

Notas de Aula de SMA169 - Equações Diferenciais Parciais

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC - USP

junho de 2015

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Um pouco da história	7
1.2	Notação	9
2	Definições e Propriedades Básicas	13
2.1	Definições básicas	13
2.2	EDP's lineares	16
2.3	Condições de Contorno e Iniciais	27
2.4	Questões relevantes	41
2.5	Exercícios	43
3	Equações Lineares de 1.a Ordem	45
3.1	Alguns exemplos interessantes	45
3.2	O problema de Cauchy	58
3.2.1	Curva característica plana que não é tangente à curva inicial	66
3.3	Solução geral	88
3.4	Exercícios	116
4	Equações de Primeira Ordem: Alguns Problemas	117
4.1	Problemas	117
4.2	Curva inicial coincidente	122
4.2.1	Caso I: a curva Γ não é uma curva característica espacial	123
4.2.2	Caso II: a curva Γ é uma curva característica espacial	124
4.3	Tangência não coincidente	131
4.4	Propagação de singularidades	146
4.5	Uma <u>EDP</u> não linear de 1.a ordem	156
4.6	Ondas de choque associadas	168
4.7	Exercícios	189

5	EDP's de 2.a ordem	191
5.1	Classificação	191
5.2	Formas canônicas	211
5.2.1	Mudança de variáveis para o caso hiperbólico e sua forma canônica	213
5.2.2	Mudança de variáveis para o caso parabólico	225
5.2.3	Mudança de variáveis para o caso elítico	232
5.3	Exercícios	233
6	A Equação da Onda	235
6.1	Solução geral da equação da onda	235
6.2	A corda infinita	241
6.3	Funções pares, ímpares e periódicas	258
6.4	A corda finita	280
6.5	Exercícios	285
7	Séries de Fourier	287
7.1	Introdução	287
7.2	Método da separação de variáveis	288
7.3	Os Coeficientes de Fourier e a transformada de Fourier	311
7.4	Interpretação Geométrica dos Coeficientes de Fourier	348
7.5	Convergência Pontual da Série de Fourier	369
7.6	Convergência Uniforme da Série de Fourier	385
7.7	Notas Históricas	401
7.8	Exercícios	403
8	Aplicação de Série de Fourier às <u>EDP's</u>	405
8.1	O Problema da Condução do Calor em um Fio	405
8.2	O Problema da Corda Vibrante	428
8.2.0.1	Corda Vibrante com as Extremidades Fixas	428
8.2.0.2	Corda Vibrante com as Extremidades num Trilho Vertical	446
8.3	A Equação de Laplace	455
8.3.0.3	O Problema de Dirichlet num Retângulo	455
8.3.0.4	O Problema de Dirichlet num Círculo	474
8.4	Exercícios	497
9	Convolução e outros	499
9.1	Convolução	499
9.2	Núcleo de Dirichlet	508
9.3	Núcleo de Féjer	512
9.4	Núcleo de Poison	516

9.5 Exercícios	517
10 Identidades de Green	519
10.1 O Teorema de Green e da divergência	519
10.2 As identidades de Green - Unicidade do problema de Dirichlet	531
10.3 Solução fundamental	535
10.4 Exercícios	549
11 Unicidade de Soluções	551
11.1 Princípio do máximo (e do mínimo) - equação do calor	551
11.2 Princípio do máximo (e do mínimo) - equação de Laplace	567
11.3 Integrais de energia	574
11.4 Exercícios	586
12 Equações e Condições Não Homogêneas	587
12.1 Equação do calor	587
12.2 Equação do calor	592
12.3 Equação da onda	597
12.4 Equação da onda	598
12.5 Exercícios	599

Capítulo 1

Introdução

1.1 Um pouco da história

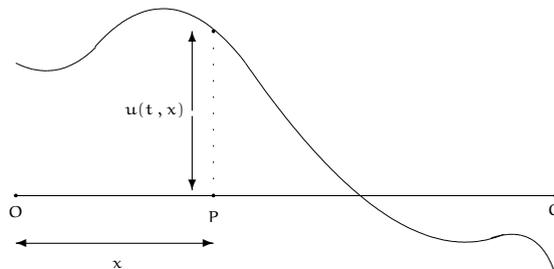
O estudo das Equações Diferenciais Parciais (abreviadamente, EDP) se inicia com a criação do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII e está diretamente relacionado com as aplicações à Mecânica. O uso de leis da Física possibilitou obter Equações Diferenciais (abreviadamente, ED) que descreviam os fenômenos Físicos estudados. Tais equações, quando tratavam-se de Equações Diferenciais Parciais, traziam sérias dificuldades matemáticas para sua resolução.

Algumas destas Equações Diferenciais Parciais serão abordadas ao longo do desenvolvimento do curso.

As três Equações Diferenciais Parciais básicas que serão estudadas ao longo deste curso, que apareceram no século XVIII, estão relacionadas aos seguintes problemas:

1. Consideremos o problema das vibrações transversais de uma corda infinita em um plano fixado, isto é, o problema é encontrar a posição de uma corda vibrante, que vibra em um plano pré-fixado.

Denotemos por $u(t, x)$ o deslocamento do ponto P da corda, relativamente à posição horizontal (posição de equilíbrio), no instante t , onde $x \doteq OP$ (veja a figura abaixo).



Neste caso a Equação Diferencial Parcial que descreverá o deslocamento $u = u(t, x)$

será a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

ou, de modo simplificado,

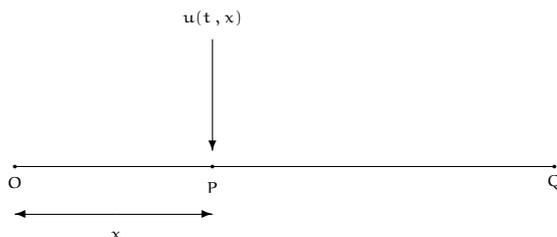
$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

onde $c \in (0, \infty)$ é uma constante que está relacionada com a elasticidade da corda.

A Equação Diferencial Parcial acima será denominada Equação da Onda.

2. Consideremos o problema de encontrar a distribuição da temperatura em uma barra uni-dimensional infinita, que está pré-aquecida.

Denotemos por $u(t, x)$ a temperatura no ponto P da barra, no instante t , onde $x \doteq OP$ (veja a figura abaixo).



Neste caso, a Equação Diferencial Parcial que descreverá a temperatura $u = u(t, x)$ será:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

ou, de modo simplificado,

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

onde $\alpha \in (0, \infty)$ é uma constante, que está relacionada com a condutividade térmica do material com que é feita a barra.

A Equação Diferencial Parcial acima será denominada Equação do Calor.

3. A terceira Equação Diferencial Parcial a ser estudada está relacionada com problemas de electromagnetismo, astronomia, dinâmica dos fluidos, comportamento de campos elétrico e gravitacional, entre outros.

Neste caso a Equação Diferencial Parcial aos quais a função $u = u(x, y)$ deverá satisfazer, onde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

ou, de modo simplificado,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

A Equação Diferencial Parcial acima será denominada Equação de Laplace.

Tal nome deve-se ao astrônomo e matemático francês Pierre-Simon Laplace. O Marquês de Pierre Simon de Laplace nasceu na localidade de Beumont-en-Auge, Província da Normandia, em 28 de março de 1749.

Esta equação também aparece, de modo extremamente importante, no estudo das funções de variáveis complexas, que assumem valores complexos.

Obter soluções para estas equações, sob certas condições, será um trabalho árduo. Este será um dos objetivos do curso.

Desenvolveremos um método para resolver tais problemas denominado Método de Fourier.

1.2 Notação

Ao longo destas notas utilizaremos a seguinte notação:

- \mathbb{N} : denotará o conjunto formada por todos os números naturais, isto é,

$$\mathbb{N} \doteq \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- \mathbb{Z} : denotará o conjunto formada por todos os números inteiros, isto é,

$$\mathbb{Z} \doteq \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- \mathbb{Q} : denotará o conjunto formada por todos os números racionais, isto é,

$$\mathbb{Q} \doteq \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

- \mathbb{I} : denotará o conjunto formada por todos os números irracionais.

- \mathbb{R} : denotará o conjunto formada por todos os números reais, isto é,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

- $|\cdot|$: denotará o módulo, ou valor absoluto, de um número real, isto é,

$$\begin{aligned} |x| &\doteq \sqrt{x^2} \\ &= \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}$.

- $\mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{I}^+, \mathbb{R}^+$: denotarão os conjuntos formados por todos os números inteiros, racionais, irracionais, reais, não negativos, respectivamente, isto é,

$$\mathbb{Z}^+ \doteq \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Q}^+ \doteq \mathbb{Q} \cap [0, \infty), \quad \mathbb{I}^+ \doteq \mathbb{I} \cap [0, \infty), \quad \mathbb{R}^+ \doteq [0, \infty).$$

- \mathbb{C} : denotará o conjunto formada por todos os números complexos, isto é,

$$\mathbb{C} = \{z \doteq x + iy ; x, y \in \mathbb{R}\},$$

onde $i^2 = -1$.

- \bar{z} : denotará o conjugado de um número complexo $z \in \mathbb{C}$, isto é,

$$\bar{z} \doteq x - iy,$$

onde $z \doteq x + iy \in \mathbb{C}$.

- $|\cdot|$: denotará o módulo de um número complexo, isto é,

$$\begin{aligned} |z| &\doteq \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{z\bar{z}}, \end{aligned}$$

onde, $z \doteq x + iy \in \mathbb{C}$.

- \mathbb{R}^n : denotará o conjunto formado por todas as \underline{n} -uplas, cujas entradas são números reais, ou seja,

$$\mathbb{R}^n \doteq \{(x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_j \in \mathbb{R}, \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$: denotará o espaço vetorial real formado pelos elementos de \mathbb{R}^n , munidos da operação $+$, que é a operação usual de adição de \underline{n} -uplas e a operação \cdot , que denota a operação usual de multiplicação de número real por uma \underline{n} -upla.

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço euclidiano \underline{n} -dimensional, quando munido do produto interno usual, ou seja, a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dado por:

$$\langle x, y \rangle \doteq \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

onde

$$x \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad y \doteq (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real normado, quando munido da norma $\|\cdot\|$, onde a função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\|x\| &\doteq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \\ &= \sqrt{\langle x, x \rangle},\end{aligned}$$

onde

$$x \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real métrico, quando munido da distância d_n , onde a função $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, é dada por:

$$\begin{aligned}d_n(x, y) &\doteq \|x - y\| \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} \\ &= \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle},\end{aligned}$$

onde

$$x \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n), y \doteq (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- $B(x_o; r)$: denotará, para $x_o \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a bola aberta de centro no ponto x_o e raio r no espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$, isto é,

$$\begin{aligned}B(x_o; r) &\doteq \{x \in \mathbb{R}^n ; d_n(x, x_o) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x_o\| < r\}.\end{aligned}$$

- $B[x_o; r]$: denotará, para $x_o \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a bola fechada de centro no ponto x_o e raio r no espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$, isto é,

$$\begin{aligned}B[x_o; r] &\doteq \{x \in \mathbb{R}^n ; d_n(x, x_o) \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x_o\| \leq r\}.\end{aligned}$$

- Diremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto no espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$, se $\Omega = \emptyset$ ou, se $\Omega \neq \emptyset$ e $x_o \in \Omega$, então deverá existir $r > 0$, tal que

$$B(x_o; r) \subseteq \Omega.$$

- $\overset{\circ}{A}$: denotará o interior do subconjunto A no espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$, isto é, o maior subconjunto aberto do espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$, que está contido no conjunto A .

