/3)^2}{2} \right) = 0.$$

Não houve perda de energia e, assim, a colisão é elástica.

E-E Exercício-exemplo 9.5

■ Um átomo de hidrogênio, com velocidade de 30 km/s, colide frontalmente com outro átomo de hidrogênio inicialmente em repouso. Um dos átomos estava com seu elétron no primeiro nível excitado. Com a colisão, o elétron decai e a energia interna do átomo diminui em $16,3 \times 10^{-19}$ J. Calcule as velocidades dos átomos após a colisão, dado que a massa do átomo de hidrogênio vale $1,67 \times 10^{-27}$ kg.

■ Solução

As Equações 9.1 e 9.2, alimentadas com os dados

$$v_{2i} = 0, \quad m_1 = m_2, \quad \Delta U = -16,3 \times 10^{-19} \text{ J},$$

resultam em

$$v_{1f} + v_{2f} = v_{1i}$$

$$v_{1f}^2 + v_{2f}^2 = v_{1i}^2 + 2v^2,$$

onde

$$v = \sqrt{\frac{-\Delta U}{m}} = 31,2 \text{ km/s}.$$

Esse sistema de equações pode ser resolvido pelas técnicas usuais, do que resulta

$$v_{1f} = \frac{v_{1i}}{2} - \sqrt{\frac{v_{1i}^2}{4} + v^2}$$

$$v_{2f} = \frac{v_{1i}}{2} + \sqrt{\frac{v_{1i}^2}{4} + v^2}$$

Colocando-se os números nas equações acima, obtém-se

$$v_{1f} = -19,6 \text{ km/s}, \quad v_{2f} = 49,6 \text{ km/s}.$$

Exercícios

E 9.2 Duas bolas idênticas de massa m , uma com velocidade v e a outra em repouso, colidem entre si frontalmente. Na colisão, uma fração f da energia cinética do sistema é transformada em calor. Calcule as velocidades finais das duas bolas.

E 9.3 Uma molécula de oxigênio (O_2), inicialmente à velocidade de 1000 m/s, colide frontalmente com outra molécula de oxigênio parada. Uma das moléculas, antes da colisão, estava em um estado de vibração, cuja energia é $3,09 \times 10^{-20}$ J. Com a colisão, a energia contida na vibração é transformada em energia cinética de translação das moléculas. Sendo $5,31 \times 10^{-26}$ kg a massa da molécula de O_2 , calcule as velocidades das duas moléculas após a colisão.

9.3.1 Colisão inelástica com máxima perda de energia

Um tipo de colisão muito freqüente é aquele em que as duas partículas ficam ligadas uma à outra após o choque. Neste caso, $v_{2f} = v_{1f} = v_f$, e pode-se demonstrar que o valor da perda ΔU de energia cinética do sistema é maior do que seria se as velocidades finais fossem diferentes. Se a partícula 2 está inicialmente parada e a partícula 1 tem velocidade v , a equação que exprime a conservação do momento fica na forma

$$(m_1 + m_2) v_f = m_1 v \Rightarrow v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (9.3)$$

As energias cinéticas inicial e final do sistema serão, respectivamente,

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v^2; \quad K_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2. \quad (9.4)$$

Substituindo v_f obtido da Equação 9.3 na Equação 9.4, obtemos

$$K_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2. \quad (9.5)$$

A energia perdida no sistema será

$$\Delta U \equiv K_i - K_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K_i. \quad (9.6)$$

Note-se que quanto se perde de energia depende da razão entre a massa da partícula inicialmente em movimento e a massa do corpo final. Percebe-se aqui uma assimetria muito curiosa. Considere uma bala atingindo uma caixa inicialmente parada. Depois do impacto, a caixa, com a bala em seu interior, terá uma pequena velocidade e quase toda a energia cinética inicial terá se transformado em calor. Imagine agora o mesmo fenômeno visto por um observador que esteja passando pelo local com velocidade igual à velocidade inicial da bala. O seu relato dos fatos é: uma bala flutuava no ar, quando foi colhida por uma caixa voando em altíssima velocidade. A caixa levou consigo a bala, praticamente sem alteração de velocidade. Uma fração reduzidíssima de sua energia cinética foi transformada em calor. Parece paradoxal, mas não é. Você pode fazer as contas e conferir que essa fração reduzidíssima da energia da caixa que é transformada em calor equivale exatamente à quase-totalidade da energia da bala que o primeiro observador viu ser transformada em calor. Portanto, o calor gerado será visto como o mesmo pelos dois observadores. (Veja Exercício 9.1.)

E-E Exercício-exemplo 9.6

■ Uma bola com velocidade de 10 m/s desliza sem atrito num piso plano e choca-se frontalmente com outra que se encontrava parada. As massas das bolas são 200 g, e 300 g, respectivamente. Encontre a perda de energia do sistema para os seguintes casos: (A) as duas bolas se colam durante o choque; (B) a primeira bola pára ao lançar a segunda para a frente.

■ Solução

(A) A energia inicial é $K_i = 0,200 \text{ kg} \times (10 \text{ m/s})^2 / 2 = 10 \text{ J}$. De acordo com a Equação 9.6, a perda de energia será

$$\Delta U = \frac{300 \text{ g}}{200 \text{ g} + 300 \text{ g}} K_i = \frac{3}{5} K_i = 6,0 \text{ J}.$$

(B) Se a primeira bola pára, então, pela conservação do momento, temos $m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i}$ e, assim, $v_{2f} = (200 \text{ g} / 300 \text{ g}) v_{1i} = 2 v_{1i} / 3$. A energia final será então $K_f = 2 m_2 v_{1i}^2 / 9$. A energia perdida será $\Delta U = m_1 v_{1i}^2 / 2 - 2 m_2 v_{1i}^2 / 9$. Assim teremos

$$\Delta U = \left(\frac{0,200}{2} - \frac{2 \times 0,300}{9} \right) \text{ kg} \times (10 \text{ m/s})^2 = 0,33 \text{ J}.$$

Observe que este resultado é menor que o obtido na primeira parte do problema, como deveria ser.

Exercícios

E 9.4 A Figura 9.1 mostra um esquema do *pêndulo balístico*, que pode ser utilizado para medir a velocidade de um projétil, por exemplo uma bala. Esta, com massa m e velocidade v , atinge um bloco de massa M , suspenso por um fio de comprimento l , e fica incrustada nele. Observa-se o ângulo máximo θ alcançado pelo pêndulo. Calcule a velocidade v em função das outras variáveis do sistema.

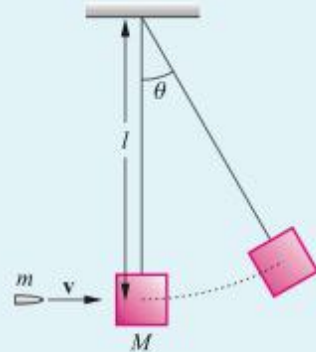


Figura 9.1

Pêndulo balístico. (Exercício 9.4).

E 9.5 Refaça a análise da Seção 9.3.1 (*Colisão inelástica com máxima perda de energia*) no referencial do centro de massa das duas partículas: encontre a velocidade do centro de massa (cm), as velocidades iniciais v'_{1i} , v'_{2i} e a final v'_f em relação ao cm e as energias cinéticas inicial e final (K'_i , K'_f), e a energia perdida $\Delta U'$. Compare este último resultado com o obtido na Equação 9.6.

9.3.2 Colisões elásticas em uma dimensão

Consideremos agora o caso particular de duas partículas de massas m_1 e m_2 sofrendo uma colisão elástica frontal. Em muitas situações de interesse, uma das partículas, digamos a partícula 2, está parada antes da colisão. De qualquer modo, se a partícula 2 tiver uma velocidade $v_{2i} \neq 0$ em relação ao laboratório, pode-se escolher outro sistema inercial que também se desloque com velocidade v_{2i} em relação ao laboratório. Neste referencial, a partícula 2 estará inicialmente parada. Portanto, a hipótese de que a partícula 2 está parada não implica qualquer perda de generalidade. Supondo que a velocidade inicial da partícula 1 é v e usando as leis de conservação do momento linear e da energia mecânica, obtemos

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v, \quad (9.7)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2. \quad (9.8)$$

Temos aí um sistema de duas equações com duas incógnitas v_{1f} e v_{2f} . Resolvendo o sistema, obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad (9.9)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (9.10)$$

Observa-se destas equações que v_{2f} sempre tem o mesmo sentido de v . Entretanto, se $m_1 < m_2$, a partícula 1 inverte o sentido da sua velocidade. Nesse caso, a partícula 1 colide e volta. Um caso particular de interesse é o de partículas de massas iguais, $m_1 = m_2$. Nesse caso,

■ Colisão em que $m_1 = m_2$

$$v_{1f} = 0, \quad v_{2f} = v. \quad (9.11)$$

Essas equações mostram que a partícula 1 fica parada e transmite todo o seu movimento para a partícula 2. A Figura 9.2 mostra o movimento das partículas antes e depois da colisão, para as três relações possíveis entre m_1 e m_2 .

Dois casos-limite de colisão também merecem ser discutidos. No primeiro caso, a partícula 1 tem massa muito menor que a partícula 2, $m_1 \ll m_2$. Neste caso, podemos desprezar m_1 nas Equações 9.9 e 9.10 para obter

■ Colisão em que $m_1 \ll m_2$
$$v_{1f} = -v, \quad v_{2f} = 0. \quad (9.12)$$

Neste caso, a partícula 1 simplesmente inverte o sentido do seu movimento enquanto a partícula 2 permanece parada. Isso é o que acontece quando uma bola de sinuca bate na tabela da mesa, ou quando uma bola de basquete cai, batendo no piso. Aquela colisão se aproxima muito mais da condição elástica do que esta. Por isso, a bola de basquete retorna com velocidade bastante reduzida.

No segundo caso-limite, a partícula 1 tem massa muito maior que a partícula 2. Agora, m_2 é que deve ser desprezada nas Equações 9.9 e 9.10, resultando em

■ Colisão em que $m_1 \gg m_2$
$$v_{1f} = v, \quad v_{2f} = 2v. \quad (9.13)$$

Se a colisão de um carro com um pedestre fosse elástica, o pedestre seria lançado com o dobro da velocidade do carro. Isso ilustra a extraordinária intensidade do impacto

A partícula 1 mantém a sua velocidade e a partícula 2 adquire velocidade igual ao dobro da velocidade da partícula 1. Isto é o que acontece na colisão de um taco de sinuca com a bola. Aconteceria também na colisão de um carro com um pedestre, se a colisão fosse elástica.

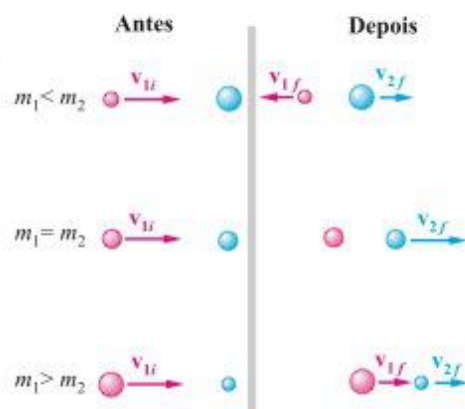


Figura 9.2

Colisão elástica frontal de uma partícula de massa m_1 com velocidade v com outra partícula parada de massa m_2 . As três possibilidades para a relação entre as duas massas são ilustradas.

Exercícios

E 9.6 Analise o resultado da Equação 9.12 com relação à conservação do momento.

E 9.7 Analise o resultado da Equação 9.13 com relação à conservação de energia. Lembre-se de que o choque é elástico.

Em astronáutica, a colisão elástica entre corpos de massas muito desiguais é utilizada para aumentar a velocidade de uma nave. Do ponto de vista energético, o que interessa em uma nave é o módulo da sua velocidade, que define a energia cinética. Mudar a direção do movimento da nave não custa energia. Por isso costuma-se provocar colisões de naves com planetas para aumentar a energia daquelas. A nave se aproxima do planeta com velocidade oposta à deste, conforme visto da Terra. Vistos daqui, a nave tem velocidade inicial v_i e o planeta tem velocidade $-V$. Vistos de um referencial fixo no planeta, a nave tem velocidade inicial dada por

$$v'_i = v_i + V. \quad (9.14)$$

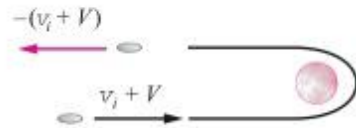
A nave contorna o planeta sob o efeito da gravidade deste e retorna na direção oposta àquela em que veio. Isso é uma colisão elástica que pode ser tratada como unidimensional. No referencial do planeta, a nave retorna com velocidade dada por

$$v'_f = -v'_i = -(v_i + V). \quad (9.15)$$

A Figura 9.3 mostra a colisão, vista nos referenciais do planeta e da Terra. No referencial da Terra, a nave retorna com velocidade dada por

$$v_f = v'_f - V = -(v_i + 2V). \quad (9.16)$$

Referencial do planeta



Referencial da Terra

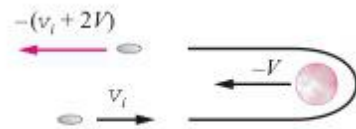


Figura 9.3

Colisão de uma nave com um planeta movendo-se com velocidade $-V$ em relação à Terra, vista nos referenciais da Terra e do planeta. No referencial da Terra, a nave inicia a colisão com velocidade v_i e ao final terá velocidade $-(v_i + 2V)$.

E-E Exercício-exemplo 9.7

■ Júpiter tem uma velocidade orbital de 13 km/s, vista de um referencial no Sol. Uma nave, cuja velocidade em relação ao Sol é inicialmente de 20 km/s, contorna Júpiter da maneira ilustrada na Figura 9.3. Calcule a velocidade, em relação ao Sol, atingida pela nave após livrar-se da influência de Júpiter.

■ Solução

Temos aqui uma aplicação imediata da Equação 9.16. Fazendo $v_i = 20$ km/s e $V = 13$ km/s, obtemos

$$v_f = 20 \text{ km/s} + 2 \times 13 \text{ km/s} = 46 \text{ km/s}$$

Note-se que o sinal de menos na velocidade final foi desconsiderado.

Exercícios

E 9.8 Resolva o problema da colisão entre uma nave e um planeta, tratado na Seção 9.5, 9.3.2 (*Colisões elásticas em uma dimensão*) no referencial em que a nave está parada. Neste caso, você estará usando o limite da colisão em que a partícula 2 (alvo) tem massa desprezível em relação à massa da partícula 1 (projétil).

E 9.9 A colisão elástica entre uma nave e um planeta poderia ser também utilizada para diminuir a velocidade da nave? Explique.

A colisão elástica em uma dimensão foi analisada para situações em que $v_{2i} = 0$. Nessas situações as velocidades finais são dadas pelas Equações 9.9 e 9.10. Para situações em que ambas as partículas estavam inicialmente em movimento, as mesmas equações podem ser usadas se combinadas com uma mudança de referencial. Para explicitar esta questão vamos considerar que duas partículas 1 e 2 com velocidades iniciais V_{1i} e V_{2i} em uma mesma reta sofrem uma colisão frontal, elástica, e que queiramos determinar as velocidades V_{1f} e V_{2f} das duas partículas. Vamos definir que essas velocidades V estão relacionadas com um referencial R1 e que em outro referencial R2 as velocidades sejam v_{1f}, v_{2f}, v_{1i} e v_{2i} e que a condição $v_{2i} = 0$ seja satisfeita. Isto significa que no referencial R2 as Equações 9.9 e 9.10 são válidas. Mas, para que $v_{2i} = 0$ seja válida, o referencial R2 deve ter uma velocidade V_{2i} em relação ao referencial R1, de modo que qualquer velocidade v em R2 seja igual a V de R1 menos V_{2i} . Assim, se substituirmos nas Equações 9.9 e 9.10 todas as velocidades v por $V - V_{2i}$, teremos as seguintes relações válidas para um referencial genérico:

$$V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2i}, \quad (9.17)$$

$$V_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1i}. \quad (9.18)$$

Exercícios

E 9.10 Duas partículas, de massas m_1 e m_2 , colidem frontalmente e de forma elástica com velocidade relativa v . Calcule (A) as velocidades das duas partículas e (B) o momento linear total do sistema, antes e após a colisão, no sistema ligado ao centro de massa. Verifique que nesse sistema de referência as velocidades das partículas apenas invertem seus sentidos devido à colisão elástica.

E 9.11 Uma partícula de massa m e velocidade $\mathbf{v}$ choca-se elástica e frontalmente com outra partícula que se movia na mesma direção e em sentido contrário ao da primeira, com uma velocidade cujo módulo é metade de $|\mathbf{v}|$. Após o choque, a primeira fica em repouso. Determine a massa e a velocidade finais da segunda.

9.4 ■ Colisões elásticas em duas dimensões (opcional)

A colisão entre uma partícula em movimento e outra parada envolve apenas duas dimensões do espaço

No caso mais geral de duas partículas em movimento se colidindo, o evento ocorre em três dimensões. De fato, o movimento inicial de cada partícula define uma reta, e essas duas retas não pertencem necessariamente ao mesmo plano. Portanto, já na definição das condições iniciais do problema aparecem as três dimensões do espaço. Todavia, se a segunda partícula estiver parada, as condições iniciais podem ser descritas em duas dimensões. De fato, o movimento inicial da primeira partícula define uma reta e a posição inicial da segunda partícula define um ponto no espaço. Essa reta e mais esse ponto definem um único plano no espaço. Pela lei da ação e reação, a força de interação entre as partículas está sobre a reta que liga as duas partículas, e portanto também pertence a esse mesmo plano. Nesse caso, as acelerações das duas partículas são vetores desse plano, e as suas velocidades não adquirirão componentes fora do plano inicialmente definido. Conclui-se portanto que a colisão será um evento em duas dimensões. Esta seção é dedicada ao estudo desse tipo de colisões.

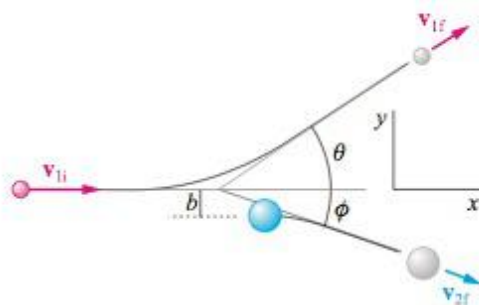


Figura 9.4

Colisão elástica em duas dimensões entre duas partículas cuja interação é sempre repulsiva.

A Figura 9.4 mostra uma colisão entre a partícula 1, de massa m_1 , inicialmente com a velocidade $\mathbf{v}_{1i} = v_{1i} \hat{i}$, e a partícula 2, de massa m_2 , em repouso. A reta que define a velocidade inicial da partícula 1 passa a uma distância b da partícula 2. A distância b é denominada *parâmetro de impacto* da colisão. Se b é nulo, a colisão é frontal; caso contrário, tem-se uma colisão lateral, como é muito comum no jogo de sinuca. As trajetórias apresentadas na Figura 9.4 ilustram o caso específico em que a interação entre as duas partículas é sempre repulsiva. As leis de conservação do momento linear e da energia mecânica permitem escrever três equações conectando as velocidades iniciais e finais das partículas, que são

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi, \quad (9.19)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi, \quad (9.20)$$

$$m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2. \quad (9.21)$$

Percebe-se que estas equações não permitem a solução completa do problema, pois contêm quatro incógnitas, que são v_{1f} , v_{2f} , θ e ϕ . De fato, isso já era esperado, uma vez que o parâmetro de impacto b não entrou ainda no problema e a solução obviamente deve depender dele. Nas condições experimentais, raramente se conhece o parâmetro de impacto. O que se faz é pesquisar a conexão entre os ângulos θ e ϕ de espalhamento das partículas. Quando o parâmetro de impacto varia de 0 a ∞ , o ângulo θ varia de π a 0, respectivamente. Portanto, podemos fornecer o ângulo de espalhamento da partícula 1 como dado de entrada do problema e este ficará então totalmente resolvido.

Um caso particular muito importante de colisões envolve partículas de massas iguais. Aqui, as leis de conservação de momento linear e energia mecânica, para o caso em que a partícula 2 esteja inicialmente parada, geram equações muito simples

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f} \quad (9.22)$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2. \quad (9.23)$$

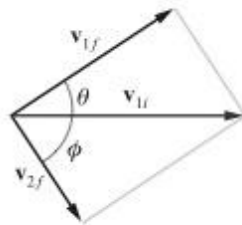


Figura 9.5

Na colisão elástica entre duas partículas de massas iguais, estando a partícula-alvo parada, as velocidades finais das duas partículas são ortogonais entre si.

A soma vetorial indicada na Equação 9.22 é também indicada geometricamente na Figura 9.5. Como $\mathbf{v}_{1i}$ é a soma vetorial de $\mathbf{v}_{1f}$ e $\mathbf{v}_{2f}$ e seu módulo ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos módulos destes dois últimos, pelo teorema de Pitágoras conclui-se que esses três vetores devem formar um triângulo retângulo e $\mathbf{v}_{1f}$ e $\mathbf{v}_{2f}$ são ortogonais entre si, o que equivale a dizer:

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2}. \quad (9.24)$$

Este resultado é muito familiar aos jogadores de bilhar e sinuca. Na verdade, as bolas de bilhar podem ter um movimento de rotação, ao qual está também associada uma energia cinética, conforme veremos no Capítulo 10 (*Rotações de Corpos Rígidos*). Entretanto, pelo fato de as bolas serem polidas e, portanto, apresentarem atrito mútuo desprezível, a força entre as bolas durante o contato tem direção radial. Sendo assim, contrariamente ao que pensam muitos jogadores que acreditam serem capazes de transferir “efeito” (rotação) à bola-alvo, a rotação das bolas não se altera durante a colisão. Portanto, o valor da energia cinética de rotação é o mesmo antes e depois da colisão, e desaparece da equação que exprime a conservação da energia.

E-E Exercício-exemplo 9.8

■ Uma bola de sinuca, com velocidade de 10,0 m/s, colide com outra de massa igual, e sua trajetória sofre um desvio de $60,0^\circ$. Calcule as velocidades das duas bolas após a colisão.

■ Solução

Se $\theta = 60^\circ$, pela Equação 9.24 obtemos $\phi = 30^\circ$. Inserindo esses valores nas Equações 9.22 e 9.23 e fazendo $m_1 = m_2$, obtemos

$$v_{1i} = \frac{1}{2}v_{1f} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_{2f},$$

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{1f} - \frac{1}{2}v_{2f}.$$

A solução deste par de equações é

$$v_{1f} = \frac{1}{2}v_{1i} = 0,500 \times 10,0 \text{ m/s} = 5,00 \text{ m/s},$$

$$v_{2f} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_{1i} = 0,866 \times 10,0 \text{ m/s} = 8,66 \text{ m/s}.$$

A Figura 9.6 mostra a colisão das bolas.

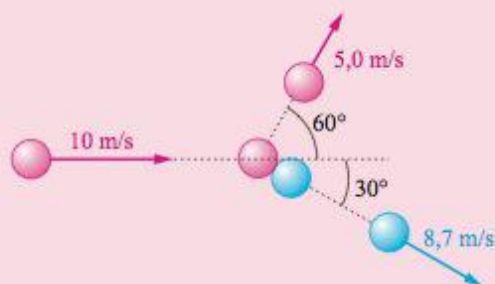


Figura 9.6
(Exercício-exemplo 9.8).

Exercícios

E 9.12 Uma bola de sinuca tem colisão elástica com outra bola idêntica, que estava inicialmente em repouso, e sofre um desvio de 30° em sua trajetória. Que fração de sua energia cinética é transferida para a bola-alvo?

E 9.13 Uma bola inicialmente com velocidade v_i colide com outra bola idêntica a ela e inicialmente parada. A primeira bola sai a 45° de sua direção inicial. Determine as velocidades finais das duas bolas.

E 9.14 Uma partícula α inicialmente com velocidade de $1,70 \times 10^7$ m/s, colide elasticamente com um átomo de carbono inicialmente parado. A partícula α sofre um desvio de 30° em sua trajetória. Sabendo-se que o átomo de carbono tem massa 3,00 vezes a massa da partícula α , calcule as velocidades das duas partículas após a colisão.

PROBLEMAS

P 9.1 Uma bola de massa m e velocidade v_0 incide sobre uma parede, fazendo um ângulo de 45° com esta. No choque a bola perde um terço de sua energia cinética inicial e reflete fazendo um ângulo de 30° com a parede. Determine a variação da quantidade de movimento da bola, no choque, e a direção e o sentido da força média exercida pela parede sobre a bola.

P 9.2 A Figura 9.7 mostra um bloco na iminência de colidir com uma mola. A variação temporal da força de colisão é mostrada na Figura 9.8. No instante $t = 0$, o bloco inicia o contato com a mola, e esse contato se desfaz no instante $t = \tau$. A função $F(t)$ é dada por

$$F(t) = \frac{\pi m v_0}{\tau} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), \text{ onde } \tau = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$



Figura 9.7
(Problema 9.2).

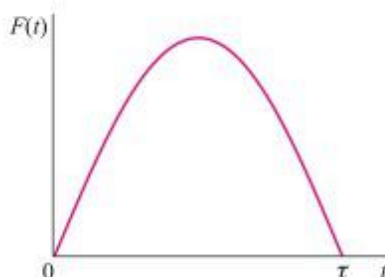


Figura 9.8
(Problema 9.2).

(A) Integrando a equação $F = dp/dt$ aplicada ao bloco, calcule a variação Δp do momento sofrida pelo bloco na colisão. (B) Determine a força média que a mola exerce sobre o bloco. (C) Calcule a velocidade final do bloco. (D) Calcule o valor da força F quando no ponto de retorno do bloco.

P 9.3 Uma nave de massa igual a 300 kg, com velocidade de 40,0 km/s em relação ao Sol, faz uma colisão com Marte (velocidade orbital de 24,1 km/s). A nave se aproxima de Marte com velocidade oposta à do Planeta e o contorna, adquirindo velocidade final paralela à dele. Tomando-se o referencial do Sol, (A) qual é a velocidade da nave após a colisão? (B) Qual é o módulo da variação do momento linear da nave na colisão?

P 9.4 Dois prótons, em um instante inicial $t = 0$, estão muito distantes um do outro, movendo-se com velocidade relativa $2v$, e caminham para uma colisão frontal, como mostra a Figura 9.9. A energia potencial entre as duas partículas, decorrente da força de repulsão elétrica, vale $U(x) = 2,32 \times 10^{-28} \text{ Jm} / x$, onde x é a separação entre os centros das partículas. Sabendo que cada partícula tem massa de $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ e $v = 5,27 \times 10^6 \text{ m/s}$, calcule a distância mínima entre as partículas.



Figura 9.9
(Problema 9.4).

P 9.5 Resolva o problema anterior no referencial em que um dos prótons está parado no instante inicial. (A) A distância mínima na colisão sofre alguma alteração com a mudança de referencial? (B) Calcule as velocidades dos dois prótons no instante de aproximação máxima.

P 9.6 Uma estrela de massa m e velocidade v colide com outra estrela de massa $2m$, inicialmente parada, de modo que as estrelas

não entram em contato físico. A estrela incidente sofre um desvio de 45° em sua trajetória. (A) Levando em conta que a força entre as estrelas é atrativa, faça um diagrama análogo ao da Figura 9.4 para a presente colisão. (B) Determine as velocidades das duas estrelas após a colisão.

P 9.7 Uma bola de massa m e velocidade v colide frontalmente com outra bola de massa M , inicialmente em repouso. Na colisão, uma fração f da energia mecânica do sistema é transformada em calor. Calcule as velocidades finais das duas bolas.

P 9.8 Uma partícula de massa igual a 1,00 g, inicialmente com a velocidade de 30,0 m/s, colide com outra partícula parada cuja massa vale 2,00 g, e sofre um desvio de 30° na sua trajetória. Na colisão, 30% da energia mecânica do sistema são perdidos. Calcule a velocidade das partículas após a colisão.

P 9.9 Uma partícula colide elasticamente com outra idêntica, inicialmente parada. Qual é o desvio angular máximo que a partícula pode sofrer em sua trajetória?

P 9.10 Uma bola de sinuca movendo-se à velocidade de 5,00 m/s colide elasticamente com outra idêntica a ela, inicialmente em repouso, e sua trajetória sofre um desvio de 30° . (A) Qual é sua velocidade imediatamente após a colisão? (B) Qual é a velocidade da bola-alvo imediatamente após a colisão?

P 9.11 Refaça esquematicamente a Figura 9.5 para o caso em que a interação entre as partículas 1 e 2 seja atrativa para distâncias maiores e repulsiva para pequenas distâncias, como mostra a Figura 9.2.

P 9.12 Uma partícula, de massa m , movendo-se à velocidade v_0 , colide frontal e elasticamente com outra de massa M , inicialmente parada. Sejam v e V as velocidades da primeira e da segunda partículas, respectivamente, após a colisão. Faça gráficos de v/v_0 e V/v_0 em função de m/M para a faixa de valores $0 < m/M < 10$.

Respostas dos exercícios

$$\text{E 9.2 } v_{1f} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2f}}{2} v; \quad v_{2f} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2f}}{2} v.$$

$$\text{E 9.3 } v_{1f} = -412,2 \text{ m/s}; \quad v_{2f} = 1412 \text{ m/s}.$$

$$\text{E 9.4 } \frac{m + M}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}.$$

$$\text{E 9.5 } v_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v; \quad v'_{1f} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v; \quad v'_{2f} = -v_{cm}; \quad v'_f = 0;$$

$$K'_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2; \quad K'_f = 0; \quad \Delta U' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2; \quad \Delta U' = \Delta U.$$

E 9.6 $\Delta p_1 = -2m_1 v$. Então, de fato a partícula 2 deve sofrer uma variação de momento $\Delta p_2 = m_2 v_{2f} = 2m_1 v \Rightarrow \frac{v_{2f}}{v} = \frac{2m_1}{m_2} \rightarrow 0$; por ter massa muito grande, a velocidade final tende a zero.

E 9.7 De fato a partícula 1 terá energia cinética um pouquinho menor do que antes, e a sua velocidade final deve ser menor do que v . Entretanto, a correção tende a zero quando m_1/m_2 tende a zero.

E 9.9 Sim, se o planeta tiver velocidade V no mesmo sentido da velocidade da nave.

$$\text{E 9.10 } v_{1f} = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = -v_{1f}; \quad v_{2f} = -\frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = -v_{2f}; \quad P_i = P_f = 0.$$

$$\text{E 9.11 } m/2; \quad 3v/2.$$

$$\text{E 9.12 } 25\%.$$

$$\text{E 9.13 } \frac{\mathbf{i} \pm \mathbf{j}}{2} v_0.$$

E 9.14 $v_{af} = 1,625 \times 10^7 \text{ m/s}$; $v_{cf} = 0,288 \times 10^7 \text{ m/s}$; fazendo um ângulo de $70,2^\circ$ com a direção inicial da partícula alfa.

Respostas dos problemas

P 9.1 $\Delta \mathbf{p} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) m v_o \mathbf{i}$; direção de $\hat{\mathbf{F}} = -\mathbf{i}$.

P 9.2 (A) $\Delta \mathbf{p} = -2m\mathbf{v}_o$; (B) $\bar{\mathbf{F}} = -2m\mathbf{v}_o / \tau$; (C) $\mathbf{v}_f = -\mathbf{v}_o$; (D) $F = v_o \sqrt{km}$.

P 9.3 (A) 88,2 km/s; (B) $3,85 \times 10^7$ Ns.

P 9.4 $5,00 \times 10^{-15}$ N.

P 9.5 (A) Não; (B) $v_1 = v_2 = v$

P 9.6 $v_1 = 0,86v$; $v_2 = 0,36v$ fazendo um ângulo de 57° com a velocidade inicial da primeira.

P 9.7 $v_{1f} = \frac{m}{m+M} v - \frac{Mv}{M+m} \sqrt{1-f \left(1 + \frac{m}{M} \right)}$;

$v_{2f} = \frac{mv}{M+m} + \frac{mv}{M+m} \sqrt{1-f \left(1 + \frac{m}{M} \right)}$.

P 9.8 $v_{1f} = 22,6$ m/s; $v_{2f} = 7,69$ m/s fazendo um ângulo de $47,4^\circ$ com $\mathbf{v}_{1i}$.

P 9.9 $\pi/2$.

P 9.10 $v_{1f} = 4,33$ m/s; $v_{2f} = 2,50$ m/s fazendo um ângulo de 60° com $\mathbf{v}_{1i}$.



Rotações

- Seção 10.1 ■ O movimento pode ser muito complexo, 212
- Seção 10.2 ■ Corpo rígido e seus graus de liberdade, 212
- Seção 10.3 ■ Representação vetorial das rotações, 213
- Seção 10.4 ■ Velocidade e aceleração angulares, 215
- Seção 10.5 ■ Trabalho no deslocamento angular – definição de torque, 218
- Seção 10.6 ■ Momento angular, 224
- Seção 10.7 ■ Momento angular em movimento circular uniforme, 226
- Seção 10.8 ■ Momento angular de um corpo rígido – momento de inércia, 226
- Seção 10.9 ■ Eixo balanceado (opcional), 230
- Seção 10.10 ■ Energia cinética, 230
- Seção 10.11 ■ Conservação do momento angular, 231
- Seção 10.12 ■ Fenômenos decorrentes da conservação do momento angular, 234
- Seção 10.13 ■ Equilíbrio, 236
- Seção 10.14 ■ Movimento externo e movimento interno, 240
- Seção 10.15 ■ Rolamento (opcional), 242
- Seção 10.16 ■ Grandezas análogas de translação e rotação, 246
- Seção 10.17 ■ Quantização do momento angular, 246
- Seção 10.18 ■ Cálculo do momento de inércia de alguns corpos (opcional), 247
- Seção 10.19 ■ Teorema dos eixos paralelos (opcional), 248
- Problemas, 251
- Respostas dos exercícios, 253
- Respostas dos problemas, 254



Seção 10.1 ■ O movimento pode ser muito complexo

Até aqui, consideramos apenas movimento de translação. Em alguns casos, o corpo em translação perfazia um circuito fechado, como é o caso do movimento circular uniforme. Entretanto, em geral o referido corpo foi tratado como uma partícula. Isso ocorreu mesmo quando falamos da Terra orbitando em torno do Sol, ou da Lua orbitando em torno da Terra. Por termos tratado tais corpos celestes como partículas, ignoramos seu giro em torno do próprio eixo, realizado enquanto o corpo perfaz sua órbita. Se a Terra orbitasse em torno do Sol sem girar em torno do seu eixo, seu movimento seria de pura translação. O movimento de translação de um corpo pode ser inteiramente descrito em termos de um vetor $\mathbf{r}$ que localiza um de seus pontos, por exemplo o seu centro de massa. Esse é sem dúvida um tipo mais simples de movimento. No caso mais geral, o movimento de um corpo extenso pode ser muito complicado. Consideremos, por exemplo, o movimento da Terra, em um exame mais realista, livre de simplificações. O centro de massa da Terra realiza uma órbita fechada em torno do Sol, e em cada órbita o planeta realiza 366,25 giros em torno do seu eixo. Durante cada giro, o corpo da Terra se deforma porque o campo gravitacional do Sol e da Lua no espaço ocupado pela Terra não é uniforme. Essa deformação do globo terrestre é acompanhada de grandes movimentos de massa oceânica, denominados marés oceânicas. Independentemente desses movimentos que descrevemos, nosso planeta apresenta movimentos muito diversos e complicados. Seu núcleo líquido apresenta uma dinâmica da qual temos apenas uma compreensão muito grosseira e preliminar. Não menos complicada e mal compreendida é a dinâmica dos oceanos e da atmosfera, em sua permanente interação. Seria impensável tentarmos uma descrição rigorosa de uma chuva ou de uma onda quebrando na praia. Essas considerações revelam que o movimento pode ser muito complexo; por isso, até o presente só foi obtida a compreensão de movimentos bastante simples. Neste capítulo, estudaremos movimentos de rotação, e quase sempre estaremos nos referindo a rotações de corpos rígidos. Apesar disso, um de nossos resultados obtidos, a lei da conservação do momento angular, tem validade inteiramente irrestrita e se aplica a qualquer tipo de movimento de um sistema isolado. Nota-se aqui uma similaridade com a lei da conservação do momento linear, obtida no Capítulo 8 (*Conservação do Momento*): tal lei se aplica a qualquer sistema isolado, por mais complexo que seja seu movimento.

Seção 10.2 ■ Corpo rígido e seus graus de liberdade

Para descrever completamente a posição de um sistema de N partículas são necessárias 3 coordenadas para cada partícula, dando um total de $3N$ coordenadas. A cada coordenada corresponde um modo distinto de mover o sistema — em linguagem técnica, um *grau de liberdade* do sistema. O sistema de N partículas possui, portanto, $3N$ graus de liberdade. Muitos sistemas de partículas, entretanto, possuem vínculos que na prática diminuem o seu número de graus de liberdade. Um ponteiro de relógio de parede, por exemplo, é um sistema de partículas que possui um único modo de se mover, e portanto um único grau de liberdade. O mesmo ocorre com o pêndulo do relógio. Em ambos os casos, basta dizer um ângulo para descrever a posição do sistema. Essa extrema redução dos graus de liberdade do ponteiro e do pêndulo advém do seu caráter de corpo rígido. O **corpo rígido** é um tipo muito importante de sistema de partículas com vínculos. Por definição, corpo rígido é um sistema no qual a distância entre duas quaisquer das suas partículas não se altera. O sistema é indeformável. Corpo rígido é uma idealização, uma vez que todos os corpos se deformam. Entretanto, para fins práticos muitos corpos podem ser tratados como se fossem rígidos.

Corpo rígido é um sistema no qual a distância entre duas quaisquer das suas partículas não se altera; o sistema é indeformável

Um corpo rígido tem somente 6 graus de liberdade, como se verá a seguir. Se conhecermos as posições (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) de duas partículas A e B do corpo, as posições de todas as suas outras partículas poderão ser determinadas através de uma única coordenada, que é o ângulo de rotação do corpo em torno do eixo que passa por A e B. Entretanto, as 6 coordenadas que definem a posição das partículas A e B não são todas independentes, porque

a distância entre elas é fixa. Esta condição fornece uma equação ligando as coordenadas de A e B, e uma das 6 coordenadas pode ser, assim, expressa em termos das outras 5. Portanto, considerando-se o ângulo de rotação do corpo, são 6 coordenadas independentes.

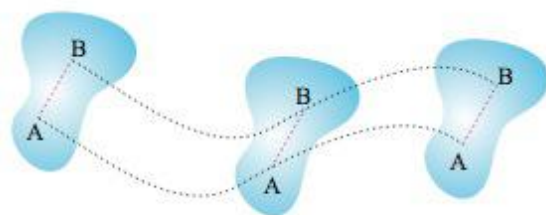


Figura 10.1

Translação de um corpo rígido. As partículas A e B percorrem trajetórias paralelas.

Translação de um corpo rígido é um movimento no qual duas partículas quaisquer do corpo percorrem trajetórias paralelas. A Figura 10.1 mostra uma translação

Rotação de um corpo rígido é um movimento que deixa fixa pelo menos uma de suas partículas

Qualquer movimento de um corpo rígido pode ser decomposto em uma translação e uma rotação

A próxima meta é entender os seis graus de liberdade do corpo rígido em termos de movimento. Consideremos o movimento que leva o corpo de uma dada posição para outra posição genérica. Como consideração preliminar, devemos notar que, se definirmos a posição de três pontos A, B, C não-colineares, a posição do corpo estará totalmente definida. Assim, se definirmos 6 coordenadas cujas mudanças levem esses três pontos de suas posições originais às posições finais, elas são boas para descrever o movimento. Posto isso, vamos primeiro definir coordenadas que descrevam uma translação do corpo. Na **translação**, todas as partículas do corpo seguem trajetórias que são paralelas umas às das outras, como ilustra a Figura 10.1, onde as trajetórias de A e B são mostradas. O segmento que une dois pontos quaisquer do corpo sempre se mantém paralelo à direção original. Para se definir esse movimento basta utilizar as 3 coordenadas de um único ponto do corpo. Escolhendo-se, por exemplo, o ponto A, o vetor deslocamento do ponto A até sua posição final é igual ao deslocamento de todos os outros pontos. Para que o corpo adquira uma posição final completamente arbitrária, poderá realizar, além da translação, movimentos que mantêm o ponto A fixo. Os movimentos de um corpo rígido que deixam fixa pelo menos uma de suas partículas são denominados **rotação**. Portanto, devemos agora levar os pontos B e C a suas posições finais por movimentos de rotação do corpo. Seguindo o nosso procedimento, a meta agora é colocar o ponto B na sua posição. O ponto se moverá sobre a superfície de uma esfera centrada em A e cujo raio é a distância AB. Para levá-lo ao seu destino final, são necessárias duas rotações. Por exemplo, podemos fazer uma rotação do tipo longitude e depois outra rotação do tipo latitude. Uma vez que A e B já estão em suas posições finais, o corpo só pode ser girado em torno do eixo que passa por A e B. Com esse giro, o ponto C será finalmente colocado em sua posição final. Vê-se assim que os 6 graus de liberdade do corpo rígido se decompõem em 3 *graus de translação* e 3 *graus de rotação*, e qualquer movimento do corpo pode ser substituído por uma translação pura mais uma rotação pura.

Nossa meta neste capítulo é estudar os movimentos de rotação. Iremos sempre nos basear nas leis de Newton. Entretanto, teremos de usar coordenadas apropriadas para rotações e de definir novas grandezas. Traçaremos sempre analogias entre as novas grandezas envolvidas na rotação e as grandezas já conhecidas que temos usado no estudo da translação.

Seção 10.3 ■ Representação vetorial das rotações

Uma rotação em torno de um eixo fixo pode ser descrita como se fosse uma grandeza escalar. Consideremos, por exemplo, a rotação de um ponteiro de relógio ou de um disco de computador. Basta dizer quanto o sistema rodou e em que sentido. Portanto, basta dizer um número real, positivo ou negativo. Podemos, entretanto, descrever a rotação como um vetor. O módulo do vetor é o ângulo de rotação em dadas unidades, por exemplo em radianos. A direção do vetor é a do eixo de rotação. Supondo-se que o mostrador do relógio esteja na horizontal, a rotação dos ponteiros ocorre em um eixo vertical. O sentido do vetor é matéria de convenção. Segundo tal convenção, o sentido da rotação dos ponteiros do relógio aponta

O vetor de rotação aponta para o lado do qual a rotação é vista no sentido anti-horário

para o interior do mesmo. A convenção geral para o sentido da rotação é a de que o **vetor de rotação** aponta para o lado do qual a rotação é vista no sentido anti-horário.

Vê-se que essa convenção é equivalente à regra da mão direita usada para definir o sentido do produto vetorial de dois vetores, enunciada no Capítulo 4 (*Vetores*). Ao se fechar a mão direita, os quatro dedos menores realizam um movimento de rotação, e o vetor que descreve tal rotação aponta para a direção do polegar. A Figura 10.2 mostra a rotação de um disco e o vetor **R** que indica tal rotação.

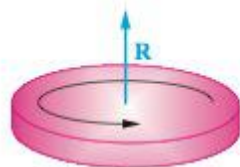


Figura 10.2

O vetor **R** indica a rotação de um disco. Nota-se que **R** aponta para o lado do qual a rotação é vista no sentido anti-horário.

A conveniência de se descrever a rotação como vetor fica mais evidente no caso geral em que não haja um eixo fixo, mas somente um ponto fixo. Isso é o que ocorre, por exemplo, na rotação de um pião. A ponta do pião é um ponto fixo, o que é suficiente para descrever o movimento como rotação pura. Entretanto, o pião não tem um eixo fixo de rotação. A cada instante ele gira em torno de uma direção e esta é a direção do vetor de rotação.

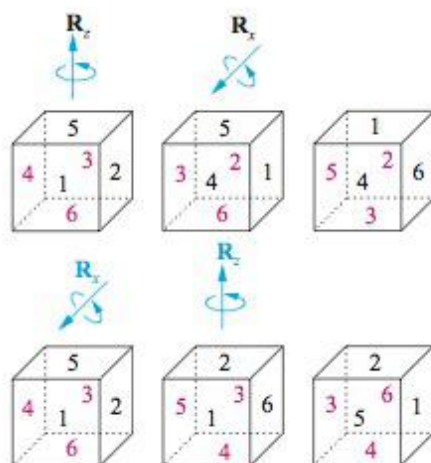


Figura 10.3

A linha de cima mostra um dado sendo girado 90° em torno do eixo z (operação R_z) e, em seguida, girado 90° em torno do eixo x (operação R_x). A linha de baixo mostra as duas operações sendo realizadas em ordem permutada. Nota-se que a posição final do dado depende da ordem em que as rotações são realizadas.

A conceituação da rotação como vetor envolve um elemento de sutileza que necessita ser discutido. A Figura 10.3 mostra o efeito de duas rotações consecutivas de um objeto, em torno de dois eixos ortogonais. Uma rotação, que designaremos aqui pelo símbolo $R_x (\pi/2)$, gira o objeto de $(\pi/2)$ em torno do eixo x . A outra rotação, designada pelo símbolo $R_z (\pi/2)$, gira-o de $(\pi/2)$ em torno do eixo z . Vê-se imediatamente que

$$R_z (\pi/2) \text{ seguida de } R_x (\pi/2) \neq R_x (\pi/2) \text{ seguida de } R_z (\pi/2). \quad (10.1)$$

A regra acima é bem distinta da obtida para deslocamentos lineares, ou seja, translações. No caso de deslocamentos (lineares), a operação deslocamento **a** seguido de deslocamento **b** corresponde ao deslocamento **a + b**. Uma vez que a soma vetorial é comutativa, a ordem dos deslocamentos não altera o resultado. No caso de deslocamentos angulares, tem-se que construir outra álgebra para descrever matematicamente as operações. Essa álgebra não é comutativa, e nem a operação “seguido de” é uma operação de soma. Os deslocamentos angulares são grandezas de natureza distinta dos deslocamentos lineares. Essas não são grandezas vetoriais. Considere porém que, ao invés de girarmos o objeto de $(\pi/2)$, façamos rotações consecutivas de um ângulo θ muito pequeno em torno dos eixos x e y . Nesse caso, iríamos observar que a

Deslocamentos angulares infinitesimais podem ser tratados como vetores

Para rotações o deslocamento angular $d\theta$ é o análogo ao deslocamento $d\mathbf{r}$ das translações

diferença entre os dois termos na Equação 10.1 seria uma rotação de um ângulo θ^2 , o qual pode ser desprezado em relação a θ . Portanto, rotações infinitesimais são operações que comutam. Inverter a sua ordem resulta em uma correção infinitesimal de ordem superior. Podemos, assim, manipular deslocamentos angulares infinitesimais como vetores cuja direção é a direção do eixo de rotação e o sentido é como convencionado no início desta seção:

$$d\theta \equiv \hat{\mathbf{u}} d\theta, \hat{\mathbf{u}} \equiv \text{unitário do eixo de rotação.} \quad (10.2)$$

E-E Exercício-exemplo 10.1

■ Aplique a rotação $R_x(\pi/2)$ sobre o vetor unitário $\mathbf{k}$ do eixo z , e em seguida aplique $R_y(\pi/2)$ sobre o resultado. Faça então as mesmas operações em ordem invertida e verifique que as operações não comutam, ou seja: $R_x(\pi/2) R_y(\pi/2) \mathbf{k} \neq R_y(\pi/2) R_x(\pi/2) \mathbf{k}$.

■ Solução

Quando o vetor $\mathbf{k}$ é rodado $\pi/2$ em torno do eixo dos x , transforma-se em $-\mathbf{j}$:

$R_x(\pi/2) \mathbf{k} = -\mathbf{j}$; rodando-se $-\mathbf{j}$ em torno do eixo dos y ele fica invariante.

Assim, $R_y(\pi/2) R_x(\pi/2) \mathbf{k} = -\mathbf{j}$. Fazendo-se em ordem inversa:

$R_y(\pi/2) \mathbf{k} = \mathbf{i}$ e $R_x(\pi/2)$, aplicado sobre $\mathbf{i}$, deixa esse vetor invariante.

Assim, $R_x(\pi/2) R_y(\pi/2) \mathbf{k} = \mathbf{i}$.

Exercícios opcionais

Os exercícios opcionais não são indispensáveis para que o leitor entenda o que se segue.

E 10.1 O vetor $\mathbf{r}'$ obtido da aplicação de uma rotação de um ângulo ϕ , em torno de um eixo definido pelo unitário $\hat{\mathbf{n}}$, sobre um vetor $\mathbf{r}$, pode ser obtido matematicamente pela fórmula

$$\mathbf{r}' = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) \mathbf{r} = \mathbf{r} + \sin \phi \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} + (1 - \cos \phi) [\hat{\mathbf{n}} (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{r}]. \quad (10.3)$$

Verifique que esta fórmula confirma os resultados $R_x(\pi/2) \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $R_y(\pi/2) \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $R_y(\pi/2) \mathbf{j} = \mathbf{j}$ e $R_x(\pi/2) \mathbf{i} = \mathbf{i}$ que foram utilizados no Exercício-exemplo 10.1.

E 10.2 (A) Mostre que, para uma rotação infinitesimal $\hat{\mathbf{n}} d\phi$, a Equação 10.3 se simplifica para

$$\mathbf{r}' = R_{\hat{\mathbf{n}}}(d\phi) \mathbf{r} = \mathbf{r} + (\hat{\mathbf{n}} d\phi) \times \mathbf{r}. \quad (10.4)$$

(B) Mostre que a aplicação sobre o unitário $\mathbf{k}$ de uma rotação infinitesimal $\mathbf{i} d\phi$ ($d\phi$ em torno do eixo dos x), seguida de outra $\mathbf{j} d\theta$ ($d\theta$ em torno do eixo dos y) é igual a $\mathbf{r} + (\mathbf{i} d\phi + \mathbf{j} d\theta) \times \mathbf{r}$. Ou seja, rotações infinitesimais somam-se como vetores:

$$\text{rotação } \mathbf{i} d\phi + \text{rotação } \mathbf{j} d\theta = \text{rotação } \mathbf{i} d\phi + \mathbf{j} d\theta.$$

(C) Mostre que a aplicação em ordem invertida das duas operações do item anterior dá o mesmo resultado, ou seja:

$$R_x(d\phi) R_y(d\theta) \mathbf{r} = R_y(d\theta) R_x(d\phi) \mathbf{r}.$$

Seção 10.4 ■ Velocidade e aceleração angulares

Uma vez que deslocamentos angulares infinitesimais são vetores, podemos diferenciar e derivar tais deslocamentos com as regras convencionais do cálculo vetorial. Se durante um intervalo de tempo infinitesimal dt um corpo realiza um deslocamento angular $d\theta$ em torno de um eixo instantâneo qualquer definido por um unitário $\hat{\mathbf{u}}$, a *velocidade angular* é o vetor definido por

■ Definição de velocidade angular

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (10.5)$$

O módulo de ω é a taxa de variação do ângulo com o tempo. Sua direção é a do eixo instantâneo de rotação e seu sentido é dado pela regra da mão direita. Se no instante t a velocidade angular ω varia ou em módulo ou na direção $\hat{u}$ do eixo de rotação ou em ambos, o corpo terá uma *aceleração angular* dada por

■ Definição de aceleração angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{u} \omega). \quad (10.6)$$

Para rotações, a velocidade angular ω é o análogo da velocidade de translação v e a aceleração angular α é o análogo da aceleração $a \equiv dv/dt$.

É importante perceber que o fato de deslocamentos angulares infinitesimais se somarem como vetores implica que velocidades e acelerações angulares têm caráter vetorial. Assim, um corpo submetido, por mecanismos diferentes, a duas velocidades angulares diferentes terá uma velocidade angular total igual à soma vetorial delas. E o mesmo é válido para as acelerações.

E-E Exercício-exemplo 10.2

■ Calcule o vetor velocidade de rotação da Terra em torno do seu eixo.

■ Solução

A Terra completa uma revolução a cada 24h56min (dia sideral). O módulo da velocidade angular é

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ d}} = \frac{6,2832 \text{ rad}}{86160 \text{ s}} = 7,2925 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

A direção de ω é a do eixo de rotação da Terra e o seu sentido aponta para o Norte.

E-E Exercício-exemplo 10.3

■ Uma esfera de raio R está presa por seis esferas menores, de raios iguais a $R/4$, dispostas diametralmente opostas duas a duas, a posição de cada uma fazendo um ângulo de 90° com as posições das outras, como mostra a Figura 10.4. Três das esferas pequenas, A, B e C, têm eixos fixos nas direções x , y , e z , respectivamente, e estes são acoplados a motores de modo que possam girar com velocidades controladas. Quando as esferas A, B e C estão girando com as velocidades angulares $\omega_A = -120 \text{ rad/s } \hat{i}$, $\omega_B = 160 \text{ rad/s } \hat{j}$ e $\omega_C = -480 \text{ rad/s } \hat{k}$, respectivamente, (A) qual é a velocidade angular da esfera maior? (B) Quantas voltas por segundo ela realiza? (C) Quais os ângulos entre o eixo de rotação e as direções $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$? Suponha que não haja deslizamento entre as esferas.

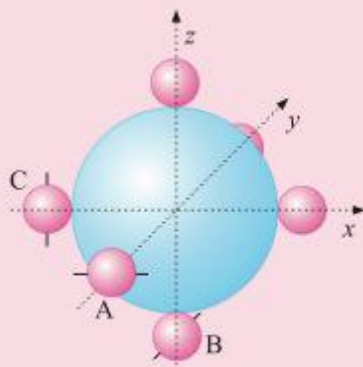


Figura 10.4
(Exercício-exemplo 10.3).

■ Solução

(A) Quando cada uma das esferas pequenas gira com velocidade ω , transmite à grande uma velocidade angular de sentido contrário à sua e de módulo $\omega/4$, pois seu raio é $1/4$ do raio da grande e são necessárias 4 voltas da pequena para completar uma volta da grande. Assim, a velocidade angular da grande será

$$\omega = -(\omega_A + \omega_B + \omega_C) / 4 = (30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 120\mathbf{k})\text{rad/s}.$$

(B) O módulo da velocidade será $\omega = \sqrt{(30^2 + 40^2 + 120^2)}\text{rad/s} = 130\text{rad/s}$; o número de rotações por minuto é a frequência: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{130}{2\pi} = 20,7\text{s}^{-1}$.

$$(C) \cos \gamma_i = \frac{\mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{30}{130} = 76,7^\circ; \quad \cos \gamma_j = \frac{\mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{-40}{130} = 108^\circ;$$

$$\cos \gamma_k = \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{120}{130} = 22,6^\circ.$$

Exercícios

E 10.3 Uma corda está enrolada em uma roldana de raio igual a 49 cm que está presa no teto. Um corpo de massa igual a 1,0 kg é amarrado na extremidade livre da corda e liberado de modo a cair sob a ação da gravidade, desenrolando a corda. Desprezando-se as massas da corda e da roldana, pode-se dizer que o corpo cai com aceleração g . Determine a velocidade e a aceleração angular da roldana girando em torno de seu eixo.

E 10.4 *Questão*: por que o dia sideral (intervalo de tempo entre duas passagens de uma dada estrela fixa pelo meridiano) é menor do que o dia solar?

E 10.5 Uma hélice presa no centro de uma mesa plana e horizontal gira com uma velocidade angular de 60 rpm (rotações por minuto) em torno de um eixo horizontal x' fixo em relação à mesa (ver Figura 10.5). Em algum momento ($t = 0$) a mesa começa a girar em torno de um eixo vertical z , passando por seu centro com uma velocidade angular de 30 rpm, no sentido anti-horário para quem olha de cima. Denominando x o eixo fixo no chão, coincidente com x' em $t = 0$, determine os vetores que representam: (A) a velocidade angular da hélice antes de a mesa rodar; (B) o unitário $\mathbf{i}'$, do eixo x' , em função do tempo, para $t > 0$; (C) o vetor velocidade angular da hélice, em função do tempo, para um observador fora da mesa; (D) o módulo dessa velocidade angular e o ângulo que ela faz com a vertical.

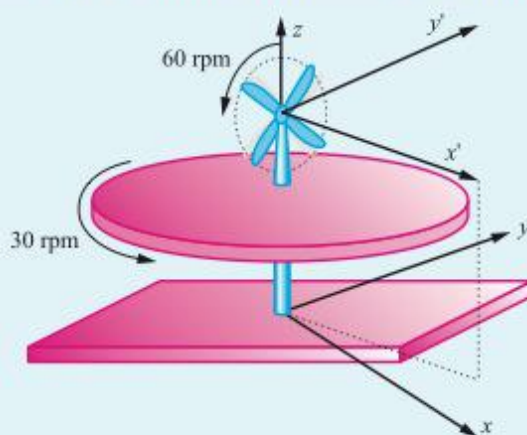


Figura 10.5
(Exercício 10.5)

Vamos agora relacionar deslocamentos e velocidades de translação das partículas de um corpo em rotação com as respectivas grandezas no movimento rotacional. Como na rotação de um corpo sempre há um ponto fixo, podemos escolher esse ponto como sendo nossa origem O de coordenadas. Como o eixo de rotação pode variar com o tempo, vamos considerar um dado instante t em que o eixo é definido por $\hat{\mathbf{u}}$ e a velocidade angular é $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{u}}$. Consideremos uma partícula, que pode ser uma pequena parte (infinitesimal) de um corpo rígido,

com posição $\mathbf{r}$ e velocidade $\mathbf{v}$ em relação a O, como mostra a Figura 10.6. Sua velocidade decorre da rotação, de modo que ela, instantaneamente, se comporta como se fosse percorrer um círculo de raio ρ dado por $\rho = r \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre $\hat{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{r}$. Se, após um pequeno intervalo de tempo dt , o corpo realiza uma rotação de um ângulo infinitesimal $d\varphi = d\varphi \hat{\mathbf{u}}$, a posição da partícula muda para $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, e $d\mathbf{r}$ deve ser perpendicular a $\mathbf{r}$, pois a distância da partícula ao ponto O não pode mudar. É claro que, por ser tangente ao círculo mencionado anteriormente, $d\mathbf{r}$ também é ortogonal a $\hat{\mathbf{u}}$, que é a direção do eixo de rotação. O módulo de $d\mathbf{r}$ é igual a $\rho d\varphi = r \sin \theta d\varphi$.

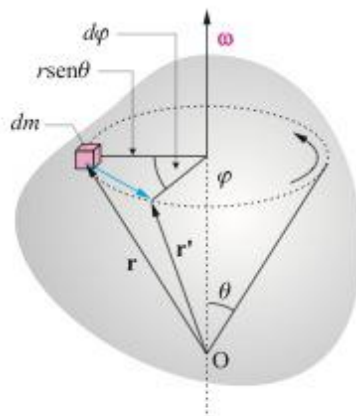


Figura 10.6

Portanto, $d\mathbf{r}$ deve ser igual ao produto vetorial entre $\mathbf{r}$ e $d\varphi$. Observando a Figura 10.6 e usando a regra da mão direita obtemos a ordem correta para o produto, e a relação entre $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ e $d\varphi$ será:

$$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}. \quad (10.7)$$

Da mesma forma que $d\mathbf{r}$, a velocidade instantânea $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ também será ortogonal a $\mathbf{r}$ e a ω . Dividindo a Equação 10.7 por dt obtemos a importante relação entre a posição, a velocidade de translação e a velocidade de rotação:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}. \quad (10.8)$$

É importante perceber que, embora o uso de $d\varphi$ possa sugerir que o movimento de rotação exija apenas uma coordenada φ , o eixo de rotação pode variar, e então essas equações contêm na verdade três coordenadas independentes.

Exercício

E 10.6 Mostre que o resultado dado na Equação 10.7 contém a mesma informação que a Equação 10.4.

Seção 10.5 ■ Trabalho no deslocamento angular – definição de torque

Nossa meta agora é identificar a grandeza associada à rotação que possa exercer um papel análogo ao da força na translação. Já sabemos que o trabalho de uma força $\mathbf{F}$ sobre uma partícula quando esta sofre um deslocamento (de translação) $d\mathbf{r}$ é dado por $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$. Para exprimirmos esse trabalho em termos das variáveis associadas à rotação, basta-nos substituir $d\mathbf{r}$, pela expressão dada na Equação 10.7, obtendo

$$dW_{\text{rot}} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = (d\varphi \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}, \quad (10.9)$$

onde o índice rot em dW indica que estamos nos referindo ao trabalho envolvido em um deslocamento angular. Uma vez que o produto misto de vetores goza da propriedade $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, podemos escrever

$$dW_{\text{rot}} = d\phi \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \equiv d\phi \cdot \tau, \quad (10.10)$$

onde a grandeza $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ foi representada pela letra grega τ .

A Equação 10.10 mostra que o trabalho de uma força em movimentos de rotação se expressa pelo produto escalar da variação $d\phi$ de uma posição angular com a grandeza τ . Para translações, o trabalho é o produto escalar da variação de posição $d\mathbf{r}$ com a força $\mathbf{F}$. Assim, podemos dizer que $d\phi$ é para rotações o análogo a $d\mathbf{r}$ e que τ é o análogo da força. A essa grandeza damos o nome de *torque* da força $\mathbf{F}$ em relação ao ponto O:

$$\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (10.11)$$

Observe que o torque de uma força é definido em relação a um ponto O, pois em sua definição aparece a posição $\mathbf{r}$, em relação a O, do ponto de aplicação da força. O torque é um pseudovetor. Seu módulo é dado por

$$\tau = rF \sin \theta, \quad (10.12)$$

onde θ é o ângulo entre a força e o vetor $\mathbf{r}$. A sua direção e seu sentido são definidos pela regra da mão direita convencionada para o produto vetorial de vetores. A Figura 10.7 ilustra uma força e seu torque em relação ao ponto O.

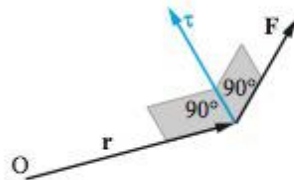


Figura 10.7

O torque de uma força.

A direção e o sentido do torque indicam um eixo em torno do qual o torque tenta girar o corpo. As unidades utilizadas para medidas de torque são equivalentes ao produto da unidade de força com a unidade de distância que no sistema métrico é Nm. Isto é equivalente à unidade de energia J, mas as grandezas físicas são diferentes. Desta forma, convencionou-se não usar a unidade de energia para torque.

Dividindo dW_{rot} na Equação 10.10 por dt obtemos a expressão para a potência realizada pelo torque, que será análoga à expressão $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$:

$$P = \frac{dW_{\text{rot}}}{dt} = \tau \cdot \omega. \quad (10.13)$$

Quando um corpo está sujeito a mais de uma força, o trabalho total realizado por elas é a soma dos trabalhos individuais. Como o deslocamento angular instantâneo $d\phi$ é o mesmo para todas as partes do corpo, basta substituir, na Equação 10.10, τ pelo torque resultante, que é a soma vetorial de todos os torques aplicados.

Até aqui ignoramos inteiramente as forças internas no corpo. É claro, porém, que quando abrimos ou fechamos uma porta a força que aplicamos em um dado ponto da mesma tem de ser comunicada a todas as suas partículas para que elas se ponham em movimento. Aparecem, portanto, forças internas provenientes da rigidez da porta. Entretanto, mesmo se considerarmos essas forças internas, o torque resultante sobre o corpo é a soma dos torques externos. Nossa meta agora é justificar esta afirmação.

Consideremos um sistema constituído de um certo número de partículas. O sistema não precisa ser um corpo rígido. Na verdade, ele pode ser uma coleção de corpos de propriedades diversas, como é o caso do sistema solar, pode ser um líquido ou um gás — enfim, qualquer configuração de partículas que possamos imaginar. O torque total, ou torque resultante, sobre o sistema é a soma dos torques sobre todas as suas partículas:

$$\mathbf{T} \equiv \sum_i \tau_i. \quad (10.14)$$

■ Definição de torque em relação a um ponto

Para rotações, o torque τ é o análogo da força $\mathbf{F}$

■ Potência realizada por um torque

O torque sobre cada partícula pode ser decomposto no torque oriundo das forças de interação interna do sistema e no torque oriundo das forças externas:

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_{\text{ext}} + \mathbf{T}_{\text{int}} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,\text{ext}} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,\text{int}}. \quad (10.15)$$

As forças internas do sistema sempre aparecem em pares de ação e reação. Cada par de forças de ação e reação atua na mesma linha de ação. Vê-se que, por isso, cada par resulta em um torque nulo. Chegamos assim ao princípio de caráter geral:

$$\mathbf{T}_{\text{int}} \equiv \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,\text{int}} = 0. \quad (10.16)$$

Em palavras, o princípio diz:

As forças internas de um sistema resultam em um torque total nulo.

Assim, no cálculo do torque resultante podemos ignorar as forças internas do sistema, e a Equação 10.14 adquire a forma simplificada, de grande utilidade no estudo das rotações:

$$\mathbf{T} \equiv \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{i,\text{ext}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,\text{ext}} \quad (10.17)$$

As forças internas de um sistema resultam em um torque total nulo

E-E Exercício-exemplo 10.4

■ A Figura 10.8 mostra um corpo formado por quatro esferas interligadas por duas barras ortogonais. Sobre cada esfera i atua uma força $\mathbf{F}_i$ dada por:

$$\mathbf{F}_1 = -F \mathbf{i}, \mathbf{F}_2 = F' \mathbf{k}, \mathbf{F}_3 = F'' (-\mathbf{i} - \mathbf{j}) \text{ e } \mathbf{F}_4 = F \mathbf{i}.$$

(A) Calcule os torques de cada força e o torque resultante sobre o corpo, com relação ao seu ponto central E, sabendo que a distância desse ponto ao centro de cada uma das esferas é l . (B) Se o corpo está girando com velocidade angular ω , no sentido anti-horário, em torno de um eixo que passa por E perpendicularmente ao plano da figura, calcule a potência total realizada sobre o corpo e analise quais são as forças que contribuem para essa potência.

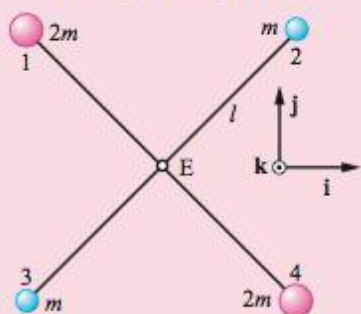


Figura 10.8
(Exercício-exemplo 10.4).

■ Solução

(A) Os torques devidos às quatro forças serão

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = l \frac{(\mathbf{j} - \mathbf{i})}{\sqrt{2}} \times (-F \mathbf{i}) = -\frac{lF}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \times \mathbf{i} = \frac{lF}{\sqrt{2}} \mathbf{k};$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = l \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{j})}{\sqrt{2}} \times F' \mathbf{k} = lF' \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}};$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 = 0 \text{ (produto de dois vetores paralelos);}$$

$$\boldsymbol{\tau}_4 = \mathbf{r}_4 \times \mathbf{F}_4 = l \frac{(\mathbf{i} - \mathbf{j})}{\sqrt{2}} \times F \mathbf{i} = \frac{lF}{\sqrt{2}} \mathbf{k}.$$

Torque total em relação a E: $\mathbf{T}_E = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \boldsymbol{\tau}_4 = \sqrt{2}lF \mathbf{k} + lF' \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$.

(B) A potência, conforme a Equação 10.13, é o produto escalar entre o torque e a velocidade angular, que é dada por $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Portanto,

$$P = \mathbf{T}_E \cdot \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} = \left(\sqrt{2}lF \mathbf{k} - lF' \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \omega \mathbf{k} = \sqrt{2}lF\omega.$$

Para este resultado só contribuíram as forças que atuam nas esferas 1 e 4, cujos torques têm uma componente paralela a $\boldsymbol{\omega}$, ou seja, na direção $\mathbf{k}$.

E-E Exercício-exemplo 10.5

■ Um automóvel atinge a potência máxima de 120 cv quando seu motor realiza 5400 rpm (rotações por minuto), o que equivale a 90 rotações por segundo. Qual é o torque exercido pelo motor nessa rotação?

■ Solução

Supondo que o torque do motor esteja na mesma direção da velocidade angular, teremos

$$P = T\omega, \quad T = \frac{P}{\omega}.$$

Uma vez que 1 cv = 0,7457 kW, a potência do carro é $P = 89,5$ kW. Portanto,

$$T = \frac{89,5 \times 10^3 \text{ W}}{2\pi \times 90 \text{ s}^{-1}} = 158 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{s}^{-1}} = 158 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Na indústria automobilística, o torque é usualmente expresso na unidade $\text{kgf} \cdot \text{m}$, onde kgf é o peso de um quilograma, que vale 9,81 N. Logo,

$$P = \frac{158}{9,81} \text{ kgf} \cdot \text{m} = 16,1 \text{ kgf} \cdot \text{m}.$$

Exercícios

E 10.7 Um carro tem massa de 1200 kg e suas rodas têm raio de 30 cm. O carro arranca em pista horizontal com aceleração de $2,60 \text{ m/s}^2$. Supondo que para isso aplicou-se uma força sobre o eixo das rodas de tração qual é o torque em relação ao chão que essa força realiza em cada uma de suas duas rodas de tração? Despreze as massas das rodas.

E 10.8 Uma partícula de massa m está pendurada em um prego por um cordão, de comprimento ℓ de modo a formar um pêndulo que é colocado para oscilar sob a ação da gravidade g . Quando o ângulo entre o cordão e a vertical for θ , qual será o torque, em relação ao prego, da força realizada sobre a partícula (A) pela gravidade? (B) pelo cordão?

E 10.9 Para o sistema descrito no Exercício 10.3 calcule o torque, em relação ao eixo da roldana, que a força de gravidade exerce sobre o corpo.

O torque resultante de um conjunto de forças cuja soma é nula independe do ponto de referência

Se a soma total das forças externas que atuam sobre um corpo é nula, o torque não depende do ponto O em relação ao qual é calculado. Para demonstrar essa propriedade, consideremos dois pontos O e O', este último deslocado do vetor $\mathbf{r}_o$ em relação a O. Sejam $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ os torques em relação aos pontos O e O', respectivamente. De acordo com a Equação 10.17, $\mathbf{T}'$ será

$$\mathbf{T}' = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,\text{ext}} - \mathbf{r}_o \times \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = \mathbf{T}. \quad (10.18)$$

Binário é o torque de um par de forças de resultante nula

Um caso particular muito importante da situação descrita anteriormente é o de um par de forças de igual módulo, mesma direção e sentidos opostos atuando em pontos distintos do mesmo corpo. Este tipo de torque é chamado de **binário**. Imagine que as forças $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ atuem em um corpo, a primeira no ponto P_1 , cuja posição (em relação a um ponto O) é $\mathbf{r}_1$, e a segunda no ponto P_2 , cuja posição é $\mathbf{r}_2$. Vamos chamar de $\mathbf{d}$ a posição de P_1 em relação a P_2 , ou seja, $\mathbf{d} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. O torque resultante será

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}. \quad (10.19)$$

Veja que no cálculo do binário aparece a posição relativa entre os dois pontos de aplicação das forças, que não depende do ponto O .

E-E Exercício-exemplo 10.6

■ Use a Equação 10.19 para calcular o torque das forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_4$ do Exercício-exemplo 10.4 e compare com a soma dos torques τ_1 e τ_4 calculados naquele exemplo.

■ Solução

O vetor $\mathbf{d}$ que dá a posição da esfera 1 em relação à esfera 4 é $\mathbf{d} = 2l(\mathbf{j} - \mathbf{i})/\sqrt{2}$. O torque será

$$\mathbf{T} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}_1 = 2l \frac{\mathbf{j} - \mathbf{i}}{\sqrt{2}} \times (-F \mathbf{i}) = \sqrt{2} l F \mathbf{k}.$$

Na solução do Exercício-exemplo 10.4 os torques τ_1 e τ_4 obtidos em relação ao ponto E são iguais entre si e iguais a metade desse valor. Assim, sua soma coincide com o cálculo em que se usa a posição relativa $\mathbf{d}$.

Exercício

E 10.10 Três pessoas empurram uma mesa retangular de lados a e b , sendo $a > b$, com forças F , $F/2$ e $F/2$, como mostra a Figura 10.9. Calcule o torque em relação (A) ao centro da mesa; (B) ao vértice onde se aplica a maior força.

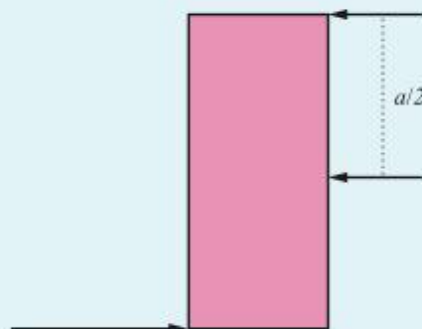


Figura 10.9
(Exercício 10.10).

O torque devido ao peso de um corpo pode ser calculado supondo-se que toda a sua massa esteja no centro de massa $\mathbf{r}_{cm}$

O torque total sobre um corpo de massa M realizado pelo seu peso deve ser calculado somando-se os torques sobre suas várias partes de massa m_i . Entretanto, para um corpo de dimensões pequenas o suficiente para que a aceleração da gravidade seja uniforme em todos os seus pontos, teremos:

$$\mathbf{T}_g = \sum_i \tau_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}_i = \frac{1}{M} \left(\sum_i \mathbf{r}_i m_i \right) \times M \mathbf{g} = \mathbf{r}_{cm} \times M \mathbf{g}. \quad (10.20)$$

Vemos que o torque do peso do corpo pode ser calculado supondo-se que toda a sua massa esteja localizada em seu centro de massa $\mathbf{r}_{cm}$.

E-E Exercício-exemplo 10.7

■ Uma escada de comprimento L está encostada em uma parede fazendo com esta um ângulo θ , como mostra a Figura 10.10. As forças externas que atuam sobre a escada são seu peso, uma normal N devida ao apoio no chão, outra normal N_h devida à parede e uma força de atrito F_a do chão. Não há atrito entre a escada e a parede. A escada não está em movimento, portanto a resultante dessas forças é nula. Determine uma expressão para o torque em função de m , g , L , F_a e θ .

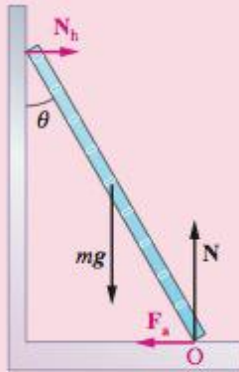


Figura 10.10
(Exercício-exemplo 10.7).

■ Solução

O peso da escada será considerado no seu centro de massa. Para que a resultante das forças seja nula, é necessário que

$$N = mg, \quad N_h = F_a. \quad (10.21)$$

Como a soma das forças é zero, podemos calcular o torque total em relação a qualquer ponto. Vamos fazê-lo com relação ao ponto O, pois assim os torques das forças N e F_a serão nulos. O torque resultante será então devido ao peso e a normal N_h exercida pela parede. Ambos estão na direção perpendicular à figura; o sentido do primeiro é saindo da página e o do segundo entrando nela. Seu valor será

$$T = mg \frac{L}{2} \sin \theta - F_a L \cos \theta. \quad (10.22)$$

Veremos mais adiante que esse resultado deverá ser igual a zero para atender a condição de equilíbrio.

Exercício

E 10.11 Um pêndulo é constituído de uma barra fina e homogênea presa por um pino a um suporte horizontal. O atrito do pino com o pêndulo é desprezível. O pêndulo tem comprimento L e massa M . Calcule o torque, em relação ao pino, que a gravidade faz sobre o pêndulo quando ele está na posição mostrada na Figura 10.11.

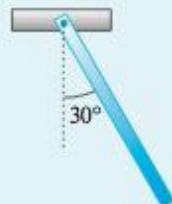


Figura 10.11
(Exercício 10.11).

Seção 10.6 ■ Momento angular

Nossa próxima meta é identificar a grandeza associada à rotação que possa exercer um papel análogo ao do momento linear $\mathbf{p}$ na translação. Consideremos uma partícula em movimento em relação a um ponto O. Sua velocidade é $\mathbf{v}$, seu momento linear é $\mathbf{p}$, e uma força $\mathbf{F}$ atua sobre ela. A posição da partícula em relação ao ponto O é dada pelo vetor $\mathbf{r}$. A partícula está submetida a um torque definido na Equação 10.9. Aplicando a Segunda Lei de Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, teremos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &\equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}).\end{aligned}\quad (10.23)$$

Vemos que o torque é igual à derivada no tempo da grandeza $\mathbf{l}$, denominada **momento angular** da partícula, definida por

$$\mathbf{l} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (10.24)$$

O momento angular da partícula desempenha, no movimento de rotação, papel análogo ao seu momento linear $\mathbf{p}$ e, combinando as Equações 10.23 e 10.24, podemos escrever a segunda lei de Newton aplicada à rotação:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}. \quad (10.25)$$

O módulo do momento angular é

$$l = rmv \sin \theta = bmv. \quad (10.26)$$

Vê-se que o módulo l do momento angular é igual ao produto de $p = mv$ pela distância b entre o ponto O e a reta definida por $\mathbf{p}$. A direção de $\mathbf{l}$ é perpendicular ao plano que contém $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$. O sentido de $\mathbf{l}$ é dado pela regra da mão direita ou, equivalentemente, pela regra do relógio: $\mathbf{l}$ aponta para o lado do qual se vê a partícula contornando o ponto O no sentido anti-horário. No caso específico da Figura 10.12, $\mathbf{l}$ aponta para fora do papel. Na figura, o símbolo que representa $\mathbf{l}$ foi colocado em um ponto arbitrário. Ele poderia ser colocado na posição da partícula ou no ponto O, mas isso é irrelevante porque o ponto de origem da seta que indica um vetor não tem qualquer significado objetivo.

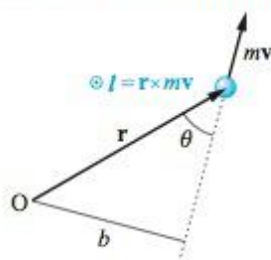


Figura 10.12

Ilustração do momento angular $\mathbf{l}$ de uma partícula em movimento, em relação a um ponto O. O momento angular aponta para fora do papel.

■ Definição de momento angular de uma partícula

■ Segunda lei de Newton aplicada à rotação de uma partícula

Na rotação, o momento angular $\mathbf{l}$ desempenha papel análogo ao que o momento linear $\mathbf{p}$ desempenha na translação

E-E Exercício-exemplo 10.8

■ Um carro com massa de 1000 kg trafega em uma estrada reta com velocidade de 30 m/s. Qual é o módulo do momento angular do carro em relação aos pontos A e B mostrados na Figura 10.13?

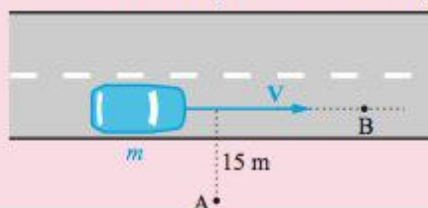


Figura 10.13

(Exercício-exemplo 10.8).

■ Solução

Tratando o carro como uma partícula e aplicando a Equação 10.25, obtemos

$$l_A = 15\text{m} \times 1000 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}} \times 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4,5 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{s},$$

$$l_B = 0 \times 1000 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}} \times 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.$$

Este exemplo ressalta o fato de que o momento angular não é uma grandeza sempre associada a movimento de rotação. Mesmo no caso de translação sobre uma reta, um corpo tem momento angular não-nulo em relação a qualquer ponto fora da referida reta. Isso é decorrência da própria definição de momento angular, expressa pela Equação 10.25. Havendo movimento de translação, e portanto um momento linear $\mathbf{p}$, o momento angular somente fica nulo se $\mathbf{r} = 0$ ou se $\mathbf{r}$ for paralelo a $\mathbf{p}$. A diferença essencial entre o momento angular associado a um movimento de rotação e o momento angular associado a um movimento de translação é que no primeiro caso o momento angular é não-nulo, qualquer que seja o ponto de referência.

Pode haver momento angular associado tanto a movimento de translação quanto a movimento de rotação

Exercícios

E10.12 A Figura 10.14 mostra uma haste de comprimento L em repouso e uma pequena bola de massa m movimentando-se em direção à barra, com velocidade v em uma linha reta que passa pelo seu topo. Calcule o momento angular da bolinha em relação ao centro da barra.

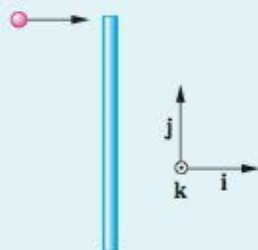


Figura 10.14
(Exercício 10.12).

E 10.13 Com relação ao sistema utilizado nos Exercícios 10.3 e 10.9, determine o momento angular do corpo em relação ao centro da roldana e verifique que a Equação 10.25 é satisfeita.

Somando os momentos angulares l_i das várias partículas de um corpo, obtemos o momento angular total $\mathbf{L}$ do corpo:

$$\mathbf{L} \equiv \sum_i l_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (10.27)$$

Derivando a equação acima em relação ao tempo e usando a Equação 10.14, concluímos que o torque total e o momento angular total de um corpo, ambos em relação a um mesmo ponto O, obedecem à segunda lei de Newton para rotações de um corpo:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (10.28)$$

■ Segunda lei de Newton aplicada à rotação de um corpo

Já obtivemos para as rotações várias grandezas análogas às usuais nos movimentos de translação. Entretanto, a análoga da massa, ou seja, a inércia ao movimento de rotação, não foi ainda determinada. Para rotações em torno de um ponto fixo essa grandeza não é um escalar, e assim seu estudo está fora do escopo deste livro. Entretanto, ela se torna razoavelmente simples quando a rotação se faz em torno de um eixo fixo. Isso ficará claro nas próximas seções.

Seção 10.7 ■ Momento angular em movimento circular uniforme

Consideremos um caso particular muito importante de movimento, o de uma partícula em movimento circular uniforme em torno de um eixo, que definiremos como eixo Oz . A Figura 10.15 mostra a partícula de massa m girando em torno do eixo Oz . As coordenadas x , y da partícula e sua velocidade podem ser expressas em termos de outras coordenadas mostradas na figura:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$v_x = -\omega \rho \sin \varphi, \quad v_y = \omega \rho \cos \varphi, \quad v_z = 0.$$

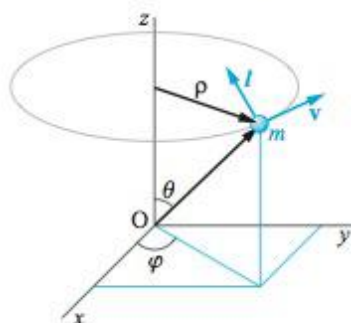


Figura 10.15

O momento angular da partícula em relação ao ponto O será então

$$\mathbf{l} = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = m\omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \rho \cos \varphi & \rho \sin \varphi & z \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{l} = -m\omega z\rho (\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi) + m\omega \rho^2 \mathbf{k}.$$

Uma vez que $\rho = \mathbf{i}\rho \cos \varphi + \mathbf{j}\rho \sin \varphi$, obtemos finalmente

$$\mathbf{l} = -m\omega z\rho + m\omega \rho^2 \mathbf{k}. \quad (10.29)$$

A Equação 10.29 mostra que o momento angular tem uma componente paralela ao eixo, que se mantém fixa durante o movimento, e outra componente perpendicular ao eixo que gira junto com a partícula. Esta última componente sempre aponta da partícula para o eixo, e tem valor nulo se $z = 0$, ou seja, se o ponto O de referência estiver no plano da órbita da partícula.