- Diremos que $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado do espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$, se $F^c \doteq \mathbb{R}^n \setminus F$ for um subconjunto aberto no espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$.
- \bar{B} : denotará o fecho do subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, isto é, o menor subconjunto fechado do espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$, que contém o conjunto B .
- ∂A : denotará a fronteira do subconjunto A no espaço vetorial real métrico $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d_n)$, isto é,

$$\partial A \doteq \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} .$$

- $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x), \partial_{x_j} u(x), u_{x_j}(x)$: denotarão a derivada parcial de primeira ordem, em relação à variável x_j , calculada em $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \in A$, da função real $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x), \partial_{x_j x_i}^2 u(x), \partial_{x_j} \partial_{x_i} u(x), u_{x_i x_j}(x)$: denotarão a derivada parcial de segunda ordem, em relação às variáveis x_i e x_j , calculada em $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \in A$, da função $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- De modo semelhante definimos as derivadas parciais de ordem maior ou igual a três de uma função, a valores reais, de várias variáveis reais.

Capítulo 2

Definições e Propriedades Básicas

2.1 Definições básicas

Começaremos introduzindo a

Definição 2.1 *Uma equação diferencial parcial, que será denotada por EDP, é uma equação que envolve uma função, a valores reais, de várias variáveis reais, que denotaremos por*

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

e suas derivadas parciais em relação às variáveis

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

de várias ordens, a ser determinada.

De um modo pouco mais preciso, é uma equação que envolve uma função, a ser determinada, e suas derivadas parciais, que pode ser colocada na seguinte forma:

$$F \left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x), \dots, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x), \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(x), \dots, \underbrace{\frac{\partial^k u}{\partial x_i^m \partial x_j^l}(x)}_{m+l=k}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(x) \right) = 0, \quad (2.2)$$

onde

$$x \doteq (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,$$

onde o conjunto Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , e $F: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, a valores reais dada, e

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

é uma função, a valores reais, a ser determinada.

Definimos a ordem da EDP (2.2) como sendo a ordem da mais alta derivada parcial que aparece na EDP (2.2).

A seguir exibiremos alguns exemplo de EDP's.

Exemplo 2.3 A equação

$$e^{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)} = 0$$

para cada

$$(x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2,$$

é uma EDP, de 1.a ordem, nas variáveis \underline{x} e \underline{y} .

Observação 2.4 Notemos que a função $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ será dada por

$$F(\underbrace{s_1, s_2}_{=x,y}, \underbrace{s_3}_{u(x,y)}, \underbrace{s_4}_{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}, \underbrace{s_5}_{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}) \doteq e^{s_4 + s_5},$$

para cada $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) \in \mathbb{R}^5$.

Exemplo 2.5 A equação

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),$$

para cada

$$(t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times (-L, L),$$

é uma EDP de 2.a ordem, nas variáveis \underline{t} e \underline{x} , que será denominada de Equação (unidimensional) do Calor.

Observação 2.6 Notemos que a função $F: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ será dada por

$$F(\underbrace{s_1, s_2}_{=t,x}, \underbrace{s_3}_{u(t,x)}, \underbrace{s_4}_{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}, \underbrace{s_5}_{\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)}, \underbrace{s_6}_{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)}, \underbrace{s_7}_{\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x)}, \underbrace{s_8}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t,x)}, \underbrace{s_9}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)}) \doteq s_4 - \alpha^2 s_9,$$

para cada $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9) \in \mathbb{R}^9$.

Exemplo 2.7 A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),$$

para cada

$$(t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times (-L, L),,$$

é uma EDP de 2.a ordem, nas variáveis \underline{t} e \underline{x} , que será denominada de Equação (unidimensional) da Onda.

Observação 2.8 Notemos que a função $F: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ será dada por

$$F(\underbrace{s_1, s_2}_{=t, x}, \underbrace{s_3}_{u(t, x)}, \underbrace{s_4}_{\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)}, \underbrace{s_5}_{\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)}, \underbrace{s_6}_{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)}, \underbrace{s_7}_{\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t, x)}, \underbrace{s_8}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t, x)}, \underbrace{s_9}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)}) \doteq s_6 - c^2 s_9,$$

para cada $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9) \in \mathbb{R}^9$.

Exemplo 2.9 A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

para cada

$$(x, y) \in \Omega \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^2,$$

é uma EDP de 2.a ordem, nas variáveis x e y , que será denominada de Equação (bi-dimensional) de Laplace.

Observação 2.10 Notemos que a função $F: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ será dada por

$$F(\underbrace{s_1, s_2}_{=x, y}, \underbrace{s_3}_{u(x, y)}, \underbrace{s_4}_{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)}, \underbrace{s_5}_{\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)}, \underbrace{s_6}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)}, \underbrace{s_7}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)}, \underbrace{s_8}_{\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y)}, \underbrace{s_9}_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)}) \doteq s_6 + s_9,$$

para cada $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9) \in \mathbb{R}^9$.

Exemplo 2.11 A equação

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0,$$

para cada

$$(t, x) \in (0, \infty) \times (-L, L) \subseteq \mathbb{R}^2$$

é uma EDP de 3.a ordem, nas variáveis t e x , que será denominada de Equação de Korteweg-de Vries.

Definição 2.12 Dada a EDP de ordem $k \in \mathbb{N}$, pela equação (2.2), diremos que uma função $u: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, definida em $\Omega' \subseteq \Omega$, é uma solução clássica da EDP (2.2), em Ω' se $u \in C^k(\Omega'; \mathbb{R})$ e satisfaz a EDP (2.2), para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega'$.

Exemplo 2.13 No Exemplo (2.3) acima, é fácil ver que não existe solução da EDP.

O estudo da existência e unicidade de soluções para as EDP's dos Exemplos (2.5), (2.7) e (2.9) serão objetivos de estudos neste curso.

O Exemplo (2.11) é um tipo importante de EDP que não será estudada neste curso. Há uma vasta quantidade de problemas associados a esta EDP na literatura.

2.2 EDP's lineares e o princípio da superposição de soluções

Começaremos com a

Definição 2.14 Diremos que a EDP (2.2) é linear se a função \underline{F} , que a define, for função do 1.º grau em relativamente à função \underline{u} e todas as derivadas parciais da função \underline{u} que aparecem na EDP (2.2).

Caso contrário diremos que EDP é não-linear.

Exemplo 2.15 A forma geral de uma EDP linear, de 1.ª ordem, nas variáveis

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

é dada por:

$$\sum_{j=1}^n a_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) + b(x_1, x_2, \dots, x_n) u(x_1, x_2, \dots, x_n) + c(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (2.16)$$

onde

$$a_1^2(x) + a_2^2(x) \dots + a_n^2(x) \neq 0,$$

para cada $x \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, onde o conjunto $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.17 A forma geral de uma EDP linear, de 2.ª ordem, nas variáveis

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

será dada por:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{k=1}^n b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + c(x) u(x) + d(x) = 0, \quad (2.18)$$

onde

$$a_{11}^2(x) + a_{12}^2(x) + \dots + a_{nn}^2(x) \neq 0,$$

para cada $x \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, onde Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.19 No caso de duas variáveis reais, que as indicaremos por x, y , as EDP's dos Exemplos (2.15) e (2.17) acima, poderão ser escritas nas seguintes formas:

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + C(x, y) u(x, y) + D(x, y) = 0 \quad (2.20)$$

e

$$\begin{aligned} & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + B_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) + B_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ & + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + F(x, y) u(x, y) + G(x, y) = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

para cada $(x, y) \in \Omega$, onde o conjunto $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 .

Observação 2.22 *Notemos que, se na segunda EDP estivermos supondo que*

$$u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$$

(isto é, vale o Teorema de Schwarz do Cálculo II, ou ainda, podemos trocar a ordem de derivação das derivadas parciais mistas de 2.a ordem), então a EDP (2.21) tornar-se-á:

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2 B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \\ + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + F(x, y) u(x, y) + G(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Exemplo 2.24 *Os Exemplos (2.5), (2.7) e (2.9) da seção anterior, são EDP 's lineares, de 2.a ordem.*

Exemplo 2.25 *Os Exemplos (2.3) e (2.11) da seção anterior, são EDP 's, não lineares, de 1.a e 3.a ordens, respectivamente.*

Com isto podemos introduzir a

Definição 2.26 *Diremos que uma EDP linear é homogênea se, na EDP linear, o termo que não contém a função u e suas derivadas parciais, for nulo.*

Caso contrário a EDP linear será dita não-homogênea.

Exemplo 2.27 *A forma geral de uma EDP linear, homogênea, de 1.a ordem, nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n é dada pelo Exemplo (2.15), onde*

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

para $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, caso contrário ela será uma EDP linear, de 1.a ordem, não-homogênea.

Exemplo 2.28 *A forma geral de uma EDP linear, homogênea, de 2.a ordem, nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , é dada pelo Exemplo (2.17), onde*

$$d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

para cada $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, caso contrário ela será uma EDP linear, de 2.a ordem, não-homogênea.

Observação 2.29 *Notemos que a função $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$u(x) \doteq 0, \quad \text{para cada } x \in \Omega,$$

será sempre uma solução clássica de uma EDP linear e homogênea (de qualquer ordem).

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Temos também a:

Definição 2.30 Dada uma EDP, o termo que contém a(s) parcela(s) que envolvem as derivadas parciais de ordem igual a ordem da EDP será denominada parte principal da EDP.

Com isto temos os:

Exemplo 2.31 A parte principal da EDP do Exemplo (2.15) será dada por :

$$\sum_{j=1}^n a_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Exemplo 2.32 A parte principal da EDP do Exemplo (2.17) será dada por :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Exemplo 2.33 No caso particular de duas variáveis, que indicaremos por x e y , a parte principal das EDP do Exemplo (2.19) serão dadas por:

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + B_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) + B_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y),$$

respectivamente.

Observação 2.34 Notemos que, se na segunda EDP acima, estivermos supondo que $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ (isto é, vale o Teorema de Schwarz do Cálculo II, ou ainda, podemos trocar a ordem de derivação das derivadas parciais mistas de 2.a ordem) então a parte principal da EDP acima, tornar-se-á:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

Observação 2.35 A parte principal de certas EDP podem nos fornecer propriedades importantes das possíveis soluções das mesmas.

Algumas dessas propriedades serão estudadas ao longo destas notas de aula.

Com isto introduzir a:

Definição 2.36 Diremos que uma EDP é semi-linear se a parte principal da EDP for linear.