Exercício

E 10.14 Idealize a órbita da Terra em torno do Sol como um círculo com raio de $1,5 \times 10^{11}$ m centrado no Sol. Calcule o momento angular, em relação ao Sol, do movimento orbital da Terra, cuja massa é de $6,0 \times 10^{24}$ kg.

Seção 10.8 ■ Momento angular de um corpo rígido – momento de inércia

Consideremos o movimento de rotação mais simples de um corpo rígido, a rotação uniforme em torno de um eixo fixo, digamos Oz . Todas as partículas do corpo terão movimento circular uniforme em torno do referido eixo, com a mesma velocidade angular ω . O momento angular total será a soma dos momentos angulares de suas partículas, dados por expressões análogas à Equação 10.29:

$$\mathbf{L} = -\omega \sum_i m_i z_i \rho_i + \omega \mathbf{k} \sum_i m_i \rho_i^2. \quad (10.30)$$

O momento angular dado nesta equação tem duas componentes, uma fixa paralela ao eixo (componente L_z) e outra perpendicular ao eixo, a qual gira juntamente com o corpo (componente L_{xy}). A componente L_z é dada por

$$L_z = \omega \sum_i m_i \rho_i^2. \quad (10.31)$$

■ No movimento de rotação em torno de um eixo, o momento de inércia I desempenha papel análogo ao da massa no movimento de translação

O momento angular é na rotação a grandeza análoga ao momento linear. A Equação 10.31 é perfeitamente análoga à equação $P = Mv$, que exprime o momento linear do corpo em termos da sua massa e da velocidade do seu centro de massa. Portanto, o somatório que aparece na Equação 10.31 desempenha na rotação um papel análogo ao da massa na translação. Ele é uma propriedade fixa do corpo para o referido eixo de rotação. Portanto, é conveniente destacá-lo e dar-lhe um nome e um símbolo distintos. Ele é denominado *momento de inércia* do corpo em relação ao dado eixo e seu símbolo é a letra I . Escreve-se

$$I \equiv \sum_i m_i \rho_i^2. \quad (10.32)$$

Se o corpo for tratado como um contínuo, o somatório da Equação 10.32 transforma-se em uma integral:

$$I \equiv \int \rho^2 dm. \quad (10.33)$$

Usando-se o símbolo I para o momento de inércia, a Equação 10.31 assume a forma compacta

$$L_z = I\omega. \quad (10.34)$$

■ Momento de inércia de um corpo composto de partículas discretas

■ Momento de inércia de um corpo contínuo

E-E Exercício-exemplo 10.9

■ Calcule o momento de inércia do corpo mostrado na Figura 10.8 em relação ao eixo E perpendicular ao papel. Os aros que vão do eixo às esferas têm massa desprezível, e o raio das esferas é muito menor que l .

■ Solução

Cada esfera pode ser tratada como uma partícula cuja distância ao eixo é igual a l . Pelo emprego da Equação 10.32, obtemos

$$I = m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + m_3 \rho_3^2 + m_4 \rho_4^2 \Rightarrow I = (2m + m + m + 2m)l^2 = 6ml^2.$$

E-E Exercício-exemplo 10.10

■ Calcule o momento de inércia de uma porta de largura D e massa M em relação ao eixo que passa pelas dobradiças.

■ Solução

Para fazer a integração indicada na Equação 10.33, dividiremos a porta em fatias verticais de largura infinitesimal dx , onde as coordenadas x têm origem no eixo de rotação, como mostra a Figura 10.16. O diferencial da massa dm é a massa das fatias, dada por

$$dm = \frac{M}{D} dx.$$

Uma vez que $\rho = x$, podemos escrever $I = \frac{M}{D} \int_0^D x^2 dx = \frac{1}{3} MD^2$.

Este resultado descreve também o momento de inércia de uma barra de massa M , diâmetro desprezível e comprimento D , em relação a uma de suas extremidades, como o pêndulo da Figura 10.11 (Exercício 10.11).

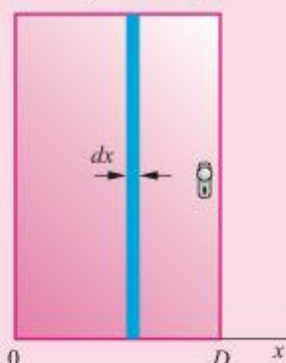


Figura 10.16

(Exercício-exemplo 10.10).

Exercícios

E 10.15 Oito partículas de massa m estão dispostas como se estivessem nos vértices de um cubo de lado a . Determine o momento de inércia do sistema em relação a um eixo (A) contendo uma aresta do cubo; (B) passando por seu centro e perpendicular a duas faces opostas.

E 10.16 Calcule o momento de inércia, em relação ao seu eixo de simetria, de uma capa cilíndrica de raio R e massa M , supondo (A) que sua espessura seja desprezível, (B) de um cilindro oco de massa M , em que o raio interior seja r e o exterior seja R .

E 10.17 A hélice de um helicóptero contém três hastes, a 120° uma da outra, cada qual com comprimento de 4,0 m e massa de 60 kg. A hélice gira com velocidade de 10 giros por segundo. Supondo que a massa por unidade de comprimento das hastes seja uniforme, calcule (A) o momento de inércia da hélice; (B) o momento angular da hélice.

No final do capítulo apresentamos mais alguns cálculos e uma tabela de momentos de inércia de vários corpos simétricos.

Combinando as Equações 10.28 e 10.34, podemos escrever

$$T_z = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha, \quad (10.35)$$

onde I é o momento de inércia do corpo e T_z é a componente em z da soma dos torques aplicados sobre todas as partículas. Vimos anteriormente que essa soma é igual à soma dos torques externos.

Observe que a Equação 10.10 nos mostra que o torque é o responsável pela realização de trabalho na rotação, a Equação 10.28 mostra que ele pode modificar o momento angular do corpo e a Equação 10.35 mostra que o torque em torno de um eixo gera uma aceleração angular do corpo. Isso mostra a coerência da analogia entre o torque e a força. Na vida diária temos conhecimento intuitivo de que no movimento de rotação o que interessa é o torque e não a força. Ao movimentar uma porta para abri-la ou fechá-la, instintivamente aplicamos a nossa força o mais distante possível do eixo de rotação, como se vê na Figura 10.17. Se quisermos derrubar uma estaca fincada verticalmente no chão, certamente a forçaremos na parte superior com uma força horizontal. Sempre tentamos tirar proveito do *princípio da alavanca*. A projeção da distância ρ — do ponto de aplicação da força ao eixo do movimento — no plano ortogonal à força é denominada *braço da alavanca* da força. O torque é o produto da força pelo braço da alavanca.

■ Segunda lei de Newton aplicada à rotação de um corpo rígido em torno de um eixo

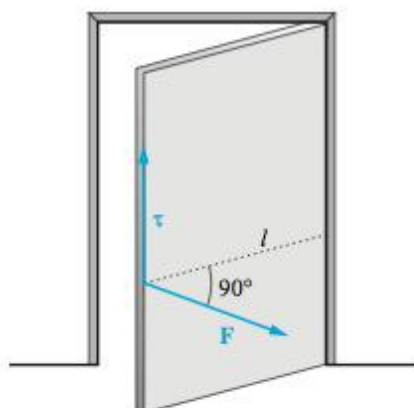


Figura 10.17

Ao abrirmos uma porta, por experiência sabemos que devemos aplicar a força em algum ponto distante do eixo de rotação. Isto reduz a força necessária para a operação.

E-E Exercício-exemplo 10.11

■ Reconsiderando a porta do Exercício-exemplo 10.10, calcule sua aceleração angular, se aplicarmos à extremidade livre uma força de 20 N perpendicular ao plano da porta, como mostra a Figura 10.17.

■ Solução

O torque aplicado se orienta na direção z , e tem valor

$$0,80\text{m} \times 20\text{ N} = 16\text{ Nm}.$$

Aplicando a segunda lei de Newton para rotações na forma expressa pela Equação 10.35, obtemos a aceleração angular

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{T}{I} = \frac{16\text{ N m}}{10,7\text{ N ms}^2} = 1,5\text{ s}^{-2}.$$

A unidade de α é rad/s^2 . Entretanto, rad é um número puro e por isto a unidade não aparece durante o cálculo.

Exercícios

E 10.18 Calcule a aceleração angular da haste descrita no Exercício-exemplo 10.11.

E 10.19 As hastes da hélice mostrada na Figura 10.18 têm o mesmo comprimento l e a mesma massa m , e todas as três forças mostradas na figura têm o mesmo módulo F . Calcule a aceleração angular da hélice.

E 10.20 Um bloco preso a um fio leve desce sob o efeito da gravidade, fazendo girar uma roldana de raio R e momento de inércia I , presa em um eixo sem atrito, como mostra a Figura 10.19. Calcule (A) a aceleração angular da roldana; (B) o trabalho realizado pelo torque do fio em uma volta da roldana. Dica: A Segunda Lei de Newton deve ser aplicada tanto para o movimento de rotação da polia como para o movimento do bloco.

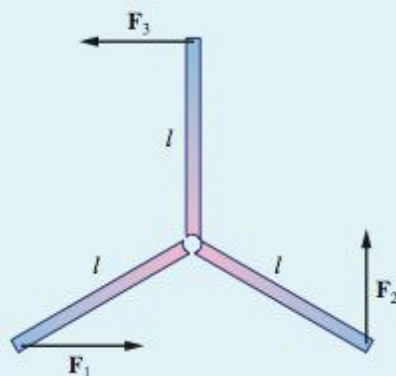


Figura 10.18
(Exercício 10.19).



Figura 10.19
(Exercício 10.20).

Seção 10.9 ■ Eixo balanceado (opcional)

A Equação 10.34 relaciona L_z com ω . A conexão entre o vetor momento angular $\mathbf{L}$ de um corpo rígido e seu vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ geralmente é complicada, mas torna-se especialmente simples se o eixo de rotação do corpo for um eixo de simetria do mesmo. Consideremos um corpo simétrico girando em torno de um eixo de simetria. Por exemplo, um cone girando em torno do seu eixo, uma esfera girando em torno do seu diâmetro etc. Nesse caso, a primeira somatória da Equação 10.30 dá um valor nulo. Isso ocorre porque para cada partícula na posição de coordenadas (z_i, ρ_i) haverá outra partícula de massa idêntica na posição de coordenadas $(z_i - \rho_i)$. Dessa forma, no somatório os termos correspondentes às duas partículas se cancelarão exatamente. Devido a tal cancelamento, a Equação 10.30 assumirá a forma

$$\mathbf{L} = \omega \mathbf{k} \sum_i m_i \rho_i^2. \quad (10.36)$$

Para um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria, o momento angular é paralelo à velocidade angular

Posto que $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$, podemos ainda escrever

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}. \quad (10.37)$$

Um aspecto relevante da Equação 10.37 é que, contrariamente ao que ocorre na Equação 10.30, a coordenada z não mais aparece no momento e na velocidade angulares. Assim, o ponto de origem O (ver Figura 10.15) pode ser colocado em qualquer ponto sobre o eixo dos z , que é o eixo de rotação, sem afetar o valor do momento angular. Nesse caso, como é usual, podemos falar no momento angular do corpo em relação ao seu eixo de rotação, pois o momento angular em relação a qualquer ponto sobre o eixo terá o mesmo valor.

Na verdade, o momento angular e a velocidade angular podem ser paralelos mesmo quando o eixo não é de simetria. A rigor, para que o paralelismo ocorra basta que o primeiro termo na Equação 10.30 seja nulo. Estar girando em torno de um eixo de simetria é condição suficiente mas não necessária para que tal termo se anule. Um eixo de rotação para o qual o momento angular e a velocidade angular são paralelos é denominado **eixo balanceado**, ou **eixo principal de inércia**.

Um eixo de rotação para o qual o momento angular e a velocidade angular são paralelos é denominado **eixo balanceado**, ou **eixo principal de inércia**

Quando um corpo gira em torno de um eixo balanceado com velocidade angular constante, seu momento angular permanece constante. Isso significa que o corpo consegue permanecer girando em torno desse eixo sem que nenhum torque externo seja aplicado sobre ele. Eixos balanceados são muito importantes para o bom funcionamento de máquinas. Um exemplo muito familiar dessa importância refere-se ao giro de uma roda de automóvel. Se a roda não está balanceada, para que ela gire em torno de um eixo fixo é necessário que o mecanismo que a prende lhe aplique um torque cuja direção gira junto com a roda. Geralmente, o mecanismo de sustentação da roda, mesmo sendo muito forçado, é incapaz de aplicar o torque necessário e, em consequência, a roda gira mancando. Para balancear a roda e fazer com que seu giro seja suave, é necessário colocar pequenos contrapesos em seu contorno até que o primeiro termo da Equação 10.30 se torne nulo.

Seção 10.10 ■ Energia cinética

Para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo com velocidade angular ω , a velocidade da partícula i será dada por

$$v_i = \omega \rho_i, \quad (10.38)$$

onde ρ_i é a sua distância até o eixo. Esse resultado é um caso particular da Equação 10.38. A energia cinética do corpo será

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2. \quad (10.39)$$

Os fatores fixos podem ser postos em evidência no último termo da Equação 10.39 para se obter

■ Energia cinética devida à rotação em torno de um eixo

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (10.40)$$

Veja que a equação que expressa a energia cinética de rotação de um corpo em torno de um eixo é metade do produto da inércia de rotação pelo quadrado da velocidade angular. Há aqui uma perfeita analogia com a energia cinética $K = mv^2/2$ associada à translação.

E-E Exercício-exemplo 10.12

■ Calcule a energia cinética da porta, do Exercício-exemplo 10.11, quando a sua velocidade angular é 10,0 rad/s, sabendo que sua massa e sua largura são respectivamente 50,0 kg e 0,800 m.

■ Solução

O momento de inércia da porta é

$$I = \frac{1}{3} \times 50 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}} \times 0,64 \text{m}^2 = 10,7 \text{ Nms}^2.$$

Sua energia cinética será, então,

$$K = \frac{1}{2} \times 10,7 \text{ Nms}^2 \times 100 \text{s}^{-2} = 5,35 \times 10^3 \text{ J}.$$

Note-se que a unidade rad não aparece nos cálculos. Tal fato ocorre porque rad é grandeza adimensional. A velocidade angular da porta pode ser escrita simplesmente como 10/s.

Exercícios

E 10.21 Considere a Terra como uma esfera homogênea com raio de $6,4 \times 10^{24}$ m e massa de $6,0 \times 10^{24}$ kg. Calcule o momento angular e a energia cinética decorrentes de sua rotação.

E 10.22 Calcule a energia cinética da hélice no Exercício 10.17.

Seção 10.11 ■ Conservação do momento angular

A Equação 10.28 nos diz que a taxa de variação do momento angular $\mathbf{L}$ do sistema é igual ao torque aplicado pelas forças externas sobre o mesmo. Esse torque é sempre nulo em um sistema isolado, e pode ser também nulo em sistemas não-isolados. Podemos assim enunciar a **lei da conservação do momento angular**:

O momento angular total de um sistema sujeito a um torque externo nulo é constante.

Tomemos como exemplo o sistema solar. No estudo do movimento dos planetas e seus satélites, o sistema pode ser tratado como isolado. Os planetas se perturbam mutuamente, e suas velocidades e as velocidades de suas luas são afetadas por isto. Porém, o sistema como um todo tem momento angular constante. A lei da conservação do momento angular é uma das leis fundamentais da Natureza. Sua validade extrapola os limites da mecânica newtoniana e da própria física clássica. Tal lei decorre da isotropia do espaço.

Lei da conservação do momento angular

O momento angular total de um sistema sujeito a um torque externo nulo é constante.

E-E Exercício-exemplo 10.13

■ Esse meteoro irá colidir com a Terra? Um astrônomo descobre um meteoro em uma trajetória que pode resultar em colisão com a Terra e rapidamente todo um grupo de vigilância determina sua distância r até o centro da Terra e sua velocidade v , medida no referencial da Terra. A Figura 10.20 mostra esses dados iniciais, sobre os quais o grupo realiza cálculos computacionais muito precisos sobre a trajetória prevista para o meteoro. O que ocorrerá?

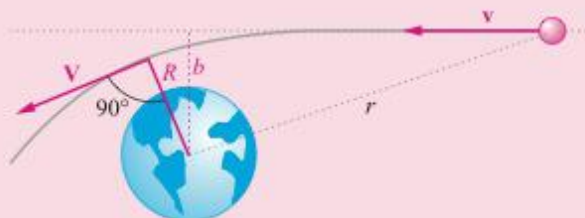


Figura 10.20

(Exercício-exemplo 10.13).

■ Solução

Com o que já aprendemos neste livro podemos fazer um cálculo preliminar, usando algumas aproximações, e obter uma boa idéia do risco de colisão. Nossa primeira aproximação será ignorar a influência dos outros planetas e do Sol sobre a órbita do meteoro, e a segunda será considerar a Terra como referencial inercial. Neste último caso estamos ignorando a curvatura da trajetória da Terra em sua órbita em torno do Sol. Se o meteoro estiver suficientemente próximo da Terra e por isso o tempo necessário para que ele colida com nosso planeta ou passe por ele seja pequeno, nosso erro não será grande.

Todo o cálculo será feito no referencial da Terra, ou seja, ela estará parada. A única força que estará atuando sobre o meteoro será a gravitação da Terra e, como essa força é conservativa, poderemos usar a conservação da energia mecânica. Além disso, a força da gravidade não realizará torque, em relação ao centro da Terra, sobre o meteoro, pois tal força sempre estará alinhada com o vetor que vai do centro da Terra ao meteoro.

Iremos calcular a condição para que não haja colisão, ou seja, a condição para que a distância mínima R entre o meteoro e o centro da Terra seja maior do que o raio R_T da Terra. Ao passar pelo ponto de aproximação mínima, a velocidade V do meteoro será ortogonal à linha que vai do meteoro ao centro da Terra; caso contrário, a distância ao centro da Terra estaria diminuindo ou aumentando, não sendo portanto um valor mínimo. Assim, nesse ponto o momento angular do meteoro será $L_R = mVR$. Usando a conservação do momento angular e o fato de que seu valor inicial era $L_o = mvb$, podemos escrever

$$mvb = mVR \quad \Rightarrow \quad V = \frac{b}{R} v.$$

A conservação da energia mecânica se exprime pela equação

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mV^2 - G\frac{Mm}{R}.$$

Substituindo o valor de V nesta equação obtemos

$$v^2 - 2G\frac{M}{r} = \frac{b^2}{R^2}v^2 - 2G\frac{M}{R} \quad \Rightarrow \quad (v^2 - 2G\frac{M}{r})R^2 + 2GMR - b^2v^2 = 0.$$

$$\text{Resolvendo esta equação obtemos } R = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + (v^2 - 2G\frac{M}{r})b^2v^2}}{v^2 - 2G\frac{M}{r}},$$

que exprime o valor de R em termos das condições iniciais b , v e r , da massa da Terra e da constante da gravitação G . A condição para que não haja colisão é $R_T < R$, ou

$$R_T < \frac{-GM + \sqrt{G^2 M^2 + \left(v^2 - 2G \frac{M}{r}\right) b^2 v^2}}{v^2 - 2G \frac{M}{r}}.$$

E-E Exercício-exemplo 10.14

■ Um cilindro oco de raio interno R é descido lentamente vestindo um cilindro de raio $R - \epsilon$ ligeiramente menor, sem tocar nele, e finalmente, no instante $t = 0$, depositado sobre um pequeno ressalto na base inferior do cilindro de baixo. Este último cilindro pode girar sem atrito em torno de um eixo preso a uma plataforma fixa (Figura 10.21). Sua velocidade angular inicial antes de o outro ser baixado era ω_o . O coeficiente de atrito cinético entre o cilindro oco e o ressalto é μ_c . Determine o movimento do sistema após $t = 0$. Os momentos de inércia são dados na figura.

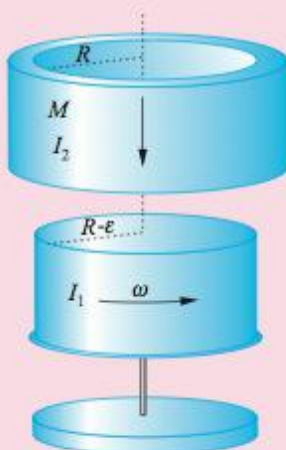


Figura 10.21
(Exercício-exemplo 10.14).

■ Solução

Enquanto os dois cilindros não atingirem a mesma velocidade angular, o cilindro oco deslizará sobre o ressalto e haverá entre eles uma força de atrito de módulo $\mu_c Mg$. Assim, os cilindros sofrerão torques opostos, na direção vertical, de módulo $\mu_c MgR$. Suas equações de movimento serão

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = -\mu_c MgR \Rightarrow \omega_1 = \omega_o - \frac{\mu_c MgRt}{I_1},$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \mu_c MgR \Rightarrow \omega_2 = \frac{\mu_c MgRt}{I_2}.$$

Tais equações de movimento permanecerão válidas até que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_f$. Essa velocidade final comum é determinada pela conservação do momento angular:

$$I_1 \omega_o = (I_1 + I_2) \omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_o,$$

ou fazendo-se $\omega_1 = \omega_2$ nas equações acima e eliminando-se a variável t .

E-E Exercício-exemplo 10.15

■ Por que o movimento da bicicleta evita que ela caia?

■ Solução

Para reduzir o problema aos seus elementos essenciais, consideraremos apenas uma roda rolando em um piso horizontal, como mostra a Figura 10.22. A roda rola para fora do papel, o que gera um momento angular $\mathbf{L}$ na direção e sentido indicados na figura. A roda está inclinada, e se estivesse parada iria cair devido ao seu peso mg . Consideremos agora o que resulta do movimento. Para que a roda caia, seu momento angular $\mathbf{L}$ tem de variar. O peso da roda é incapaz de alterar o seu momento angular porque o seu torque em relação ao eixo de rotação é nulo. Portanto, o movimento evita a queda. Resta agora analisar o efeito da força $\mathbf{N}$ que o piso faz sobre a roda. Esta força realiza um torque em relação ao eixo cujo módulo vale $rN\sin\theta$, onde r é o raio da roda. Sua direção é normal ao papel, com sentido saindo do papel. Portanto, o efeito da força $\mathbf{N}$ é girar o vetor $\mathbf{L}$ para fora do papel; isso implica que a roda deixa de andar em linha reta e realiza uma curva para dentro (esquerda do leitor). Um resultado da curvatura da roda é o aparecimento da força de atrito lateral $\mathbf{F}_a$, indicada na figura. Tal força gera a aceleração centrípeta na roda, e seu valor é

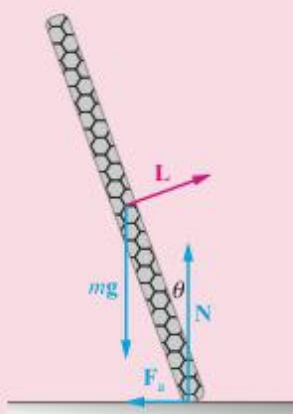


Figura 10.22
(Exercício-exemplo 10.15).

$$F_a = m \frac{v^2}{R},$$

onde R é o raio de curvatura da trajetória da roda. Vê-se que a força de atrito lateral também realiza torque sobre a roda, e que seu sentido se opõe ao torque exercido pela força $\mathbf{N}$. Entretanto, ele não é capaz de neutralizar ou inverter a curvatura da trajetória, pois por necessidade $\mathbf{F}_a$ tem de apontar para o interior da curva.

Seção 10.12 ■ Fenômenos decorrentes da conservação do momento angular

Muitos fenômenos da Natureza, alguns familiares a todos nós, decorrem diretamente da lei da conservação do momento angular. Vários deles se referem a sistemas que alteram o seu momento de inércia enquanto nenhum torque é aplicado sobre eles. Um exemplo muito familiar é o da bailarina no gelo que, estando girando inicialmente com os braços abertos e uma perna esticada, repentinamente os fecha. As forças da gravidade e da ação normal da superfície do gelo exercem torque resultante nulo sobre o corpo da patinadora, portanto o

seu momento angular só é afetado pela força de atrito, de torque muito pequeno. O momento angular é quase constante. Ao fechar os braços, a patinadora reduz o seu momento de inércia do valor I_i para o valor I_f . Conclui-se que

$$I_f \omega_f = I_i \omega_i \Rightarrow \omega_f = \frac{I_i}{I_f} \omega_i. \quad (10.41)$$

Portanto, a velocidade angular da patinadora aumenta, como ilustra a Figura 10.23.

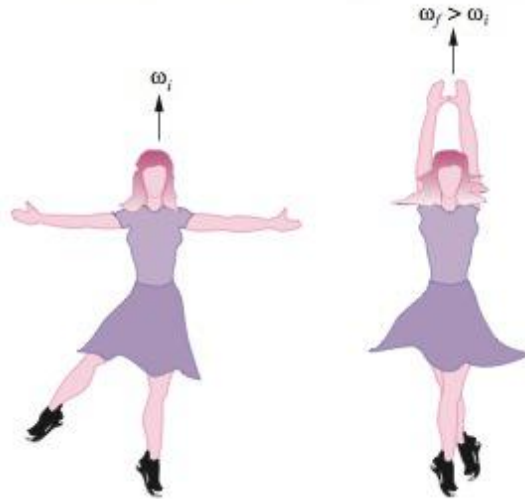


Figura 10.23

Quando a patinadora fecha os braços e as pernas, sua velocidade angular aumenta.

Fenômeno semelhante ocorre durante saltos ornamentais de trampolim. O centro de massa do atleta percorre uma parábola no ar. Ao tomar impulso para cima com o corpo inclinado, o atleta imprime um momento angular ao seu corpo, o qual gira em torno do centro de massa. Enquanto no ar, o atleta encolhe o corpo e os membros, reduzindo o seu momento de inércia. Então, sua velocidade angular aumenta. Ao se aproximar da água, o atleta se estica ao máximo, aumentando o momento de inércia e reduzindo a sua velocidade de rotação.

Quando abrimos o esgoto de uma pia inicialmente cheia, percebemos que, quando o esgotamento se aproxima do fim, a água inicia um redemoinho de velocidade angular crescente. O que ocorre é que o quase inevitável movimento inicial da água sempre resulta em um momento angular que não é exatamente nulo, o qual permanece constante durante o esvaziamento. Devido ao pequeno diâmetro do esgoto, a água que escoar carrega muito pouco momento angular no início do escoamento e, portanto, o momento angular da água restante na pia fica quase constante. Quando o volume de água fica muito reduzido, tal momento angular se manifesta na forma de redemoinho. O movimento de rotação da Terra também gera uma contribuição para o redemoinho da água na pia. Entretanto, essa contribuição é geralmente pequena comparada ao efeito observado.

É no domínio da astrofísica que a conservação do momento angular apresenta algumas das suas manifestações mais espetaculares, a começar pela estrutura e pelo movimento do próprio sistema solar. Supostamente, o sistema se formou a partir da condensação de uma nuvem de gás sob a ação da atração gravitacional. Como no caso da água na pia, somente uma improvável coincidência resultaria em um momento angular inicial nulo. Em certos casos, o momento angular é grande o suficiente para que o gás fique impossibilitado de se condensar em um único núcleo central. Parte dele se condensa em planetas, (felizmente) impedidos de se aproximar da estrela central. Isto parece ter sido exatamente o que ocorreu na formação do sistema solar. Todos os planetas giram em torno do Sol aproximadamente no mesmo plano e no mesmo sentido, como se vê no Apêndice G; este é o modo de se somar o maior momento angular total. No sistema solar, cerca de 99% do momento angular se devem ao movimento orbital dos planetas. Além do mais, os eixos de rotação dos planetas e do próprio Sol se alinham aproximadamente com os eixos das órbitas. O alinhamento perfeito neste caso não é muito importante, uma vez que somente 1% do momento angular está relacionado com esse movimento de rotação. Em alguns casos, em que o momento angular do gás inicial é

suficientemente grande, a condensação resulta em duas ou mais estrelas (sistemas múltiplos), as quais orbitam em torno do seu centro de massa. Pelo menos três quartos das estrelas na Via-Láctea são sistemas múltiplos.

Exercícios

E 10.23 Uma bailarina consegue aumentar sua velocidade angular em 25% fechando braços e perna. Qual foi a diminuição relativa do seu momento de inércia?

E 10.24 O disco visto na Figura 10.24 gira com velocidade ω_0 em torno do eixo vertical de simetria. Uma lança, caindo na vertical, crava-se à distância a do eixo de rotação. Para quanto cai a velocidade angular do disco?

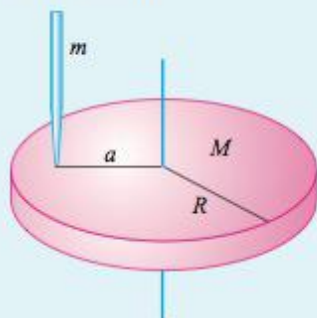


Figura 10.24
(Exercício 10.24).

E 10.25 Uma turbina de avião possui em operação momento angular de $3,0 \times 10^4 \text{ kg m}^2/\text{s}$. O avião possui um momento de inércia, em relação a seu eixo longitudinal passando pelo cm, igual a $6,0 \times 10^5 \text{ kg m}^2$. Supondo-se que a turbina trave repentinamente, parando de girar, qual é a velocidade angular que o avião adquire com o acidente? *Nota:* As turbinas de avião são ligadas a ele por um sistema incapaz de resistir ao tranco em um acidente desse tipo. Portanto, a turbina desgarra-se do avião e este (se tiver outra turbina) fica protegido.

Seção 10.13 ■ Equilíbrio

Um caso particular de aplicação da lei da conservação do momento angular é a análise do estado de equilíbrio de corpos rígidos. No que se refere às translações de uma partícula, sabemos que esta está em equilíbrio quando a soma de forças sobre ela é nula. Para que um corpo rígido esteja em equilíbrio esta condição continua necessária, mas também deve ser nula a soma dos torques que atuam sobre o corpo. Assim, as condições de equilíbrio são

$$\sum \mathbf{F} = 0; \quad \sum \tau = 0. \quad (10.42)$$

Uma decorrência muito interessante dessas condições é que, quando ambas são verdadeiras, a soma dos torques é nula em relação a qualquer ponto de referência, como foi mostrado na Equação 10.18. Isto é de muita utilidade na análise de equilíbrio de corpos.

E-E Exercício-exemplo 10.16

■ No Exercício-exemplo 10.7 considere que o coeficiente de atrito estático da escada da Figura 10.10 com o piso é μ . Calcule o valor máximo de θ para que a escada não escorregue.

■ Solução

Para que a escada permaneça em equilíbrio, as resultantes tanto das forças quanto dos torques aplicados sobre ela devem ser nulas. A Equação 10.22 dá o torque resultante já considerando que a soma das forças é nula. Da nulidade do torque podemos então escrever:

$$\frac{mg \sin \theta}{2} = F_a \cos \theta \quad \Rightarrow \quad F_a = \frac{mg \tan \theta}{2}. \quad (10.43)$$

Considerando o coeficiente de atrito entre a escada e o piso, temos

$$F_a \leq \mu N = F_a \leq \mu mg. \quad (10.44)$$

Combinando as Equações 10.43 e 10.44, obtemos finalmente

$$\tan \theta \leq 2\mu, \quad \theta_{\text{máx}} = \arctg(2\mu).$$

E-E Exercício-exemplo 10.17

■ Um bloco homogêneo em forma de paralelepípedo tem altura H e base de largura a e se apóia em um piso, como mostra a Figura 10.25. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o piso é μ . Uma força $\mathbf{F}$ é aplicada sobre o bloco a uma altura h a partir do chão e este faz sobre o bloco uma força normal $\mathbf{N}$ e uma força de atrito $\mathbf{F}_a$. (A) Mostre que para $h \neq 0$ as condições de equilíbrio não podem ser atendidas se o ponto efetivo de aplicação de $\mathbf{N}$ estiver no eixo que passa pelo centro de massa do bloco. (B) Supondo que $\mathbf{N}$ esteja aplicada a uma distância d do eixo central e que o bloco esteja em equilíbrio, determine o valor de d . (C) Calcule a altura máxima h em que a força $\mathbf{F}$ pode ser aplicada ao bloco para que ele seja arrastado sem tombar.

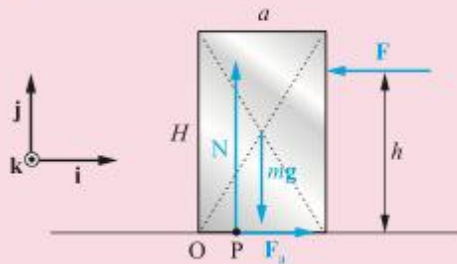


Figura 10.25
(Exercício-exemplo 10.17).

■ Solução

O torque da força $\mathbf{F}$ tende a tombar o corpo girando-o em torno de um eixo que passa pelo ponto O. Mas enquanto o corpo estiver em equilíbrio a soma das forças é nula e o torque total não depende do ponto de referência. Assim, usaremos o ponto P, que é o ponto do corpo sobre o qual atua a força $\mathbf{N}$.

(A) Se P está no eixo vertical que passa pelo centro de massa, o torque em relação a P das forças $m\mathbf{g}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{F}_a$ são nulos. O torque devido à força $\mathbf{F}$ será $\tau_F = Fhk$. Assim, não é possível atender à condição de torque zero se $h \neq 0$.

(B) Supondo que o ponto P esteja a uma distância d do eixo central, os torques em relação a P da normal $\mathbf{N}$ e da força de atrito são nulos. O torque das forças $\mathbf{F}$ e $m\mathbf{g}$ será

$$\mathbf{T} = (Fh - mgd)\mathbf{k}.$$

Para que o corpo esteja em equilíbrio, $\mathbf{T}$ deve ser nulo. Assim, o ponto efetivo de aplicação da normal deverá estar a uma distância d dada por

$$d = \frac{hF}{mg}. \quad (10.45)$$

Concluímos que, se $\mathbf{F}$ for nula, a força normal será alinhada com a força-peso.

Quando $\mathbf{F}$ cresce de intensidade, o ponto de aplicação de $\mathbf{N}$ se desloca na direção do ponto O, mas enquanto o bloco permanecer na vertical $\mathbf{N}$ será igual a $m\mathbf{g}$, pois o corpo estará em equilíbrio. O ponto de aplicação da força de atrito também se deslocará do centro da base do bloco para o ponto O quando $\mathbf{F}$ cresce, e se o bloco estiver imóvel teremos $F_a = F$.

(C) O valor de d é limitado pelo tamanho do corpo, ou seja, aumentando-se h ou F a distância d vai aumentando até o valor máximo de $a/2$. Substituindo d na Equação 10.43 por esse valor obtemos o valor máximo possível para h , que corresponde ao limiar do tombamento:

$$h_{\text{máx}} = \frac{mga}{2F}.$$

Para cada valor de F temos um valor para $h_{\text{máx}}$. Mas como queremos $h_{\text{máx}}$ para que o bloco deslize sem tombar vamos usar o menor valor de F necessário para provocar deslizamento, ou seja $F = \mu mg$. Assim, teremos

$$h_{\text{máx}} = \frac{a}{2\mu}.$$

Esta é a altura máxima de aplicação da menor força F necessária para deslizar o bloco.

E-E Exercício-exemplo 10.18

■ (A) Qual deve ser o valor da massa m na Figura 10.26 para que a balança fique em equilíbrio, sabendo-se que o braço da balança tem massa muito pequena?

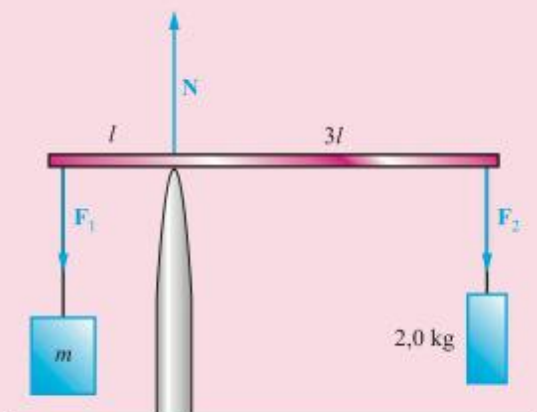


Figura 10.26
(Exercício-exemplo 10.18).

■ Solução

A figura mostra as forças atuando sobre o braço da balança. A força N não exerce torque em relação ao ponto de apoio, em relação ao qual o braço pode girar. Em equilíbrio, as forças F_1 e F_2 têm intensidade

$$F_1 = mg, \quad F_2 = 2,0 \text{ kg} \times g,$$

e o torque sobre o braço tem de ser nulo. Portanto, $F_1 \times l - F_2 \times 3l = 0 \Rightarrow F_1 = 3F_2$.

$$\text{Logo, } mg = 3 \times 2,0 \text{ kg} \times g, \\ m = 6 \text{ kg}.$$

E-E Exercício-exemplo 10.19

■ **Torque sobre um parafuso.** Considere um parafuso sendo apertado por uma chave de boca, como mostra a Figura 10.27. Completado o aperto do parafuso, a chave fica estática mesmo quando seu operador lhe aplica uma força F . Calcule o torque que o operador faz sobre a chave e o torque que a chave faz sobre o parafuso. Calcule também a intensidade do par de forças F_p que a chave faz sobre o parafuso.

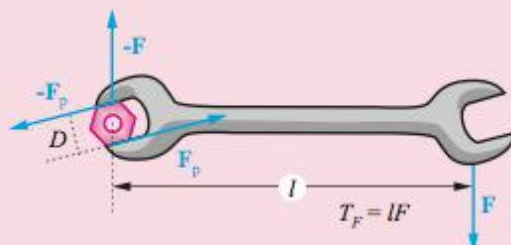


Figura 10.27

As forças de uma chave de boca sobre um parafuso.

■ Solução

A Figura 10.27 apresenta uma visão aproximada das forças atuando sobre a chave. As forças atuando sobre o parafuso não são mostradas. Nessa visão, o peso da chave é desprezado frente às outras forças. O parafuso faz sobre a chave uma força $-F$ e um par de forças F_p e $-F_p$ que, com boa aproximação, podem ser consideradas paralelas às faces do parafuso. Inicialmente, é importante ressaltar que a resultante das forças que atuam sobre a chave é obviamente nula. Consideraremos agora os torques das forças em relação ao eixo de rotação do sistema, que é o eixo do parafuso. Uma vez que a força F aplicada pelo operador é ortogonal à chave, e portanto ao braço da alavanca, obtemos imediatamente a intensidade do torque que o operador exerce sobre a chave:

$$T_F = lF.$$

Completado o aperto do parafuso, a chave fica estática sob o efeito da força F aplicada pelo operador. Isso significa que o torque total sobre a chave é nulo. A força $-F$ tem braço de alavanca nulo e, portanto, seu torque é nulo. Resta agora calcular o torque do binário de forças F_p e $-F_p$. Vê-se imediatamente que tal torque é antiparalelo ao exercido pela força F . Sua intensidade tem de ser a mesma do torque exercido por F para que o torque total sobre a chave seja nulo. Podemos escrever

$$T_p = 2 \times \frac{D}{2} F_p = DF_p. \text{ Como } T_p = T_F, \text{ obtemos } F_p = \frac{l}{D} F.$$

Pela lei da ação e reação, a força e o torque que a chave faz sobre o parafuso também têm as intensidades F_p e T_p . Deve-se ressaltar que, uma vez que $l \gg D$, tem-se também $F_p \gg F$.

Exercício

E 10.26 Qual deve ser a massa da tábua no balanço da Figura 10.28 para que o sistema fique em equilíbrio?

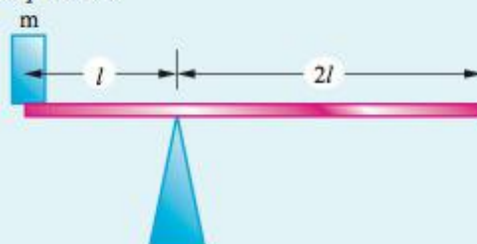


Figura 10.28

(Exercício 10.26).

Seção 10.14 ■ Movimento externo e movimento interno

Movimento externo de um corpo é o movimento do seu centro de massa; **movimento interno** é o movimento das suas partes em relação ao centro de massa

Freqüentemente, é conveniente decompor o movimento de um sistema de partículas no movimento de translação do sistema como um todo (movimento do centro de massa) e o movimento das partículas relativo ao centro de massa. Aquele é denominado **movimento externo** do sistema enquanto este é denominado **movimento interno**. A velocidade $\mathbf{v}_i$ da partícula i é decomposta na velocidade $\mathbf{v}_{cm}$ de translação do centro de massa mais a sua velocidade $\mathbf{v}_{ir}$ em relação ao cm:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_{ir} \quad (10.46)$$

Portanto,

$$v_i^2 = (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_{ir}) \cdot (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_{ir}) = v_{cm}^2 + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_{ir} + v_{ir}^2 \quad (10.47)$$

A energia cinética total do sistema será então escrita na forma

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_{ir} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ir}^2 \quad (10.48)$$

Colocando em evidência os fatores constantes nos somatórios da Equação 10.48, obtemos

$$K = \frac{1}{2} v_{cm}^2 \sum m_i + \mathbf{v}_{cm} \cdot \left(\sum m_i \mathbf{v}_{ir} \right) + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ir}^2 \quad (10.49)$$

O primeiro termo do lado direito desta equação é a energia cinética K_{trans} de translação do sistema. O fator entre parênteses no segundo termo é o momento linear total do sistema no referencial do centro de massa, já que $\mathbf{v}_{ir}$ é a velocidade em relação a esse ponto. Esse é um termo nulo: com efeito, o momento linear total do sistema é o produto da sua massa total pela velocidade do centro de massa; no referencial do centro de massa essa velocidade é nula. O último termo é a energia cinética K_{int} devida ao movimento interno do sistema. Chegamos assim ao importante resultado

$$K = K_{trans} + K_{int}, \quad K_{trans} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2, \quad K_{int} = \frac{1}{2} \sum m_i v_{ir}^2 \quad (10.50)$$

onde M é a massa total do sistema. Esta equação diz: a energia cinética de qualquer sistema de partículas pode ser decomposta na energia cinética de translação do sistema mais a energia cinética originária do seu movimento interno.

No caso em que o sistema é um corpo rígido, o único movimento interno possível é o de rotação. Supondo-se que esta ocorre em torno de um eixo, que chamaremos de z , pode-se substituir na Equação 10.50 v_{ir} por $\omega \rho_i$ e K_{int} pelo resultado de K_{rot} da Equação 10.40, como se vê a seguir:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ir} = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (10.51)$$

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (10.52)$$

A energia cinética de qualquer sistema de partículas pode ser decomposta na energia cinética de translação do sistema mais a energia cinética originária do seu movimento interno

E-E Exercício-exemplo 10.20

■ Um ioiô tem massa M e momento de inércia I . O carretel em que se enrola o fio tem raio R . Determine a velocidade do ioiô, solto do repouso, após descer uma altura h (Figura 10.29).

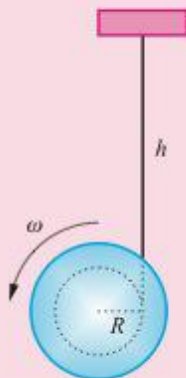


Figura 10.29
(Exercício-exemplo 10.20).

■ Solução

As velocidades de translação e de rotação do ioiô estão ligadas pela relação

$$v = \omega R. \text{ Portanto,}$$

$$K = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v^2.$$

A lei da conservação da energia mecânica permite escrever

$$Mgh = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{MR^2}}}.$$

Um formalismo inteiramente análogo ao que levou à Equação 10.50 conduz ao resultado

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{trans}} + \mathbf{L}_{\text{int}} = M \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{v}_{\text{cm}} + \sum_i m_i \mathbf{r}_{i\text{r}} \times \mathbf{v}_{i\text{r}}. \quad (10.53)$$

O momento angular total de um sistema de partículas em relação a um dado ponto é igual ao momento angular devido ao movimento do centro de massa mais o momento angular em relação ao centro de massa

Se a rotação for em torno de um eixo balanceado, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{trans}} + I\boldsymbol{\omega}$.

Esta equação diz: o momento angular total de um sistema de partículas em relação a um dado ponto é igual ao momento angular devido ao movimento do centro de massa mais o momento angular em relação ao centro de massa.

Por exemplo, o momento angular de um planeta em relação ao Sol é a soma do momento angular devido ao movimento orbital com o momento angular devido à sua rotação em torno do próprio eixo. No caso da Terra, seu eixo de rotação faz um ângulo de $23,5^\circ$ com o plano da sua órbita (plano da eclíptica), de modo que as duas contribuições para o momento angular não são paralelas uma à outra.

Pode-se mostrar que o momento angular devido à rotação em torno do centro de massa não depende do ponto de referência, e que, além disso, tal momento angular independe do referencial inercial no qual é feita a observação. Esse é um fato notável. Retomando-se o exemplo da Terra, seu momento angular devido ao seu giro diário tem o mesmo valor, seja para um observador parado em relação ao Sol, seja para um observador em uma nave movendo-se com velocidade constante em relação a esse astro. Esse é um fato de enormes consequências.

Exercícios

E 10.27 A Lua mostra sempre a mesma face para a Terra. Sabendo-se que o período orbital da Lua em torno da Terra é $T_{\text{orb}} = 27,3$ d, calcule (A) a velocidade angular orbital da Lua; (B) a velocidade angular de sua rotação em torno do próprio eixo.

E 10.28 Considerando a Lua como uma esfera homogênea, e tomando sua órbita como circular, calcule (A) seu momento angular total em relação ao centro da Terra; (B) sua energia cinética total em relação a um referencial fixo na Terra. Trate o problema como se a massa da Lua fosse desprezível em relação à da Terra.

E 10.29 Na Figura 10.14, do Exercício 10.12, suponha que após a colisão a velocidade final da bola seja nula. Sabendo que a massa da barra é M , calcule (A) a velocidade angular da barra em relação ao seu centro de massa; (B) a velocidade do centro de massa da barra; (C) a variação relativa de energia na colisão; (D) analise a resposta da letra C para o caso em que $M < 4m$.

E 10.30 Um carro com 1200 kg de massa está em uma pista plana e horizontal a uma velocidade inicial de 25 m/s. As rodas do carro têm raio de 30 cm e o momento de inércia de cada uma vale $0,54 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Em dado instante, o motorista pisa no freio e o carro pára após 6,4 s de aceleração constante. (A) Qual é a energia cinética inicial do carro? Sendo 50 cm a altura do centro de massa do carro, qual é, em relação a um ponto sobre a pista, (B) o seu momento angular inicial? (C) e o torque realizado durante a freada? (D) Qual é força de atrito realizada durante a freada?

Seção 10.15 ■ Rolamento (opcional)

O rolamento é um movimento muito comum na vida diária. É o movimento da roda de um automóvel na ausência de deslizamento. É também o movimento de um ioiô. Nesse caso, a separação do movimento em suas partes interna e externa é muito útil.

Um corpo com simetria circular, cilíndrica ou esférica, de raio R , tem seu centro de massa no seu centro geométrico. Quando em movimento sobre uma superfície, podemos definir uma velocidade de translação v_{cm} para o centro de massa e uma velocidade de rotação ω em relação ao centro de massa. Como o centro de massa é apenas um ponto, a velocidade de rotação instantânea pode variar de direção e o movimento será bem complicado. Estudaremos o caso mais simples em que a rotação se realiza em torno de um dado eixo do corpo.

No rolamento de uma roda, visto na Figura 10.30, o eixo se move com a velocidade v_{cm} do centro de massa. O ponto de contato da roda com a pista de rolamento terá velocidade

$$v_c = v_{\text{cm}} - \omega R. \quad (10.54)$$

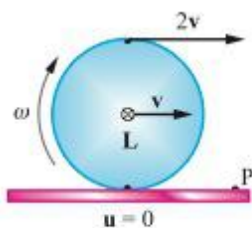


Figura 10.30

Para que não haja deslizamento, esse ponto deve estar sempre em repouso em relação ao chão. Assim, teremos as seguintes relações para as velocidades e acelerações:

$$v_{\text{cm}} = \omega R, \quad a_{\text{cm}} = \alpha R. \quad (10.55)$$

O ponto no topo da roda tem velocidade $v_t = v_{\text{cm}} + \omega R = 2v_{\text{cm}}$.

Tomemos o sentido positivo de z apontando para dentro do papel. Nesse caso, o momento angular em relação ao centro de massa (L_{int}) e o do movimento do centro de massa (L_{trans}) em relação a um ponto P da pista contido no plano de movimento da roda estarão ambos na direção z e serão, respectivamente,

$$L_{\text{rot}} = I\omega, \quad L_{\text{trans}} = M|\mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{v}_{\text{cm}}| = MRv_{\text{cm}} \quad (10.56)$$

onde I é o momento de inércia em relação ao eixo. O momento angular total em relação ao ponto P será

$$L_P = L_{\text{rot}} + L_{\text{trans}} = I\omega + Mv_{\text{cm}}R. \quad (10.57)$$

A energia cinética da roda em relação ao referencial do cm e a total em relação ao ponto P da pista serão, respectivamente,

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad K_P = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (10.58)$$

Quando o movimento consiste em uma mistura de deslizamento e rolamento, as Equações 10.55 não são obedecidas. Duas outras situações podem acontecer:

$$(a) \quad v_{\text{cm}} > \omega R, \quad a_{\text{cm}} > \alpha R \quad (\text{rolamento com deslizamento de translação}); \quad (10.59)$$

$$(b) \quad v_{\text{cm}} < \omega R, \quad a_{\text{cm}} < \alpha R \quad (\text{rolamento com deslizamento de rotação}). \quad (10.60)$$

Para entender melhor esses movimentos, vamos imaginar seus exemplos extremos em que de fato não há rolamento e apenas deslizamento. No caso (a), por exemplo, imagine que o corpo é lançado sem girar (ω nulo) sobre uma superfície sem atrito com uma velocidade v_{cm} não-nula; o corpo se translada sem rotação. Já no caso (b) o extremo é ω não-nulo e v_{cm} nulo. Imprime-se ao corpo uma rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa e o coloca sobre a superfície sem atrito. O corpo continuará girando sem transladar. Em ambos os casos, se a superfície tiver algum atrito, o tipo de movimento inicial (translação ou rotação) se transferirá parcialmente para o outro tipo (rotação ou translação) até que a condição da Equação 10.55 seja atingida, ou seja, o movimento tenderá ao rolamento. Nessa mudança, o corpo deve perder energia devido ao atrito.

E-E Exercício-exemplo 10.21

■ Uma roda tem massa de 15,0 kg e raio de 30,0 cm. O momento de inércia da roda é de $0,170 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, e ela rola com velocidade de 10,0 m/s. Calcule o momento angular e a energia cinética em relação ao ponto P marcado na pista, na trajetória da roda (ver Figura 10.30).

■ Solução

$$\text{A velocidade angular da roda é } \omega = \frac{v}{R} = \frac{10,0 \text{ m/s}}{0,300 \text{ m}} = 33,3 \text{ s}^{-1}.$$

Por aplicação direta da Equação 10.57, obtemos

$$L_P = 0,170 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times 33,3 \text{ s}^{-1} + 15,0 \text{ kg} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,30 \text{ m}.$$

$$L_P = 5,66 \text{ J} \cdot \text{s} + 45,0 \text{ J} \cdot \text{s} = 51,7 \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Por aplicação direta da Equação 10.58, obtemos

$$K_P = \frac{1}{2} 15 \text{ kg} \times (10,0 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} 0,170 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times (33,3 \text{ s}^{-1})^2.$$

$$K_P = 750 \text{ J} + 94,3 \text{ J} = 844 \text{ J}.$$

E-E Exercício-exemplo 10.22

■ Uma roda rola em uma pista plana inclinada sob o efeito da gravidade. Calcule a sua aceleração.

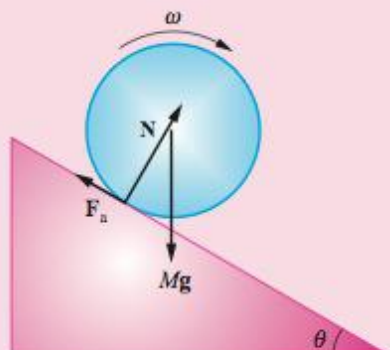


Figura 10.31
(Exercício-exemplo 10.22).

■ Solução

As forças que atuam sobre a roda estão indicadas na Figura 10.31. A translação da roda se dá na direção da rampa, e somente as forças F_a e Mg têm componentes naquela direção. A força normal N não tem componente na direção da translação, e seu torque em relação ao centro de massa da roda é nulo. Com essas considerações, a aplicação da Segunda Lei de Newton para a translação e para a rotação em relação ao eixo passando pelo centro da roda dará respectivamente

$$Mg \sin \theta - F_a = Ma, \quad T = -F_a R = I\alpha = -I \frac{a}{R},$$

onde α e a são, respectivamente, a aceleração angular e a aceleração linear da roda. Desta última equação, podemos expressar a força de atrito em termos de outras variáveis do sistema:

$$F_a = I \frac{a}{R^2}. \text{ Introduzindo este resultado na primeira equação, obtemos}$$

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I}{MR^2}}. \text{ Se a roda fosse um anel, por exemplo, teríamos } I = MR^2 \text{ e, portanto,}$$

$$a = \frac{1}{2}g \sin \theta. \text{ Se fosse um cilindro, teríamos } I = \frac{1}{2}MR^2 \text{ e, portanto, } a = \frac{3}{2}g \sin \theta.$$

E-E Exercício-exemplo 10.23

■ A Figura 10.32 mostra dois blocos suspensos por uma roldana. O valor de M é maior do que o de m , e o atrito do fio com a roldana é suficiente para que ela gire sem haver deslizamento do fio. Calcule a aceleração angular da roldana.

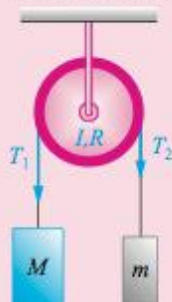


Figura 10.32
(Exercício-exemplo 10.23).

■ Solução

As equações de movimento dos blocos e da roldana são

$$T_1 - Mg = -Ma; T_2 - mg = ma;$$

$$T_1 R - T_2 R = I\alpha \text{ (torque na roldana = } I \text{ vezes a aceleração angular).}$$

Considerando que $a = \alpha R$ (porque não há deslizamento), este sistema de equações pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & MR \\ 0 & 1 & -mR \\ -1 & 1 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mg \\ mg \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ A aceleração angular da roldana será dada por}$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & Mg \\ 0 & 1 & mg \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & MR \\ 0 & 1 & -mR \\ -1 & 1 & I \end{vmatrix}} = \frac{Mg - mg}{MR + mR + I}, \quad \alpha = \frac{g}{R} \frac{M - m}{M + m + I/R}$$

E-E Exercício-exemplo 10.24

■ *Conceitual.* Por que um corpo rolando em uma superfície plana horizontal pára?

■ Solução

A questão parece inicialmente paradoxal, pois no rolamento a força de atrito com o piso não realiza trabalho e, conseqüentemente, não dissipa energia mecânica. Entretanto, é empiricamente evidente que, se rolarmos um corpo, tal como uma roda de bicicleta ou um cilindro, sobre uma plataforma plana, lisa e horizontal, ele perde velocidade e eventualmente pára. A causa disso envolve dois mecanismos. Um deles é o atrito do corpo com o ar, que apesar de pequeno não é inteiramente desprezível. Esse atrito é sempre dissipativo. Entretanto, mesmo que o corpo estivesse rolando no vácuo, também pararia. A explicação para isso é que nem o corpo nem a plataforma são realmente rígidos, e no rolamento temos uma deformação em ambos, de caráter dinâmico. Por exemplo, uma roda rolando sofre um achatamento da parte que está em contato com o piso, que muda de ponto para ponto na medida em que o ponto em contato com o piso muda. Essa deformação dinâmica gera um movimento de vibração nos átomos da roda, ou seja, gera calor. Esse calor é gerado à custa da energia cinética de translação e rotação da roda. Esse fenômeno fica claro quando verificamos que um pneu de carro se aquece quando o carro se move, mesmo que nunca haja deslizamento. Uma observação mais cuidadosa irá revelar que o aquecimento é maior quando o pneu tem pouca pressão e, por isso, sofre deformação maior. Na verdade, pneus com baixa pressão geram maior consumo de combustível do motor, que tem de suprir energia extra devido ao grande aquecimento dos pneus.

Exercícios

E 10.31 Um cilindro de massa m e raio r rola em uma rampa de inclinação $\theta = 30^\circ$. (A) Calcule a aceleração angular do cilindro. (B) Calcule a força de atrito da rampa sobre o cilindro.

E 10.32 Uma roda em forma de anel é solta em uma rampa. A força de atrito entre a rampa e a roda é $F_a \leq 0,30 N$, onde N é a força normal que a rampa exerce sobre a roda. Calcule o ângulo máximo de inclinação da rampa para que o movimento seja de rolamento.

Seção 10.16 ■ Grandezas análogas de translação e rotação

Vimos até aqui que várias grandezas associadas ao movimento de translação têm suas análogas no movimento de rotação. É conveniente organizar todas as analogias em um quadro de síntese, como se vê na Tabela 10.1.

Tabela 10.1

Grandezas análogas na translação e na rotação.

Translação		Rotação	
Posição	X	Posição angular	θ
Velocidade	V	Velocidade angular	ω
Massa	M	Momento de inércia	I
Momento linear	$p = mv$	Momento angular	$L = r \times p$
Momento linear	$P = Mv_{cm}$	Momento angular	$L_z = I\omega$
Força	F	Torque	$\tau = r \times F$
Energia cinética	$K_{trans} = \frac{1}{2} Mv_{cm}^2$	Energia cinética	$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$
Lei dinâmica	$F = \frac{dp}{dt}$	Lei dinâmica	$\tau = \frac{dL}{dt}$
Lei dinâmica	$F_{tot} = \frac{dP}{dt}$	Lei dinâmica	$T_z = I \frac{d\omega}{dt}$

Seção 10.17 ■ Quantização do momento angular

Em física quântica aparece uma constante universal com dimensão de momento angular, ou seja, energia vezes tempo. Tal constante é denominada *constante de Planck*, em homenagem ao físico alemão *Max Planck*. A constante de Planck é designada pela letra h , e seu valor é

$$h = 6,626\,0755 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Muito freqüentemente, a constante de Planck aparece dividida por 2π , e isto levou à criação de um símbolo especial $\hbar$ para designar a grandeza

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \cong 1,055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Posto isso, vem agora um fato realmente notável: *a componente em uma dada direção do momento angular de qualquer sistema aparece em múltiplos inteiros ou semi-inteiros de $\hbar$.*

Matematicamente, isto se exprime na forma

$$L_z = (m + s)\hbar, \text{ m inteiro, } s = 0 \text{ ou } \frac{1}{2}. \quad (10.61)$$

Este fenômeno universal é denominado **quantização do momento angular**.

Quantização do momento angular.

A componente em uma dada direção do momento angular de qualquer sistema aparece em múltiplos inteiros ou semi-inteiros de $\hbar$

A constante de Planck é muito pequena, em comparação com os valores de momento angular que encontramos na vida diária. Consideremos, por exemplo, um pião cuja geometria seja um cone com base de raio $R = 1,0 \text{ cm}$ e altura $h = 2,0 \text{ cm}$. O volume do pião será $V = 2,1 \text{ cm}^3$. Supondo que a densidade seja $1,0 \text{ g/cm}^3$, sua massa será $2,1 \text{ g}$ e seu momento de inércia em relação ao eixo será

$$I = \frac{3}{10} MR^2 = 0,63 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Considere agora tal pião girando com velocidade $\omega = 63 \text{ rad/s}$, o que equivale a 10 ciclos por segundo. Seu momento angular será

$$L_z = I\omega = 0,63 \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times 63 \text{ s}^{-1} = 4,0 \times 10^{-6} \text{ Js}.$$

Dividindo esse valor por $\hbar$, obtemos

$$\frac{L_z}{\hbar} = \frac{4,0 \times 10^{-6} \text{ Js}}{1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}} = 3,8 \times 10^{28}.$$

Este é um número fantasticamente grande, comparado com a unidade. Por essa razão, quando o pião vai perdendo velocidade angular devido ao atrito, o processo não parece ocorrer aos saltos. A quantização do momento angular só tem consequências práticas em fenômenos na escala atômica ou abaixo desta.

Exercícios

E 10.33 Calcule o momento angular de um ponteiro de horas de um relógio de pulso, cujo momento de inércia vale $2,0 \times 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$, em termos da constante de Planck.

E 10.34 Calcule o momento angular orbital da Terra em termos da constante de Planck.

Seção 10.18 ■ Cálculo do momento de inércia de alguns corpos (opcional)

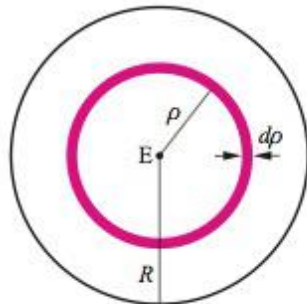


Figura 10.33

Faremos a seguir o cálculo do momento de inércia de alguns corpos altamente simétricos em torno de um eixo de simetria.

(1) Disco ou cilindro homogêneos, em relação ao eixo de simetria (Figura 10.33).

$$\text{O elemento de massa } dm \text{ será } dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \rho d\rho. \quad (10.62)$$

Portanto,

$$I = \int_0^R \rho^2 dm = 2 \frac{M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} MR^2. \quad (10.63)$$

(2) Casca esférica em relação ao diâmetro (Figura 10.34)

O elemento de volume será o anel perpendicular ao eixo. Neste caso,

$$dm = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi \rho ds. \quad (10.64)$$

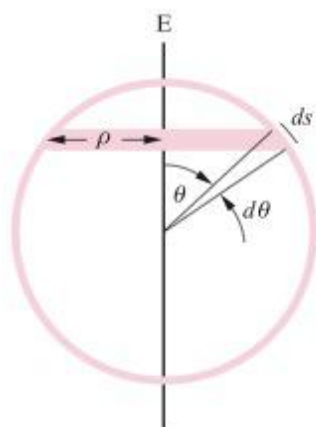


Figura 10.34

Temos, porém, $\rho = R \sin \theta$, $ds = R d\theta$.

$$\text{Portanto, } I = \frac{M}{2R^2} \int_0^\pi R^4 \sin^3 \theta d\theta. \quad (10.65)$$

Utilizando o valor tabelado $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$, obtemos

$$I = \frac{2}{3} MR^2. \quad (10.66)$$

(3) Esfera sólida em relação ao diâmetro

Se a esfera tem raio R e massa M , podemos decompô-la em cascas esféricas de massa

$$dm = 3 \frac{M}{4\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{3M}{R^3} r^2 dr. \quad (10.67)$$

Pelo que já vimos, o momento de inércia da casca esférica será

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm. \quad (10.68)$$

Portanto, obtemos

$$I = \int dI = 2 \frac{M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} MR^2. \quad (10.69)$$

Seção 10.19 ■ Teorema dos eixos paralelos (opcional)

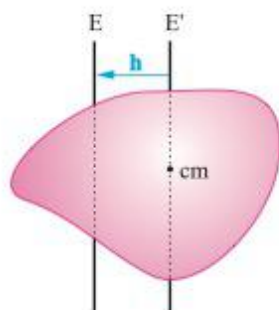


Figura 10.35

Muitas vezes, o cálculo do momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa é mais simples do que o cálculo em relação a outro eixo. O momento de inércia de um corpo em relação a dois eixos paralelos E e E' , este último passando pelo centro de massa, está relacionado por uma lei simples, como será mostrado a seguir. No cálculo do momento de inércia, só interessam as coordenadas perpendiculares ao referido eixo. Sejam ρ e ρ' os vetores bidimensionais que definem as posições em relação aos eixos E e E' , respectivamente,

e $\mathbf{h}$ o vetor bidimensional que posiciona o eixo E em relação ao eixo E', como se vê na Figura 10.35. Os vetores ρ_i e ρ'_i que definem a posição da partícula i são relacionados por

$$\rho_i = \rho'_i + \mathbf{h} \quad (10.70)$$

e, portanto, as distâncias da partícula i do corpo aos eixos E e E', simbolizadas respectivamente por ρ_i e ρ'_i , são relacionadas pela equação

$$\rho_i^2 = \rho'^2_i + h^2 + 2\rho'_i \cdot \mathbf{h}. \quad (10.71)$$

O momento de inércia I em relação ao eixo E será

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i \rho'^2_i + \sum_i m_i h^2 + 2 \sum_i m_i \rho'_i \cdot \mathbf{h}. \quad (10.72)$$

Colocando em evidência os fatores fixos, obtemos

$$I = \sum_i m_i \rho'^2_i + h^2 \sum_i m_i + 2\mathbf{h} \cdot \left(\sum_i m_i \rho'_i \right). \quad (10.73)$$

O primeiro termo é o momento de inércia em relação ao eixo E'. O último termo é nulo, uma vez que o centro de massa está sobre o eixo E'. Portanto, pode-se escrever

$$I = I_{\text{cm}} + Mh^2. \quad (10.74)$$

Em palavras, a equação acima diz: *para se calcular o momento de inércia em relação a um eixo qualquer, calcula-se primeiro o momento em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa. Soma-se a este o momento de inércia, em relação ao referido eixo, calculado como se toda a massa estivesse concentrada no centro de massa.*

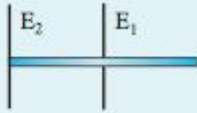
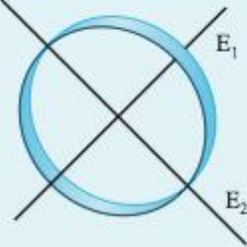
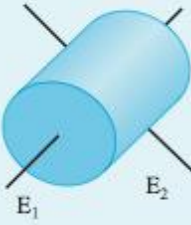
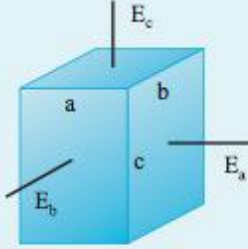
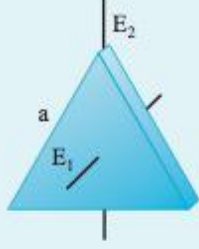
O Quadro 10.1 mostra o momento de inércia de vários corpos em relação a eixos de simetria.

(continua na p. 250)

Para se calcular o momento de inércia em relação a um eixo qualquer, calcula-se primeiro o momento em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa. Soma-se a este o momento de inércia, em relação ao referido eixo, calculado como se toda a massa estivesse concentrada no centro de massa

■ **Quadro 10.1**

Momento de inércia de alguns corpos sólidos simétricos.

Haste fina	Anel fino
 $I_1 = \frac{M}{12} L^2$ $I_2 = \frac{M}{3} L^2$	 $I_1 = MR^2$ $I_2 = \frac{M}{2} R^2$
Cone sólido	Cilindro sólido
 $I = \frac{3}{10} MR^2$	 $I_1 = \frac{1}{2} MR^2$ $I_2 = \frac{M}{4} R^2 + \frac{M}{12} l^2$
Paralelepípedo sólido	Triângulo fino
 $I_a = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$ $I_b = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$ $I_c = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$	 $I_1 = \frac{M}{12} Ma^2$ $I_2 = \frac{M}{24} Ma^2$
Casca esférica	Esfera sólida
 $I = \frac{2}{3} MR^2$	 $I = \frac{2}{5} MR^2$

PROBLEMAS

P 10.1 Desenhe o resultado das operações $R_y(\frac{\pi}{2})R_z(\frac{\pi}{2})$ e $R_z(\frac{\pi}{2})R_y(\frac{\pi}{2})$ sobre o dado da Figura 10.36. *Nota:* o produto de operações AB significa operação B seguida de operação A. Portanto, $R_y(\frac{\pi}{2})R_z(\frac{\pi}{2})$ significa $R_z(\frac{\pi}{2})$ seguida de $R_y(\frac{\pi}{2})$.

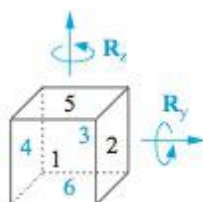


Figura 10.36
(Problema 10.1).

P 10.2 Um automóvel com massa de 1500 kg passa em uma estrada reta à velocidade de 100 km/h. (A) Calcule seu momento angular em relação a um poste distante 30 m do centro da faixa em que o carro transita. (B) O carro começa a frear com uma aceleração de $-8,0 \text{ km/s}^2$. Calcule o torque da força de frenagem em relação ao poste.

P 10.3 Uma hélice construída por quatro tábuas idênticas, dispostas de modo a formar quatro ângulos retos (Figura 10.37), gira sem atrito com velocidade ω em torno de um eixo preso ao seu centro. O momento de inércia do sistema em relação a esse eixo é I e o raio da hélice é R . Um menino atira no topo de uma das tábuas uma geléia de massa m que atinge a tábua perpendicularmente com velocidade v e gruda nela. Determine a variação da velocidade angular da hélice.

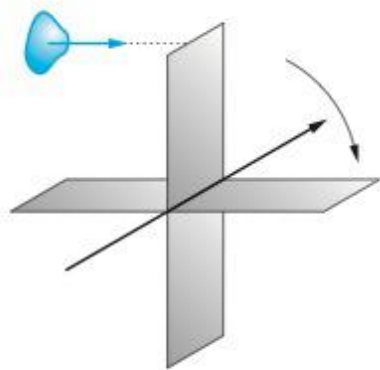


Figura 10.37
(Problema 10.3).

P 10.4 A Figura 10.38 mostra um disco de massa M e momento de inércia I caindo sob o efeito da gravidade. Além da velocidade de queda, o disco possui uma velocidade angular ω . (A) Qual é o torque que a gravidade exerce sobre o disco em relação a um ponto sobre a linha vertical sólida? (B) Para qual velocidade v o momento angular do disco em relação a um ponto sobre a linha sólida é nulo?

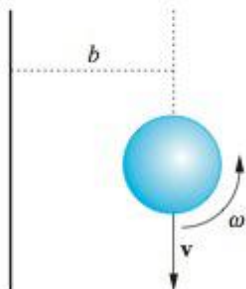


Figura 10.38
(Problema 10.4).

P 10.5 A Figura 10.39 mostra uma partícula 1 colidindo lateralmente com outra partícula 2, inicialmente parada. Mostre que, se o ponto de encontro P das assíntotas das trajetórias das partículas, após o choque, não estivesse sobre a assíntota da trajetória inicial da partícula 1, como indica a figura, a conservação do momento angular seria violada.

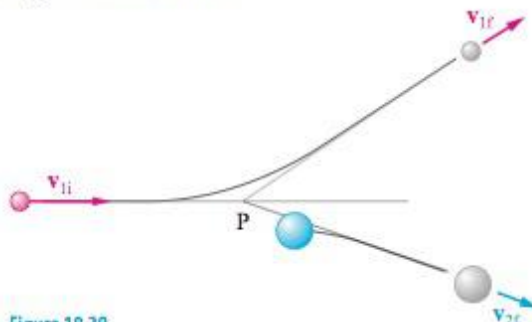


Figura 10.39
(Problema 10.5).

P 10.6 Uma roda de bicicleta tem um aro externo com 30 cm de raio e massa igual a 800 g, e 72 hastes radiais com massa de 10 g cada. Supondo que o aro interno tenha massa e raio desprezíveis, calcule o momento de inércia da roda em relação ao seu eixo.

P 10.7 Calcule o momento de inércia da régua fina mostrada na Figura 10.40 em relação ao eixo E.

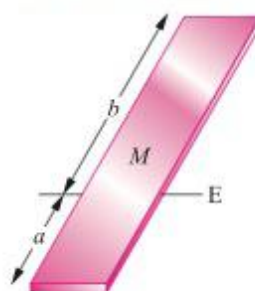


Figura 10.40
(Problema 10.7).

P 10.8* Seja m a massa da tábua do balanço visto na Figura 10.28. (A) Qual é o momento de inércia do sistema em relação ao ponto de apoio? (B) Qual é a aceleração angular inicial do sistema?

P 10.9 Suponha que a Lua no passado tenha tido velocidade angular de rotação em torno do seu eixo diferente de sua velocidade angular orbital. As marés causadas pela Terra sobre a Lua seriam então muito intensas. Devido ao calor gerado pelo atrito interno das rochas, as marés teriam atuado para diminuir a energia mecânica da Lua, sem entretanto diminuir seu momento angular em relação à Terra. Tente explicar como isto poderia levar à igualdade entre essas duas velocidades angulares.

P 10.10 Por que um carro levanta sua frente durante a arrancada e a abaixa durante a freada?

P 10.11 Calcule a aceleração linear do ioiô considerado no Exercício-exemplo 10.20.

P 10.12 Uma esfera sólida, uma esfera oca, um cilindro e um anel rolam a partir do topo de uma rampa, saindo do repouso. (A) Qual desses objetos chegará primeiro ao fim da rampa? (B) Qual deles terá maior percentual de sua energia cinética associado à rotação?

P 10.13 Qual é o maior valor do coeficiente de atrito estático entre a caixa e a rampa mostradas na Figura 10.41 para que o bloco, inicialmente colocado em repouso na posição mostrada, comece a deslizar sem tombar?

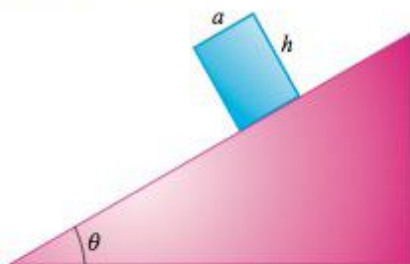


Figura 10.41
(Problema 10.13).

P 10.14 Quando o bloco pendurado que se vê na Figura 10.42 desce, o cabo faz o cilindro rolar e a roldana girar, em ambos os casos sem deslizamento. Calcule a aceleração do bloco.

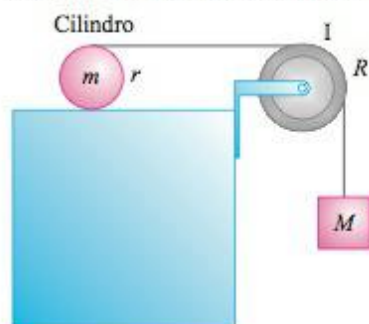


Figura 10.42
(Problema 10.14).

P 10.15 Calcule, em termos do raio R de uma bola, o parâmetro de impacto b com que um jogador de futebol deve chutá-la para que ela tenha uma velocidade angular vertical dada por $\omega = v / 2R$, onde v é a velocidade horizontal adquirida pela bola.

P 10.16 Uma haste homogênea de comprimento L equilibra-se inicialmente na vertical, apoiada em uma de suas extremidades sobre uma superfície plana horizontal. Um pequeno impulso faz com que a haste caia, partindo de uma velocidade inicial desprezível. A extremidade de apoio da haste fica imóvel durante a queda. Com que velocidade a outra extremidade completa a queda? (Figura 10.43)

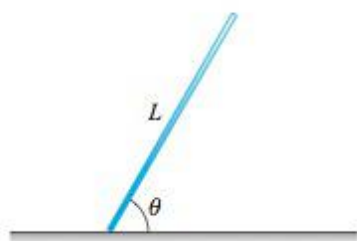


Figura 10.43
(Problemas 10.16 a 10.19).

P 10.17 Ainda com referência à haste em queda vista na Figura 10.43, supondo que sua ponta de apoio fique imóvel, calcule a aceleração angular em função do ângulo θ .

P 10.18 Um Paradoxo: quando a haste vista na Figura 10.43 cai sem mover o pé de apoio, seu centro de massa se desloca para a direita, o que significa que, devido ao atrito, a mesa exerce uma força para a direita sobre a haste. Entretanto, ao completar a queda, o centro de massa tem velocidade horizontal nula. Portanto, o $\Delta p_{\text{para direita}}$ dado pela força de atrito é nulo. Discuta.

P 10.19 Suponha que a haste vista na Figura 10.43 não sinta qualquer atrito com a superfície de apoio e que sua queda se inicie

do repouso a partir da posição vertical. (A) Em que ponto cai o centro de massa da haste? (B) Qual é a velocidade angular da haste em relação ao seu cm imediatamente antes do fim da queda?

P 10.20 Uma bola de sinuca, de raio R e massa M , inicialmente tem velocidade angular ω_0 (na direção horizontal) e velocidade linear nula. Supondo que no deslizamento sejam perdidos 30% da energia cinética da bola, calcule a velocidade linear no instante em que a bola pára de deslizar.

P 10.21 O sistema mostrado na Figura 10.44 gira sem atrito entre o eixo e os mancais. Os momentos de inércia dos cilindros grande e pequeno são, respectivamente, I_R e I_r , e um cilindro está ligado ao outro, de modo que suas velocidades de rotação têm de ser iguais. (A) Calcule a aceleração angular dos cilindros. (B) Calcule a razão M/m para que o sistema possa ficar em equilíbrio. (C) Considere que a razão entre as massas seja tal que o sistema possa ficar em equilíbrio. Isto significa que, com uma velocidade inicial infinitesimal no sentido correto, a massa pequena pode elevar a grande. Demonstre que a conservação da energia mecânica não é violada nesse processo.

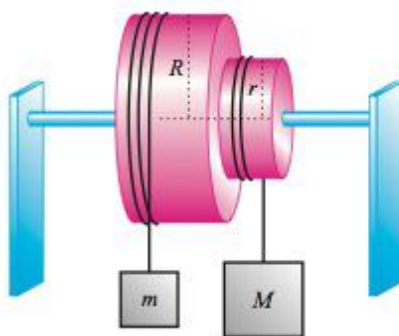


Figura 10.44
(Problema 10.21).

P 10.22 Uma pequena esfera (raio desprezível), de massa m , realiza movimento circular uniforme sobre uma mesa sem atrito. A esfera está presa à extremidade de um cordão cuja outra extremidade passa por um pequeno furo no centro da mesa e que é preso debaixo desta. A velocidade angular da esfera é ω_0 e o raio da trajetória é R_0 . O cordão é então puxado um pouco mais para debaixo da mesa de modo que o novo raio da trajetória passa a ser R_f . Determine a nova velocidade angular da esfera.

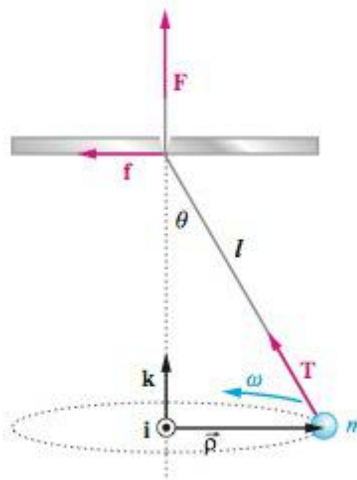


Figura 10.45
(Problema 10.23).

P 10.23* Uma esferinha presa a um fio sem massa gira em um plano horizontal, como mostra a Figura 10.45. O fio passa por um pequeno orifício na placa e o comprimento l da sua parte pendular pode ser controlado. (A) Calcule o momento angular L

da esfera em relação ao orifício. (B) Calcule o torque τ sobre a esfera, em relação ao orifício. O fio é puxado de modo que seu comprimento decresce. (C) Usando a conservação de L_z e o fato de que a força centrípeta se modificou, mostre que o ângulo θ_f e a frequência angular ω_f finais da esferinha são dados por

$$\omega_f = \sqrt{\frac{g}{l_f \cos \theta_f}} \quad \text{e} \quad \frac{l_f^2 \sin^2 \theta_f}{\sqrt{l_f \cos \theta_f}} = \frac{l^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{l \cos \theta}}$$

P 10.24 Calcule, em termos do raio da bola, o parâmetro de impacto b de uma tacada (Figura 10.46) para que a bola de sinuca tenha inicialmente movimento de rolamento.

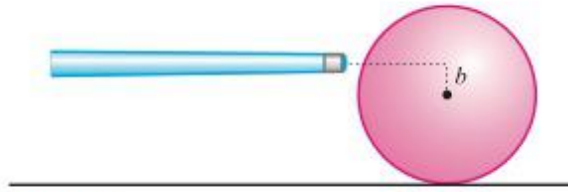


Figura 10.46
(Problema 10.24).

P 10.25 O carretel visto na Figura 10.47 tem massa M e momento de inércia I . O eixo e as rodas do carretel têm raios r e R , respectivamente. O carretel rola pela rampa, partindo do repouso, e até o momento em que as rodas tocam o piso seu centro de massa desce uma altura h . (A) Qual é a velocidade linear v_1 do carretel no momento t_1 em que ele toca o piso? (B) Por que imediatamente após o instante t_1 o movimento do carretel não pode ser de rolamento? (C) Supondo que 10% da energia cinética do carretel sejam dissipados

em deslizamento após o instante t_1 , qual é a velocidade linear v_2 do carretel quando ele retoma o movimento de rolamento?

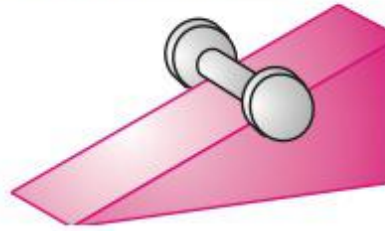


Figura 10.47
(Problema 10.25).

P 10.26* Questão: uma pequena esfera (raio r) rola sobre outra esfera muito maior (raio R), mantida imóvel, partindo do topo com velocidade nula (Figura 10.48). Antes de as esferas perderem o contato mútuo, o movimento da esferinha deixa necessariamente de ser rolamento puro. Por quê?



Figura 10.48
(Problema 10.26).

P 10.27 Calcule o momento de inércia de um cubo homogêneo de massa M e aresta a em relação a um eixo que passa por uma de suas arestas.

P 10.28 Calcule o momento de inércia, em relação ao seu eixo de simetria, de uma esfera oca de massa M , raio interior r e raio exterior R .

Respostas dos exercícios

E 10.3 $\omega = 20 \text{ rad s}^{-2} t$; $\alpha = 20 \text{ rad s}^{-2}$

E 10.4 Devido ao movimento de translação da Terra, o tempo entre duas passagens do Sol pelo mesmo meridiano da Terra é maior que o tempo entre duas passagens de uma estrela longínqua.