Temos os:

Exemplo 2.37 A forma geral de uma EDP semi-linear, de 1.a ordem, nas variáveis reais x e y , será dada por:

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + C(x, y, u(x, y)) = 0,$$

para cada

$$(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

onde

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Exemplo 2.38 A forma geral de uma EDP semi-linear, de 2.a ordem, nas variáveis reais x e y , será dada por:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + B_1(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) + B_2(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ + E\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right) = 0,$$

para cada

$$(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

onde

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Observação 2.39 Notemos que, se na EDP do Exemplo (2.38) acima, estivermos supondo que $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ (isto é, vale o Teorema de Schwarz do Cálculo II, ou ainda, podemos trocar a ordem de derivação das derivadas parciais mistas de 2.a ordem), então a EDP acima, tornar-se-á:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ + E\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right) = 0,$$

Exemplo 2.40 A EDP,

$$x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \text{sen}[u(x, y)]$$

para cada

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma EDP semi-linear, de 1.a ordem.

Exemplo 2.41 A equação KdV (Korteweg-de Vries), introduzida no Exemplo (2.11), é uma EDP semi-linear, de 3.a ordem.

Exemplo 2.42 A equação de Burger, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \rho u(t, x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),$$

para cada

$$(t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times (-L, L),$$

é uma EDP semi-linear, de 2.a ordem, para cada $\nu, \rho \neq 0$.

Observação 2.43 Notemos que se $\rho = 0$ a EDP acima tornar-se-á na equação do calor.

Exemplo 2.44 A equação de Sine-Gordon,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \beta \operatorname{sen}[u(t, x)] = 0,$$

para cada

$$(t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times (-L, L),$$

é uma EDP semi-linear, de 2.a ordem, se $\beta \neq 0$.

Observação 2.45 Notemos que se $\beta = 0$ a EDP acima tornar-se-á na equação da onda.

Exemplo 2.46 A equação de Poisson,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = h(x, y),$$

para cada

$$(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

onde

$$h(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

é uma EDP linear, de 2.a ordem, não-homogênea.

Se

$$h \equiv 0, \quad \text{em } \Omega,$$

a EDP acima será a equação de Laplace, introduzida no Exemplo (2.9).

Exemplo 2.47 Em geral, em \mathbb{R}^n , com $n \geq 2$, a equação de Laplace terá a seguinte forma:

$$\Delta u(x) = 0,$$

para cada

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

onde Δ denota o operador (diferencial parcial) de Laplace ou Laplaciano, dado por

$$\begin{aligned} \Delta &\doteq \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Exemplo 2.49 A equação (unidimensional) do calor, introduzida no Exemplo (2.5), é uma EDP linear, homogênea e de 2.a ordem.

Exemplo 2.50 Em geral, a equação do calor n -dimensional terá a seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha^2 \Delta u(t, x),$$

para cada

$$(t, x) = (t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0, \infty) \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

onde Δ é o operador de Laplace, introduzido em (2.48).

Exemplo 2.51 A equação (unidimensional) da onda, introduzida no Exemplo (2.7), é uma EDP linear, homogênea, de 2.a ordem.

Exemplo 2.52 Em geral, a equação da onda n -dimensional terá a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \Delta u(t, x),$$

para cada

$$(t, x) = (t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

onde Δ é o operador de Laplace, introduzido em (2.48).

Observação 2.53 As considerações a seguir valem para EDP 's lineares de qualquer ordem.

1. Começaremos nossos estudos considerando EDP's lineares, de 1.a ou de 2.a ordem, nas variáveis reais x_1, x_2, \dots, x_n , ou seja, uma EDP da forma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) + \sum_{k=1}^m b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + c(x) u(x) + d(x) = 0, \quad (2.54)$$

para cada $x \doteq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$.

Observemos que podemos reescrever a EDP (2.54), na seguinte forma:

$$L(u) = f, \quad \text{em } \Omega, \quad (2.55)$$

onde \underline{L} é a transformação linear

$$\begin{aligned} \underline{L} : C^2(\Omega) &\rightarrow C(\Omega) \\ u &\mapsto L(u) \end{aligned}$$

definido por

$$[\underline{L}(u)](x) \doteq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) + \sum_{k=1}^m b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + c(x) u(x)$$

para cada $x \in \Omega$, onde

$$u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad f(x) \doteq -d(x),$$

para cada $x \in \Omega$.

A verificação de que \underline{L} é uma transformação linear é simples e será deixada como exercício para o leitor.

A transformação linear \underline{L} será denominada de operador diferencial parcial linear de ordem $\underline{2}$, se para algum $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenhamos

$$a_{ij} \neq 0,$$

e de ordem 1, se todos

$$a_{ij} = 0 \quad \text{e} \quad b_k \neq 0,$$

para algum $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

O nome "operador linear" é um abuso de notação que pode ser justificado se considerarmos \underline{L} agindo e tomando valores em $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, isto é,

$$\underline{L} : C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\Omega; \mathbb{R}),$$

onde

$$a_{ij}, b_k, c, f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}),$$

para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

2. Com isto temos que toda EDP linear de ordem $k \in \mathbb{N}$, pode ser colocada na forma (2.55), para um operador diferencial linear \underline{L} de ordem \underline{k} , conveniente.
3. Uma EDP linear, homogênea pode ser colocada na forma:

$$L(u) = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad (2.56)$$

e será denominada EDP linear homogênea associada à EDP (2.55).

4. Notemos que, devido a linearidade e a homogeneidade, uma combinação linear de soluções da EDP (2.56), também será solução da EDP (2.56), isto é, se as funções

$$u_1, u_2, \dots, u_m \in C^k(\Omega; \mathbb{R})$$

satisfazem a EDP (2.56) e

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C}),$$

então a função

$$u \doteq \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i,$$

que pertence à $C^k(\Omega; \mathbb{R})$ (ou \mathbb{C}), também será solução da EDP (2.56), ou seja, o conjunto

$$W \doteq \{u \in C^k(\Omega; \mathbb{R}) (\text{ou } \mathbb{C}); L(u) = 0\} \quad (2.57)$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial $(C^k(\Omega; \mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde \pm e \cdot denotam as operações usuais de adição de funções e de multiplicação de funções por números reais (ou complexos)).

Um modo simples de mostrarmos a afirmação acima é verificar que

$$W = \text{Ker}(L),$$

onde Ker(L), denota o núcleo da transformação linear \underline{L} .

5. Este resultado é conhecido como princípio da superposição (finita) de soluções associada à EDP (2.56).
6. Lembremos que no caso de uma EDO linear, homogênea, de ordem $k \in \mathbb{N}$, o subespaço formado por todas as soluções da EDO tem dimensão \underline{k} , em particular, finita.

Como veremos mais adiante, para EDP's lineares, homogêneas, isto poderá não ocorrer, ou seja, a dimensão do subespaço \underline{W} de $C^k(\Omega; \mathbb{R})$, dado por (2.57), pode não ser finita!

7. *Existem EDP' lineares, de 1.a ordem, que não tem solução!*

Para ilustrar, H. Lewy em 1954, mostrou que existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ tal que a EDP

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) + i \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) - 2i(x + iy) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = f(t, x, y),$$

para cada

$$(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$$

não tem solução em $C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ (ver [7] Teorema (1.47), página 81).

Para ilustrar a situação do item (6) da Observação (2.53) acima, temos o

Exemplo 2.58 *Encontrar o subespaço vetorial \underline{W} , do espaço vetorial $C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, formado por todas as soluções clássicas da EDP linear, homogênea de 2.a ordem:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2. \quad (2.59)$$

Resolução:

Notemos que neste caso o operador diferencial associado à EDP (2.59) será

$$L : C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

dado por

$$L(u) \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \text{para cada } u \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

Para encontrarmos o subespaço vetorial \underline{W} , notemos que EDP (2.59), pode ser colocada na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right] = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo deveremos ter

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f(y), \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.60)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Fixando-se a variável $x \in \mathbb{R}^2$ e integrando-se a EDP (2.60) acima, em relação à variável y , obteremos a seguinte solução da (2.60): EDP

$$u(x, y) \doteq F(y) + G(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $G \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é arbitrária e a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Conclusão: se a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ for uma solução clássica da EDP (2.59), então ela deverá ser dada por

$$u(x, y) \doteq F(y) + G(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.61)$$

para alguma $F, G \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Reciprocamente, se $F, G \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ então, é fácil ver que, a função u , dada por (2.61), será uma solução clássica da EDP (2.59), em \mathbb{R}^2 .

Portanto o subespaço vetorial \underline{W} , será dado por:

$$W = \{u \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) ; u(x, y) \doteq F(y) + G(x), (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ onde } F, G \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})\},$$

ou seja, será o subespaço vetorial formado por todas as soluções da EDP (2.59). □

Observação 2.62

1. Notemos que a dimensão do subespaço vetorial \underline{W} , obtido acima, não é finita!
2. Como veremos ao longo destas notas, a noção de solução de uma EDP pode variar, dependendo do problema que estamos interessados em estudar.

A definição de solução introduzida na Definição (2.12) é o que se denomina solução clássica de uma EDP.

3. Como veremos mais adiante, podemos ter outras possibilidades para o conceito de solução de uma EDP que poderão ser úteis, não necessariamente sendo, o de solução clássica.
4. Outra questão importante, associada à EDP's lineares, homogêneas, é que poderemos ter um princípio de superposição "infinito" de soluções da EDP dada, ou seja, "combinações lineares infinitas", mais precisamente, séries de funções formada por soluções da EDP dada.

Isto é deixado mais explícito na:

Proposição 2.63 (Princípio da superposição infinita) *Seja L , um operador diferencial de ordem $k \in \mathbb{N}$, cujos coeficientes são funções definidas em um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e tomando valores em \mathbb{R} (respectivamente, \mathbb{C}).*

Suponhamos que a sequência de funções $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $u_n \in C^k(\Omega; \mathbb{R})$ (respectivamente, \mathbb{C}) é uma solução clássica da EDP linear, homogênea

$$L(u) = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (2.64)$$

Suponhamos que a sequência numérica real (respectivamente, complexa) $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que a série de funções

$$u \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$$

seja convergente e k -vezes continuamente parcialmente diferenciável, termo a termo, em $\underline{\Omega}$.

Então

$$L(u) = 0, \quad \text{em } \Omega,$$

ou seja, a função u será uma solução clássica da EDP linear homogênea dada.

Demonstração:

Como a série de funções

$$u \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \quad \text{para cada } x \in \Omega \quad (2.65)$$

é convergente e k -vezes continuamente diferenciável, termo a termo, em $\underline{\Omega}$, segue que $u \in C^k(\Omega)$ e, para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &\stackrel{(2.65)}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \right](x) \\ &\stackrel{\text{hipótese}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha_n u_n](x) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[\frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) \right], \end{aligned}$$

para cada $x \in \Omega$.

Mais geralmente, para cada $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, k\}$ com

$$i_1 + \dots + i_m \leq k \quad \text{e} \quad 1 \leq j_1, j_2, \dots, j_m \leq n,$$

teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_m} u}{\partial x_{j_1}^{i_1} \dots \partial x_{j_m}^{i_m}}(x) &= \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_m} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \right]}{\partial x_{j_1}^{i_1} \dots \partial x_{j_m}^{i_m}}(x) \\ &\stackrel{\text{hipótese}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_m} u_n}{\partial x_{j_1}^{i_1} \dots \partial x_{j_m}^{i_m}}(x), \end{aligned} \quad (2.66)$$

para cada $x \in \Omega$.