E 10.5 (A) $2\pi \text{ rad/s}$; (B) $\dot{\mathbf{i}} = \cos \pi t \mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j}$;

(C) $[\pi \mathbf{k} + 2\pi(\cos \pi t \mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j})] \text{ rad/s}$; (D) $\pi \sqrt{5} \text{ rad/s}$; $\theta = 63,4^\circ$

E 10.6 dr na Equação 10.7 é igual à diferença entre o vetor $\mathbf{r}$ após ser rodado $d\theta$ e antes de rodar: $dr = R_\alpha (d\theta)\mathbf{r} - \mathbf{r}$. Assim as equações ficam idênticas.

E 10.7 $T = 468 \text{ N} \cdot \text{m}$

E 10.8 (A) $mg l \sin \theta$; (B) zero

E 10.9 $4,8 \text{ Nm}$

E 10.10 $3Fa/4$ perpendicular à figura saindo da página.

E 10.11 $T = MgL/4$

E 10.12 $mv l/2$

E 10.13 $l = 4,8 \text{ kg ms}^{-1} t$; de acordo com Exercício 10.9 o torque é $4,8 \text{ Nm}$. Assim a Equação 10.25 é obedecida.

E 10.14 $L = 2,7 \times 10^{40} \text{ J} \cdot \text{s}$

E 10.15 (A) $8ma^2$; (B) $4ma^2$

E 10.16 (A) MR^2 ; (B) $I = \frac{M}{2}(R^2 + r^2)$

E 10.17 (A) $9,6 \times 10^3 \text{ kg m}^2$; (B) $6,0 \times 10^4 \text{ Js}$

E 10.18 $3g/4L$

E 10.19 $\alpha = \frac{F}{ml} \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

E 10.20 $\alpha = \frac{mgR}{I + mR^2}$; b) $W = \frac{2\pi mgRI}{I + mR^2}$

E 10.21 $L = 7,1 \times 10^{33} \text{ J} \cdot \text{s}$; $K = 2,6 \times 10^{29} \text{ J}$

E 10.22 $1,9 \times 10^6 \text{ J}$

E 10.23 20%

E 10.24 $\frac{MR^2}{MR^2 + 2ma^2} \omega_0$

E 10.25 $0,050 \text{ rad/s}$

E 10.26 $2m$

E 10.27 (A) $2,66 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$; (B) $2,66 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$

E 10.28 (A) $2,9 \times 10^{34} \text{ Js}$; (B) $3,8 \times 10^{38} \text{ J}$

E 10.29 (A) $\frac{6mv}{ML}$; (B) $\frac{m}{M} v$; (C) $-\frac{M-4m}{M}$; (D) a situação de se ter velocidade nula para a bolinha, após a colisão, não é compatível com conservação de energia.

E 10.30 (A) $3,8 \times 10^5 \text{ J}$; (B) $1,5 \times 10^4 \text{ Js}$; (C) $2,4 \times 10^3 \text{ Nm}$; (D) $4,7 \times 10^3 \text{ N}$.

E 10.31 (A) $g/3r$; (B) $mg/6$.

E 10.32 31° .

E 10.33 $4,4 \times 10^{19} \text{ h}$

E 10.34 $4,1 \times 10^{73} \text{ h}$

Respostas dos problemas

P 10.2 (A) $1,25 \times 10^6 \text{ Js}$; (B) $3,6 \times 10^8 \text{ Nm}$

P 10.3 $\Delta\omega = \frac{4mR(v - \omega R)}{I + 4mR^2}$

P 10.4 (A) Mgb ; (B) $I\omega/mb$

P 10.6 $9,36 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$

P 10.7 $\frac{M(a^3 + b^3)}{3(a + b)}$

P 10.8 (A) $2ml^2$; (B) $g/4l$

P 10.9 Minimizando-se a energia cinética impondo-se a restrição de que o L total é constante, obtém-se $\omega_{\text{rotação}} = \omega_{\text{translação}}$.

P 10.11 $g/\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)$

P 10.12 (A) esfera sólida; (B) anel

P 10.13 $\mu_{\text{máx}} = a/h$

P 10.14 $Mg/\left(M + \frac{3}{8}m + \frac{I}{R^2}\right)$

P 10.15 $R/3$.

P 10.16 $\sqrt{3gL}$

P 10.17 $3g \cos\theta/2L$

P 10.19 $\sqrt{3g/L}$

P 10.20 $R\omega/\sqrt{5}$

P 10.21 (A) $\alpha = \frac{(mR - Mr)g}{mR^2 + Mr^2 + I_R + I_r}$; (B) $\frac{M}{m} = \frac{R}{r}$

P 10.22 $R_o^2\omega_o/R_f^2$

P 10.23 (A) $\mathbf{L} = ml\omega \cos\theta \hat{\rho} + m\omega\rho^2 \mathbf{k}$ (B) $\tau = -mgl\sin\theta \hat{\mathbf{i}}$

P 10.24 $2R/5$

P 10.25 (A) $\sqrt{2gh/\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$; (B) Porque a velocidade do centro de massa era menor do que ωR ; (C) $\sqrt{1,8gh/\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$.

P 10.26 Quando a velocidade do centro de massa da esfera pequena aumenta, a força necessária para mantê-la em movimento circular (mv^2/R) aumenta. Mas a componente do peso na direção do centro da esfera maior diminui. Assim, a força normal (N) entre as esferas e o valor máximo da força de atrito estático (μN) diminuem rapidamente. Quando as esferas perdem contato, a força normal e a força de atrito se anulam. Logo, a aceleração a é não-nula e a aceleração angular α é nula, pois não existe torque, e a bolinha estará deslizando. Mas o deslizamento deve ter acontecido antes desse momento, pois antes que a normal se tornasse nula μN deve ter atingido um valor insuficiente para realizar um torque igual a lal/R . Nesse momento o atrito deixou de ser o estático.

P 10.27 $2Ma^2/3$

P 10.28 $I = \frac{2}{5}M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$



Oscilador Harmônico

- Seção 11.1 ■ Movimento harmônico simples, 256
- Seção 11.2 ■ Oscilador harmônico simples, 257
- Seção 11.3 ■ Exemplos de oscilador harmônico simples, 259
- Seção 11.4 ■ Relações de energia no oscilador harmônico, 265
- Seção 11.5 ■ Oscilador harmônico amortecido, 268
- Seção 11.6 ■ Oscilador forçado e ressonância, 270
- Problemas, 274
- Respostas dos exercícios, 275
- Respostas dos problemas, 275

Seção 11.1 ■ Movimento harmônico simples

Movimento harmônico simples (mhs) é o movimento da projeção em um dado eixo de uma partícula em movimento circular uniforme

A Natureza apresenta inúmeros exemplos de movimentos periódicos, ou seja, movimentos que se repetem em ciclos. Exemplos notáveis são o movimento da Terra e dos outros planetas em torno do Sol, o movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo, o movimento de um pêndulo etc. Por isso, o estudo dos movimentos periódicos tem grande importância na física. Um tipo particular de movimento periódico tem uma importância especial: o **movimento harmônico simples (mhs)**. O movimento harmônico simples é a projeção em um dado eixo do movimento circular uniforme. Consideremos uma partícula em movimento circular uniforme, com velocidade angular ω , em um círculo de raio R , como mostra a Figura 11.1.

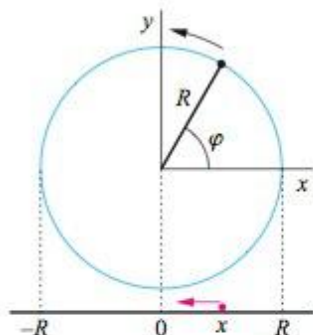


Figura 11.1

A projeção em um eixo do movimento circular uniforme de uma partícula é denominada movimento harmônico simples.

O ângulo $\varphi(t)$ que aparece como argumento da função x é denominado **ângulo de fase** do movimento harmônico simples. R é o valor máximo da coordenada x e é denominado amplitude do mhs

A posição da partícula é descrita pelo ângulo φ , que depende do tempo t e será dado por

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_o. \quad (11.1)$$

A projeção em um dado eixo, digamos eixo x , do movimento da partícula será descrita pela sua coordenada x , expressa por

$$x = R \cos[\varphi(t)] \Rightarrow x(t) = R \cos(\omega t + \varphi_o). \quad (11.2)$$

A Equação 11.2 exprime matematicamente o movimento harmônico simples. A coordenada x oscila senoidalmente entre os valores $-R$ e R . Por isso, R é denominado amplitude do mhs. O ângulo $\varphi(t)$ que aparece como argumento da função x nessa equação é denominado **ângulo de fase**, ou simplesmente **fase do movimento**. Vê-se que φ_o é a fase inicial do movimento, ou seja, o ângulo de fase em $t = 0$. O período do movimento é o tempo T necessário para se completar um ciclo. Uma vez que o valor da coordenada x se repete a cada ciclo, ou seja, $x(t + T) = x(t)$, obtém-se

$$\cos[\omega(t + T) + \varphi_o] = \cos[\omega t + \varphi_o], \quad (11.3)$$

■ Relação entre período T e frequência angular ω no mhs

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

No movimento circular, ω é a velocidade angular, ou seja, representa o ângulo percorrido pela partícula por unidade de tempo. No movimento harmônico simples essa grandeza é usualmente denominada **frequência angular**. A frequência angular corresponde ao número de radianos varrido por unidade de tempo. Não se deve confundir-la com a **frequência ν do movimento**, que é o número de ciclos completados por unidade de tempo. Como cada ciclo tem uma duração T , a frequência ν será dada por

$$\nu = 1/T \Rightarrow \nu = \omega / 2\pi. \quad (11.4)$$

■ Relação entre período T e frequência ν no mhs

A unidade de frequência no SI é 1 ciclo por segundo. Tal unidade tem um nome e um símbolo especiais, o hertz, símbolo Hz:

$$1 \text{ Hz} \equiv 1 \text{ ciclo por segundo.}$$

A velocidade e a aceleração da partícula que realiza o movimento harmônico simples descrito pela Equação 11.2 são dadas, respectivamente, por

$$\dot{x} = -\omega R \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega R \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (11.5)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 R \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 R \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (11.6)$$

Vê-se portanto que, exceto pelo fator de escala ω ou ω^2 , a velocidade e a aceleração da partícula variam no tempo de modo análogo à sua posição. A única diferença entre as funções x , $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ está ligada ao ângulo de fase φ . As fases de $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ estão adiantadas de $\pi/2$ e π , respectivamente, em relação à fase de x . A Figura 11.2 mostra a variação no tempo da posição x , da velocidade $v = \dot{x}$ e da aceleração $a = \ddot{x}$ da partícula para o caso particular em que $\omega = 1$.

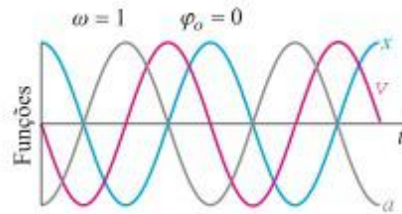


Figura 11.2

Variação temporal da posição, velocidade e aceleração de um oscilador harmônico simples.

Exercícios

E 11.1 Uma partícula anda com velocidade de módulo 5,0 m/s em um círculo situado no plano xy , cujo raio vale 1,0 m. Considere o sistema de coordenadas xy com origem no centro do círculo. No instante $t = 0$, as coordenadas da partícula são $x = \frac{1}{2}$ m, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m. (A) Escreva as funções $x(t)$ e $y(t)$. (B) Escreva as funções $v_x(t)$ e $v_y(t)$.

E 11.2 A coordenada y da partícula na Figura 11.1 também executa um movimento harmônico simples. Determine a diferença de fase entre esse movimento e o da coordenada x .

Seção 11.2 ■ Oscilador harmônico simples

Oscilador harmônico simples é um sistema com um grau de liberdade que oscila livremente na forma de movimento harmônico simples

Define-se um **oscilador harmônico simples** como sendo qualquer sistema com um grau de liberdade capaz de oscilar na forma de movimento harmônico simples. Tal sistema pode ser um corpo movendo-se de maneira oscilatória sobre uma dada reta ou curva. O oscilador harmônico simples é um modelo exato ou aproximado de muitos sistemas físicos de grande importância, o que justifica o seu estudo detalhado.

Comparando-se as Equações 11.2 e 11.6, deduz-se que oscilador harmônico simples é um sistema com um grau de liberdade cuja coordenada x obedece à seguinte equação de movimento:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (11.7)$$

As soluções genéricas $x(t)$ e a velocidade $\dot{x}(t)$ desta equação são semelhantes às Equações 11.2 e 11.5, respectivamente:

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (11.8)$$

$$\dot{x} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \dot{x}_m \equiv \omega x_m, \quad (11.9)$$

onde $\dot{x}_m$ é a amplitude da velocidade.

Como a Equação 11.7 é uma equação diferencial de segunda ordem, sua solução, expressa na Equação 11.8, contém duas constantes de integração, a amplitude x_m e a fase inicial

φ_0 . Sendo assim, o movimento do corpo só fica completamente definido quando os valores dessas constantes são determinados. Para determiná-los é necessário conhecer as condições iniciais do movimento, ou seja, sua posição e sua velocidade iniciais. Quando se faz $t = 0$ nas Equações 11.8 e 11.9, obtém-se

$$x_0 = x_m \cos \varphi_0, \quad \dot{x}_0 = -\omega x_m \sin \varphi_0. \quad (11.10)$$

As Equações 11.10 mostram que, se conhecermos x_0 e $\dot{x}_0$, obteremos as constantes x_m e φ_0 . Ou então, se soubermos o valor de x e de $\dot{x}$, não em $t = 0$ mas em algum outro instante $t_0 \neq 0$, as constantes x_m e φ_0 também podem ser determinadas, pois substituindo t por t_0 nas Equações 11.8 e 11.9 obtemos de novo duas equações com duas incógnitas.

A Equação 11.7 mostra que a aceleração do oscilador é proporcional ao seu deslocamento com sinal invertido. Se x é uma coordenada linear e m representa a massa do corpo oscilante, a força resultante que atua sobre o corpo, que pela Segunda Lei de Newton é igual a $m\ddot{x}$, será proporcional e contrária ao seu deslocamento x :

$$m\ddot{x} = F = -m\omega^2 x. \quad (11.11)$$

Uma força sempre contrária ao deslocamento é denominada **força restauradora**, pois sempre tende a trazer o corpo para a sua posição de equilíbrio, no presente caso $x = 0$. Caso x represente uma coordenada angular, o sistema tem um momento de inércia I em relação ao eixo de rotação e o torque resultante sobre o sistema deve ser $I\ddot{x}$. Esse torque também será proporcional e contrário ao ângulo x , ou seja, será um **torque restaurador**:

$$I\ddot{x} = \tau = -I\omega^2 x. \quad (11.12)$$

Faremos agora uma digressão matemática. A Equação de movimento 11.7 admite como solução tanto a função $\cos(\omega t)$ quanto a função $\sin(\omega t)$, pois a derivada segunda de qualquer uma dessas funções é igual a $-\omega^2$ vezes a própria função. Portanto, a solução geral da Equação 11.7 deve ser uma combinação linear delas:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (11.13)$$

Neste caso, a velocidade será dada por

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t). \quad (11.14)$$

A solução da Equação 11.13 deve ser completamente equivalente à da Equação 11.8 — e de fato o é, como poderemos ver se aplicarmos à Equação 11.8 a regra de expansão do co-seno de uma soma. Fazendo essa expansão e igualando-a ao lado direito da Equação 11.13, conclui-se que as duas soluções são idênticas desde que se obedeça às seguintes relações:

$$A = x_m \cos(\varphi_0) \text{ e } B = x_m \sin(\varphi_0). \quad (11.15)$$

As relações 11.15 podem ser invertidas para se calcular x_m e φ_0 a partir de A e B :

$$\operatorname{tg}(\varphi_0) = -\frac{B}{A} \text{ e } x_m^2 = A^2 + B^2. \quad (11.16)$$

Quando a solução se expressa na forma de uma soma de seno e co-seno como a Equação 11.13, fica muito simples substituir as constantes A e B pelas condições iniciais. Fazendo $t = 0$ nas Equações 11.13 e 11.14, obtemos:

$$A = x(0); \quad B = \frac{\dot{x}(0)}{\omega}. \quad (11.17)$$

Estas relações nos permitem reescrever a Equação 11.13 na seguinte forma:

$$x(t) = x(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin(\omega t). \quad (11.18)$$

Força restauradora para um ponto de equilíbrio é uma força sempre contrária ao deslocamento relativo a esse ponto

Um oscilador harmônico se caracteriza por uma força, ou um torque, resultante contrária e proporcional à coordenada, que é o deslocamento em relação ao equilíbrio

■ Coordenada do oscilador harmônico expressa em termos de sua coordenada e sua velocidade iniciais

E-E Exercício-exemplo 11.1

■ Um oscilador tem as condições iniciais $x_0 = 8,0 \text{ cm}$, $v_0 = 20,0 \text{ cm/s}$, e sua frequência angular vale $10/\text{s}$. Calcule $x(t)$ e $v(t)$ e $a(t)$.

■ Solução

O valor de $x(t)$ pode ser obtido substituindo-se os dados do problema na Equação 11.18:

$$x(t) = 8,0 \text{ cm} \cdot \cos\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right) + \frac{20,0 \text{ cm/s}}{10/\text{s}} \cdot \sin\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right) \Rightarrow$$

$$x(t) = 8,0 \text{ cm} \cdot \cos\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right) + 2,0 \text{ cm} \cdot \sin\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right).$$

Derivando $x(t)$ obtemos $v(t)$:

$$v(t) = -80 \text{ cm/s} \cdot \sin\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right) + 20 \text{ cm/s} \cdot \cos\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right).$$

Derivando $v(t)$ obtemos $a(t)$:

$$a(t) = -800 \text{ cm/s}^2 \cdot \cos\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right) - 200 \text{ cm/s}^2 \cdot \sin\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right).$$

Observe-se que $a(t) = -\omega^2 x(t)$, como exige a Equação 11.7.

Exercícios

E 11.3 O movimento de um oscilador harmônico é descrito por $x = 0,75 \text{ cm} \cdot \cos(5,0t / \text{s}) - 0,40 \text{ cm} \cdot \sin(5,0t / \text{s})$. Escreva esse movimento na forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi_0)$.

E 11.4 Um oscilador harmônico apresenta no instante $t = 0$ os seguintes valores para suas variáveis de movimento: $x = -2,50 \text{ cm}$, $v = -43,3 \text{ cm/s}$, $a = 250 \text{ cm/s}^2$. Calcule a amplitude, a frequência angular e a fase inicial do oscilador.

Seção 11.3 ■ Exemplos de oscilador harmônico simples

11.3.1 Sistema massa-mola

Consideremos um corpo de massa m , movendo-se sob a ação de uma mola de massa desprezível e constante de mola k , como mostra a Figura 11.3. Quando o corpo sofre um deslocamento x de sua posição de equilíbrio, se x for suficientemente pequeno, a mola exercerá uma força restauradora sobre o corpo que será proporcional ao seu deslocamento:

$$F = -kx. \quad (11.19)$$

A equação de movimento do sistema terá a forma simples

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (11.20)$$

Comparando-se as Equações 11.20 e 11.11, deduz-se que o sistema é um oscilador harmônico cuja frequência angular natural é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (11.21)$$

■ Frequência angular natural do oscilador massa-mola

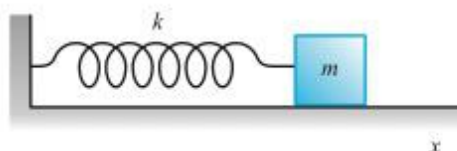


Figura 11.3

Sistema massa-mola, exemplo de oscilador harmônico simples.

Note que estamos usando o símbolo ω_o para representar a frequência natural de um oscilador harmônico simples. Portanto, quando o sistema estiver fora de equilíbrio seu movimento será descrito pela Equação 11.8, onde ω é agora substituído por ω_o .

E-E Exercício-exemplo 11.2

■ Uma massa de 0,100 kg está presa a uma mola cuja constante de mola vale 0,100 N/cm. (A) Calcule a frequência e o período de oscilação natural do sistema. (B) Em $t = 0$, o corpo estava em sua posição de equilíbrio $x_o = 0$ e sofreu uma colisão que lhe transmitiu uma velocidade inicial $v_o = 0,50$ m/s. Descreva o movimento subsequente.

■ Solução

(A) A frequência angular natural será, conforme a Equação 11.21,

$$\omega_o = \sqrt{\frac{0,100 \text{ N/cm}}{0,100 \text{ kg}}} = \sqrt{\frac{10,0 \text{ N/m}}{0,100 \text{ N s}^2/\text{m}}} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

O período e a frequência do oscilador serão, respectivamente,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{6,28}{10,0 \text{ s}^{-1}} = 0,628 \text{ s},$$

$$\nu_o = \frac{1}{0,628 \text{ s}} = 1,59 \text{ s}^{-1} = 1,59 \text{ Hz}.$$

(B) 1ª solução: substituindo os valores $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_o = 0,5$ m/s e $\omega_o = 10 \text{ s}^{-1}$ na Equação 11.18, teremos:

$$x(t) = \frac{0,50 \text{ m/s}}{10 \text{ s}^{-1}} \sin(10 \text{ s}^{-1} t) = 5,0 \text{ cm} \cdot \sin(10 \text{ s}^{-1} t).$$

(B) 2ª solução: substituindo as condições iniciais nas Equações 11.10, obtemos

$$\cos \phi_o = 0 \Rightarrow \phi_o = \pm \pi/2$$

$$\text{e } \sin \phi_o = -\frac{v_o}{\omega_o x_m} = -\frac{0,50 \text{ m/s}}{10 \text{ s}^{-1} \cdot x_m}.$$

$$\text{Como } \sin \phi_o < 0 \Rightarrow \phi_o = -\pi/2.$$

Da Equação de seno acima obtemos

$$x_m = -\frac{0,50 \text{ m/s}}{10 \text{ s}^{-1} \cdot \sin(-\pi/2)} = 5,0 \text{ cm}.$$

A solução completa da equação de movimento será, portanto,

$$x = 5,0 \text{ cm} \cdot \cos(10t / \text{s} - \pi/2) = 5,0 \text{ cm} \cdot \sin(10t / \text{s}).$$

Exercícios

E 11.5 Quando um oscilador massa-mola está na posição $x = -6,0$ cm, sua velocidade é de 30 cm/s e sua aceleração é de 150 m/s^2 . (A) Qual é a frequência do oscilador? (B) Qual é a amplitude da oscilação?

E 11.6 A Figura 11.4 mostra a oscilação de um corpo com massa de 0,50 kg preso a uma mola. (A) Quanto vale a constante de força da mola? (B) Escreva a equação que descreve $x(t)$.

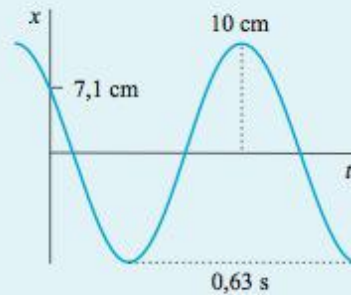


Figura 11.4

Exercício E 11.6.

11.3.2 Pêndulo simples

O pêndulo simples é o sistema constituído de uma partícula de massa m pendurada por um fio inelástico e sem massa de comprimento l . A Figura 11.5 mostra o pêndulo e as forças atuando sobre a partícula. A força resultante F é tangencial à trajetória, e é dada por

$$F = -mg \sin \theta. \quad (11.22)$$

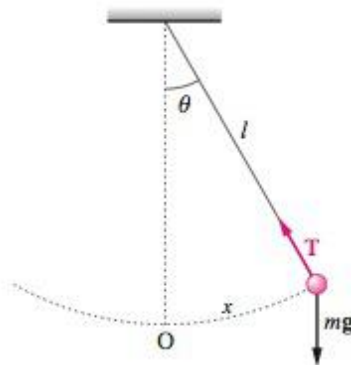


Figura 11.5

Pêndulo simples, exemplo de oscilador harmônico simples.

O sinal menos na equação acima exprime o fato de que a força é sempre oposta ao deslocamento do pêndulo, ou seja, é uma força de restauração ao equilíbrio. Os deslocamentos x da partícula correspondem a arcos do círculo de raio l . Podemos optar por usar coordenadas lineares ($x, \dot{x}, \ddot{x}$) ou angulares ($\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$). As relações entre elas são

$$x = l\theta, \quad v = \dot{x} = l\dot{\theta}, \quad a = \ddot{x} = l\ddot{\theta}. \quad (11.23)$$

Usando as Equações 11.22 e 11.23 e a Segunda Lei de Newton, a equação de movimento do pêndulo em coordenadas angulares será

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (11.24)$$

É importante notar que a Equação 11.24 não é similar à Equação 11.7 de um oscilador harmônico simples. Ou seja, a aceleração $\ddot{\theta}$ não é proporcional ao ângulo θ , mas sim ao seu seno. A solução $\theta(t)$ da Equação 11.24 não é uma função simples. Entretanto, para pequenos ângulos de oscilação, podemos adotar a aproximação $\sin \theta \approx \theta$ para escrever

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta. \quad (11.25)$$

Portanto, para oscilações de pequenas amplitudes o pêndulo simples se comporta como um oscilador harmônico simples e tem frequência angular natural:

■ Frequência angular natural do pêndulo simples

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (11.26)$$

E-E Exercício-exemplo 11.3

■ (A) Qual é o comprimento de um pêndulo simples cuja frequência natural é 1,00 Hz? (B) Sabendo que em $t = 0$ sua posição inicial era $\theta_o = 0,5$ rad e sua velocidade angular inicial era $\dot{\theta}_o = \pi$ rad/s, determine a amplitude do movimento.

■ Solução

(A) Com base nas Equações 11.3, 11.4 e 11.26, podemos escrever

$$v_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Portanto,

$$l = \frac{g}{4\pi^2 v^2} = \frac{9,81 \text{ ms}^{-2}}{39,48 \times 1,00 \text{ s}^{-2}} = 0,248 \text{ m}.$$

(B) A frequência angular do oscilador é $\omega_o = 2\pi\nu_o = 2,0\pi$ rad/s. Usando este resultado e os valores de θ_o e $\dot{\theta}_o$ na Equação 11.18 obtemos a solução para $\theta(t)$:

$$\theta(t) = 0,50 \cos(2,00\pi s^{-1}t) + \frac{1,0\pi}{2,00\pi} \sin(2,00\pi s^{-1}t), \text{ ou}$$

$$\theta(t) = 0,50 \cos(2,00\pi s^{-1}t) + 0,50 \sin(2,00\pi s^{-1}t).$$

Podemos também expressar $\theta(t)$ na forma $\theta(t) = \theta_m \cos(2,00\pi s^{-1}t + \varphi_o)$. Expandindo esse co-seno de uma soma de ângulos e comparando com a expressão anterior obtida para $\theta(t)$, concluímos que

$$\theta_m \cos(\varphi_o) = 0,50 \text{ e } \theta_m \sin(\varphi_o) = -0,50 \Rightarrow \theta_m^2 = (0,50)^2 + (0,50)^2.$$

Portanto, a amplitude do movimento será $\theta_m = \sqrt{2} \cdot 0,50 \text{ rad} = 0,70 \text{ rad}$.

Uma outra maneira de se encontrar o valor de θ_m baseia-se no cálculo do instante t_m em que a velocidade $\dot{\theta}(t)$ se anula; calcula-se então o valor de θ neste instante t_m .

Exercício

E 11.7 Um pêndulo constituído de uma esfera presa por um fio oscila, e a velocidade máxima da esfera é de 6,0 m/s. A amplitude da oscilação é de 10° . Qual é o comprimento do fio?

11.3.3 Pêndulo de torção

Quando uma barra ou um cabo é torcido em torno de seu eixo, de um ângulo θ em relação à sua posição de equilíbrio, reage com um torque de restauração proporcional a θ . Matematicamente, isso se exprime por

$$\tau = -\kappa\theta, \quad (11.27)$$

onde κ é a constante elástica de torção da barra ou do cabo. Considere um corpo suspenso por um cabo, e seja I o momento de inércia do corpo em relação ao eixo definido pelo cabo, como mostra a Figura 11.6. Quando girado para fora do equilíbrio, o corpo se moverá regido pela Segunda Lei de Newton para rotações, que neste caso será

$$I\ddot{\theta} = -\kappa\theta. \quad (11.28)$$

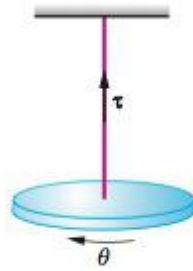


Figura 11.6

Pêndulo de torção, exemplo de oscilador harmônico simples.

Portanto, o sistema constitui um oscilador harmônico simples com frequência angular natural dada por

■ Frequência angular natural do pêndulo de torção

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}.$$

(11.29)

E-E Exercício-exemplo 11.4

■ Um disco homogêneo com massa de 0,200 kg e raio de 0,100 m é suspenso por uma barra fina formando um pêndulo de torção, como mostra a Figura 11.6. O período de oscilação natural do pêndulo é de 0,200 s. Qual é a constante de torção κ da barra?

■ Solução

O período do pêndulo será expresso por

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}.$$

Portanto,

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T_o^2}.$$

Sabendo que o momento de inércia do disco vale $I = MR^2/2$, podemos escrever

$$\kappa = \frac{2\pi^2 MR^2}{T_o^2} = \frac{19,74 \times 0,200 \text{ kg} \times 0,0100 \text{ m}^2}{0,0160 \text{ s}^2} = 2,47 \text{ Nm/rad}.$$

Observe que a unidade rad não aparece automaticamente nos cálculos, e foi acrescentada posteriormente.

Exercício

E 11.8 Considere o pêndulo de torção mostrado na Figura 11.6. O disco tem massa de 200 g e raio de 10,0 cm; a constante de torção da barra vale $3,0 \times 10^{-2}$ Nm. Qual é o período de oscilação do pêndulo?

11.3.4 Pêndulo físico

Um pêndulo convencional, como o de um antigo relógio de parede, é denominado pêndulo físico. A Figura 11.7 mostra um pêndulo físico e alguns dos seus parâmetros relevantes. O pêndulo, de massa M , é livre para oscilar em torno do eixo de suspensão E, seu centro de massa está à distância l do eixo. Seu momento de inércia para rotações em torno do eixo vale I . A única força que atua sobre o pêndulo, capaz de gerar torque em relação ao eixo de rotação, é seu próprio peso Mg . O torque dessa força pode ser obtido supondo-se que ela esteja aplicada no centro de massa do sistema:

$$\tau = -Mgl \sin \theta,$$

(11.30)



Figura 11.7

Pêndulo físico, exemplo de oscilador harmônico simples.

Na Equação 11.30, o sinal menos nos lembra que o torque tem sinal oposto ao ângulo θ . Aplicando ao pêndulo a Segunda Lei de Newton para rotações, obtemos

$$\tau = I\ddot{\theta} \Rightarrow gl\sin\theta = -I\ddot{\theta}. \quad (11.31)$$

Para pequenas oscilações, fazemos a aproximação $\sin\theta = \theta$ e escrevemos

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgl}{I}\theta. \quad (11.32)$$

A frequência angular natural do pêndulo será

$$\omega_o = \sqrt{\frac{Mgl}{I}}. \quad (11.33)$$

Observe que o pêndulo simples é um caso particular do pêndulo físico cujo momento de inércia é $I = ML^2$.

■ Frequência angular natural do pêndulo físico

E-E Exercício-exemplo 11.5

■ Uma barra fina de comprimento L e massa M é livre para oscilar em torno de um eixo horizontal próximo a uma das suas extremidades. Calcule o período da oscilação.

■ Solução

A distância do centro de massa ao eixo de rotação é $l = L/2$, e o momento de inércia da barra é $I = ML^2/3$. A Equação 11.33 nos permite então escrever

$$\omega_o = \sqrt{\frac{MgL/2}{ML^2/3}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}.$$

O período de oscilação será

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Exercício

E11.9 Um anel, com raio de 10 cm, está pendurado em um eixo fino em torno do qual oscila sem deslizar, sob a ação da gravidade (Figura 11.8). Determine a frequência angular e o período de oscilação.



Figura 11.8

Anel oscilando.

Seção 11.4 ■ Relações de energia no oscilador harmônico

Vimos na Equação 11.11 que a força restauradora em um oscilador harmônico simples é dada por

$$F = -kx; \quad k \equiv m\omega_o^2. \quad (11.34)$$

Se a coordenada x do oscilador for um ângulo, a Equação 11.34 continuará válida desde que a força seja substituída pelo torque no oscilador e a massa m seja substituída pelo momento de inércia I . Portanto, vamos abordar as relações energéticas para o caso do deslocamento linear, e quando for necessário tratar um oscilador com deslocamento angular faremos as substituições mencionadas.

Um sistema submetido a uma força $-kx$ terá uma energia potencial $U(x)$ dada por

$$U(x) = -\int F dx = k \int x dx = \frac{kx^2}{2} + C,$$

onde C é uma constante de integração que pode ser escolhida como nula para que a energia potencial do sistema seja também nula quando o sistema estiver em sua posição de equilíbrio $x = 0$. Assim, teremos para a energia potencial de um oscilador harmônico simples:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi_o) \\ &= \frac{1}{2} m\omega_o^2 x_m^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi_o). \end{aligned} \quad (11.35)$$

A energia cinética do oscilador é

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\omega_o^2 x_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi_o) \\ &= \frac{1}{2} kx_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi_o). \end{aligned} \quad (11.36)$$

A partir das Equações 11.35 e 11.36, vê-se que as energias potencial e cinética são funções oscilatórias de mesma amplitude $m\omega_o^2 x_m^2/2$ com defasagem de $\pi/2$ uma em relação à outra. Quando a energia potencial é máxima a energia cinética é mínima, e vice-versa.

A Figura 11.9 mostra a variação de U e K no tempo para o caso particular $\varphi_o = 0$. O crescimento e o decréscimo alternados das energias potencial e cinética, ambas oscilando da mesma maneira, uma defasada da outra, é um dos fatos mais importantes ligados ao oscilador harmônico. A Figura 11.10 ilustra essa alternância para o caso particular do sistema massa-mola. Nessa ilustração, o instante inicial foi escolhido de modo que $\varphi_o = 0$.

A energia total do oscilador é dada pela soma de U e K :

$$E = U + K = \frac{1}{2} kx_m^2 [\cos^2(\omega_o t + \varphi_o) + \sin^2(\omega_o t + \varphi_o)] = \frac{1}{2} kx_m^2. \quad (11.37)$$

A energia total é uma constante, pois não há nenhuma força externa atuando sobre o oscilador. O valor da energia total é igual ao valor máximo da energia potencial ou da energia cinética. Isto porque quando a energia potencial está em seu valor máximo a energia cinética é nula e vice-versa.

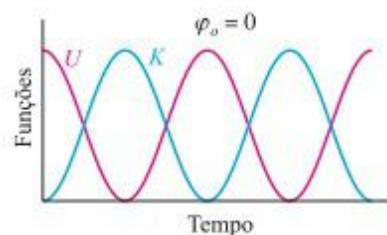


Figura 11.9

Variação no tempo das energias potencial e cinética do oscilador harmônico simples.

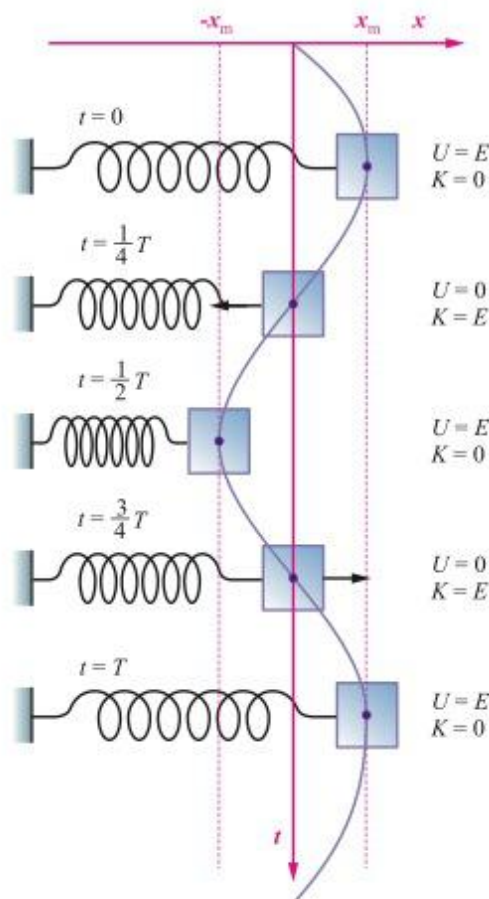


Figura 11.10

No oscilador harmônico massa-mola, a energia fica oscilando entre as formas potencial e cinética. Em alguns pontos especiais do ciclo, a energia é puramente potencial ou puramente cinética. Esta é uma característica comum a todos os osciladores.

Como o movimento é cíclico, é interessante saber os valores médios no tempo das energias potencial e cinética. A média no tempo é a média em um ciclo, ou seja, em um período T . Portanto, teremos para as médias de U e de K :

$$\langle U \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt, \quad \langle K \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T K(t) dt. \quad (11.38)$$

Usando as Equações 11.35 e 11.36, podemos reescrever as Equações 11.38 na seguinte forma:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} k x_m^2 \langle \cos(\omega_0 t + \varphi_0)^2 \rangle; \quad \langle K \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \sin(\omega_0 t + \varphi_0)^2 \rangle. \quad (11.39)$$

Observe-se que

$$\begin{aligned} \langle \cos(\omega_0 t + \varphi_0)^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_0 t + \varphi_0)^2 dt = \frac{1}{2}, \\ \langle \sin(\omega_0 t + \varphi_0)^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega_0 t + \varphi_0)^2 dt = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Conclui-se então que a média da energia potencial é igual à média da energia cinética e igual a metade da energia total obtida na Equação 11.37:

$$\langle U \rangle = \langle K \rangle = \frac{1}{4} k x_m^2 = \frac{1}{2} E. \quad (11.41)$$

Os resultados $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \langle \sin^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$ mostrados na Equação 11.40 serão úteis em várias situações futuras neste livro.

E-E Exercício-exemplo 11.6

■ Um oscilador massa-mola é constituído de um bloco com massa de 0,20 kg preso a uma mola cuja constante vale 0,15 N/cm. O oscilador oscila com amplitude de 10 cm. Calcule a energia mecânica do oscilador, a velocidade máxima e a aceleração máxima do bloco.

■ Solução

A energia mecânica será

$$E = \frac{1}{2} kx_m^2 = \frac{1}{2} 15 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 0,010\text{m}^2 = 0,075 \text{ J}.$$

Quando o bloco passa pela posição $x = 0$, sua velocidade é máxima e toda a energia do oscilador é cinética. Podemos então escrever

$$\frac{1}{2} mv_m^2 = E \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{0,15\text{J}}{0,20\text{kg}}} = 0,87\text{m/s}.$$

A aceleração máxima do bloco ocorrerá quando a força for máxima, o que ocorre quando a distensão da mola for máxima, ou seja, $x = x_m$. A segunda lei de Newton dá

$$kx_m = ma_m \Rightarrow a_m = \frac{kx_m}{m} = \frac{15\text{N/m} \times 0,010\text{m}}{0,20\text{kg}} = 7,5 \text{ m/s}^2.$$

E-E Exercício-exemplo 11.7

■ Um disco maciço de densidade uniforme, com massa de 0,500 kg e raio de 50,0 cm, pendurado por uma haste vertical presa em seu centro, oscila angularmente de modo que a posição angular de uma marca no disco é dada por $\theta = 0,800\text{rad} \cdot \cos(3,20 \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} t)$. (A) Determine a energia do oscilador; (B) calcule a constante elástica de torção da haste; (C) calcule o valor da energia cinética no instante em que ela for igual à energia potencial do oscilador.

■ Solução

(A) Sabemos do Capítulo 10 que o momento de inércia I de um disco em relação ao eixo que passa pelo seu centro é $I = MR^2 / 2$. Logo, para o disco desse problema teremos

$$I = 0,500\text{kg} \cdot (0,500\text{m})^2 / 2 = 6,25 \times 10^{-2} \cdot \text{m}^2.$$

Portanto, a constante de torção será

$$\kappa = I\omega_o^2 = 6,25 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times (3,20\text{rad/s})^2 = 0,160\text{kg} \cdot (\text{m/s})^2.$$

(B) A energia total do oscilador é

$$E = \frac{1}{2} \kappa \theta_m^2 = \frac{1}{2} 0,160\text{kg} \cdot (\text{m/s})^2 \cdot (0,800\text{rad})^2 = 51,2 \text{ mJ}.$$

(C) Quando a energia cinética for igual à energia potencial, cada uma valerá metade da energia total:

$$U = K = 51,2 \text{ mJ} / 2 = 25,6 \text{ mJ}.$$

Exercícios

E 11.10 Reconsiderando o pêndulo do Exercício 11.8, qual é sua energia mecânica se no instante em que o ângulo de torção for $\theta = 5,00^\circ$, sua velocidade angular for 0,600 rad/s?

E 11.11 Uma caixa presa a uma mola oscila com amplitude de 5,0 cm. A energia cinética máxima alcançada pela caixa é de 0,20 J. Quanto vale a constante de força da mola?

Seção 11.5 ■ Oscilador harmônico amortecido

Até aqui ignoramos atrito na análise do oscilador harmônico. Entretanto, o atrito é um agente importante em quase todos os osciladores reais, e tem de ser levado em conta. Muitas vezes isso resulta em grandes dificuldades de cálculo. Considere, por exemplo, um pêndulo simples ou um bloco suspenso por uma mola. Em ambos os casos, a principal contribuição para a força de atrito é a resistência do ar ao movimento do bloco ou do corpo que compõe o pêndulo. Tal força é sempre oposta à velocidade do corpo e tem duas componentes, uma proporcional à velocidade e outra proporcional ao quadrado da velocidade. A expressão geral para a força de atrito é

$$F_{at} = -bv - c|v|v, \quad (11.42)$$

onde b e c são constantes que dependem da geometria do corpo. Além da força de atrito, o oscilador fica obviamente sujeito à sua força de restauração $-kx$, que na verdade é a responsável pela oscilação. Assim, no caso do oscilador massa-mola, a força total sobre o corpo é

$$F = -kx + F_{at} = -kx - bv - c|v|v. \quad (11.43)$$

Temos aqui um sério obstáculo, pois não existe uma solução analítica exata para o movimento de um corpo sujeito a esse tipo de força, e seu movimento tem de ser obtido por integração numérica em computador.

Por outro lado, porém, quando o corpo envolvido no oscilador tem dimensões minúsculas, o termo proporcional ao quadrado da velocidade na Equação 11.43 em geral fica desprezível, e a força de atrito é, com ótima aproximação, proporcional à velocidade. Nesse caso, a equação de movimento para o oscilador toma a forma

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (11.44)$$

Esta equação descreve uma importante classe de osciladores, incluindo osciladores atômicos e moleculares, vibrações em sólidos, osciladores eletromagnéticos e outros. Analisaremos a seguir sua solução, sem mostrar como ela foi obtida. O comportamento do oscilador depende da relação entre os parâmetros m , b e k . A grandeza que define o tipo de solução é ω'^2 dada por

$$\omega'^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2. \quad (11.45)$$

Se o atrito, definido pela constante b , não for excessivamente intenso, de modo que ω'^2 seja positivo, a solução geral pode ser posta na forma

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \varphi_o), \quad (11.46)$$

onde A e φ_o são constantes cujos valores são determinados pelas condições iniciais (posição e velocidade iniciais) do oscilador.

As Equações 11.46 e 11.45 mostram que o sistema oscila com frequência angular menor que a frequência $\omega_o = \sqrt{k/m}$ que teria na ausência de atrito. Além disso, sua amplitude de oscilação decai exponencialmente no tempo, ou seja,

$$x_m = Ae^{-\frac{b}{2m}t}. \quad (11.47)$$

A Figura 11.11 mostra a evolução temporal da posição x do oscilador em função do tempo para o caso em que $\varphi_o = 0$. Um oscilador que se comporta segundo a Equação 11.46 e a Figura 11.9 é chamado **oscilador subamortecido**.

Um oscilador é subamortecido quando o atrito é pequeno o suficiente para que ele oscile. Seu comportamento é mostrado na Figura 11.11

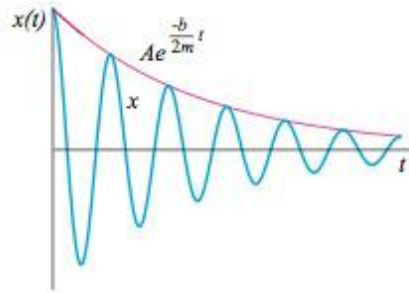


Figura 11.11

Variação no tempo do deslocamento e da amplitude de um oscilador subamortecido.

E-E Exercício-exemplo 11.8

■ Um corpo com massa de 20 g é suspenso por uma mola cuja constante vale 2,0 N/m. Qual deve ser o valor da constante de atrito b para que a frequência do oscilador seja metade de ω_0 ?

■ Solução

Queremos que $\omega' = \omega_0 / 2$. Empregando a Equação 11.45,

$$\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \frac{k}{4m} \Rightarrow b = \sqrt{3km}.$$

Substituindo os valores numéricos,

$$b = \sqrt{3 \times 2,0 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 0,020 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}}} = 0,35 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}.$$

Se o atrito no oscilador for muito intenso, pode ocorrer que $\omega'^2 < 0$. Nesse caso, a frequência ω' na Equação 11.45 é um número imaginário, e a solução expressa pela Equação 11.46 não é mais adequada para o oscilador. Para exprimir a nova solução, definimos o parâmetro com dimensão de frequência:

$$\Gamma = \sqrt{-\omega'^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (11.48)$$

A solução geral do oscilador é agora dada por

$$x = A e^{-\left(\frac{b}{2m} - \Gamma\right)t} + B e^{-\left(\frac{b}{2m} + \Gamma\right)t}, \quad (11.49)$$

onde A e B são constantes definidas pelas condições iniciais do oscilador. O oscilador caracterizado pela Equação 11.49 é denominado **oscilador superamortecido**. Observa-se que o oscilador superamortecido não apresenta oscilações. Uma vez colocado fora do equilíbrio, ele decai para o estado de equilíbrio em um processo descrito por duas exponenciais. A primeira delas acarreta um decaimento lento e a outra um decaimento mais *rápido*.

Quando os parâmetros b , m e k do oscilador se ajustam de modo tal que $\Gamma = 0$ ou $\omega'^2 = 0$, temos o chamado **oscilador crítico**. Sua solução geral tem a forma

$$x = (C + Dt) e^{-\frac{b}{2m}t}, \quad (11.50)$$

onde C e D são constantes cujos valores são definidos pelas condições iniciais do oscilador. Nota-se que o oscilador crítico, quando retirado da condição de equilíbrio, também decai para o estado de equilíbrio sem oscilar. Assim, ele pode ser considerado um caso-limite do oscilador superamortecido em que o atrito tem o valor mínimo para impedir a oscilação. Para dados valores de m e k , quando b tem o valor ajustado para que o oscilador seja crítico ele decai para o equilíbrio da maneira mais rápida possível. Se aumentarmos o valor de b ,

Um oscilador é **superamortecido** quando seu atrito é grande o suficiente para que valha a relação $\omega'^2 < 0$. Isso impede que ele oscile

o decaimento para o equilíbrio será mais lento. Esse efeito tem uso prático em amortecedores de carros. Tais amortecedores, cuja função é atenuar as trepidações do carro devidas às imperfeições da pista, em vários modelos contêm uma mola presa a um pistão imerso em óleo viscoso, cuja finalidade é aumentar o atrito durante o movimento do pistão. A massa do oscilador é a própria massa do carro. Para que o carro volte à sua posição (altura) de equilíbrio rapidamente quando deslocado por um defeito na pista, o sistema amortecedores-carro deve formar um oscilador crítico, ou com atrito um pouco acima do valor crítico. Com o uso, o atrito dos amortecedores se reduz, e o sistema acaba ficando subamortecido. O teste usual para se verificar se os amortecedores do carro ainda estão em ordem consiste em baixar a traseira do automóvel e verificar se o carro retorna ao equilíbrio sem oscilar. Para testar os amortecedores dianteiros, faz-se o mesmo com a parte dianteira do carro.

E-E Exercício-exemplo 11.9

■ Um carro tem massa $m_c = 1200 \text{ kg}$. Quando 4 passageiros, somando massa de 250 kg , entram no carro, este baixa $3,0 \text{ cm}$. (A) Calcule o valor da constante de mola do conjunto dos amortecedores. (B) Qual deve ser o valor do parâmetro b para o conjunto dos amortecedores para que o carro, com sua carga, se comporte como amortecedor crítico?

■ Solução

(A) A constante de mola pode ser calculada pela equação

$$kx = g\Delta m,$$

$$k = \frac{9,8 \text{ m/s}^2 \times 250 \text{ kg}}{0,030 \text{ m}} = 8,2 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

(B) A condição para que o carro carregado funcione como oscilador crítico é

$$\frac{b^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow b = 2\sqrt{mk},$$

$$b = 2\sqrt{1,45 \times 10^3 \text{ kg} \times 0,82 \times 10^5 \text{ N/m}} = 2,2 \times 10^4 \text{ Ns/m}.$$

Exercícios

E 11.12 Um oscilador massa-mola tem seu movimento regido pela equação $50,00 \text{ g} \cdot \ddot{x} + 1,000 \times 10^{-2} \text{ N s}^{-1} \cdot \dot{x} + 5,000 \text{ N cm}^{-1} \cdot x = 0$ e em $t = 0$ tem-se $x(0) = 10,00 \text{ cm}$ e $v(0) = 0$. (A) Determine $x(t)$. (B) Se a força de atrito aumenta de modo que o coeficiente de $\dot{x}$ passa a ser $4,000 \text{ N s}^{-1}$ qual será a nova expressão para $x(t)$?

E 11.13 Definindo o período $T = 2\pi / \omega'$ para o oscilador subamortecido, (A) mostre que

$$\frac{x(t+nT)}{x(t)} = \frac{v(t+nT)}{v(t)} = e^{-\frac{b}{2m}nT} \text{ e que } \frac{E(t+nT)}{E(t)} = e^{-\frac{b}{m}nT}, \text{ onde } n \text{ é um número inteiro e } E \text{ é a energia}$$

total $E(t) \equiv K(t) + U(t)$. (B) Para um oscilador amortecido, definido pelos parâmetros $\omega_0 = 1,00 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ e $b/2m = 5,00 \text{ s}^{-1}$, oscilando livremente, determine qual fração de sua energia é perdida em cada ciclo, e (C) em quantos ciclos o oscilador perde metade de sua energia inicial.

E 11.14 Determine $x(t)$ para o oscilador com amortecimento crítico para as seguintes condições em $t = 0$: $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$.

Seção 11.6 ■ Oscilador forçado e ressonância

Até aqui, consideramos osciladores livres, ou seja, que oscilam livres de forças externas. Vamos considerar agora um oscilador que, para sermos mais específicos, suporemos do tipo

massa-mola amortecido, estimulado por uma força externa que oscila no tempo na forma $F_o \cos \omega t$. A equação de movimento do oscilador será

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_o \cos \omega t. \quad (11.51)$$

Temos agora de considerar duas frequências angulares na análise do sistema, a frequência natural ω_o do oscilador e a frequência ω da força externa. Naturalmente, o parâmetro b que define o atrito do oscilador também é relevante. Para tornar as equações mais compactas, é usual definir-se o símbolo

$$\gamma \equiv \frac{b}{m}. \quad (11.52)$$

A solução matemática da Equação 11.51 não será apresentada neste texto. Tal solução mostra que o sistema inicialmente apresenta um movimento composto de uma oscilação com a frequência angular ω da força externa e um movimento amortecido (subamortecido, superamortecido ou com amortecimento crítico, de acordo com o valor de ω'^2). A primeira parte da solução é denominada **solução estacionária** e a segunda parte é denominada **transiente**, porque desaparece após algum tempo devido aos fatores exponenciais nas Equações 11.46, 11.49 e 11.50. Assim, a solução que de fato nos interessa é a estacionária e ela pode ser expressa na seguinte forma:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_o), \text{ onde } x_m = \frac{F_o}{m[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}}. \quad (11.53)$$

A velocidade do oscilador forçado será dada pela derivada de $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi_o). \quad (11.54)$$

Outra grandeza relevante no oscilador forçado é o valor médio tomado durante um ciclo, da potência cedida ao oscilador pela força oscilatória que atua sobre ele. Tal potência média é expressa por $\langle F(t) \cdot \dot{x}(t) \rangle$. Como o sistema está em regime estacionário (acabou-se o transiente), a energia média do oscilador não varia. Nesse caso, pela conservação da energia a potência média cedida ao oscilador pela força externa $F(t)$ deve ser igual em módulo à potência média realizada pela força de atrito. Em outras palavras, para que o movimento mantenha a mesma amplitude, e portanto a mesma energia, é necessário que a potência cedida pela força externa seja igual à potência dissipada pela força de atrito. Esta pode ser expressa por

$$P_s = -\langle F_s \cdot \dot{x} \rangle = -\langle b \cdot \dot{x}^2 \rangle = -b(x_m \omega)^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi_o) \rangle. \quad (11.55)$$

Como o valor médio em um ciclo do seno ao quadrado é $\frac{1}{2}$, a potência média fornecida pela força oscilatória será

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} b (x_m \omega)^2 = \frac{b}{2m^2} \frac{F_o^2 \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \\ &= \frac{F_o^2}{2b} \frac{(b/m)^2 \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} = \frac{F_o^2}{2b} \frac{(\gamma\omega)^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \end{aligned} \quad (11.56)$$

Solução estacionária de um oscilador forçado é aquela que permanece enquanto existir o estímulo externo. O **transiente** é a solução que depende das condições iniciais e decai com o tempo

Um oscilador está em **ressonância** quando é excitado com frequência igual à sua frequência natural

As Equações 11.54 e 11.56 mostram que tanto a amplitude da velocidade do oscilador quanto a potência que ele absorve têm um valor máximo quando $\omega = \omega_o$, ou seja, quando a frequência da força externa é igual à frequência natural do oscilador. Tal condição é denominada **ressonância**.

E-E Exercício-exemplo 11.10

■ Calcule, em termos de F_o e b , a potência absorvida por um oscilador de frequência angular natural ω_o (A) quando excitado com a frequência ω_o e (B) quando excitado com a frequência $\omega_o + \gamma/2$, supondo que $\gamma \ll \omega_o$.

■ Solução

(A) Calculando P expresso pela Equação 11.56 para $\omega = \omega_o$, obtemos

$$P(\omega_o) = \frac{F_o^2}{2b} \frac{(\gamma\omega_o)^2}{(\omega_o^2 - \omega_o^2)^2 + (\gamma\omega_o)^2} = \frac{F_o^2}{2b}. \quad (11.57)$$

(B) Fazendo agora $\omega = \omega_o + \gamma/2$:

$$P(\omega_o + \gamma/2) = \frac{F_o^2}{2b} \frac{[\gamma(\omega_o + \gamma/2)]^2}{[\omega_o^2 - (\omega_o + \gamma/2)^2]^2 + [\gamma(\omega_o + \gamma/2)]^2}.$$

Como $\gamma \ll \omega_o$, podemos fazer as aproximações

$\gamma(\omega_o + \gamma/2) \cong \gamma\omega_o$ e $(\omega_o + \gamma/2)^2 \cong \omega_o^2 + \omega_o\gamma$, para obter

$$P(\omega_o + \gamma/2) = \frac{F_o^2}{2b} \frac{(\gamma\omega_o)^2}{(\gamma\omega_o)^2 + (\gamma\omega_o)^2} = \frac{1}{2} \frac{F_o^2}{2b}.$$

Vê-se, portanto, que

$$P(\omega_o + \gamma/2) = \frac{1}{2} P(\omega_o). \quad (11.58)$$

A potência se reduz a metade de seu valor máximo quando a frequência ω da força aumenta de $\gamma/2$ em relação à frequência de ressonância.

E-E Exercício-exemplo 11.11

■ Suponha que o oscilador do Exercício-exemplo 11.8 seja estimulado com a força

$$F(t) = 0,050 \text{ N} \cos\left(10 \frac{t}{\text{s}}\right).$$

Calcule x_m , $\dot{x}_m$ e P .

■ Solução

Note que a frequência angular da força que estimula o oscilador coincide com a sua frequência natural, ou seja, a força está em ressonância com o oscilador.

Portanto, pela Equação 11.53, obtemos

$$x_m = \frac{F_o}{m\gamma\omega_o} = \frac{F_o}{b\omega_o} = \frac{0,050 \text{ N}}{0,35 \text{ Ns/m} \times 10/\text{s}} = 1,4 \text{ cm}.$$

Pela Equação 11.54, podemos também escrever

$$\dot{x}_m = x_m \omega_o = 1,4 \text{ cm} \times 10/\text{s} = 14 \text{ cm/s}.$$

A potência absorvida pode ser calculada pelo uso da Equação 11.57:

$$P = \frac{F_o^2}{2b} = \frac{(0,050)^2 \text{ N}^2}{0,70 \text{ Ns/m}} = 3,6 \times 10^{-3} \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 3,6 \text{ mW}.$$

Exercícios

E 11.15 Suponha que o oscilador descrito no Exercício 11.12 seja submetido a uma força oscilatória descrita por $F = 0,20\text{ N} \cdot \cos(100, 10\text{s}^{-1} \cdot t)$ e que a constante de mola seja $5,000\text{ N/cm}$. Calcule a amplitude x_m das oscilações, em regime permanente.

E 11.16 Se o oscilador descrito no Exercício 11.12 for submetido a uma força oscilatória de amplitude $0,40\text{ N}$, na condição de ressonância, qual será a potência média entregue ao oscilador pela força externa? A constante de mola é $5,000\text{ N/cm}$.

E 11.17 Considere um oscilador forçado pouco amortecido, ou seja, no qual valha a relação $\omega_0 \gg \gamma$. Calcule a razão $x_m(\omega_0)/x_m(2\omega_0)$, ou seja, a razão entre a amplitude da oscilação para força externa na frequência de ressonância e a amplitude da oscilação para força externa com frequência igual a duas vezes a frequência de ressonância.

A Figura 11.12 mostra a potência absorvida por osciladores de frequência angular natural ω_0 quando excitados por uma força de frequência ω . Nota-se que a largura do pico de ressonância diminui quando o parâmetro γ que mede o atrito do oscilador diminui, e ao mesmo tempo a intensidade da ressonância — medida pela altura do pico — aumenta. Esses resultados já eram esperados, considerando-se as Equações 11.57 e 11.58.

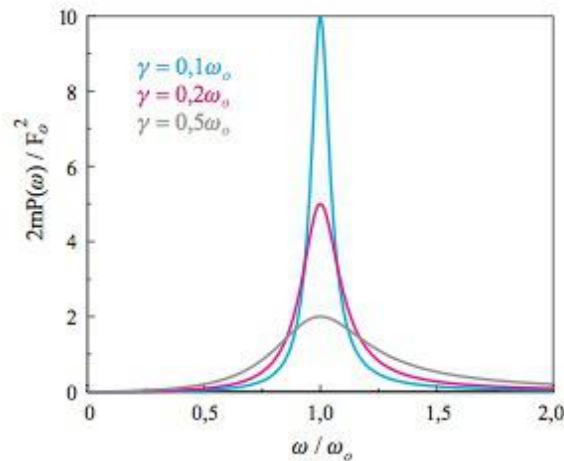


Figura 11.12

Curvas de ressonância para osciladores de massa e frequência iguais e valores distintos do parâmetro γ que mede o atrito. Nota-se que o pico de ressonância é mais estreito e intenso para osciladores com menor atrito.

O fenômeno da ressonância é amplamente utilizado em aplicações práticas. Quando sintonizamos um receptor de rádio ou tevê, o que fazemos é variar a frequência natural do seu circuito, que funciona como um oscilador amortecido, até que sua frequência natural coincida com a frequência da emissora, cuja onda emitida funciona como o estímulo (força externa) para o circuito. O fenômeno de ressonância, envolvendo osciladores mecânicos, é utilizado para afinar instrumentos de corda. Um diapasão, que é um oscilador de baixo atrito, é excitado, e então vibra com sua frequência natural. A frequência natural da corda a ser afinada pode ser sintonizada variando-se a sua tensão. Quando a frequência natural da corda coincide com a do diapasão, o som emitido por este entra em ressonância com a corda, que passa a vibrar de modo perceptível. Assim, a frequência natural da corda é colocada no valor pretendido.

O fenômeno da ressonância tem grande importância na segurança de construções civis tais como pontes e edifícios. Os ventos e terremotos não têm uma frequência definida, mas são compostos por um contínuo de frequências. Uma dessas frequências pode entrar em ressonância com uma oscilação natural da edificação, e se o sistema tiver pouco atrito a ressonância pode ser forte o suficiente para danificar ou destruir a edificação. Em edificações modernas, principalmente em locais propensos a terremotos, tornou-se comum o uso de amortecedores gigantes para atenuar mais intensamente as oscilações da edificação e, desse modo, diminuir a intensidade das possíveis ressonâncias.

PROBLEMAS

P 11.1 Calcule a frequência de oscilação do sistema visto na Figura 11.13.



Figura 11.13
(Problema 11.1).

P 11.2 Mostre que o único efeito da gravidade no oscilador mostrado na Figura 11.14 é deslocar o seu ponto de equilíbrio. *Sugestão:* supondo $x = 0$ quando a mola está em seu tamanho natural, encontre o valor x_0 da distensão da mola devido à gravidade. Suponha então que a partir de x_0 a mola seja distendida de Δx . Mostre que a força resultante, considerando-se tanto a gravidade quanto a mola, será $F = -k\Delta x$.

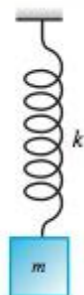


Figura 11.14
(Problema 11.2).

P 11.3 (A) O período de um pêndulo situado no equador é definido pela aceleração real da gravidade $g = Gm/R^2$, onde M e R são o raio da Terra, ou pela aceleração aparente $g' = g - \omega_r^2 R$, onde ω_r é a velocidade angular da Terra. (B) Calcule a correção relativa $\Delta T/T$ no período de um pêndulo simples, situado no equador, devida à rotação da Terra. (C) Calcule a correção relativa no período para um pêndulo situado à latitude de 45° .

P 11.4 Considere o pêndulo simples mostrado na Figura 11.5 do texto. Suponha que o pêndulo seja abandonado, do repouso, no instante $t = 0$, a um ângulo de θ_0 . Obtenha a função $T(t)$ que descreve a evolução da tensão no fio com o do tempo.

P 11.5 Um carro sem carga tem massa de 1200 kg. Quando dois passageiros com massa conjunta de 150 kg entram no carro, sua plataforma sofre um deslocamento de 3,0 cm para baixo. O carro, com seus passageiros, transita em uma pista que apresenta uma modulação aproximadamente periódica, com período de 15 m. A que velocidade o carro sofrerá trepidação máxima?

P 11.6 Considere uma régua homogênea e elástica de 30 cm, e suponha que uma força de distensão faça com que a régua atinja o comprimento de 33 cm. Mostre que a separação entre as marcas consecutivas de centímetros da régua passará a ter o valor de 1,1 cm.

P 11.7 A Figura 11.15 mostra um bloco de massa m suspenso por duas molas, em duas configurações distintas. Calcule a frequência angular da oscilação do sistema, nas duas configurações *a* e *b*. *Sugestão:* para determinar a constante elástica do sistema de duas molas, cada qual com constante elástica k , conectadas em série,

como na configuração *a*, calcule a elongação do sistema quando lhe aplicamos uma força de distensão F . Faça o mesmo para o caso das molas conectadas em paralelo, como na configuração *b*. No caso da configuração *b*, analise o sistema de outra maneira: considere que cada metade do bloco está sendo sustentada por uma das molas; esta análise leva ao mesmo resultado para o cálculo da frequência do oscilador?

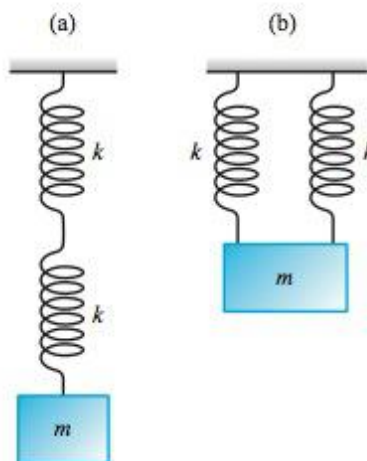


Figura 11.15
(Problema 11.7).

P 11.8 O conjunto de amortecedores do carro descrito no Exercício-exemplo 11.9 tem uma constante de amortecimento $b = 2,0 \times 10^4$ Ns/m. Suponha que a força vertical sobre o carro provocada pela modulação na estrada tenha o comportamento $F = 2,0 \times 10^3 \text{ N} \cdot \cos(0,42\text{m}^{-1} \cdot vt)$, onde v é a velocidade de trânsito do carro. Faça um gráfico da amplitude da oscilação vertical do carro em função da sua velocidade.

P 11.9 Quando forçada pela mola, a roda vista na Figura 11.16 rola sem deslizar sobre o piso, girando em torno de seu eixo. Calcule a frequência de oscilação do sistema.

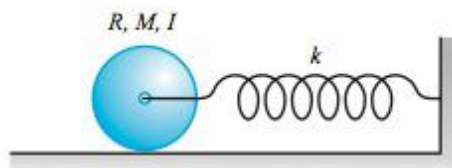


Figura 11.16
(Problema 11.9).

P 11.10 Um disco homogêneo de massa M e raio R oscila verticalmente em torno de um eixo horizontal à distância h do seu centro. Calcule o seu período de oscilação. *Sugestão:* use o teorema dos eixos paralelos para calcular o momento de inércia do disco.

P 11.11 Mostre que, para tempos suficientemente longos, a razão entre $x(t)$ de um oscilador com amortecimento crítico e de um superamortecido se comporta como $t \exp(-\Gamma t)$. Isto mostra que com amortecimento crítico as amplitudes decaem mais rapidamente.

P 11.12 Um oscilador harmônico do tipo massa-mola é colocado para oscilar com uma energia total de 0,5 J. No instante inicial a

energia cinética do sistema era de 0,2 J, a mola estava um pouco comprimida e comprimindo-se mais ainda. (A) Encontre o ângulo de fase inicial do movimento. (B) Sabendo que a amplitude do movimento é de 25 cm e seu período é 0,99 s, encontre a constante de força e a massa do oscilador.

P 11.13 Um pêndulo simples de massa M e comprimento l está em repouso quando uma pequena quantidade de material adesivo, de massa m e velocidade horizontal v_o , choca-se com o pêndulo e adere a ele. (A) Encontre a posição angular $\theta(t)$ e (B) a energia cinética $K(t)$ do sistema.

P 11.14 Uma pequena esfera de massa m pode deslizar sem atrito dentro de uma calota esférica de raio R . Mostre que seu movimento, para deslocamentos muito menores do que R , é equivalente ao de um pêndulo simples de comprimento R .

P 11.15 Com relação ao Problema 11.14, mostre que, se houver atrito suficiente para que a esferinha role sem deslizar, o seu movimento é equivalente ao de um pêndulo simples de comprimento $7R/5$.

P 11.16 Encontre a solução $x(t)$ do oscilador superamortecido no limite em que $\omega_o \rightarrow 0$ com as condições $x(0) = x_o$ e $v(0) = v_o$. Interprete o resultado.

P 11.17 Suponha que a solução da Equação 11.44 seja do tipo $x \propto e^{\alpha t}$. (A) Substitua esta solução na referida equação e encontre os valores de α possíveis. (B) Mostre que, se $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$, as suas duas soluções são as duas parcelas da Equação 11.49.

Comentário: para o caso em que $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$, suas duas respostas contêm exponenciais de números complexos cuja combinação leva à solução dada na Equação 11.46.

P 11.18 *Limite estático das oscilações forçadas.* Considere um oscilador amortecido sujeito a uma força estática F_o , ou seja, uma força $F_o \cos \omega t$ em que $\omega = 0$. Demonstre, usando a Equação 11.53, que seu deslocamento é $x = F_o/k$. Isso mostra que nosso tratamento para oscilações forçadas funciona no limite de forças estáticas.

P 11.19 *Oscilador superamortecido forçado.* Faça gráficos de $x_m(\omega)$ e de $P(\omega)$ para um oscilador superamortecido em que $\gamma = 3\omega_o$.

P 11.20 *Oscilador amortecido livre.* Faça um gráfico de $x(t)$ para um oscilador amortecido livre para o qual (A) $\gamma = \omega_o/5$; (B) $\gamma = \omega_o$. Em ambos os casos, faça $\phi_o = 0$.

Respostas dos exercícios

- E 11.1** (A) $x(t) = 5,0\text{m} \cos(5,0\text{s}^{-1}t + \pi/3)$;
 $y(t) = 5,0\text{m} \sin(5,0\text{s}^{-1}t + \pi/3)$;
 (B) $v_x(t) = -25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sin(5,0\text{s}^{-1}t + \pi/3)$
 $v_y(t) = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cos(5,0\text{s}^{-1}t + \pi/3)$
E 11.2 $-\pi/2$
E 11.3 $x = 0,85 \text{ cm} \cos(5,0t/\text{s} + 28^\circ)$
E 11.4 $x_m = 5,00 \text{ cm}$, $\omega = 10,0/\text{s}$, $\phi_o = 120^\circ$
E 11.5 (A) 0,796 Hz; (B) 8,5 cm.
E 11.6 (A) 50 N/m; (B) $x = 10 \text{ cm} \cos(10t + 45^\circ)$
E 11.7 1,2 m

- E 11.8** 1,15 s
E 11.9 $\omega = 7 \text{ rad/s}$; $T = 0,90\text{s}$
E 11.10 $2,94 \times 10^{-4} \text{ J}$
E 11.11 $1,6 \times 10^2 \text{ N/m}$
E 11.12 (A) $x = 10,00 \text{ cm} \cdot e^{-0,1000\text{s}^{-1}t} \cos(100,00\text{s}^{-1}t)$;
 (B) $x = 10,77 \text{ cm} \cdot e^{-40,00\text{s}^{-1}t} \cos(99,80\text{s}^{-1}t - 0,3812)$
E 11.13 (B) $6,28 \times 10^{-6}$; (C) 11032 ciclos.
E 11.14 $x(t) = x_o(1 + \omega_o t)e^{-\omega_o t}$
E 11.15 1,41 cm
E 11.16 8 W
E 11.17 $x(\omega_o)/x(2\omega_o) \equiv 3\omega_o/\gamma$

Respostas dos problemas

- P 11.1** $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$
P 11.2 $x_o = mg/k$
P 11.3 (A) aparente; (B) 0,34%; (C) 0,24%
P 11.4 $T(t) = mg \left[1 - \frac{1}{2} \theta_o^2 \cos^2 \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right]$
P 11.5 14,4 m/s
P 11.7 série: $\omega = \sqrt{k/2m}$; paralelo: $\omega = \sqrt{2k/m}$
P 11.9 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{3m}}$
P 11.10 $\sqrt{\frac{2gh}{R^2 + 2h^2}}$

- P 11.12** (A) 141° ; (B) 16 N/m e 0,40 kg
P 11.13 (A) $\theta(t) = \frac{m}{M+m} \frac{v_o}{\sqrt{gl}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$;
 (B) $K(t) = \frac{m^2 v_o^2}{2(M+m)} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$.
P 11.16 $x(t) = x_o + \frac{mv_o}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$
P 11.17 $\alpha = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$





Gravitação

- Seção 12.1 ■ Um pouco da história, 278
- Seção 12.2 ■ Formulação matemática da lei da gravitação, 279
- Seção 12.3 ■ Experiência de Cavendish, 280
- Seção 12.4 ■ Energia potencial gravitacional de um sistema de partículas, 281
- Seção 12.5 ■ Interação entre uma partícula e uma casca esférica, 284
- Seção 12.6 ■ Auto-energia gravitacional de um corpo, 288
- Seção 12.7 ■ Campo gravitacional, 289
- Seção 12.8 ■ As leis de Kepler, 289
- Seção 12.9 ■ Órbitas circulares, 292
- Seção 12.10 ■ Órbitas geossincronizadas, 294
- Seção 12.11 ■ Velocidade de escape, 294
- Seção 12.12 ■ Limite de validade da lei da gravitação de Newton, 295
- Seção 12.13 ■ As quatro forças, 296
- Problemas, 297
- Respostas dos exercícios, 298
- Respostas dos problemas, 298



Seção 12.1 ■ Um pouco da história

O conceito de que a gravitação é responsável tanto pela queda dos corpos próximos à Terra quanto pelo movimento dos corpos celestes é hoje aceito por todos. Entretanto, nem sempre foi assim, e o caminho que levou a esse conhecimento foi longo e controverso. Como vimos no Capítulo 1 (*O que é a Física*), os gregos viam tanto a queda dos corpos terrestres como o movimento dos astros — que na sua visão orbitavam a Terra — como movimentos naturais que dispensam qualquer agente causador. O fato de que o movimento natural de queda dos corpos terrestres é retilíneo, enquanto os corpos celestes exibem movimentos que — segundo os gregos — percorrem órbitas circulares ou compostas pela combinação de círculos, era evidência de que as leis naturais que ditam o movimento dos corpos celestes são distintas das leis que comandam o movimento dos corpos terrestres. Essa dicotomia era parte da antítese entre o céu e a terra, já discutida no Capítulo 1: as leis do céu não seriam as mesmas vigentes na terra.

Galileu descobriu a lei da inércia, ou seja, o princípio de que os corpos livres de forças exibem movimento retilíneo uniforme. Entretanto, Galileu não aplicou tal princípio aos planetas. Segundo ele, os planetas podiam percorrer suas órbitas em torno do Sol sem a necessidade de qualquer tipo de força. Mesmo para o movimento dos corpos terrestres, a lei da inércia só se aplicaria a movimentos sobre superfícies horizontais. O agente causador da queda dos corpos terrestres, cuja cinemática Galileu entendeu com perfeição, permaneceu um mistério cuja elucidação ele deixou a cargo da posteridade.

Descartes foi quem primeiro contestou a dicotomia entre o céu e a terra. Ele foi o descobridor da **universalidade das leis naturais**, hoje amplamente aceita: as mesmas leis se aplicam em qualquer ponto do Universo. Descartes reformulou a lei da inércia dando-lhe a forma final adotada por Newton e aceita até hoje. Nenhum corpo, terrestre ou celeste, ficaria fora do comando de tal lei. Portanto, alguma força teria de empurrar para baixo os corpos em queda e também os planetas rumo ao Sol para que eles curvassem suas trajetórias no movimento orbital em torno do astro. Assim, ninguém chegara tão próximo da lei da gravitação. Entretanto, Descartes tinha uma visão inteiramente mecanicista na qual a interação entre os corpos requeria o seu contato mútuo. A idéia de que os corpos pudessem se atrair por interação à distância, da qual ele chegou a cogitar, lhe parecia inaceitável.

Newton concebeu a força da gravidade, e sua variação com o inverso do quadrado da distância. Segundo registros, ele teria afirmado muito mais tarde ter tido a inspiração ao ver a queda de uma maçã. Newton intuiu a conexão entre a queda da maçã e a “queda” contínua da Lua em seu movimento orbital, e fez a conjectura de que em ambos os casos o agente causador seria uma força de atração da Terra. Felizmente, a Lua está suficientemente próxima da Terra para que sua distância possa ser medida por paralaxe, e por isso já era conhecida com boa aproximação. Sua órbita, aproximadamente circular, tem raio $r = 3,84 \times 10^8$ m e seu período é de 27,3 dias. Conclui-se então que a velocidade da Lua em sua órbita é de $1,023 \times 10^3$ m/s. A aceleração centrípeta da Lua vale, portanto,

$$a_L = \frac{v^2}{r} = \frac{(1,023 \times 10^3 \text{ m/s})^2}{3,84 \times 10^8 \text{ m}} = 2,73 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (12.1)$$

A razão entre a aceleração da maçã em queda e a aceleração da Lua é

$$\frac{g}{a_L} = \frac{9,80}{2,73 \times 10^{-3}} = 3,59 \times 10^3 \cong 3600 = (60)^2. \quad (12.2)$$

Por outro lado, a razão entre o raio da órbita lunar e o raio da Terra é

$$\frac{r}{R_T} = \frac{3,84 \times 10^8 \text{ m}}{6,37 \times 10^6 \text{ m}} = 60,3. \quad (12.3)$$

A comparação entre as Equações 12.2 e 12.3 mostra que, com boa aproximação, podemos escrever

Universalidade das leis naturais.
As mesmas leis naturais se aplicam em qualquer ponto do Universo

$$\frac{g}{a_L} = \left(\frac{R_T}{r} \right)^{-2} \quad (12.4)$$

Isso levou Newton a concluir que a atração da Terra sobre um corpo — a Lua ou uma maçã — é proporcional à massa do corpo e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o corpo e o centro da Terra. Considerando-se a lei da ação e reação, a Lua também atua sobre a Terra com a mesma força que a Terra exerce sobre ela, e por simetria tal força teria de ser proporcional à massa da Terra. Juntando todas as peças, concluímos que a atração da Terra sobre um corpo é proporcional ao produto das massas do corpo e da Terra e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

Generalizando, Newton chegou à lei da gravitação universal: dois corpos quaisquer se atraem com força proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da sua distância. Esse foi um feito extraordinário. Hooke, que alegava tê-lo realizado antes de Newton, afirmava ser essa a maior descoberta desde a criação do mundo. Um aspecto de enorme importância na lei da gravitação é a negação da dicotomia entre as leis do céu e da terra. O peso da maçã é o mesmo tipo de força que a Terra exerce sobre a Lua e também que o Sol exerce sobre os planetas. Como vimos no Capítulo 7 (*Trabalho e Energia*), as leis da mecânica newtoniana também não distinguem corpos celestes e corpos terrestres. Do ponto de vista da ruptura filosófica, a unificação — formulação universal — das leis naturais e a adoção do determinismo causal, já discutido nos Capítulos 1 e 7, foram as duas maiores realizações de Newton.

Seção 12.2 ■ Formulação matemática da lei da gravitação

A força da gravitação é a única que atua em todas as partículas da Natureza. A força elétrica, por exemplo, só atua sobre partículas portadoras de carga elétrica. As forças nucleares também atuam somente sobre partículas possuidoras de cargas específicas para tais forças. A “carga” específica para a força gravitacional é a massa da partícula. Já conhecemos a lei de força para a gravitação, mas vamos repeti-la aqui para facilitar a análise. Consideremos duas partículas de massas m_1 e m_2 , nas posições $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, respectivamente. A força gravitacional $\mathbf{F}_{21}$ da partícula 1 sobre a partícula 2 é dada por

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad \text{onde } \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (12.5)$$

O sinal negativo na fórmula exprime o fato de que a força é atrativa. A letra G representa a constante universal da gravitação, cujo valor é

$$G = 6,67260 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}.$$

O valor numérico de G é muito pequeno. Por isso, duas partículas de massas iguais a 1,00 kg, separadas pela distância de 1,00 m, interagem com uma força $F = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}$, o que equivale ao peso de uma partícula de massa igual a 6,8 nanogramas. Vê-se assim que a força gravitacional é muito fraca, na verdade a mais fraca das forças da Natureza. Mas, ao mesmo tempo, é a força mais evidente. Isso decorre de dois fatos. Primeiro, a força gravitacional é de longo alcance, ou seja, de decaimento lento. Ela decai com o inverso do quadrado da distância entre as partículas e essa é uma forma muito lenta de decaimento. As forças nucleares, como veremos mais adiante, apesar de serem muito mais intensas a curtas distâncias, tornam-se essencialmente nulas a distâncias acima de 10^{-14} m . O segundo fato que torna a força gravitacional tão evidente é que ela é sempre atrativa. As forças elétricas também decaem com o quadrado da distância e também são muito mais intensas que a força gravitacional. Entretanto, as forças elétricas tanto podem ser atrativas como repulsivas, dependendo do sinal das cargas. Na matéria macroscópica, as cargas positivas e negativas tendem a se neutralizar quase perfeitamente, e as forças elétricas resultantes ficam assim muito pequenas.

Portanto, a manifestação evidente da força gravitacional provém de seu longo alcance e do fato de a força ser sempre atrativa. Para grandes massas, a força pode se tornar muito in-

tensa. O Sol, massa $m_1 = 1,99 \times 10^{30}$ kg, e a Terra, massa $m_2 = 5,98 \times 10^{24}$ kg, separados pela distância $r = 1,50 \times 10^{11}$ m, se atraem com a formidável força $F = 3,52 \times 10^{22}$ N.

Seção 12.3 ■ Experiência de Cavendish

A pequenez da constante gravitacional G torna sua determinação muito difícil. Em 1798, o físico inglês *Henry Cavendish* (1731–1810), projetou e realizou uma experiência capaz de determinar essa constante. A experiência de Cavendish utiliza a balança de torção, também denominada balança de Cavendish, ou balança de Coulomb, que descreveremos especificamente para o caso da experiência realizada por ele. Duas pequenas esferas de chumbo, de massa m , são suspensas por um fio fino. Um torque τ no fio provoca neste uma torção de ângulo θ , dado por

$$\tau = -\kappa\theta, \quad (12.6)$$

Torque em um fio torcido de um ângulo θ . κ é a constante de torção do fio. A balança de torção utiliza esse torque para medir forças gravitacionais e elétricas de pequena intensidade

onde κ é a denominada constante de torção do fio. Para um dado material, κ é diretamente proporcional à área de seção transversa do fio e inversamente proporcional ao seu comprimento. Portanto, para um fio fino e longo, a constante de torção pode se tornar muito pequena. A determinação do valor de κ do fio pode ser feita pela medida do período de oscilação do sistema de massas suspensas por ele. O momento de inércia do sistema (Figura 12.1) tem valor

$$I = 2md^2, \quad (12.7)$$

onde $2d$ é a distância entre os centros das esferas, e a haste que as liga foi considerada de massa desprezível. Conforme vimos no Capítulo 11 (*Oscilador Harmônico*), o período de oscilação do sistema é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \quad (12.8)$$

Finalmente, a constante de torção é calculada pela relação

$$\kappa = 2m\left(\frac{2\pi d}{T}\right)^2. \quad (12.9)$$

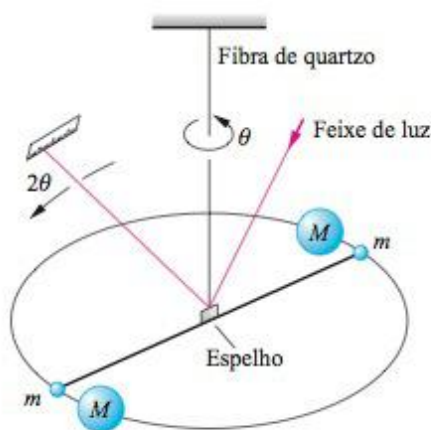


Figura 12.1

Balança de torção utilizada por Cavendish para medir a constante gravitacional. Duas pequenas esferas de massa m , presas às extremidades de uma fina barra horizontal, são suspensas por um fio fino. Duas esferas maiores de massa M são então postas na proximidade das pequenas esferas. A força gravitacional gera uma torção do pêndulo, que é amplificada pela deflexão de um feixe de luz incidente em um pequeno espelho fixado ao pêndulo.