Logo, do fato que podemos derivar parcilamente a série de funções, termo a termo, em Ω , ou seja, de (2.66), segue que

$$\begin{aligned} [L(\mathbf{u})](x) &= \left[L \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \right) \right] (x) \\ &\stackrel{(2.66)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \underbrace{[L(u_n)](x)}_{\stackrel{(2.64)}{=} 0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para cada $x \in \Omega$, completando a demonstração do resultado. □

2.3 Condições de Contorno e Iniciais

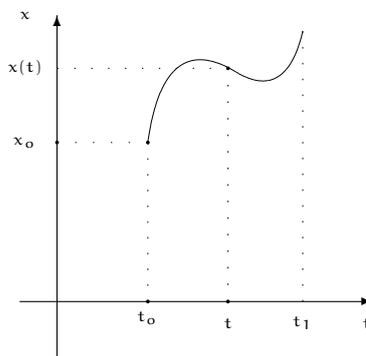
Observação 2.67

1. No estudo das EDO's surgem problemas do seguinte tipo: dada uma função $f : \Omega \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar uma função $x : I \stackrel{\text{intervalo}}{\subseteq} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que $t_0 \in I$, que seja solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{para } t \in (t_0, t_1) \\ x(t_0) = x_0 & \text{(condição inicial)} \end{cases}, \quad (2.68)$$

onde $(t_0, x_0) \in \Omega$ é fixado.

Tal problema é denominado problema de valor inicial (PVI) associado a EDO em questão (veja a figura abaixo).



2. Se a função f acima é uma função bem comportada (por exemplo, pertencente a $C^1(\Omega; \mathbb{R})$) então o PVI acima terá solução (clássica) definida em algum intervalo I , que contém $\underline{t_0}$, além, disso esta solução será única na classe $C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

3. Podemos também considerar o problema de encontrar solução (clássica) $x = x(t)$ que satisfaça

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{para } t \in (t_0, t_1) \\ x(t_0) = x_0 \text{ e } x(t_1) = x_1 & \text{(condições de contorno)} \end{cases}, \quad (2.69)$$

onde $(t_0, x_0), (t_1, x_1) \in \Omega$ estão fixados, que é denominado problema de valor de contorno (PVC) associado a EDO em questão.

4. Sob certas condições sobre a função f acima, o problema de valor de contorno (2.69) poderá ter solução clássica, e esta poderá ser única, definida em algum intervalo I , que contém t_0 .

5. No caso de EDP's a situação pode ser, como veremos, um pouco mais delicada.

Vejamos que, por exemplo, no caso EDP lineares homogêneas, o subespaço vetorial formado pelas soluções pode ter dimensão infinita (veja Exemplo (2.58)).

Mesmo assim podemos considerar os análogos dos problemas associados a EDO's, para o caso de EDP's.

A seguir trataremos desta questão.

Um destes problemas, é dado pela:

Definição 2.70 O problema de encontrar solução $u = u(x)$ (clássica ou não) para o problema

$$\begin{cases} F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(x), \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(x)\right) = 0 & \text{para } x \in \Omega \\ \text{mais restrições sobre a função } u \text{ e suas derivadas na direção} \\ \text{normal exterior unitária em cada ponto da fronteira de } \underline{\Omega}, \end{cases} \quad (2.71)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, com Ω um subconjunto aberto, com fronteira suave, de \mathbb{R}^n , F uma função, a valores reais, definida em algum subconjunto aberto de \mathbb{R}^m dado, será denominado problema de valor de contorno associado a EDP em questão.

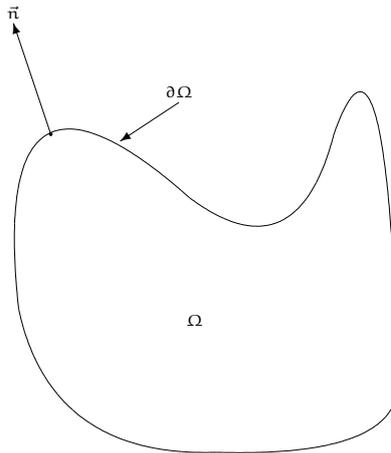
Um exemplo de problema deste tipo é dado pelo:

Exemplo 2.72 Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixados, $\underline{\Omega}$ um subconjunto aberto, com fronteira suave, de \mathbb{R}^n e $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada.

O problema de encontrar uma função $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaça:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{para } x \in \Omega \\ \alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(x) = f(x), & \text{para } x \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.73)$$

é um problema de valor de contorno, onde $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\underline{x})$ denota a derivada direcional da função \underline{u} , na direção (unitária) normal exterior, no ponto \underline{x} pertencente à fronteira de Ω (veja a figura abaixo).



Se

$$\beta = 0 \quad e \quad \alpha \neq 0,$$

o problema acima é conhecido como problema de Dirichlet.

Neste caso, a condição

$$u|_{\partial\Omega} = f$$

é conhecida como condição de Dirichlet.

Se

$$\alpha = 0 \quad e \quad \beta \neq 0,$$

o problema acima será denominado problema de Newman.

Neste caso, a condição

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = f$$

é conhecida como condição de Newman.

Observação 2.74

1. No caso $n = 2$, com variáveis t e \underline{x} , onde

$$\Omega \doteq \{(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}^2; t \in (-\infty, 0)\},$$

o problema (2.73) acima pode, por exemplo, significar impor condições sobre o valor da função a ser encontrada, isto é, $u = u(t, \underline{x})$, de modo a satisfazer a EDP em questão (no caso, Laplaciano igual a zero), conhecendo-se o valor da função \underline{u}

e de sua derivada normal (unitária) exterior, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x)$, ao longo do traço da curva

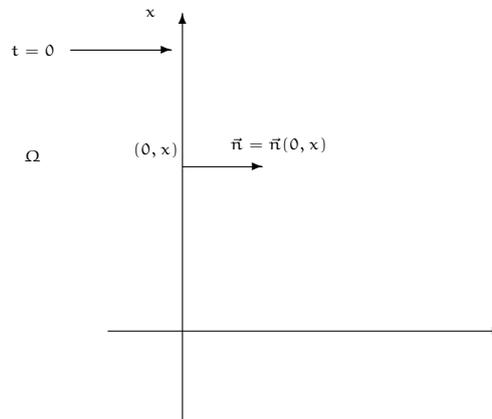
$$\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = 0\},$$

isto é, o eixo Ox .

Neste caso, para cada $(t, x) \in Ox$, o vetor $\vec{n} = \vec{n}(t, x)$, será um vetor unitário normal à curva (veja figura abaixo)

$$\{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t = 0\} = \{(0, x); x \in \mathbb{R}\}, \quad (2.75)$$

com o mesmo sentido do vetor \vec{e}_1 , ou seja, será o vetor \vec{e}_1 .



Portanto, na situação acima, em cada ponto da curva (2.75), a derivada direcional na direção normal da função u , ao longo da curva (2.75), será a derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$.

2. O caso análogo do problema de valor inicial associado a uma EDO para uma EDP é um pouco mais delicado.

Um exemplo deste, seria o problema de encontrar uma função, a valores reais,

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

para os quais conhecemos o valor da função $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e de algumas de suas derivadas parciais, para uma das variáveis fixadas (para ilustrar, por exemplo, $x_1 = 0$), como função das outras variáveis não fixadas, são conhecidos:

$$u(0, x_2, \dots, x_n) = f_0(x_2, x_3, \dots, x_n) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = f_i(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

As restrições acima serão denominadas condições iniciais e resolver o problema de valor inicial (PVI) ou problema de Cauchy associado a uma EDP é encontrar uma solução (clássica) da EDP que satisfaz as condições iniciais dadas.

3. Por exemplo, o (PVI) associado a equação da onda unidimensional em \mathbb{R}^2 , será do tipo

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = f(x), & \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = g(x), & \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções "bem comportadas" dadas.

Mais a frente veremos o que significará a expressão "bem comportadas" para este caso.

Neste caso a curva inicial será o eixo Ox e conhecemos a função u , bem como sua derivada direcional na direção do vetor unitário

$$\vec{e}_1 \doteq (1, 0),$$

nos pontos do eixo Ox (isto é, a derivada parcial da função u em relação a t nos pontos $(0, x)$).

4. O (PVI) associado a equação do calor unidimensional em \mathbb{R}^2 , será do tipo:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x), & \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = f(x), & \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada.

Como no caso anterior, a curva inicial será o eixo Ox .

5. Em geral, sob certas condições, o conceito de condições iniciais está associado a conhecer o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo de uma curva quando $n = 2$, ao longo de uma superfície quando $n = 3$ e, mais geralmente, ao longo de uma hiper-superfície quando $n \in \mathbb{N}$ é qualquer (a grosso modo, uma hiper-superfície em \mathbb{R}^n é um "objeto" de dimensão $n - 1$ em \mathbb{R}^n).
6. Podemos ter situações em que aparecem condições de contorno e condições iniciais.

Tais problemas serão denominados problemas mistos associados a EDP em questão.

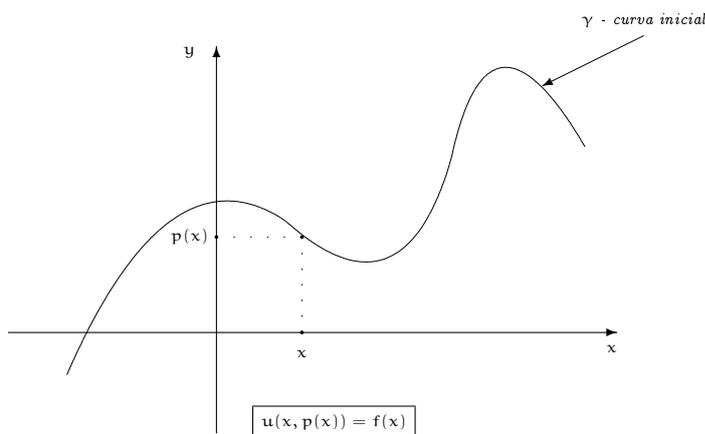
A seguir exibiremos mais alguns exemplos das situações introduzidas acima.

Exemplo 2.76 O problema de encontrar uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que

$$\begin{cases} u_y(x, y) = 0, & \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, p(x)) = f(x), & \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $f, p \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ são dadas, é um problema de valor inicial ou problema de Cauchy.

A condição inicial é dada sobre a curva γ , cujo traço é a representação geométrica do gráfico da função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (veja a figura abaixo).



Observação 2.77 Veremos, no próximo capítulo, que, na situação acima, tal problema de Cauchy admitirá uma única solução clássica.