Na experiência de Cavendish, ilustrada na Figura 12.1, após a determinação de κ , um sistema de duas esferas grandes de chumbo, cada qual de massa M , é erguido até ficar no plano horizontal das duas pequenas esferas. A força gravitacional provoca uma pequena torção θ na balança. Para tornar mais precisa a determinação de θ , observa-se a deflexão de um feixe de luz refletido em um pequeno espelho fixado à balança. Com esse aparato, Cavendish pôde

obter o valor de G com razoável precisão. Com base na aceleração da gravidade da Terra, foi possível obter a massa da Terra, e com base na aceleração dos planetas orbitando em torno do Sol foi possível obter a massa do nosso astro, e assim por diante. Portanto, a experiência de Cavendish foi essencial para a determinação da massa dos corpos contidos no sistema solar.

Exercício

E 12.1 Na experiência de Cavendish (ver Figura 12.1), $M = 10,0 \text{ kg}$ e $m = 10,0 \text{ g}$, e a distância entre o centro de cada esfera pequena e sua esfera grande vizinha é $5,00 \text{ cm}$. A distância entre os centros das esferas pequenas é $20,0 \text{ cm}$. Calcule (A) a força entre cada par de esferas e (B) o torque exercido sobre o pêndulo.

Seção 12.4 ■ Energia potencial gravitacional de um sistema de partículas

Conforme já vimos no Capítulo 7 (*Trabalho e Energia*), a energia potencial gravitacional de duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas pela distância r é

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (12.10)$$

Nesta equação, o ponto de referência para a energia potencial é $r = \infty$, ou seja, $U(\infty) = 0$. Na teoria da gravitação de Newton, vale o princípio da superposição de forças. Isso significa que, na interação de um sistema de partículas, cada par de partículas interage entre si como se as outras não estivessem presentes, e a força total sobre uma dada partícula é a soma vetorial das forças exercidas sobre ela por todas as outras partículas. Considerando-se N partículas interagindo entre si a força total sobre a partícula i é então a soma vetorial

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = -G m_i \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}, \quad (12.11)$$

onde $\mathbf{r}_{ij}$ é a posição da partícula i em relação à partícula j . Do princípio da superposição resulta que a energia potencial das N partículas é a soma das energias potenciais associadas a cada par de partículas:

$$U = -\frac{1}{2} G \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (12.12)$$

onde o fator $1/2$ foi introduzido para evitar que a energia potencial associada a cada par de partículas fosse contada duas vezes.

Quando dois corpos estão ligados, ou seja, um está em órbita em torno do outro, o sistema tem energia mais baixa do que teriam se estivessem infinitamente separados e em repouso. A diferença entre as energias dessas duas situações é chamada de energia de ligação do sistema. Como na segunda situação a energia do sistema é nula, a energia de ligação é a soma da energia potencial e cinética do sistema ligado.

E-E Exercício-exemplo 12.1

■ Calcule a força da atração e a energia potencial entre o Sol e a Terra, sabendo-se que a distância entre eles é $r = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ e que suas massas são $M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$.

■ Solução

Podemos escrever imediatamente

$$F = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \times 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}}{(1,50 \times 10^{11} \text{ m})^2} = 3,52 \times 10^{22} \text{ N},$$

$$U = -6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \frac{1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \times 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}}{1,50 \times 10^{11} \text{ m}} = -5,29 \times 10^{33} \text{ J}.$$

E-E Exercício-exemplo 12.2

■ Calcule a força sobre a esfera de massa m na Figura 12.2.

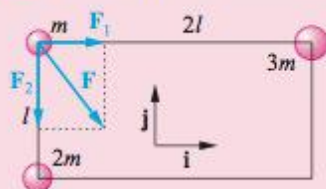


Figura 12.2
(Exercício-exemplo 12.2).

■ Solução

As forças F_1 e F_2 são, respectivamente,

$$F_1 = G \frac{3m^2}{4l^2} \mathbf{i}, \quad F_2 = -G \frac{2m^2}{l^2} \mathbf{j}.$$

A força resultante na esfera de massa m será a soma vetorial de F_1 e F_2 :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{Gm^2}{l^2} \left(\frac{3}{4} \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} \right).$$

E-E Exercício-exemplo 12.3

■ A Figura 12.3 mostra uma esfera de massa M e uma barra fina e homogênea de massa m alinhada radialmente em relação à esfera. A barra tem comprimento L e sua extremidade mais próxima encontra-se à distância d do centro da esfera. Calcule a força gravitacional entre esses dois corpos.



Figura 12.3
(Exercício-exemplo 12.3).

■ Solução

Para sermos mais específicos, falaremos sobre a força que a esfera exerce sobre a barra. Podemos dividir a barra em finas pastilhas de espessura dr ortogonais ao seu eixo. Cada pastilha terá uma massa dm que será atraída pela esfera com uma força dF , ambas dadas por

$$dm = \frac{m}{L} dr \quad \text{e} \quad dF = GM \frac{dm}{r^2},$$

onde r é a distância entre a pastilha e o centro da esfera. A força total sobre a barra será

$$F = \int dF = \int_d^{d+L} GM \frac{m}{L} \frac{dr}{r^2} = GM \frac{m}{L} \int_d^{d+L} \frac{dr}{r^2} = GM \frac{m}{L} \left(\frac{-1}{d+L} + \frac{1}{d} \right).$$

$$F = GM \frac{m}{L} \frac{L}{d(d+L)} = GMm \frac{1}{d(d+L)}.$$

Nota-se que a força é a mesma que se obteria se a barra fosse substituída por uma massa pontual ou por outra esfera de massa m centrada à distância

$R = \sqrt{d(d+L)}$ do centro da primeira esfera.

E-E Exercício-exemplo 12.4

- Calcule a energia potencial gravitacional do sistema mostrado na Figura 12.4.

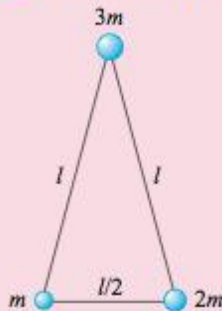


Figura 12.4

(Exercício-exemplo 12.4).

■ Solução

Nossa solução baseia-se na aplicação da Equação 12.12. Pode-se observar que tal equação, quando aplicada ao sistema da figura, gera seis termos iguais dois a dois. Na verdade, isso ocorre quando aplicamos essa equação a qualquer sistema de corpos, e é exatamente por isso que temos de no fim dividir a soma por 2. Como alternativa, podemos considerar somente um termo de cada par de termos idênticos e ignorar a divisão por 2. Seguindo esse procedimento, obtemos

$$U = -G \frac{m \times 3m}{l} - G \frac{2m \times 3m}{l} - G \frac{m \times 2m}{l/2} = -13G \frac{m^2}{l}.$$

E-E Exercício-exemplo 12.5

- Calcule a variação da energia potencial do sistema Terra-satélite quando um satélite com massa de 200 kg, inicialmente na plataforma de lançamento, é posto em órbita à altitude de 600 km.

■ Solução

A energia potencial inicial é

$$U_o = -G \frac{M_T m_s}{R_T},$$

e a energia potencial final é

$$U_f = -G \frac{M_T m_s}{(R_T + h)}.$$

Portanto, a variação da energia potencial será

$$\Delta U = U_f - U_o = -G \frac{M_T m_s}{(R_T + h)} + G \frac{M_T m_s}{R_T},$$

$$\Delta U = GM_T m_s \frac{h}{(R_T + h)R_T}.$$

Substituindo os dados do problema, obtemos

$$\Delta U = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \times 5,97 \times 10^{24} \text{ kg} \times 200 \text{ kg} \frac{6,00 \times 10^5 \text{ m}}{6,97 \times 10^6 \text{ m} \times 6,37 \times 10^6 \text{ m}},$$

$$\Delta U = 1,09 \times 10^9 \text{ J}.$$

E-E Exercício-exemplo 12.6

■ *Estimativa.* O Sol está à distância de $2,5 \times 10^{20}$ do centro da Via-Láctea, próximo de sua periferia, e tem velocidade orbital de 220 km/s em torno do centro. Estime a massa da Galáxia.

■ Solução

Para fins de estimativa, consideraremos que quase toda a massa da Galáxia está no espaço interior à órbita do Sol e que, para calcular seu efeito gravitacional sobre ele, podemos considerar toda essa massa localizada no centro da Galáxia. Dessa forma, podemos escrever

$$G \frac{M_s M_G}{r^2} = M_s \frac{v^2}{r},$$

$$M_G = \frac{rv^2}{G}.$$

Substituindo os dados numéricos,

$$M_G = \frac{2,5 \times 10^{20} \text{ m} \times 4,8 \times 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}^2}{6,7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}} = 2 \times 10^{41} \text{ kg}.$$

Essa massa equivale a 10^{11} sóis.

Exercícios

E 12.2 Calcule a energia potencial gravitacional de quatro esferas de massa M cada, dispostas nos vértices de um quadrado de lado L .

E 12.3 Sabendo que em seu periélio o planeta Mercúrio está a 46 milhões de quilômetros do Sol com uma velocidade de 59 km/s, calcule sua energia de ligação ao Sol, desconsiderando-se sua energia de rotação em torno de seu próprio eixo.

Seção 12.5 ■ Interação entre uma partícula e uma casca esférica

Como vimos, ao formular a lei da gravitação — provavelmente no ano de 1667 —, Newton percebeu que a razão entre a aceleração da Lua em seu movimento orbital em torno da Terra está para a aceleração da gravidade na superfície da Terra assim como o quadrado do raio da Terra está para o quadrado da distância da Lua ao centro da Terra. Portanto, a Terra atrai tanto a Lua como um corpo qualquer em sua superfície como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro. Infere-se daí que um corpo com simetria esférica atua gravitacionalmente em pontos no seu exterior como se toda a massa estivesse no seu centro.

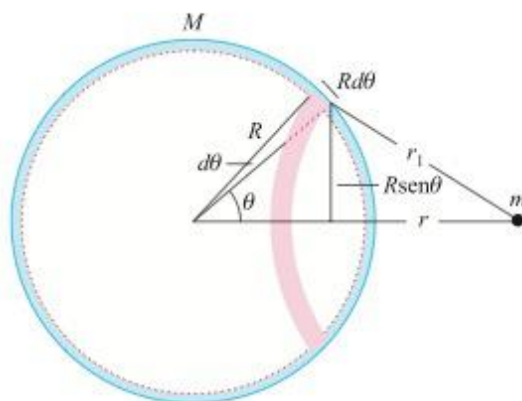


Figura 12.5

Interação gravitacional entre uma casca esférica homogênea de massa M e uma partícula de massa m à distância r do centro da esfera. Para a realização dos cálculos, a casca esférica é dividida em anéis cujos eixos são a reta que une o centro da esfera e a partícula.

Newton levou quase duas décadas, após descobrir a lei da gravitação, para o teorema das cascas esféricas. Isso pode justificar, em parte, sua demora em escrever o *Principia*.

Somente em 1685 Newton pôde demonstrar que isso é uma consequência matemática da lei dos inversos dos quadrados. O chamado **teorema das cascas esféricas**, que faz essa conexão, é de enorme importância tanto na gravitação como na eletricidade, onde também aparece a lei do inverso do quadrado da distância. Newton levou quase duas décadas, após descobrir a lei da gravitação, para o teorema das cascas esféricas. Isso pode justificar, em parte, sua demora em escrever o *Principia*. Faremos por isso a sua demonstração. O leitor é convidado a observar como a simetria do problema é explorada para facilitar a sua solução.

Considere uma casca esférica homogênea de massa M e raio R e uma partícula de massa m à distância r do centro da casca. Na Figura 12.5 a partícula é colocada fora da casca, ou seja $r > R$. Essa não é uma hipótese essencial nos cálculos seguintes. A casca esférica é dividida em anéis em cujos eixos de simetria se situa a partícula. A área de um dado anel é

$$dA = 2\pi \cdot R \sin\theta \cdot R d\theta. \quad (12.13)$$

Como a área da casca esférica é $A = 4\pi R^2$, pode-se escrever

$$dA = \frac{A}{2} \sin\theta d\theta. \quad (12.14)$$

Portanto, a massa do anel será

$$dM = \frac{M}{2} \sin\theta d\theta. \quad (12.15)$$

A energia potencial do sistema anel-partícula será

$$dU = -GmdM \frac{1}{r_1} = -\frac{1}{2} GmM \frac{\sin\theta d\theta}{r_1}. \quad (12.16)$$

A distância r_1 entre o anel e a partícula é dada por

$$r_1^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta. \quad (12.17)$$

Diferenciando a equação acima e lembrando que R e r são valores fixos no cálculo, obtemos

$$2r_1 dr_1 = 2rR \sin\theta d\theta. \quad (12.18)$$

Portanto,

$$\frac{\sin\theta d\theta}{r_1} = \frac{dr_1}{rR}. \quad (12.19)$$

Combinando as Equações 12.16 e 12.19, obtemos

$$dU = -GmM \frac{dr_1}{2rR}. \quad (12.20)$$

A energia potencial total será obtida integrando-se a equação acima. A distância r_1 irá variar entre seu valor mínimo $r_{1\min}$ e seu valor máximo $r_{1\max}$, e obter-se-á

$$U = -GmM \frac{r_{1\max} - r_{1\min}}{2rR}. \quad (12.21)$$

Temos agora de considerar dois casos distintos:

Caso 1: partícula fora da casca. Neste caso,

$$r_{1\max} - r_{1\min} = 2R, \quad (12.22)$$

e portanto

$$U = -GmM \frac{1}{r}, \quad r \geq R, \quad (12.23)$$

Caso 2: partícula dentro da casca. Neste caso,

$$r_{\text{límáx}} - r_{\text{límín}} = R + r - (R - r) = 2r, \quad (12.24)$$

e portanto

$$U = -GmM \frac{1}{R}, \quad r < R. \quad (12.25)$$

Como vimos no Capítulo 7 (*Trabalho e Energia*), a força que a casca exerce sobre a partícula é calculada tomando-se a derivada de U em relação a r . Portanto, a força fora da casca é dada por

$$F = -\frac{d}{dr} \left(-GmM \frac{1}{r} \right) = -GmM \frac{1}{r^2}, \quad r > R, \quad (12.26)$$

onde o sinal negativo indica que a força é atrativa, e portanto antiparalela ao vetor $\mathbf{r}$. No interior da casca, a força é dada por

$$F = -\frac{d}{dr} \left(-GmM \frac{1}{R} \right) = 0, \quad r < R. \quad (12.27)$$

A Equação 12.26 diz que, para partículas externas à casca esférica, esta atua como se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro, e a Equação 12.27 diz que, para partículas no interior da casca, a força é nula. A Figura 12.6 mostra a variação do valor absoluto do potencial e da intensidade da força com a distância r .

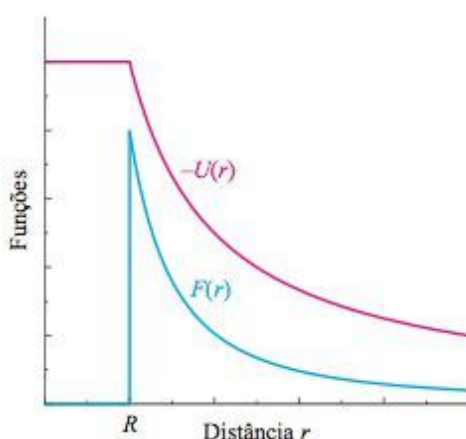


Figura 12.6

Variação da energia potencial e da intensidade da força entre uma casca esférica homogênea de raio R e uma partícula situada à distância r do centro da casca.

Os resultados acima podem ser utilizados para se calcular a força exercida sobre uma partícula por uma distribuição qualquer de massas com simetria esférica. A densidade de massa do referido corpo será função somente da distância r' até o centro. A força exercida sobre uma partícula de massa m à distância r do centro do corpo será realizada somente pela massa M do corpo contida na esfera de raio r . Portanto, a intensidade da força será GmM/r^2 . Essa massa M pode ser calculada pela integral

$$M = \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'. \quad (12.28)$$

Portanto,

$$F(r) = \frac{Gm}{r^2} \int_0^r \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'. \quad (12.29)$$

É claro que, se a partícula estiver fora do corpo, a integral na equação acima será igual à massa total deste.

As Equações 12.26 e 12.27 expressam o chamado **teorema das cascas esféricas**, de importância fundamental para a teoria da gravitação.

E-E Exercício-exemplo 12.7

■ Suponha que a Terra tenha densidade uniforme: (A) calcule a força exercida sobre uma partícula de massa m dentro de um túnel que passe por um diâmetro da Terra, como mostra a Figura 12.7. (B) Se uma pedra for solta em repouso na entrada do túnel imaginário, com que velocidade ela cruzará o centro da Terra?

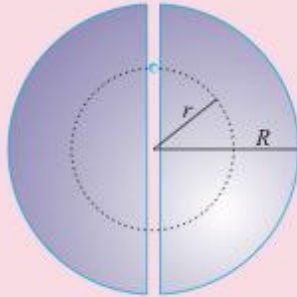


Figura 12.7

Partícula de massa m em túnel passando pelo diâmetro da Terra.

■ Solução

(A) Seja R o raio da Terra. A massa contida dentro da esfera de raio $r \leq R$ será

$$M(r) = M_T \frac{4\pi r^3/3}{4\pi R^3/3} = M_T \frac{r^3}{R^3},$$

onde M_T é a massa da Terra. Portanto, a intensidade da força será

$$F(r) = -GmM_T \frac{r}{R^3}.$$

(B) A lei da conservação da energia permite a solução mais simples possível para esse problema.

A variação da energia potencial da pedra entre a superfície e o centro da Terra é

$$U(R) - U(0) = -\int_0^R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^R F(r) dr = GmM_T \int_0^R \frac{r}{R^3} dr = \frac{GmM_T}{2R}.$$

Pela lei da conservação da energia, podemos escrever

$$\frac{1}{2}mv^2(0) - \frac{1}{2}mv^2(R) = U(R) - U(0).$$

Uma vez que $v(R) = 0$,

$$\frac{1}{2}mv^2(0) = \frac{GmM_T}{2R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}.$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos v :

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{6,37 \times 10^6}} \text{ m/s} = 7,91 \text{ km/s}.$$

Exercício

E 12.4 Mostre, que se no Exercício-exemplo 12.7 substituíssemos a Terra por um corpo esférico de massa M mas com densidade ρ não-uniforme dada por $\rho = C/r$, (A) a constante C deveria valer $C = M / 2\pi R^2$; (B) a massa m_r contida no corpo, desde o centro deste até um raio r , é $m_r = Mr^2 / R^2$; (C) a força sobre a pedra seria sempre a mesma em qualquer posição do túnel e dada por $F = GmM / R^2$.

Seção 12.6 ■ Auto-energia gravitacional de um corpo

Auto-energia gravitacional de um corpo é a energia potencial decorrente da interação gravitacional entre as partes que o compõem

Nos cálculos da seção anterior, ignoramos a interação de uma parte da esfera ou da casca esférica com as outras. A energia potencial decorrente da interação gravitacional entre as partes de um dado corpo é denominada sua **auto-energia gravitacional**. Esta pode ser calculada facilmente para o caso de um corpo com simetria esférica. Para simplificar mais ainda, consideraremos o caso em que o corpo seja uma esfera de densidade uniforme. A auto-energia é a diferença de energia entre a situação em que o corpo é a referida esfera e a situação imaginária em que as partes que o compõem estejam infinitamente dispersas, formando uma poeira muito tênue.

Para efetuar o cálculo da auto-energia, consideremos um processo em que a esfera seja composta camada por camada a partir dessa poeira muito pouco densa. Seja ρ a densidade da esfera. No estágio em que seu raio for r , sua massa será $m = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$. Ao se acrescentar uma camada de espessura infinitesimal dr , cuja massa é $dm = \rho 4\pi r^2 dr$, a energia potencial sofrerá uma variação dada por

$$dU = -G \frac{m dm}{r} = -G \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{r} = -3G \left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^2 r^4 dr. \quad (12.30)$$

Integrando esta equação, obteremos a auto-energia gravitacional da esfera

$$U = -3G \left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} G \left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^2 R^5 = -\frac{3}{5} G \left(\frac{4\pi\rho R^3}{3} \right)^2 \frac{1}{R}. \quad (12.31)$$

Mas a expressão entre parênteses na equação acima representa a massa total da esfera. Portanto,

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (12.32)$$

Consideremos o caso do Sol, que idealizaremos como uma esfera uniforme com massa $M = 2 \times 10^{30}$ kg e raio $R = 7 \times 10^8$ m. Sua auto-energia gravitacional será

$$U = -\frac{3}{5} \cdot 6,7 \times 10^{-11} \cdot \frac{(2 \times 10^{30})^2}{7 \times 10^8} \text{ J} = -2 \times 10^{41} \text{ J}. \quad (12.33)$$

Sendo negativa essa energia, isto significa que a energia do sistema de partículas que formou o Sol diminui no processo de agregação. As estrelas são todas formadas a partir de um gás frio e muito rarefeito. A energia potencial inicial é, portanto, desprezível. Pela conservação da energia, a perda de energia gravitacional do gás é compensada por um aumento equivalente em energia cinética. Como o gás primordial era predominantemente formado por hidrogênio, cuja massa atômica é $1,67 \times 10^{-27}$ kg, o número de átomos coletados foi de aproximadamente $1,2 \times 10^{57}$. Dividindo a energia dada pela Equação 12.33 por esse número, obtemos a seguinte energia cinética por átomo:

$$K = 1,7 \times 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{átomo}}. \quad (12.34)$$

Antes de se estabilizar como uma esfera densa de gás quente, a estrela perde uma parte dessa energia cinética em forma de radiação eletromagnética. Por decorrência de um importante teorema da mecânica (*teorema do virial*), ela perde exatamente metade dessa energia cinética em forma de radiação. A outra metade permanece em forma de calor. Como resultado, o Sol terá atingido a temperatura média de 6×10^6 K, com uma superfície muito mais fria e um núcleo muito mais quente do que isso. No hidrogênio a temperaturas da ordem de 10^7 K, ocorre o fenômeno da fusão nuclear, que libera outra forma de energia (nuclear) capaz de manter quente o sistema. Vê-se, portanto, que o Sol, e todas as estrelas, atingiram, ao se condensar, uma energia potencial gravitacional altamente negativa, o que acabou gerando aquecimento suficiente para acender suas fornalhas nucleares.

Exercícios

E 12.5 Calcule a auto-energia gravitacional da Terra, considerada uma esfera homogênea.

E 12.6 Antes de se conhecer a origem nuclear da energia das estrelas, Kelvin propôs que estas irradiavam em decorrência do calor gerado em um contínuo processo de compactação do gás nelas condensado. O Sol atualmente irradia com uma potência de $3,9 \times 10^{26}$ W. Considerando esta potência e a emissão total de energia envolvida no processo de condensação do gás para formar o astro, 1×10^{41} J, estimada na Seção 12.6 (*Interação entre uma partícula e uma casca esférica*), calcule o tempo para o Sol irradiar toda essa energia.

Seção 12.7 ■ Campo gravitacional

As forças gravitacionais podem ser descritas em termos de um campo gravitacional, na forma descrita a seguir. Uma massa m de prova (massa pequena o suficiente para não afetar as outras massas), colocada em um certo ponto $\mathbf{r}$, experimenta uma força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. O campo gravitacional é descrito pela *aceleração da gravidade* $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ definida por

■ Aceleração da gravidade

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m}. \quad (12.35)$$

Considerando-se a Equação 12.5, vê-se que a aceleração da gravidade gerada por uma partícula de massa M , situada no ponto $\mathbf{r} = 0$, é dada por

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}. \quad (12.36)$$

Pelo teorema das cascas esféricas, esta equação também se aplica no caso de um corpo de simetria esférica, para pontos externos ao corpo.

Exercícios

E 12.7 Calcule a aceleração da gravidade na superfície (A) da Lua cujo raio vale $1,74 \times 10^6$ m e cuja massa vale $7,36 \times 10^{22}$ kg; (B) do Sol cujo raio vale $6,96 \times 10^8$ m e cuja massa vale $1,99 \times 10^{30}$ kg; (C) de Júpiter, cujo raio vale $7,13 \times 10^7$ m, e cuja massa vale $1,90 \times 10^{27}$ kg; (D) de uma estrela de nêutrons cuja massa vale $4,0 \times 10^{30}$ kg e cujo raio vale 10 km.

E 12.8 Uma esfera homogênea tem massa M e raio R . Calcule a aceleração da gravidade gerada pela esfera em função da distância r ao seu centro para R maior e menor do que R (ver Exercício-exemplo 12.7).

E 12.9 Calcule a diferença Δg da gravidade da Terra nas duas faces opostas da Lua.

Seção 12.8 ■ As leis de Kepler

Durante boa parte da sua vida, o astrônomo dinamarquês *Tycho Brahe* (1546–1601) anotou diariamente e com inédita precisão a posição dos cinco planetas visíveis a olho nu. As suas observações resultaram na mais completa e valiosa base de dados da astronomia anterior à invenção do telescópio. O matemático alemão *Johannes Kepler* (1571–1630), por sua vez, dedicou grande parte da sua vida à análise das observações de Brahe. Kepler conseguiu sintetizar os dados em três leis fenomenológicas, conhecidas como *leis de Kepler*, que constituem uma das maiores descobertas experimentais da história da humanidade. Essas leis são enunciadas a seguir:

■ Leis de Kepler

Primeira lei: os planetas movem-se em órbitas elípticas em que o Sol ocupa um dos focos.

Segunda lei: em cada órbita, o seguimento de reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

Terceira lei: os quadrados dos períodos das órbitas dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das respectivas elipses.

A Figura 12.8 mostra uma órbita elíptica e o Sol em um dos focos da elipse. A Tabela 12.1 mostra os semi-eixos das órbitas dos planetas, seus períodos, e o fato de que a razão entre os cubos dos semi-eixos e os quadrados dos períodos é uma constante, como diz a terceira lei de Kepler.

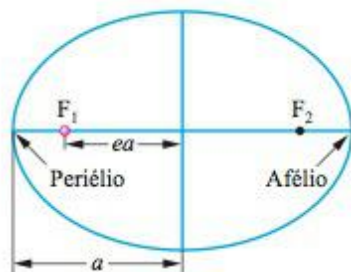


Figura 12.8

Órbita elíptica de um planeta. O Sol ocupa um dos focos da elipse, cuja excentricidade é e e cujo semi-eixo maior é a . O semi-eixo a é a distância média do planeta ao Sol. A distância dos focos ao centro da elipse é ea . O ponto de maior aproximação entre o planeta e o Sol é denominado *periélio* e o ponto de maior afastamento é denominado *afélio*. Quando $e = 0$, a elipse se transforma em um círculo.

■ Tabela 12.1

Evidência da terceira lei de Kepler. A razão entre o cubo do semi-eixo maior da órbita e o quadrado do período é a mesma para todos os planetas.

Planeta	Semi-eixo maior, a (10^6 km)	Período T (anos)	a^3/T^2 (10^{24} km ³ /ano ²)
Mercúrio	57,9	0,241	3,34
Vênus	108,2	0,615	3,35
Terra	149,6	1,000	3,35
Marte	227,9	1,88	3,35
Júpiter	778,3	11,86	3,35
Saturno	1427	29,5	3,34
Urano	2870	84,0	3,35
Netuno	4497	165	3,34
Plutão	5900	248	3,33

E-E Exercício-exemplo 12.8

- O cometa Halley tem período de 76 anos. Quanto vale o semi-eixo maior da sua órbita?

■ Solução

A partir da Tabela 12.1, podemos observar que

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{T^2} &= 3,35 \times 10^{24} \text{ km}^3/\text{ano}^2, \\ a &= \left(3,35 \times 10^{24} \text{ km}^3/\text{ano}^2 T^2 \right)^{1/3}, \\ &= \left(3,35 \times 10^{24} \text{ km}^3/\text{ano}^2 \times 76^2 \text{ ano}^2 \right)^{1/3} = 2,68 \times 10^9 \text{ km}.\end{aligned}$$

Uma das mais notáveis consequências da mecânica newtoniana, e certamente a mais importante para a aceitação pública dessa teoria, foi a possibilidade de se deduzir matematicamente as leis de Kepler. A dedução requer uma matemática mais elaborada que esta que

adotamos neste texto e não poderá ser apresentada, exceto para o caso da segunda lei. Esta é uma consequência imediata da conservação do momento angular, como veremos a seguir.

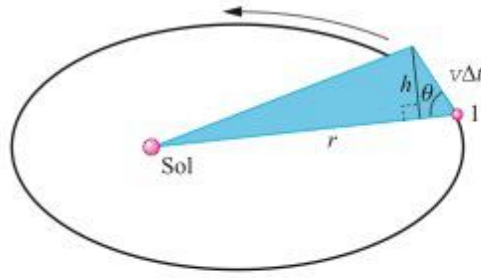


Figura 12.9

Planeta em órbita em torno do Sol. Não fora a curvatura da órbita, no intervalo de tempo Δt após passar pelo ponto 1, o segmento de reta unindo o planeta ao Sol varreria a área do triângulo sombreado.

A Figura 12.9 mostra o planeta em sua órbita. No ponto 1, sua velocidade é v . Se o planeta continuasse em movimento retilíneo uniforme, após o intervalo de tempo Δt o seguimento que une o planeta ao Sol teria varrido o triângulo indicado na figura. A área do triângulo é dada por

$$\Delta A_{\text{triân}} = \frac{1}{2} r h = \frac{1}{2} r \text{sen} \theta \cdot v \Delta t. \quad (12.37)$$

Por outro lado, o módulo do momento angular orbital do planeta é dado por

$$L = r \text{sen} \theta \cdot m v, \quad (12.38)$$

e portanto a Equação 12.37 pode ser posta na forma

$$\Delta A_{\text{triân}} = \frac{L}{2m} \Delta t. \quad (12.39)$$

No limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ a área do triângulo torna-se igual à área ΔA varrida na órbita real do planeta. Portanto, obtém-se

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}, \quad (12.40)$$

Uma vez que a força gravitacional do Sol não realiza torque (em relação ao ponto posição do Sol) sobre o planeta, seu momento angular L em relação a esse ponto permanece constante. Portanto, a Equação 12.40 exprime matematicamente a segunda lei de Kepler.

Na Figura 12.10 são mostradas as áreas (sombreadas) varridas a intervalos de tempo iguais em dois estágios distintos da órbita. Quando o planeta está mais próximo do Sol, a conservação do momento angular exige que sua velocidade orbital aumente, fazendo com que a área seja varrida a uma taxa uniforme.

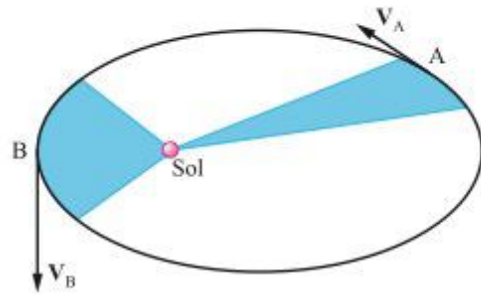


Figura 12.10

Ilustração da Segunda Lei de Kepler. O planeta percorre uma órbita elíptica em que o Sol ocupa um dos focos. Devido à conservação do momento angular do planeta em relação ao Sol, nos pontos da órbita mais próximos do Sol o planeta aumenta sua velocidade de modo que as áreas (sombreadas) varridas em tempos iguais são também iguais.

E-E Exercício-exemplo 12.9

■ A excentricidade de órbita de Mercúrio é $e = 0,206$. Calcule (A) a razão entre as distâncias de periélio e de afélio; (B) a razão entre as velocidades orbitais no periélio e no afélio.

■ Solução

Pelo exame da Figura 12.8, vemos que

$$r_p = a(1 - e), \quad r_a = a(1 + e).$$

Portanto,

$$(A) \frac{r_p}{r_a} = \frac{1 - 0,206}{1 + 0,206} = 0,658,$$

(B) Tanto no afélio como no periélio, a velocidade do planeta é perpendicular ao vetor que o liga ao Sol. Portanto, $L_a = r_a m v_a$ e $L_p = r_p m v_p$, e pela segunda lei de Kepler obtemos

$$r_a m v_a = r_p m v_p \Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = 1,519.$$

Exercícios

E 12.10 Plutão é, dos planetas do sistema solar, o que tem órbita mais excêntrica. Seu semi-eixo maior vale $5,900 \times 10^9$ km e a excentricidade de sua órbita é $e = 0,250$. (A) Calcule a menor distância R_p e a maior distância R_a entre Plutão e o Sol. (B) Sejam v_p e v_a as velocidades de Plutão no periélio e no afélio, respectivamente. Calcule v_p / v_a .

E 12.11 A órbita da Terra tem semi-eixo maior $a = 1,496 \times 10^{11}$ e excentricidade $e = 0,01672$. (A) Calcule a distância Terra–Sol no periélio e no afélio. (B) Calcule a distância entre os dois focos da órbita da Terra. (C) O segundo foco da órbita terrestre fica fora do corpo do Sol? *Sugestão:* ver o Exercício-exemplo 12.9.

Seção 12.9 ■ Órbitas circulares

No caso especial em que as órbitas são circulares, a aplicação da mecânica newtoniana se torna simples. A aceleração centrípeta do planeta é gerada pela força da gravitação, conforme a equação

$$m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = GmM \frac{1}{r^2}. \quad (12.41)$$

O período T da órbita é dado por

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3. \quad (12.42)$$

Como no caso o semi-eixo maior, assim como o menor, da elipse é o raio do círculo, a Equação 12.42 é a expressão matemática da Terceira Lei de Kepler.

E-E Exercício-exemplo 12.10

■ **Peso de um astronauta.** Considere uma nave fazendo uma órbita circular de raio r em torno da Terra. Para uma inspeção mais detalhada do nosso planeta, a nave pode mover-se com uma fração f da velocidade com a qual se moveria na mesma órbita um satélite desprovido de motor. Qual seria o peso aparente de um dos seus astronautas cuja massa vale m ?

■ Solução

Se a nave, ou qualquer corpo que viaje com ela, estivesse somente sob o efeito da força gravitacional F_g , como ocorre com um satélite desprovido de motor, o raio r de sua órbita e sua velocidade v_s estariam amarrados pela Equação 12.41, e a aceleração centrípeta seria igual ao campo gravitacional:

$$\frac{v_s^2}{r} = \frac{GM}{r^2}.$$

Se a velocidade for diferente, $v = fv_s$, e se o raio for o mesmo, a aceleração centrípeta será

$$\frac{v^2}{r} = f^2 \frac{GM}{r^2}; \quad (12.43)$$

ou seja, diferente daquela que o campo gravitacional pode prover. Então, para o astronauta ficar na órbita de raio r é necessário que haja uma força externa F_c complementar à força de gravitação, como mostra a Figura 12.11. A equação de movimento de um corpo de massa m é

$$m \frac{v^2}{r} = F_g - F_c = \frac{GMm}{r^2} - F_c.$$



Figura 12.11

(Exercício-exemplo 12.10).

Portanto,

$$F_c = \frac{GMm}{r^2} (1 - f^2).$$

Esta é a força que deve ser exercida sobre qualquer corpo de massa m para mantê-lo naquela órbita. Se o corpo for a própria nave, a força será exercida pelo motor. No caso do astronauta será exercida pelo assento ou pelo piso da nave, e se este for uma balança sobre a qual ele esteja apoiado, esta exercerá sobre ele essa força que, portanto, é o seu peso aparente. Observe que no caso particular em que $f = 1$, ou seja, a nave fica em órbita como um satélite comum, tem-se $F = 0$, ou seja, o astronauta tem peso aparente nulo. Esta é a situação comumente tratada como *gravidade nula*. Na verdade, a força da gravidade atuando sobre o astronauta é igual a GMm/r^2 , e a aceleração da gravidade atuando sobre ele é GM/r^2 . O que temos é *gravidade aparente nula*. O astronauta fica em regime permanente de queda em direção ao centro da Terra, o que o mantém em órbita circular e não em movimento retilíneo. Entretanto, exceto se ele olhar para fora da nave, não poderá saber se está em movimento retilíneo uniforme ou em órbita circular com velocidade de módulo constante. Nesta situação todos os objetos na nave estarão com peso aparente nulo e o astronauta não faz qualquer força para segurá-los nas mãos.

Exercícios

E 12.12 Marte tem uma massa de $6,42 \times 10^{23}$ kg, e seu satélite Fobos tem órbita quase circular com período de apenas 0,3189 dia. Qual é o raio da órbita de Fobos?

E 12.13 Uma nave está em órbita natural (com sistema de propulsão desligado) em torno da Terra com velocidade v . O comandante resolve então mudar de órbita e, por meio do seu sistema de propulsão, a nave é transferida para uma órbita cujo raio é diminuído 49% do original, onde fica novamente com o sistema de propulsão desligado. Qual é a nova velocidade da nave?

E 12.14 Calcule a energia de ligação entre Júpiter e o Sol.

E 12.15 Um satélite de comunicação tem órbita circular com raio de $4,22 \times 10^4$ km. Calcule a energia cinética por quilograma do satélite gasta para deslocá-lo desde a superfície da Terra e colocá-lo em órbita.

Seção 12.10 ■ Órbitas geossincronizadas

Em 1945, Arthur C. Clark, físico e escritor de ficção científica, autor de *2001 — Uma odisséia no espaço*, propôs que satélites artificiais em órbitas circulares com períodos orbitais iguais ao de rotação da Terra (órbitas geossincronizadas) fossem utilizados para retransmissão de sinais de tevê. A partir da década de 1960, tais satélites têm sido utilizados com intensidade crescente. O mérito da órbita geossincronizada é que, de um dado ponto na Terra, o satélite é visto em um ponto fixo no céu, como se estivesse imóvel. Para que o satélite pareça imóvel, sua órbita tem de estar em um plano que contém a linha do equador, ou seja, o eixo da sua órbita tem de coincidir com o eixo de rotação da Terra.

O período T de rotação da Terra é o dia sideral, menor que o dia solar. O ano tem aproximadamente 365,25 dias solares, mas aproximadamente 366,25 dias siderais. Isso ocorre porque o sentido da rotação da Terra em torno do seu eixo é o mesmo da rotação orbital em torno do Sol e, em consequência, o intervalo entre dois meio-dias consecutivos é maior que o período T . Podemos escrever

$$T = \frac{365,25}{366,25} \text{ dia} = \frac{365,25}{366,25} \times 86.400 \text{ s} = 8,6164 \times 10^4 \text{ s}.$$

Para calcular o raio da órbita geossincronizada, empregamos a Equação 12.42, obtendo

$$r = \left(\frac{GM_{\text{T}} T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{6,6726 \times 10^{-11} \times 5,9737 \times 10^{24} \times (8,6164 \times 10^4)^2}{39,478} \right)^{1/3} \text{ m},$$

$$r = 4,2165 \times 10^7 \text{ m}.$$

Isso significa que a órbita do satélite tem de estar 35.787 km acima do solo terrestre.

Exercício

E 12.16 Determine o raio da órbita e a velocidade que um satélite deve ter para girar em torno da Lua com a mesma velocidade angular dela, e submetido apenas à sua força de gravidade.

Seção 12.11 ■ Velocidade de escape

A velocidade mínima com que um corpo tem de ser lançado para se livrar da gravitação de um corpo celeste é denominada **velocidade de escape**.

Se atirmos para cima uma pedra com velocidades crescentes, ela atingirá altitudes máximas cada vez maiores. Desprezando a resistência do ar, haverá uma velocidade-limite v_e a partir da qual a pedra não mais retornará. Essa velocidade-limite é denominada **velocidade de escape**. Para calcularmos a velocidade de escape, devemos lembrar que na superfície da Terra a pedra tem uma energia potencial negativa, e que tal energia se tornará nula quando a pedra se libertar do campo gravitacional da Terra, ou seja, quando ela estiver infinitamente distante. Tal aumento de energia potencial deverá dar-se à custa da energia cinética com que ela é atirada. Assim, a condição para que a pedra não retorne é que sua energia mecânica não seja negativa:

$$\frac{1}{2}mv^2 - GmM_T \frac{1}{R} \geq 0, \quad (12.44)$$

onde M_T é a massa da Terra e R é o seu raio. A velocidade de escape corresponde ao caso-limite em que a Equação 12.44 é uma igualdade. Obtém-se então

$$v_e = \left(\frac{2GM}{R} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12.45)$$

A velocidade de escape da superfície da Terra é $v_e = 11,2$ km/s.

É claro que podemos definir a velocidade de escape a partir de qualquer ponto externo a um corpo celeste. Neste caso, R na Equação 12.45 é a distância do referido ponto ao centro do corpo e M é a massa deste. Por exemplo, a velocidade de escape da superfície do Sol é 617 km/s. A velocidade de escape da gravitação do Sol a partir de um ponto sobre a órbita da Terra é 42 km/s.

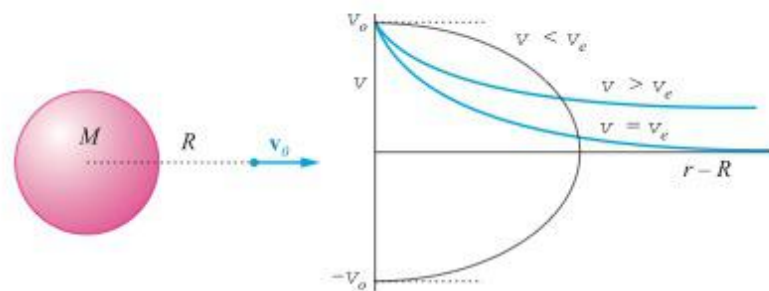


Figura 12.12

A Figura 12.12 mostra a variação da velocidade de um corpo jogado para “cima” com velocidade inicial v_0 , de um ponto à distância R do centro de um corpo de grande massa M . Quando sua velocidade inicial é menor que a velocidade de escape, ela se reduz até tornar-se nula, e após isso o corpo cai de volta. Se sua velocidade é igual à velocidade de escape, o corpo vai reduzindo gradativamente sua velocidade, mas ela só se anula no infinito e o corpo nunca retorna. Se sua velocidade é maior que a velocidade de escape, o corpo também reduz gradativamente sua velocidade, mas quando o corpo atinge o infinito ela ainda tem um valor não-nulo.

Exercício

E 12.17 Calcule a velocidade de escape da superfície (A) da Lua, (B) de Júpiter, (C) de uma estrela de nêutrons, com a massa de 4×10^{30} kg e 10 km de raio.

Seção 12.12 ■ Limite de validade da lei da gravitação de Newton

Conforme já vimos, a mecânica de Newton falha quando a velocidade do corpo deixa de ser muito menor que a velocidade c da luz no vácuo. Nesse limite de altas velocidades, vale a mecânica formulada por Einstein em sua Teoria da Relatividade Restrita. A lei da gravitação de Newton, em que a força varia com o inverso do quadrado das distâncias, também falha em condições de gravidade muito intensa. A teoria correta para se descrever a gravidade em condições extremas é a Teoria da Relatividade Geral, também formulada por Einstein em 1915. O critério para decidir até que ponto podemos usar a gravitação de Newton também envolve a velocidade da luz.

Consideremos dois corpos atraindo-se por gravitação. Se a distância entre eles for tal que a velocidade de escape um do outro for muito menor que a velocidade da luz, sua interação pode ser descrita pela teoria de Newton. Caso contrário, a teoria de Newton falha e temos de usar a teoria da gravitação de Einstein. Para sermos mais específicos, consideremos um corpo de massa M . Para pontos à distância R do seu centro a teoria de Newton pode ser usada se for atendida a condição

$$\left(\frac{2GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \ll c \Rightarrow \frac{2GM}{Rc^2} \ll 1. \quad (12.46)$$

Consideremos, por exemplo, a gravidade do Sol. Em sua superfície,

$$\frac{2GM}{Rc^2} = \frac{2 \times 6,7 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{7 \times 10^8 \times 9 \times 10^{16}} = 4,3 \times 10^{-6},$$

e devido à pequenez desse número a gravitação do Sol pode ser tratada, com ótima aproximação, pela lei de Newton.

Seção 12.13 ■ As quatro forças

Na Natureza, conforme já antecipamos, existem quatro forças fundamentais. Uma delas é a força da gravitação. Outra é a força elétrica. Até início do século XIX, pensava-se que a força magnética fosse um tipo de força fundamental, mas várias experiências mostraram que a força magnética é, na verdade, a mesma força elétrica se manifestando em cargas em movimento. Por volta de 1865, o físico britânico *James Clerk Maxwell* (1831–1879) construiu uma teoria consistente com todos os fatos, na qual a eletricidade e o magnetismo foram unificados.

Tanto a força gravitacional como a força elétrica variam com o inverso do quadrado da distância, o que lhes dá um aspecto de grande semelhança. Isto levou Maxwell a tentar mais um passo de unificação. Maxwell tentou sem sucesso a unificação das forças gravitacional e elétrica. Einstein retomou o projeto de unificação com enorme perseverança, logo após concluir a sua teoria da gravitação em 1915. Nessa teoria, a gravitação foi descrita como um fenômeno geométrico, o que inspirou Einstein na procura de uma teoria geométrica que contivesse tanto os fenômenos gravitacionais como os elétricos.

Einstein não alcançou seu objetivo, e duas novas forças foram descobertas na Natureza. Uma delas é a *força nuclear*, também denominada *força forte*. Considere um núcleo atômico, como, por exemplo, o núcleo do ${}^4\text{He}$. Este núcleo possui dois prótons e dois nêutrons, condensados em uma região de raio da ordem de 2×10^{-15} m. Os dois prótons estão sujeitos a uma força elétrica repulsiva muito intensa, e como isto não rompe o seu vínculo, certamente este deve decorrer de uma outra força atrativa ainda mais intensa. Esta, a força nuclear, atua sobre qualquer par de partículas nucleares, prótons ou nêutrons, com a mesma intensidade. Sua intensidade pode ser obtida aproximadamente pelo potencial de Yukawa, expresso por

$$U(r) = -U_0 \frac{b}{r} e^{-r/a}, \quad (12.47)$$

onde $U_0 = 8,0 \times 10^{-12}$ J e $a = b = 1,5 \times 10^{-15}$ m. Vê-se que o potencial apresenta o termo $1/r$, característico das forças que variam com o inverso da distância, tais como a força gravitacional e a força elétrica. Entretanto, o fator exponencial que aparece na Equação 12.47 provoca um decaimento muito rápido do potencial e da força para $r > a$. Diz-se, nesse caso, que a força é de curto alcance. O alcance da força forte é a distância a . É claro que o potencial gerado pelas forças que caem com o quadrado da distância pode ser posto na forma

$$V(r) = -K \frac{1}{r} e^{-r/\infty}. \quad (12.48)$$

Diz-se, portanto, que tais forças têm alcance infinito.

A quarta força da Natureza é denominada *força fraca*. Esta força aparece na interação das partículas leves (léptons) umas com as outras e na interação dessas com as partículas pesadas

(bárions). Exemplos de léptons são o elétron e os neutrinos, e exemplos de bárions são o próton e o nêutron. A força fraca não forma um potencial de coesão capaz de ligar duas partículas. Seu alcance é muito pequeno, cerca de 10^2 vezes menor que o alcance da força forte, o que a torna efetivamente uma força muito fraca.

O projeto de Maxwell e Einstein de construir uma teoria unificada das forças da Natureza continua inspirando o trabalho de muitos físicos. É a chamada busca da *teoria do campo unificado*. Curiosamente, já se reconhece que há muito mais similaridade entre as forças forte, fraca e elétrica, aparentemente tão distintas entre si, do que entre as forças gravitacional e elétrica. No fim da década de 1960, o paquistanês *Abdus Salam* (1926–1996) e os americanos *Steven Weinberg* (1933–) e *Sheldon Lee Glashow* (1932–) formularam uma teoria que unifica as forças elétrica e fraca. Tal teoria, denominada *teoria eletrofraca*, foi capaz de prever novos fatos experimentais observados em 1970. Muitos físicos trabalham na busca da unificação da força eletrofraca com a força forte, numa teoria denominada *teoria da grande unificação*. Há também um considerável grupo trabalhando em um projeto muito mais ambicioso, cujo objetivo é a unificação das quatro forças.

PROBLEMAS

P 12.1 Mostre que qualquer partícula interagindo gravitacionalmente com uma certa distribuição de massas tem aceleração igual à aceleração da gravidade gerada por tais massas.

P 12.2 A aceleração aparente (aceleração dos corpos em queda livre) da gravidade no nível do mar na linha do equador é $9,78039 \text{ m/s}^2$. Entretanto, este valor é menor do que a gravidade real g , pois devido à rotação da Terra parte do peso dos corpos é utilizada para gerar a aceleração centrípeta. Sabendo que o raio da Terra no plano do equador é de 6.380 km, calcule o valor de g .

P 12.3 Calcule a energia gravitacional entre os dois corpos da Figura 12.13.

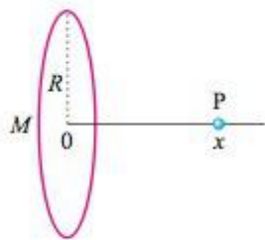


Figura 12.13
(Problema 12.3).

P 12.4 Mostre que a velocidade de escape do Sol, partindo de um ponto sobre a órbita circular de um planeta, é igual a $\sqrt{2}v_o$, onde v_o é a velocidade orbital do planeta.

P 12.5 Considere um corpo A de pequena massa caindo sobre um corpo de grande massa, partindo do repouso no infinito. Mostre que, em qualquer ponto durante a queda, o corpo A terá exatamente a velocidade de escape a partir de tal ponto.

P 12.6 Considerando o resultado do Exercício-exemplo 12.7, calcule a energia potencial associada à interação da esfera com uma partícula de massa m situada no ponto r , para r maior e menor do que R .

P 12.7 Com relação ao Exercício-exemplo 12.7, determine a velocidade da pedra em função de sua posição r relativa ao centro da Terra.

P 12.8 Esforços já foram realizados com o objetivo de colocar satélites em órbita lançando-os como projéteis de canhões.

(A) Ignorando a atmosfera terrestre, mostre que para atingir uma altitude h , um projétil tem de ser atirado para cima com velocidade

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R} \frac{h}{R+h}}, \text{ onde } R \text{ e } M \text{ são, respectivamente, o raio e a}$$

massa da Terra. (B) Calcule a velocidade com que um projétil tem de ser atirado para atingir a altitude de 2000 km.

P 12.9 Dois corpos esféricos de massas M_1 e M_2 , inicialmente em repouso e com centros afastados da distância r_o , começam a se movimentar um em direção ao outro movidos pela atração gravitacional. (A) Mostre que $M_1 \mathbf{v}_1 = -M_2 \mathbf{v}_2$, onde $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são as velocidades dos corpos. (B) Calcule v_1 e v_2 quando a distância entre os centros dos corpos é r .

P 12.10 Duas estrelas, de massas M_1 e M_2 , orbitam em torno do seu centro de massa, ligadas pela interação gravitacional. Calcule o período de rotação do sistema, supondo que a distância entre as estrelas seja constante.

P 12.11 Aplique a fórmula obtida no Problema 12.10 para o sistema Terra–Lua e calcule a diferença entre o período da Lua e o período de um satélite artificial que orbitasse a Terra em órbita circular cujo raio fosse igual à distância média entre os centros da Terra e da Lua.

P 12.12 Considere um planeta esférico, com densidade uniforme de massa ρ , destituído de atmosfera. Mostre que o período de um satélite em órbita circular muito baixa (órbita rasante à superfície do planeta) não depende do raio do planeta, mas somente da sua densidade de massa, e expresse o valor desse período.

P 12.13 *Máxima rotação de um planeta.* Um planeta não pode girar com período menor do que o de um satélite em órbita rasante em torno do mesmo. De fato, se o planeta girasse com período menor do que o do satélite, a aceleração da gravidade do planeta sobre um corpo em sua superfície seria menor do que a aceleração centrípeta do corpo em seu movimento circular. Isso significa que o planeta se desintegraria. Calcule a menor duração que o dia terrestre poderia ter.

P 12.14 Três esferas, cada qual com massa m , estão dispostas nos vértices de um triângulo equilátero de lado l . (A) Mostre que a força gravitacional sobre cada esfera dirige-se para o centro do

triângulo, e calcule a intensidade de tal força. (B) Em um movimento sincronizado das esferas, elas podem orbitar em torno do centro de massa comum, que é o centro do triângulo; calcule a velocidade angular do triângulo.

P 12.15 Corpos em forma de anéis são comuns no Universo. Saturno tem seus famosos anéis, Júpiter tem anéis menos visíveis, e algumas galáxias também têm anéis externos ao seu corpo e contidos no seu plano de rotação. Considere um anel homogêneo, de massa M e raio R , tal como mostra a Figura 12.13. Calcule a velocidade de escape a partir do ponto em que se encontra o pequeno corpo de massa m na figura.

P 12.16 O maior e mais próximo dos pequenos satélites de Júpiter, satélite 5, tem órbita aproximadamente circular com raio de $1,61 \times 10^5$ km. (A) Qual é o período da órbita do satélite? (B) O diâmetro do satélite vale 160 km. Qual é a diferença entre as acelerações da gravidade gerada por Júpiter nas faces opostas do satélite, a mais próxima e a mais distante?

P 12.17 Considere uma estrela de nêutrons, com massa de dois sóis e raio de 10 km, e imagine uma pessoa caindo em pé na estrela sob o efeito da gravidade. Mostre que, devido à diferença de gravidade entre as pernas e a cabeça dessa infeliz criatura, seu corpo seria arrebatado por estiramento antes do final da queda.

P 12.18 Calcule a pressão no centro da Terra, fazendo a idealização de que ela seja uma esfera com densidade uniforme de massa. (Sugestão: imagine um tubo cilíndrico de terra indo da superfície até o centro da Terra. Divida o tubo em pastilhas e considere a força gravitacional atuando sobre cada pastilha, em direção ao centro.)

P 12.19 A aceleração da gravidade em um dado ponto é afetada por não-homogeneidade na composição das rochas, por cavernas, lençóis subterrâneos de água ou depósitos de petróleo. As variações na gravidade decorrentes desses fatores, apesar de pequenas, podem ser medidas com boa precisão e são utilizadas na prospecção geológica. A Figura 12.14 mostra uma caverna idealizada como uma esfera de raio R em uma região em que a densidade média das rochas é ρ . (A) Qual é o desvio que tal falha provoca na aceleração da gravidade no ponto indicado na figura? (B) Considere o caso particular $\rho = 4,0 \times 10^3$ kg/m³, $R = 50$ m, $h = 200$ m e calcule numericamente esse desvio.

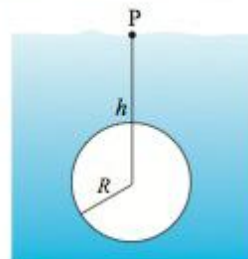


Figura 12.14
(Problema 12.19).

Respostas dos exercícios

E 12.1 (A) $F = 2,67 \times 10^{-9}$ N, (B) $T = 5,34 \times 10^{-10}$ Nm

E 12.2 $U = -GM^2(4 + \sqrt{2})/L$

E 12.3 $3,8 \times 10^{32}$ J

E 12.5 $-2,24 \times 10^{32}$ J

E 12.6 8 milhões de anos

E 12.7 (A) $1,62$ m/s²; (B) 274 m/s²; (C) $24,9$ m/s²; (D) $2,7 \times 10^{12}$ m/s²

E 12.8 $\frac{GM}{r^2}$; $\frac{GM}{R^3}$

E 12.9 $\Delta g = 4,98 \times 10^5$ m/s²

E 12.10 (A) $R_p = 4,425 \times 10^9$ km, $R_a = 7,375 \times 10^9$ km.
(B) $v_p / v_a = 1,667$

E 12.11 (A) $R_p = 1,471 \times 10^{11}$ m, $R_a = 1,521 \times 10^{11}$ m.
(B) $d = 5,002 \times 10^9$ m

E 12.12 $r = 9,37 \times 10^3$ km

E 12.13 $1,40v$

E 12.14 $88,3 \times 10^3$ km e 235 m/s

E 12.15 $5,79 \times 10^7$ J/kg

E 12.16 $8,84 \times 10^3$ km

E 12.17 (A) $2,37$ km/s; (B) $59,6$ km/s; (C) $2,3 \times 10^5$ km/s

Respostas dos problemas

P 12.2 9,81432

P 12.3 $U = -\frac{GMm}{L} \ln \frac{d+L}{d}$

P 12.6 $U = -\frac{GmM}{r}$, se $r \geq R$ e $U = \frac{GmM}{R} \left(-\frac{3}{2} + \frac{r^2}{2R^2} \right)$, se $r < R$

P 12.7 $v = \sqrt{\frac{GM}{R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)}$

P 12.8 (B) $v = 5,47$ km/s

P 12.9 (B) $v_1 = \sqrt{\frac{2GM_2^2}{M_1 + M_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$; v_2 se obtém de v_1 trocando-se os índices 1 e 2 entre si

P 12.10 $2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(M_1 + M_2)}}$

P 12.11 4,0 horas.

P 12.12 $T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$

P 12.13 1h24min

P 12.14 (A) $\frac{\sqrt{3Gm^2}}{l^2}$; (B) $\sqrt{\frac{3Gm}{l^3}}$

P 12.15 $v_c = \frac{\sqrt{2GM}}{(R^2 + x^2)^{1/4}}$

P 12.16 (A) $T = 0,418$ dia. (B) $\Delta g = 0,0097$ ms⁻²

P 12.18 $p = 1,7 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

P 12.19 (A) $\Delta g = -G\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{h^2}$; (B) $\Delta g = -3,5 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



Apêndices

- Apêndice A ■ Sistema Internacional de Unidades (SI), 300
 - Apêndice B ■ Constantes Universais, 301
 - Apêndice C ■ Constantes Eletromagnéticas e Atômicas, 301
 - Apêndice D ■ Constantes das Partículas do Átomo, 302
 - Apêndice E ■ Constantes Físico-químicas, 302
 - Apêndice F ■ Dados Referentes à Terra, ao Sol e à Lua, 303
 - Apêndice G ■ Dados Referentes aos Planetas, 303
 - Apêndice H ■ Tabela Periódica dos Elementos, 304
-

Apêndice A ■ Sistema Internacional de Unidades (SI)

Unidades básicas			
Grandeza	Unidade	Símbolo	Definição
Tempo	segundo	s	Duração de 9.192.631.770 períodos da radiação gerada pela transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do ^{133}Cs
Comprimento	metro	m	Distância percorrida pela luz no vácuo em $1/299.792.458$ s
Massa	quilograma	kg	Massa de um corpo padrão depositado em Sèvres, França
Corrente elétrica	ampère	A	Corrente que, quando mantida em dois fios retos paralelos muito longos e de seção reta circular desprezível, separados pela distância de 1 m, gera uma força de 2×10^{-7} N por metro de seu comprimento
Temperatura termodinâmica	kelvin	K	$1/273,16$ da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água
Intensidade luminosa	candela	cd	Intensidade luminosa uma dada direção de uma fonte que emite radiação monocromática de frequência 540×10^{12} Hz com intensidade radiante de $1/683$ watt por estéreorradiano, naquela direção
Quantidade de substância	mole	mol	Quantidade de substância de um sistema com um número de entidades elementares igual ao número de átomos em $0,012$ kg de ^{12}C

Unidades derivadas			
Grandeza	Unidade	Símbolo	Definição
Força	newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Pressão	pascal	Pa	N/m^2
Trabalho, energia	joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Potência	watt	W	$\text{N} \cdot \text{m/s}$
Frequência	hertz	Hz	s^{-1}
Carga elétrica	coulomb	C	$\text{A} \cdot \text{s}$
Potencial elétrico	volt	V	J/C
Resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
Capacitância	farad	F	C/V
Campo magnético	tesla	T	$\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{J} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
Fluxo magnético	weber	Wb	$\text{T} \cdot \text{m}^2$
Indutância	henry	H	$\text{J} / \text{A}^2 = \text{T} \cdot \text{m}^2 / \text{A}$

Apêndice B ■ Constantes Universais

Descrição da constante	Símbolo	Valor
Velocidade da luz no vácuo	c	$299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$
Permissividade elétrica do vácuo	ϵ_0	$8,854\,187\,817... \times 10^{-12}\text{ F m}^{-1}$
Constante da lei de Coulomb	k	$8,987551787... \times 10^9\text{ N.m}^2/\text{C}^2$
Permissividade magnética do vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} = 12,566\,370\,614... \times 10^{-7}\text{ N A}^{-2}$
Constante gravitacional de Newton	G	$6,6742(10) \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6,626\,0693(11) \times 10^{-34}\text{ J s}$ $4,135\,667\,43(35) \times 10^{-15}\text{ eV s}$
Constante de Planck sobre 2π	$\hbar$	$1,054\,571\,68(18) \times 10^{-34}\text{ J s}$ $6,582\,119\,15(56) \times 10^{-16}\text{ eV s}$
Tempo de Planck $\sqrt{\hbar G / c^5}$	t_p	$5,391\,21(40) \times 10^{-64}\text{ s}$
Comprimento de Planck ct_p	ℓ_p	$1,616\,24(12) \times 10^{-35}$
Massa de Planck $\hbar / c\ell_p$	m_p	$2,176\,45(16) \times 10^{-8}\text{ kg}$

Apêndice C ■ Constantes Eletromagnéticas e Atômicas

Descrição da constante	Símbolo	Valor
Carga elementar	e	$1,602\,176\,53(14) \times 10^{-19}\text{ C}$
Quantum de fluxo magnético	Φ_0	$2,067\,833\,72(18) \times 10^{-15}\text{ Wb}$
Constante de von Klitzing	R_K	$25\,812,807\,449(86)\,\Omega$
Magnéton de Bohr	μ_B	$927,400\,949(80) \times 10^{-26}\text{ J T}^{-1}$ $5,788\,381\,804(39) \times 10^{-5}\text{ eV T}^{-1}$
Magnéton de Bohr em Hz/T	μ_B / h	$13,996\,2458(12) \times 10^9\text{ Hz T}^{-1}$
Magnéton de Bohr em K/T	μ_B / k_B	$0,671\,7131(12)\text{ K T}^{-1}$
Magnéton nuclear	μ_N	$5,050\,783\,43(43) \times 10^{-27}\text{ J T}^{-1}$ $3,152\,451\,259(21) \times 10^{-8}\text{ eV T}^{-1}$
Magnéton nuclear em MHz/T	μ_N / h	$7,622\,593\,71(65)\text{ MHz T}^{-1}$
Magnéton nuclear em K/T	μ_N / k_B	$3,658\,2637(64) \times 10^{-4}\text{ K T}^{-1}$
Constante de estrutura fina $e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c$	α	$7,297\,352\,568(24) \times 10^{-3}$
Inverso da constante de estrutura fina	α^{-1}	$137,0359991(08)$
Constante de Rydberg $m_e e^4 / 8\epsilon_0 \hbar^3$	R_∞	$10\,973\,731,568\,525(73)\text{ m}^{-1}$
Constante de Rydberg em Hz	$R_\infty c$	$3,289\,841\,960\,360(22) \times 10^{15}\text{ Hz}$
Constante de Rydberg em J ou eV	$R_\infty \hbar c$	$13,605\,6923(12)\text{ eV}$ $2,179\,872\,09(37) \times 10^{-18}\text{ J}$
Raio de Bohr	α_0	$0,529\,177\,2108(18) \times 10^{-10}\text{ m}$

Apêndice D ■ Constantes das Partículas do Átomo

Propriedade	Símbolo	Valor
Elétron		
Massa	m_e	$9,109\,3826(16) \times 10^{-31} \text{ kg}$ $5,485\,799\,0945(24) \times 10^{-4} \text{ u}^*$
Energia de repouso	$m_e c^2$	$0,510\,998\,918(44) \text{ MeV}$
Comprimento de onda de Compton $h / m_e c$	λ_c	$2,426\,310\,238(16) \times 10^{-12} \text{ m}$
Raio clássico ($e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e c^2 = \alpha^2 a_0$)	r_e	$2,817\,940\,325 \times 10^{-15} \text{ m}$
Momento magnético	μ_e	$-928,476\,412 \times 10^{-26} \text{ J T}^{-1}$
Fator g [$2\mu_e / \mu_B = 2\mu_e / (e\hbar / 2m_e)$]	g_e	$1,760\,859\,74(15) \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \text{ T}^{-1}$
Próton		
Massa	m_p	$1,672\,621\,71(29) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $1,007\,276\,466\,88(13) \text{ u}^*$
Energia de repouso	$m_p c^2$	$938,272\,029(80) \text{ MeV}$
Momento magnético	μ_p	$1,410\,606\,71(12) \times 10^{-26} \text{ J T}^{-1}$
Nêutron		
Massa	m_n	$1,674\,927\,28(29) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $1,008\,664\,915\,60(55) \text{ u}$
Energia de repouso	$m_n c^2$	$939,565\,360(81) \text{ MeV}$
Momento magnético	μ_n	$-0,966\,236\,45(24) \times 10^{-26} \text{ J T}^{-1}$

* u = unidade de massa atômica = $1,660\,538\,86(28) \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Apêndice E ■ Constantes Físico-químicas

Descrição da constante	Símbolo	Valor
Constante de Avogadro	N_A	$6,022\,1415(10) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380\,6505(24) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ $8,617\,343(15) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
Constante de Boltzmann em Hz/K	k_B / h	$2,083\,6644(36) \times 10^{10} \text{ Hz K}^{-1}$
Constante molar dos gases	R	$8,314\,472(15) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ $1,9858775(20) \text{ cal mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Volume molar de gás ideal (273,15 K, 101,325 kPa)	V_m	$22,413\,996(39) \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,670\,400(40) \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Constante de Faraday eN_A	F	$96\,485,3383(83) \text{ C mol}^{-1}$

Apêndice F ■ Dados Referentes à Terra, ao Sol e à Lua

	Terra	Sol	Lua
Massa (kg)	$5,98 \times 10^{24}$	$1,99 \times 10^{30}$	$7,36 \times 10^{22}$
Raio (m)	$6,37 \times 10^6$	$7,00 \times 10^8$	$1,74 \times 10^6$
Gravidade média na superfície (m / s^2)	9,81	274	1,67
Valor padrão da gravidade (m / s^2)	9,80665		
Gravidade média no equador (nível do mar) (m / s^2)	9,7804		
Gravidade média nos pólos (nível do mar) (m / s^2)	9,8322		
Velocidade de escape (km/s)	11,2	618	2,38
Potência irradiada (W)		$3,90 \times 10^{26}$	
Constante solar (W / m^2)*		1340	

(*) Intensidade luminosa da luz solar, para incidência normal, no alto da atmosfera terrestre, tomada a média no ano.

Apêndice G ■ Dados Referentes aos Planetas

Propriedade	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão
Massa relativa à da Terra	0,0558	0,815	1	0,107	318	95,1	14,5	17,2	=0,01
Gravidade na superfície m / s^2	3,78	8,60	9,81	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	=0,3
Velocidade de escape km / s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	=0,9
Distância ao Sol (média) $10^9 m$	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
Período da órbita (anos)	0,241	0,615	1	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Velocidade orbital (média) km / s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinação da órbita em relação à da Terra	$7,00^\circ$	$3,39^\circ$	0	$1,85^\circ$	$1,30^\circ$	$2,49^\circ$	$0,77^\circ$	$1,77^\circ$	$17,2^\circ$
Excentricidade da órbita	0,2056	0,0067	0,0167	0,0935	0,0489	0,0565	0,0457	0,0113	0,2444

Apêndice H ■ Tabela Periódica dos Elementos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VII	VIII	IX	X	XI	XII	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	VIIIA
1 H 1,00794	2 He 4,002602	3 Li 6,941	4 Be 9,012182	5 B 10,811	6 C 12,0107	7 N 14,00644	8 O 15,9994	9 F 18,9984032	10 Ne 20,1797	11 Na 22,98976928	12 Mg 24,3046	13 Al 26,9815385	14 Si 28,0855	15 P 30,973761	16 S 32,06	17 Cl 35,453	18 Ar 39,948
19 K 39,0983	20 Ca 40,078	21 Sc 44,955910	22 Ti 47,867	23 V 50,9415	24 Cr 51,9961	25 Mn 54,938049	26 Fe 55,845	27 Co 58,933200	28 Ni 58,6934	29 Cu 63,546	30 Zn 65,409	31 Ga 69,723	32 Ge 72,64	33 As 74,92160	34 Se 78,96	35 Br 79,904	36 Kr 83,798
37 Rb 85,4678	38 Sr 87,62	39 Y 88,90585	40 Zr 91,224	41 Nb 92,90638	42 Mo 95,94	43 Tc 98	44 Ru 101,07	45 Rh 102,90550	46 Pd 106,42	47 Ag 107,8682	48 Cd 112,411	49 In 114,818	50 Sn 118,710	51 Sb 121,760	52 Te 127,60	53 I 126,90447	54 Xe 131,29
55 Cs 132,90545	56 Ba 137,327	57 to 71	72 Hf 178,49	73 Ta 180,9479	74 W 183,84	75 Re 186,207	76 Os 190,23	77 Ir 192,222	78 Pt 195,078	79 Au 196,96657	80 Hg 200,59	81 Tl 204,3833	82 Pb 207,2	83 Bi 208,98038	84 Po 209	85 At 210	86 Rn 222
87 Fr 223	88 Ra 226	89 to 103	104 Rf 261	105 Db 262	106 Sg 266	107 Bh 264	108 Hs 269	109 Mt 268	110 Ds 271	111 Rg 272	112 Uub 285	113 Uut 284	114 Uuq 289	115 Uup 288	116 Uuh 292	117 Uus 293	118 Uuo 294

Massas atômicas entre parênteses são dos isótopos mais abundantes

57 La 138,9055	58 Ce 140,116	59 Pr 140,90765	60 Nd 144,24	61 Pm 145	62 Sm 150,36	63 Eu 151,964	64 Gd 157,25	65 Tb 158,92534	66 Dy 162,50	67 Ho 164,93032	68 Er 167,259	69 Tm 168,93421	70 Yb 173,04	71 Lu 174,967	103 Lr 262	102 No 259	101 Md 258	100 Fm 257	99 Es 252	98 Cf 251	97 Bk 247	96 Cm 247	95 Am 243	94 Pu 244	93 Np 237	92 U 238,02891	91 Pa 231,03688	90 Th 232,0381	89 Ac 227
----------------------	---------------------	-----------------------	--------------------	-----------------	--------------------	---------------------	--------------------	-----------------------	--------------------	-----------------------	---------------------	-----------------------	--------------------	---------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	----------------------	-----------------------	----------------------	-----------------



Índice Alfabético

A

Ação e reação, lei, 120
Aceleração, 47
- angular, 215
- centrípeta, 92
- centro de massa, 173
- gravidade, 55, 289
- instantânea, 47
- média, 47
- tangencial, 92
Algarismos significativos, 27
Análise dimensional, 22, 23
Aristóteles, 3
Atrito hidrodinâmico e velocidade-limite, 128
Auto-energia gravitacional de um corpo, 288

B

Binário (torque), 222
Brahe, Tycho, 9, 10, 109

C

Cálculo
- diferencial e integral, 11
- força a partir do potencial, 159
- momento de inércia, 247
- $x(t)$ a partir de $v(t)$, 44

Campo gravitacional, 289
Cavendish, Henry, 280
Centro de massa (movimento), 177
- aceleração, 173
- equação, 172
Ciência, 11, 13
Clashow, Sheldon Lee, 297
Coeficiente de atrito cinético, 116
Colisões, 197-210
- definição, 198
- elásticas em duas dimensões, 206
- leis de conservação, 198
- uma dimensão, 200
- - elásticas, 203
- - inelástica, 202
Comprimento, 22, 25
Conservação
- energia, 158
- - mecânica, 152
- momento angular, 231
- - fenômenos, 234
- momento, 169-196
- - centro de massa, 177-181
- - linear, 170-177, 181
- - movimento de um foguete, 185
- - simetria, 189
- - sistema de partículas sob ação externa, 184

Constante de Planck, 246
Copérnico, Nicolau, 3, 7
Corpo rígido e seus graus de liberdade, 212
Corrente elétrica, 22

D

Definição operacional de uma grandeza, 23
Descartes, René, 5, 109
Deslocamento, 66
Determinismo, 3
- causal, 3
- teleológico, 3, 108
Dinâmica dos fluidos, 14
Dinamômetro, 110

E

Eixos
- balanceado, 230
- cartesianos, 38
Energia
- cinética, 144, 230
- conservação, lei, 158
- massa relativística, 163
- mecânica, conservação, 152
- - lei, aplicação, 155
- oscilador harmônico, 265

- potencial gravitacional de um sistema de partículas, 281
- potencial, 149-152

Equação

- movimento, 11
- - centro de massa, 172, 181
- trajetória do projétil, 96

Equilíbrio, 236

Erros e Algarismos significativos, 27

Espectro atômico, 192

Estimativas, 30

F

Fenômenos celestes, 2

Física, 1-17

- antítese entre o céu e a terra, 2
- ciência, definição, 11
- definição, 13
- leis da natureza, 11
- método científico, 4-9
- - experiências especialmente projetadas para testar hipóteses, 7
- - idealização dos objetos e fenômenos sob investigação, 5
- - instrumentos de observação e medida, 4
- - limitação metódica do escopo da análise, 7
- modelo científico, 16
- natureza compreensível, 9
- natureza e fenômenos, 2
- teleologia e determinismo causal, 3

Foguete, movimento, 185

- empuxo, 186
- taxa de combustão, 186

Força

- atrito, 114
- cálculo a partir do potencial, 159
- conservativa, 149
- - em uma dimensão, 161
- constante, trabalho, 136
- forte, 296
- fraca, 296
- gravidade, 3
- medidas, 110
- nuclear, 296

- potência, 147
- resultante, 113
- variável, trabalho, 139

G

Galileu, 8, 109

Gassendi, Pierre, 6

Grandezas, 20

- básicas, 22
- caráter tensorial, 84
- definição operacional, 23
- derivadas, 21
- fundamentais, 21, 22
- ordem, 24

Gravitação, 277-298

- auto-energia gravitacional de um corpo, 288
 - campo gravitacional, 289
 - energia potencial gravitacional de um sistema de partículas, 281
 - experiência de Cavendish, 280
 - formulação matemática da lei, 279
 - história, 278
 - interação entre uma partícula e uma casca esférica, 284
 - leis de Kepler, 289
 - limite de validade da lei da gravitação de Newton, 295
 - órbitas
 - - circulares, 292
 - - geossincronizadas, 294
 - quatro forças, 296
 - velocidade de escape, 294
- #### Grupo de simetria, 190

H

Hidrodinâmica, 14

Hooke, Robert, 111

I

Inércia, lei, 109

Instrumentos de observação e medida, 4

Intensidade luminosa, 22

Interação entre uma partícula e uma casca esférica, 284

Isotropia do espaço, 83

K

Kepler, Johannes, 11, 109

Kepler, leis, 9, 109, 289

L

Leis

- conservação da energia, 158
- - mecânica, 154, 155
- conservação do momento angular, 231
- conservação e colisões, 198
- - energia, 198
- - momento, 198
- fundamentais da mecânica, 107-133
- - ação e reação, 120-128
- - atrito hidrodinâmico e velocidade-limite, 128
- - força de atrito, 114
- - Galileu a Newton, 109
- - introdução, 108
- - lei da inércia, 109
- - medidas de força, 110
- - pensamento aristotélico, 108
- - peso de um corpo, 113
- - segunda lei de Newton, 111
- gravitação de Newton, limite da validade, 295
- gravitação, formulação matemática, 279
- Hooke, 111
- Kepler, 9, 109, 289
- natureza, 11

M

Massa, 22, 26

- inercial, 112

Maxwell, James Clerk, 296

Mecânica, leis fundamentais, 107-133

- ação e reação, 120-127
- atrito hidrodinâmico e velocidade-limite, 128
- força de atrito, 114
- Galileu a Newton, 109
- inércia, 109
- introdução, 108
- medidas de força, 110

- pensamento aristotélico, 108
- peso de um corpo, 113
- segunda lei de Newton, 111
- Medidas, 19-35
 - análise dimensional, 22
 - comprimento, 25
 - definição operacional de uma grandeza, 23
 - erros e algarismos significativos, 27
 - estimativas, 30
 - força, 110
 - grandezas fundamentais e derivadas, 21
 - intervalos de tempo, 25
 - massas, 26
 - notação exponencial, 23
 - operações com números que contêm erros, 28
 - ordem de grandeza, 24
 - prefixos adotados no SI, 26
 - quantificação de grandezas, 20
- Método científico, 4
 - experiências especialmente projetadas para testar hipóteses, 7
 - idealização dos objetos e fenômenos sob investigação, 5
 - instrumentos de observação e medida, 4
 - limitação metódica do escopo da análise, 7
- Metrologia, 22
- Modelo científico, 16
- Momento
 - angular, 224
 - conservação, 231
 - fenômenos, 234
 - corpo rígido – momento de inércia, 226
 - movimento circular uniforme, 226
 - quantização, 246
 - conservação, 169-196
 - centro de massa, 177-181
 - introdução, 170
 - linear, 170-177, 181-184
 - movimento de um foguete, 185-189
 - simetria, 189
 - sistema de partículas sob ação externa, 184
 - inércia, cálculo, 247
- Movimento, 89-105
 - circular
 - não-uniforme, 93
 - uniforme, 91
 - descrição vetorial, 90
 - externo, 240
 - harmônico simples, 256
 - interno, 240
 - natural, 108
 - projétil, 95
 - relativo no espaço, 101
 - retilíneo, 37-63
 - aceleração, 47
 - cálculo de $x(t)$ a partir de $v(t)$, 44
 - introdução, 38
 - movimento retilíneo, 39
 - queda livre, 55
 - relações de simetria no movimento uniformemente acelerado, 54
 - relativo, 59
 - sistemas de referência, 38
 - uniforme, 49
 - uniformemente acelerado, 50
 - análise pelo cálculo, 55
 - velocidade
 - escalar média, 39
 - instantânea, 41, 43
 - média, 39
 - translação, 212
 - três dimensões, 141
 - uma dimensão, 139
- Multiplicação, 29
- vetor por um número, 67
- N**
 - Natureza e seus fenômenos, 2
 - Newton, Isaac, 4, 108, 111, 285
 - Notação exponencial, 23
- O**
 - Operações com números que contêm erros, 28
- Órbitas
 - circulares, 292
 - geossincronizadas, 294
- Ordem de grandeza, 24
- Oscilador harmônico, 255-275
 - amortecido, 268
 - crítico, 269
 - forçado e ressonância, 270
 - movimento harmônico simples, 256
 - relações de energia, 265
 - simples, 257
 - pêndulos
 - físico, 263
 - simples, 260
 - torção, 262
 - sistema massa-mola, 259
 - superamortecido, 269
- P**
 - Paradigma newtoniano, 11
 - Paridade, 85
 - Partícula, 39
 - Pêndulos
 - físico, 263
 - simples, 260
 - torção, 262
 - Pensamento aristotélico, 108
 - Peso de um corpo, 113
 - Planck, Max, 246
 - Planetas, 10
 - Pontos
 - equilíbrio estável, 162
 - retorno, 162
 - Potência, 147
 - Precessão dos equinócios, 120
 - Prefixos adotados no SI, 26
 - Princípio do trabalho-energia, 145
 - Produtos
 - escalar de vetores, 74
 - misto de vetores, 82
 - vetorial de vetores, 78, 80
 - Projétil
 - alcance, 98, 99
 - movimento, 95

Q

Quantidade de substância, 22
 Quantização do momento angular, 246
 Quatro forças, 296
 Queda livre, 55
 Questão empírica, 112
 Química quântica, 15

R

Raias de absorção, 192
 Reducionismo, 15
 Referencial inercial, 110
 Representação
 - analítica de vetores, 70
 - vetorial das rotações, 213
 Rolamento, 242
 Rotações, 212-254
 - aceleração angular, 215, 216
 - cálculo do momento de inércia de alguns corpos, 247
 - complexidade, 212
 - conservação do momento angular, 231
 - - fenômenos, 234
 - corpo rígido e seus graus de liberdade, 212
 - eixo balanceado (opcional), 230
 - energia cinética, 230
 - equilíbrio, 236
 - grandezas análogas, 246
 - momento angular, 224
 - - corpo rígido, 226
 - - movimento circular uniforme, 226
 - movimento externo e interno, 240
 - quantização do momento angular, 246
 - representação vetorial, 213
 - rolamento, 242
 - segunda lei de Newton, 224, 228
 - teorema dos eixos paralelos, 248

- torque (trabalho no deslocamento angular), 218
 - velocidade angular, 215

S

Segunda lei de Newton, 111, 112, 224, 228
 Simetria, 189
 - espaço e tempo, 192
 - grupo, 190
 - translação do espaço, 193
 Sistemas
 - complexos, 14
 - internacional (SI), 20
 - massa-mola, 259
 - métrico (MKS), 20
 - referência, 38
 Sólido cristalino, 14
 Soma de vetores, 68
 Subtração, 28
 - vetores, 69

T

Teleologia, 3, 108
 Temperatura termodinâmica, 22
 Tempo, 22, 25
 Teorema
 - cascas esféricas, 286
 - eixos paralelos, 248
 - virial, 288
 Teoria
 - campo unificado, 297
 - eletrofraca, 297
 - erros, 28
 - grande unificação, 297
 Terceira lei de Newton, 120
 Torque, 218
 - binário, 222
 - restaurador, 258

- total nulo, 220
 Trabalho, 135
 - deslocamento angular, 218
 - força constante, 136
 - força variável, 139
 - líquido, 137
 Translação, 212
 - grandezas associadas, 246

U

Universalidade das leis naturais, 278

V

Velocidade, 23
 - angular, 91, 215
 - escalar média, 39, 40
 - escape, 294
 - instantânea, 41-43
 - média, 39
 Vetores, 65-88
 - caráter tensorial das grandezas físicas, 84
 - esquerdo e direito são equivalentes, 85
 - introdução, 66
 - isotropia do espaço, 83
 - multiplicação de vetor por um número, 67
 - produto
 - - escalar, 74
 - - misto, 82
 - - vetorial, 78, 80
 - representação analítica, 70
 - soma, 68
 - subtrações, 69

W

Weinberg, Steve, 297



A marca FSC é a garantia de que a madeira utilizada na fabricação do papel com o qual este livro foi impresso provém de florestas gerenciadas, observando-se rigorosos critérios sociais e ambientais e de sustentabilidade.

Serviços de impressão e acabamento executados, a partir de arquivos digitais fornecidos, nas oficinas gráficas da EDITORA SANTUÁRIO
Fone: (0XX12) 3104-2000 - Fax (0XX12) 3104-2016
<http://www.editorasantuario.com.br> - Aparecida-SP