Temos também o:

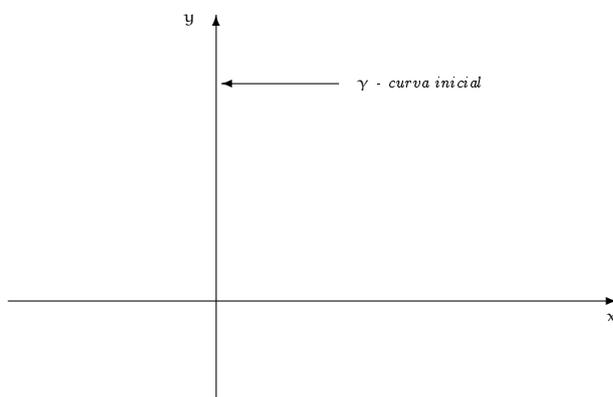
Exemplo 2.78 O problema de encontrar uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que

$$u_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.79)$$

$$u(0, y) = g(y), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}, \quad (2.80)$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é dada, é um problema de valor inicial ou problema de Cauchy.

Neste caso a condição inicial se dá sobre o eixo Oy (veja a figura abaixo).



Observação 2.81 Ao contrário do Exemplo (2.76), este problema de Cauchy não tem solução se a função g não for constante!

De fato, como

$$u(0, y) \stackrel{(2.80)}{=} g(y), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R},$$

derivando esta equação, em relação a y , obteremos

$$g'(y) = u_y(0, y), \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

Como

$$u_y(x, y) \stackrel{(2.79)}{=} 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

segue que

$$g'(y) = 0, \quad \text{para } y \in \mathbb{R},$$

ou seja, a função g deverá ser a função constante!

Por outro lado, se a função g for uma função constante, o problema de Cauchy terá infinitas soluções (clássicas), isto é, não teremos unicidade de soluções (clássicas).

De fato, pois para cada $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ temos que

$$u(x, y) \doteq f(x) + \underbrace{g(y)}_{= \text{constante}}, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

será solução do problema de Cauchy (2.79), (2.80).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Outro problema importante é dado pelo:

Exemplo 2.82 Seja Ω , um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

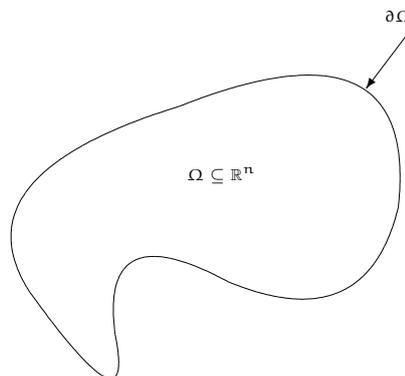
O problema

$$u_t(t, x) = \alpha^2 \Delta u(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.83)$$

$$u(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \partial\Omega, \quad (2.84)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}, \quad (2.85)$$

onde $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada, satisfazendo algumas condições apropriadas, é um problema misto (veja a figura abaixo).



A condição de contorno é dada por (2.84), isto é,

$$u(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \partial\Omega$$

e a condição inicial é dada por (2.85), ou seja,

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}.$$

Observação 2.86

1. Dados um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ "bem comportados", gostaríamos de encontrar uma solução

$$u \in \underbrace{C([0, \infty) \times \overline{\Omega}; \mathbb{R})}_{(I)} \cap C^2((0, \infty) \times \Omega; \mathbb{R}) \quad (2.87)$$

que satisfaz a equação do calor (2.83).

Notemos que a condição (I) em (2.87) implicará que $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(2.84)}{=} \text{com } t=0 \quad u(0, x) \\ &\stackrel{(2.85)}{=} f(x), \quad \text{para cada } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.88)$$

ou seja, para começar a pensar em resolver o problema (2.83), (2.84) e (2.85), precisamos que a função $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça a seguinte condição:

$$f(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in \partial\Omega.$$

Restrições deste tipo, sobre os dados iniciais, são denominadas condições de compatibilidade.

2. Fisicamente, o problema acima, descreve o comportamento da temperatura no ponto $x \in \overline{\Omega}$ e no instante $t \in [0, \infty)$, que indicaremos por

$$u(t, x),$$

no sólido $\overline{\Omega}$, que é feito de um material homogêneo, cuja difusividade térmica é dada por α^2 , e é colocado em um reservatório, isolado térmicamente, e mantido a temperatura 0°C na fronteira (descrito pela condição de contorno (2.84)), onde a distribuição inicial de temperatura no sólido $\overline{\Omega}$ é dada pela função f (descrito pela condição inicial (2.85)).

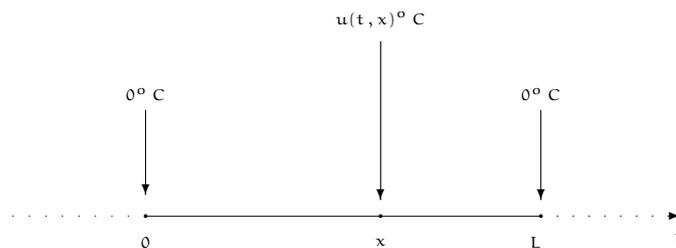
3. Em problemas mistos, a condição de contorno e a condição inicial, em geral, não são independentes (como no Exemplo (2.82) acima), ou seja, podemos ter condições de compatibilidade para que possamos iniciar o estudo da existência de solução para o problema.
4. O problema exibido no Exemplo (2.82) acima não será tratado neste curso, porém trataremos em detalhes o problema análogo unidimensional ($n = 1$, ou seja, da distribuição de temperatura em um fio de comprimento finito L), isto é, o seguinte problema misto:

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.89)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (2.90)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (2.91)$$

onde $f: \overline{\Omega} \doteq [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada (veja a figura abaixo).



Nosso objetivo será mostrar que se $f \in C([0, L]; \mathbb{R})$ satisfaz "certas condições" (veremos adiante quais), então o problema (2.89), (2.90) e (2.91) acima, admitirá uma única solução (clássica) na classe

$$C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}). \quad (2.92)$$

5. Notemos que no problema (2.89), (2.90) e (2.91) acima a função $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ deverá satisfazer as seguintes condições de compatibilidade:

$$f(0) \stackrel{(2.91)}{\underset{\text{com } x=0}{=}} u(0, 0)$$

$$\stackrel{(2.90)}{\underset{\text{com } t=0}{=}} 0,$$

$$f(L) \stackrel{(2.91)}{\underset{\text{com } x=L}{=}} u(0, L)$$

$$\stackrel{(2.90)}{\underset{\text{com } t=0}{=}} 0,$$

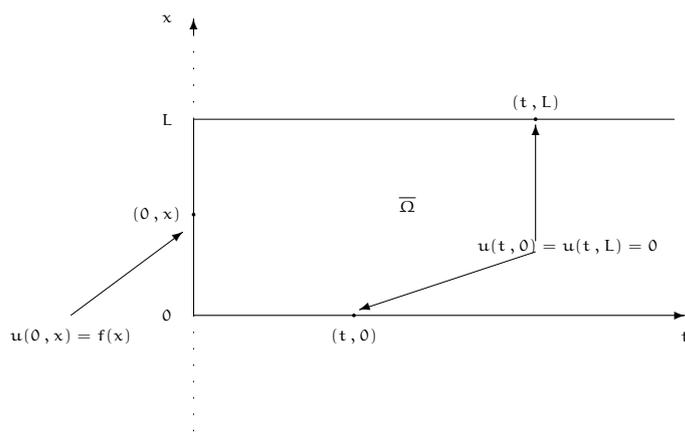
ou seja,

$$f(0) = f(L) = 0. \quad (2.93)$$

6. O problema misto (2.89), (2.90) e (2.91) acima, pode ser colocado na forma de um problema de contorno no conjunto

$$\Omega \doteq (0, \infty) \times (0, L),$$

como ilustra a figura abaixo.



Um outro problema importante é dado pelo:

Exemplo 2.94 Consideremos um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

O problema

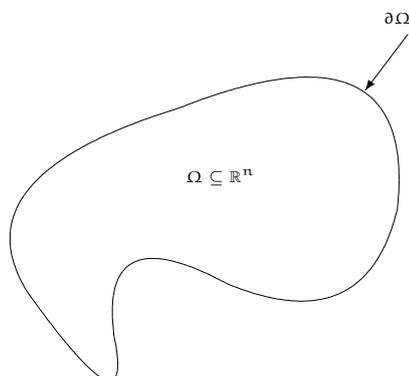
$$u_{tt}(t, x) = c^2 \Delta u(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.95)$$

$$u(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \partial\Omega, \quad (2.96)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}, \quad (2.97)$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}, \quad (2.98)$$

onde $f, g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas, satisfazendo algumas condições apropriadas, é um problema misto (veja a figura abaixo).



A condição de contorno é dada por (2.96), ou seja,

$$u(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \partial\Omega$$

e as condições iniciais são dada por (2.97) e (2.98), ou seja,

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}.$$

Observação 2.99

1. Dados um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e funções $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ "bem comportados", gostaríamos de encontrar uma solução na classe

$$\underbrace{C^1([0, \infty) \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times \Omega; \mathbb{R})}_{(I)} \quad (2.100)$$

que satisfaz o problema (2.95), (2.96), (2.97) e (2.98).

Notemos que a condição (I) em (2.100), juntamente com (2.96), (2.97) e (2.98), com $t = 0$, implicarão que $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ e $g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(2.96)}{=} \stackrel{\text{com } t=0}{=} u(0, x) \\ &\stackrel{(2.97)}{=} f(x), \\ 0 &\stackrel{\partial_t (2.96)}{=} \stackrel{\text{com } t=0}{=} u_t(0, x) \\ &\stackrel{(2.98)}{=} g(x), \quad \text{para cada } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

ou seja, para começar a pensar em resolver o problema (2.95), (2.96), (2.97), (2.98), precisamos que as funções $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ e $g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, satisfaçam as seguintes condições:

$$f(x) = g(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in \partial\Omega,$$

que serão as condições de compatibilidade associadas ao problema (2.95), (2.96), (2.97) e (2.98).

2. Fisicamente, o problema acima, descreve o deslocamento vertical, no ponto $x \in \overline{\Omega}$ e no instante $t \in [0, \infty)$, que indicaremos por

$$u(t, x),$$

de uma membrana $\overline{\Omega}$, que é feita de um material homogêneo, onde \underline{c}^2 está relacionado com a elasticidade do objeto com que a membrana é feita, que está com a fronteira fixa (descrito pela condição de contorno (2.96)), onde a função \underline{f} descreve o perfil inicial da membrana e a função \underline{g} descreve a velocidade inicial com que a membrana começa a vibrar (descrito pela condições iniciais (2.97) e (2.98), respectivamente).

3. O problema colocado no Exemplo (2.94) acima também não será tratado neste curso, porém trataremos em detalhes o problema análogo unidimensional ($n = 1$, ou seja, o deslocamento vertical de um fio de comprimento finito L), isto é, o problema misto

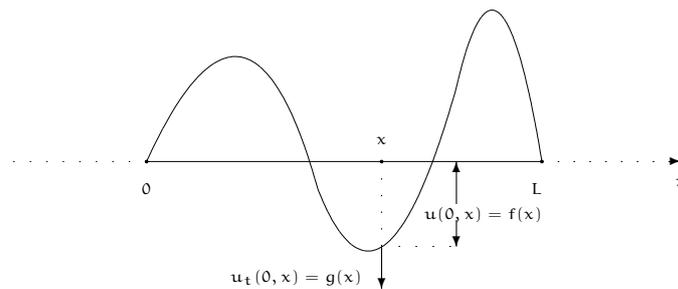
$$u_{tt}(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.101)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (2.102)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (2.103)$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (2.104)$$

onde $f, g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.



Nosso objetivo, para este problema, será mostrar que se $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$, $g \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$, satisfazendo "algumas condições" (veja o item abaixo), então o problema (2.101), (2.102), (2.103) e (2.104) acima, admitirá uma única solução (clássica) na classe

$$C^1([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}). \quad (2.105)$$

4. Notemos que no problema (2.101), (2.102), (2.103) e (2.104) acima, as funções $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$, $g \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$, deverão satisfazer as seguintes condições de compatibilidade:

$$f(0) \stackrel{(2.103)}{=}_{\text{com } x=0} u(0, 0)$$

$$\stackrel{(2.102)}{=}_{\text{com } t=0} 0,$$

$$f(L) \stackrel{(2.103)}{=}_{\text{com } x=L} u(0, L)$$

$$\stackrel{(2.102)}{=}_{\text{com } t=0} 0,$$

$$\begin{aligned} g(0) &\stackrel{(2.104)}{=} \underset{\text{com } x=0}{=} u_t(0, 0) \\ &\stackrel{(2.102)}{=} \underset{\text{com } t=0}{=} 0, \\ g(L) &\stackrel{(2.104)}{=} \underset{\text{com } x=L}{=} u_t(0, L) \\ &\stackrel{(2.102)}{=} \underset{\text{com } t=0}{=} 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(0) = 0 = f(L) \quad e \quad g(0) = 0 = g(L), \quad (2.106)$$

Além disso, para obtermos solução (clássica) do problema (2.101), (2.102), (2.103) e (2.104) na classe (2.105), a função f também deverá satisfazer a condição

$$f''(0) = 0 = f''(L). \quad (2.107)$$

Temos também o:

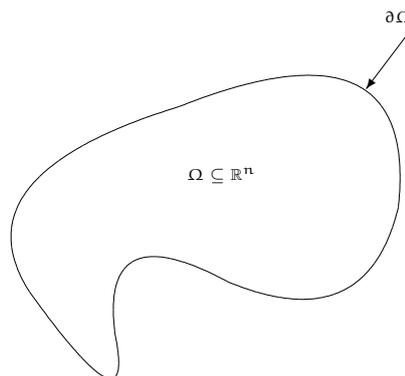
Exemplo 2.108 Consideremos um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

O problema

$$\Delta u(x) = 0, \quad \text{para } x \in \Omega, \quad (2.109)$$

$$u|_{\partial\Omega} = f, \quad (2.110)$$

onde $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada, satisfazendo alguma condição apropriada, é um problema contorno, conhecido como Problema de Dirichlet (veja a figura abaixo).



Observação 2.111

1. Sob certas condições sobre o conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e a função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o problema acima terá solução (clássica) única na classe

$$C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}).$$

2. Trataremos do problema (2.109) e (2.110) acima, para o caso $n = 2$, onde conjunto Ω será a região interior de um retângulo ou a região interior de uma circunferência centrada na origem e raio unitário, em \mathbb{R}^2 .

Para finalizar temos também o:

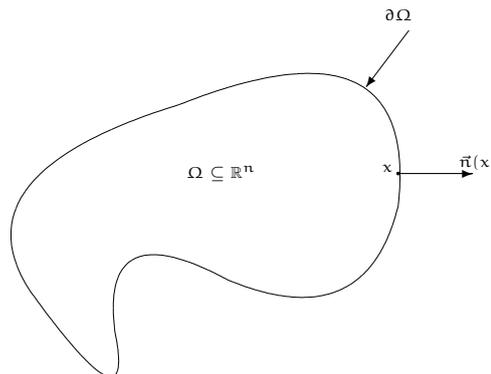
Exemplo 2.112 Consideremos Ω um subconjunto aberto limitado de \mathbb{R}^n cuja fronteira é suave.

O problema

$$\Delta u(x) = 0, \quad \text{para } x \in \Omega, \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \partial\Omega, \quad (2.114)$$

onde $\vec{n} = \vec{n}(x)$ é um vetor normal unitário, no ponto $x \in \partial\Omega$, apontando na direção exterior da região limitada Ω e $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada satisfazendo alguma condição apropriada, é um problema contorno, conhecido como Problema de Newman (veja a figura abaixo).



Observação 2.115

1. Sob certas condições sobre o conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e a função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o problema acima terá solução na classe

$$C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}).$$

2. O problema de Newman **não** tem unicidade de solução pois se a função $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é solução do problema de Newman, então a função $v: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$v(x) \doteq u(x) + C, \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega},$$

também será solução do problema de Newman, para qualquer constante $C \in \mathbb{R}$ fixada.

3. Trataremos do problema (2.113) e (2.114) acima quando $n = 2$, onde conjunto Ω , será a região interior de um retângulo ou a região interior de uma circunferência centrada na origem e raio unitário, em \mathbb{R}^2 .

2.4 Questões relevantes

Dado um problema envolvendo uma EDP e condições de contorno e/ou condições iniciais, três questões serão importantes, a saber:

1. existência de soluções, na classe escolhida;
2. unicidade de soluções, na classe escolhida;
3. dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais e/ou dados de contorno, na classe escolhida.

Observação 2.116

1. *Para discutir a existência é preciso especificar a classe onde estaremos procurando tais soluções e em que sentido as condições iniciais e/ou contorno devem ser satisfeitas.*

Para ilustrar, consideremos o problema misto associado a EDP do calor,

$$u_t(t, x) = \alpha^2 \Delta u(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad (2.117)$$

$$u(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \partial\Omega, \quad (2.118)$$

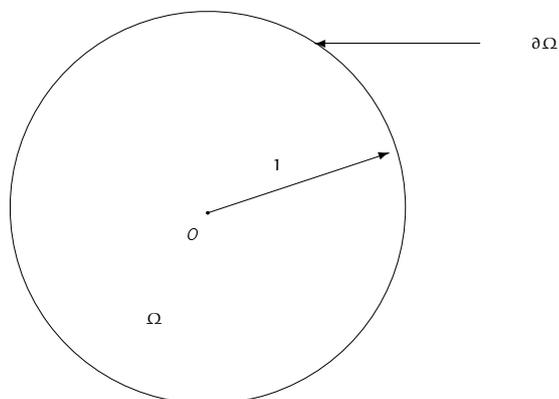
$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \overline{\Omega}, \quad (2.119)$$

onde o conjunto $\underline{\Omega}$ é a região interior do círculo unitário centrado na origem, isto é,

$$\Omega \doteq B(O; 1) \subseteq \mathbb{R}^3$$

(veja a figura abaixo) e $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ satisfazendo a condição de compatibilidade

$$f \equiv 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$



Se procurarmos solução na classe $C^2((0, \infty) \times \Omega; \mathbb{R})$ mas não, necessariamente, em $C([0, \infty) \times \bar{\Omega}; \mathbb{R})$, como iremos interpretar a condição de contorno (2.118) ?

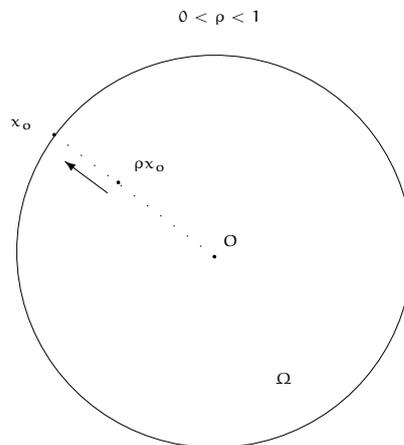
Um modo de resolver essa questão seria encontrar

$$u \in C^2((0, \infty) \times \Omega; \mathbb{R}),$$

satisfazendo a EDP (2.117) em Ω , de modo que, para verificar (2.118) faremos o seguinte:

(a) para o caso de $t_0 \in (0, \infty)$ e $x_0 \in \partial\Omega$ tenhamos (veja figura abaixo)

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} u(t_0, \rho x_0) = 0;$$



(b) para o caso de $t = 0$ e $x_0 \in \partial\Omega$, tenhamos

$$\lim_{(t, \rho) \rightarrow (0^+, 1^-)} u(t, \rho x_0) = 0.$$

De modo semelhante, como interpretar a condição inicial (2.119) estar satisfeita?

Um modo de verificar (2.119) poderia ser a seguinte:

(a) para cada $x_0 \in \Omega$, deveremos ter

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x_0) = f(x_0);$$

(b) para cada $x_0 \in \partial\Omega$, deveremos ter (veja a figura acima)

$$\lim_{(t, \rho) \rightarrow (0^+, 1^-)} u(t, \rho x_0) = f(x_0).$$

2. Uma vez mostrado que a solução existe em alguma classe escolhida, a questão seguinte seria verificar se esta solução é única na classe escolhida.

3. Finalmente, tendo mostrado a existência e a unicidade da solução na classe escolhida, a última questão básica seria verificar se a solução depende continuamente dos dados iniciais e/ou contorno dentro de alguma classe onde estes possam variar.
4. Um problema do tipo acima em que a solução existe, é única e depende continuamente dos dados iniciais e/ou contorno será dito problema bem posto (no sentido de Hadamard).

Caso contrário o problema será dito problema mal posto.

5. Neste curso trataremos, essencialmente, do problema da existência e unicidade soluções relacionados com a equação do calor, a equação onda unidimensionais e a equação de Laplace bidimensional.
6. A questão da dependência contínua em relação aos dados iniciais e/ou contorno são mais delicadas e só aparecerá em alguns exemplos específicos.

2.5 Exercícios

Capítulo 3

Equações Lineares de 1.a Ordem

Neste capítulo abordaremos alguns problemas de Cauchy interessantes relacionados com EDP's lineares de 1.a ordem em \mathbb{R}^2 (isto é, em duas variáveis reais), isto é, questões relacionadas como o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) + c(x, y) u(x, y) &= d(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), \quad \text{para cada } t \in I, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde I é um intervalo de \mathbb{R} , de modo que a

$$t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t)) \in \Omega$$

seja uma curva parametrizada, cujo traço está contido em Ω e $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas, satisfazendo condições apropriadas, a serem especificadas a seguir.

Também trataremos do problema de encontrar uma solução geral de uma EDP linear de 1.a ordem em um subconjunto aberto Ω de \mathbb{R}^2 , isto é, para a EDP:

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) + c(x, y) u(x, y) = d(x, y), \quad (3.2)$$

para cada $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, onde $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas, satisfazendo condições apropriadas, a serem especificadas.

3.1 Alguns exemplos interessantes

Começaremos com o:

Exemplo 3.3 *Consideremos o problema de Cauchy*

$$u_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.4)$$

$$u(x, p(x)) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

onde $p, f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ são funções dadas.

Encontrar, se existir, uma solução clássica, isto é, na classe

$$C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}), \quad (3.6)$$

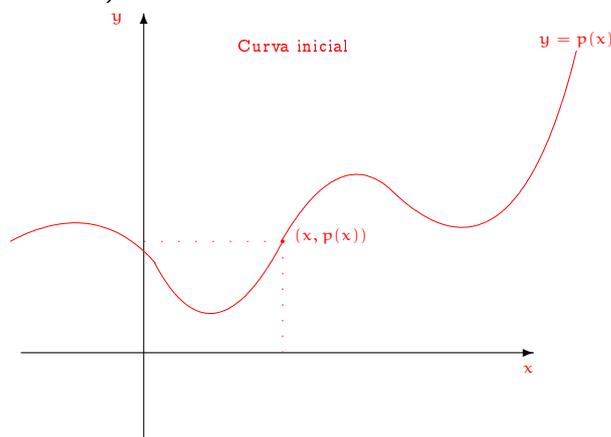
para o problema acima.

Resolução:

Como estamos procurando soluções clássicas do problema de Cauchy (3.4) e (3.5), deveremos ter

$$u \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

Notemos que o traço da curva inicial é a representação geométrica do gráfico da função $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (veja a figura abaixo).



A EDP (3.4) é simples de resolver e notemos que, integrando a EDP em relação a y , obteremos:

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \text{que implicará em } u &\text{ é constante em relação à variável } y, \\ \text{ou seja, } u(x, y) &= g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ou seja, a solução geral da EDP (3.4) será dada por:

$$u(x, y) \doteq g(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.8)$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ou seja, qualquer solução da EDP (3.4) deverá ser da forma (3.8), para alguma função $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Observemos que, para que (3.5) ocorra, deveremos ter:

$$\underbrace{u(x, p(x))}_{\stackrel{(3.8)}{=} g(x)} \stackrel{(3.5)}{=} f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$g(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

logo

$$u(x, y) \doteq f(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.9)$$

será uma solução do problema de Cauchy (3.4) e (3.5) acima na classe $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

Notemos que se a função

$$u = u(x, y)$$

é solução clássica do problema de Cauchy (3.4), (3.5), então a função $u = u(x, y)$ deverá ser dada por (3.9) e, reciprocamente, se a função $u = u(x, y)$ for dada por (3.9), então ela será solução clássica do problema de Cauchy (3.4), (3.5).

Conclusão: o problema de Cauchy (3.4), (3.5) admite uma única solução clássica, isto é, na classe $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, dada pela expressão (3.9).

□

Observação 3.10

1. No Exemplo (3.3) acima estamos procurando soluções clássicas, isto é, pertencentes à classe $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, para isto precisamos que $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.
2. Poderíamos considerar o mesmo problema de Cauchy (3.4), (3.5), com a função f em classe mais gerais do que $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Por exemplo, se procuramos soluções $u = u(x, y)$ do problema de Cauchy (3.4), (3.5), de modo que

$$u \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

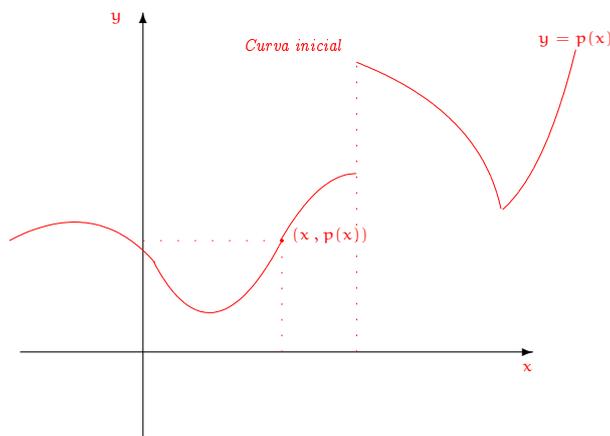
e exista

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

então bastaria que $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Notemos que a solução deste novo problema também seria dada pela expressão (3.9).

3. Observemos também que a curva inicial (que é a representação geométrica do gráfico da função $y = p(x)$, para $x \in \mathbb{R}$) **não** precisaria ser, necessariamente, uma curva contínua em \mathbb{R}^2 (veja a figura abaixo).



4. Mesmo com as simplificações acima, o problema de Cauchy (3.4),(3.5) ainda terá uma única solução na classe $C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, de modo que exista $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
5. Notemos também que, no problema de Cauchy (3.4)-(3.5), a dependência contínua em relação aos dados iniciais é quase que imediata, já que a solução clássica é da forma (3.9).

Deste modo o problema de Cauchy (3.4)-(3.5) é bem posto em $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (ou em $C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, de modo que exista $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

Mudaremos, ligeiramente, o problema acima para o seguinte problema:

Exemplo 3.11 Consideremos o problema de Cauchy

$$u_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.12)$$

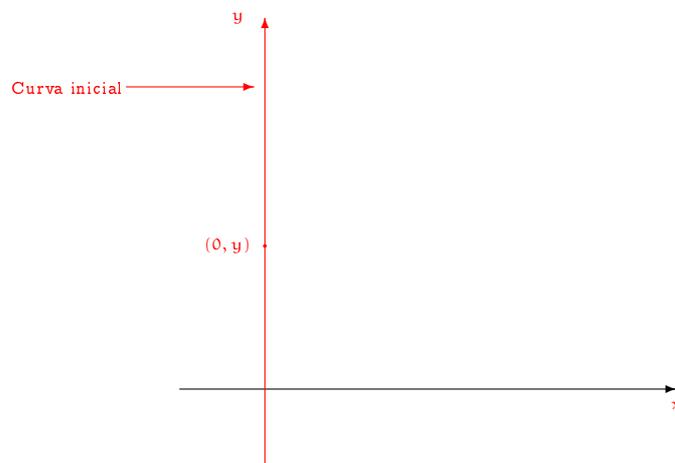
$$u(0, y) = f(y), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função dada.

Encontrar, se existir, uma solução clássica para o problema acima.

Resolução:

Na figura abaixo temos a representação geométrica do traço da curva inicial em (3.13):



Notemos que a diferença entre os problemas de Cauchy (3.4)-(3.5) e (3.12)-(3.13) é a curva inicial.

No problema de Cauchy (3.4)-(3.5) o traço da curva inicial é a representação geométrica do gráfico da função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e no problema de Cauchy (3.12)-(3.13) o traço da curva inicial é o eixo Oy , que não é a representação geométrica do gráfico de uma função da variável x .

Tentemos resolver o problema de Cauchy (3.12)-(3.13).

Notemos que derivando a identidade (3.13) em relação a y , fazendo $x = 0$ e utilizando-se (3.12), obteremos:

$$\underbrace{u_y(0, y)}_{(3.12)_0} \stackrel{(3.13)}{=} f'(y), \quad \text{para } y \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$f'(y) = 0, \quad \text{para } y \in \mathbb{R},$$

assim a função f deverá ser constante, ou seja, temos uma restrição sobre o dado inicial, a saber, a função f deverá ser uma função constante!

Conclusão: o problema de Cauchy (3.12)-(3.13) somente terá solução se

$$f(y) = C, \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R},$$

para $C \in \mathbb{R}$ fixada.

Como vimos no Exemplo (3.3), a solução geral da EDP (3.12), deverá ser da forma

$$u(x, y) = g(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.14)$$

donde segue que:

$$\underbrace{u(0, y)}_{(3.14)_{g(0)}} \stackrel{(3.13)}{=} f(y) = C,$$

ou seja, a solução do problema de Cauchy (3.12)-(3.13) será

$$u(x, y) = g(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é qualquer função que satisfaça a condição

$$g(0) = C.$$

Conclusões:

1. o problema de Cauchy (3.12)-(3.13) só admite solução se a função f for uma função constante, isto é, se a função f não for constante o problema de Cauchy (3.12)-(3.13) não terá solução;
2. se a função f for uma função constante, o problema de Cauchy (3.12)-(3.13) terá infinitas soluções, isto é, não terá unicidade de soluções.

Assim o problema de Cauchy (3.12)-(3.13) é mal posto.

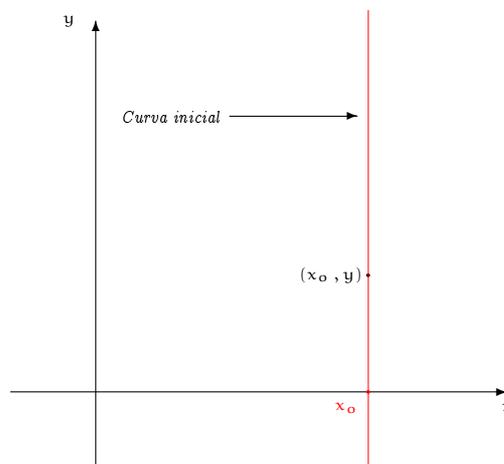
Observação 3.15 *A situação é análoga se considerarmos o seguinte problema de Cauchy:*

$$u_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.16)$$

$$u(x_0, y) = f(y), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ são dados.

Notemos que neste caso o traço da curva inicial será uma reta vertical (veja a figura abaixo).



Pergunta-se:

- Que restrições a função \underline{f} deverá satisfazer para que o problema de Cauchy (3.16)-(3.17) tenha solução clássica?
- Sob essas condições sobre o dado inicial \underline{f} a solução clássica será única?

Deixaremos as respostas as estas questões como exercício para o leitor.

Outro exemplo interessante é o:

Exemplo 3.18 Consideremos o problema de Cauchy

$$u_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.19)$$

$$u(1 - y^2, y) = f(y), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}, \quad (3.20)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função dada.

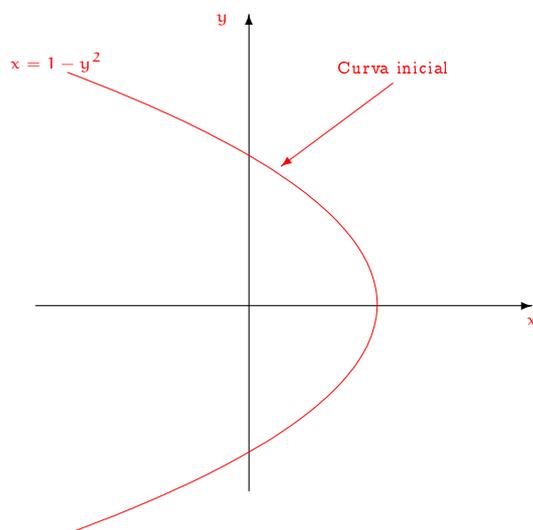
Encontrar, se existir, solução clássica para o problema de Cauchy acima.

Resolução:

Neste caso a curva inicial é o traço da parábola

$$x = 1 - y^2, \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R},$$

cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo.



Do Exemplo (3.3) (veja (3.8)) sabemos que a solução geral da EDP (3.19) será dada por:

$$u(x, y) = g(x), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Notemos que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, deveremos ter

$$u(x_0, y) = g(x_0), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}, \quad (3.21)$$

ou seja, a função $u = u(x, y)$ deverá ser constante ao longo de cada reta vertical $x = x_0$.

Notemos que se $x_0 \in (-\infty, 1)$, a reta vertical

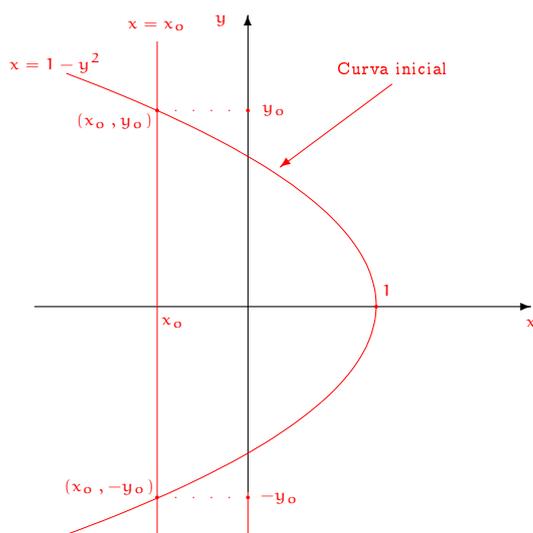
$$x = x_0,$$

interceptará a curva inicial em dois pontos distintos, a saber,

$$(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad (x_0, -y_0),$$

onde (veja a figura abaixo)

$$x_0 = 1 - y_0^2.$$



Logo, se $x_0 \in (-\infty, 1)$, deveremos ter:

$$\begin{aligned} f(y_0) &\stackrel{(3.20)}{=} x_0 = 1 - y_0^2 \quad u(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(3.21)}{=} g(x_0) \\ &\stackrel{(3.21)}{=} u(x_0, -y_0) \\ &\stackrel{(3.20)}{=} x_0 = 1 - (-y_0)^2 \quad f(-y_0), \end{aligned}$$

ou seja, a função f deverá ser uma função par.

Conclusão: se a função f não for uma função par, o problema de Cauchy (3.19)-(3.20) não terá solução.

Notemos que, para $x_0 \in (1, \infty)$, a curva inicial não interceptará as retas verticais $x = x_0$ (ao longo das quais a solução \underline{u} deverá ser constante), ou seja, mesmo a função \underline{f} sendo uma função par, o problema de Cauchy (3.19)-(3.20) terá infinitas soluções, isto é, não teremos unicidade de soluções do problema de Cauchy (3.19)-(3.20).

Logo o problema de Cauchy (3.19)-(3.20) é mal posto.

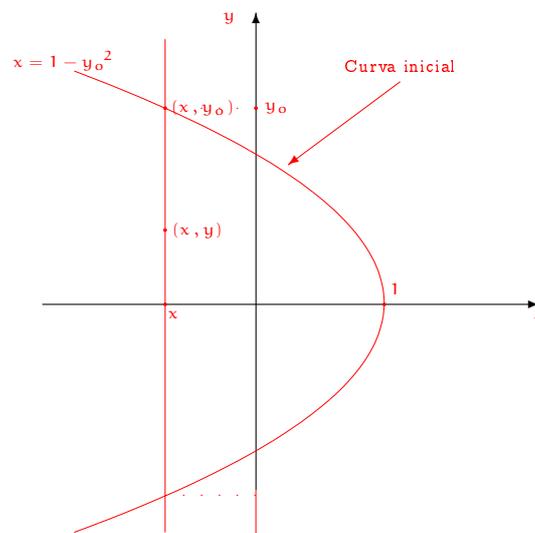
Notemos também que se $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função par, como queremos encontrar soluções clássicas do problema de Cauchy (3.19)-(3.20), precisaremos impor mais uma condição.

Para ver isto observemos que, em princípio, o valor da solução \underline{u} , no ponto

$$(x, y) \in (-\infty, 1) \times (0, \infty),$$

deverá ser da forma:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{\text{por (3.21), não depende de } y \text{ (veja a figura abaixo)}}{=} u(x, \underbrace{y_0}_{=\pm\sqrt{1-x}}) \\ &\stackrel{(3.20)}{=} f(y_0) \\ &\stackrel{x=1-y_0^2}{=} f(\pm\sqrt{1-x}). \end{aligned}$$



Notemos que como a função \underline{f} é uma função par, devido a expressão acima da função \underline{u} , deveremos ter

$$f(\sqrt{1-x}) = f(-\sqrt{1-x}), \quad \text{para cada } x \in (-\infty, 1).$$

Como queremos que $u \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, será preciso garantir que exista a derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, em particular, para cada $x \in (-\infty, 1)$, deverá existir

$$\frac{d}{dx} \left[f(\sqrt{1-x}) \right] \stackrel{\text{Regra da Cadeia}}{=} \left[f'(\sqrt{1-x}) \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \right], \quad (3.22)$$

que é uma expressão problemática se $x = 1$, pois

$$\sqrt{1-x} = 0, \quad \text{quando } x = 1.$$

Supondo que tudo esteja de acordo, isto é, $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função par e tal que (3.22) exista para $x = 1$, então a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u(x, y) \doteq \begin{cases} f(\sqrt{1-x}), & \text{para cada } x \in (-\infty, 1] \\ g(x), & \text{para cada } x \in (1, \infty) \end{cases},$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função qualquer satisfazendo (para que a função u , dada pela expressão acima, seja solução clássica do problema (3.19) e (3.20)) e :

$$g(\underbrace{1}_{=x}) \stackrel{=x}{=} 1 \stackrel{=y}{=} (\underbrace{0}_{=y})^2 f(\underbrace{0}_{=y})$$

$$g'(1) = \left. \frac{d}{dx} [f(\sqrt{1-x})] \right|_{x=1},$$

será solução clássica do problema de Cauchy (3.19)-(3.20), ou seja, o problema de Cauchy dado terá uma infinidade de soluções, isto é, não terá unicidade de soluções clássicas, ou seja, é um problema mal posto. □

Observação 3.23

1. Dos Exemplos (3.3), (3.11) e (3.18), podemos concluir que a EDP

$$u_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{3.24}$$

terá uma única solução clássica para qualquer $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, se a curva inicial é de tal forma que a reta vertical $x = x_0$ intercepta a representação geométrica do gráfico da mesma em, exatamente, um ponto, ou seja, a curva inicial é a representação geométrica do gráfico de uma função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. O ponto crucial é que todas as soluções da EDP (3.24) são constantes ao longo de retas verticais e as curvas iniciais "boas", são aquelas que não têm retas tangentes verticais.

3. Nos Exemplos acima, as tais retas verticais serão denominadas curvas características planas associadas à EDP (3.24).

De modo mais preciso temos a:

Definição 3.25 Dada uma EDP linear de 1.a ordem em \mathbb{R}^2 (isto é, (3.2)), uma curva plana será denominada curva característica plana associada à EDP (3.2), se a parte da EDP que envolve as derivadas parciais (que são de 1.a ordem) da função incógnita pode ser escrita, ao longo dessa curva, como uma derivada total, isto é, se

$$t \mapsto (x(t), y(t)), \quad \text{para cada } t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

é uma parametrização dessa tal curva, então a parte da EDP que envolve as derivadas parciais (de 1.a ordem) da função incógnita, poderá se escrita como:

$$\frac{d}{dt} [u(x(t), y(t))], \quad \text{para cada } t \in I. \quad (3.26)$$

Observação 3.27

1. A grosso modo, na situação da Definição (3.25) acima, bastará integrar a EDP, calculada ao longo de cada uma dessas curvas características planas, para obter a solução desejada.
2. Notemos que foi isso que fizemos para encontrar a solução geral da EDP (3.4) no Exemplo (3.3): integramos a EDP em relação a y , isto é, ao longo das retas

$$x = x_0, \quad \text{para cada } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Notemos que ao longo da retas verticais $x = x_0$, o lado esquerdo da EDP (3.4) pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dy} [u(x_0, y)], \quad \text{para } y \in \mathbb{R},$$

já que, pela Regra da Cadeia para funções de váriais variáveis, a valores reais, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} [u(x_0, y)] &\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y) \underbrace{\frac{dx_0}{dy}(y)}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) \underbrace{\frac{dy}{dy}(y)}_{=1} \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y), \end{aligned}$$

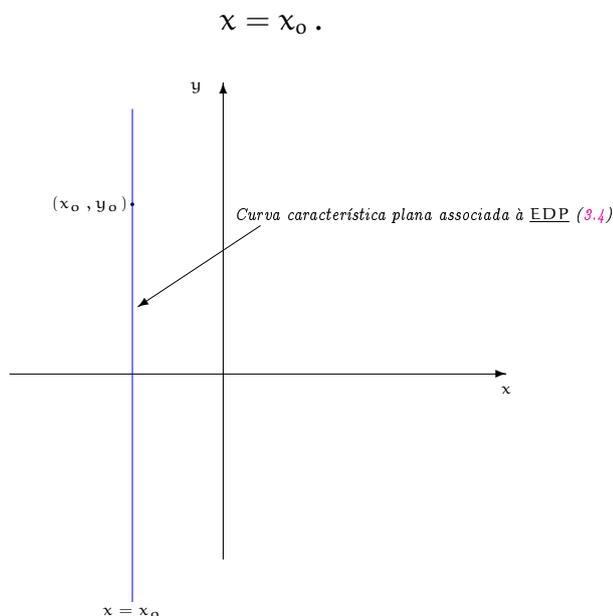
para $y \in \mathbb{R}$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado.

Assim, para $x_0 \in \mathbb{R}$, as retas verticais

$$x = x_0$$

serão as curvas características planas associadas à EDP (3.4).

3. Observemos que neste caso temos "muitas" curvas características planas, mais precisamente, em cada ponto de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passa uma (única) curva característica plana associada à EDP (3.4), a saber, a reta vertical (veja a figura abaixo)



4. A EDP (3.4) pode ser não homogênea que trataremos de modo semelhante, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.28 Consideremos o problema de Cauchy associado à EDP (linear de 1.a ordem) não homogêna

$$u_y(x, y) = h(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.29)$$

$$u(x, p(x)) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

onde $h \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $p, f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ são funções dadas.

Encontrar, se existir, uma solução clássica do problema de Cauchy (3.29)-(3.30) acima.

Resolução:

Notemos que as curvas características planas associadas à EDP são, como vimos anteriormente, as retas verticais (veja o Exemplo (3.3)).

$$x = x_0.$$

Assim para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, uma parametrização da curva característica plana associada à EDP, que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, será dada por:

$$t \mapsto (x_0, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

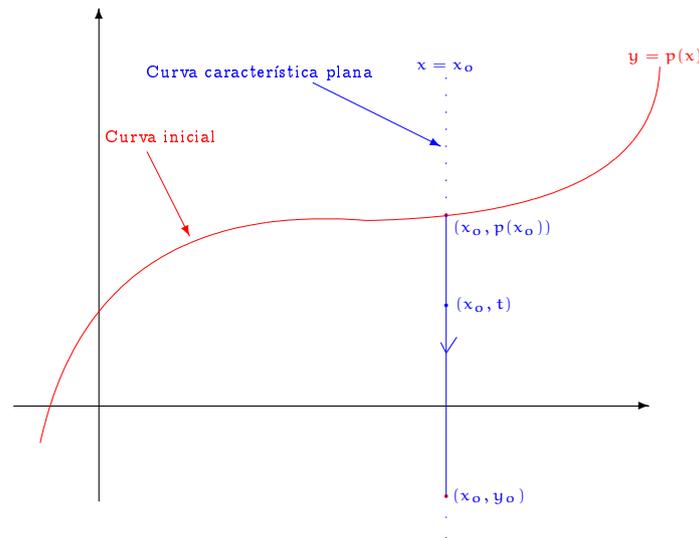
Logo, ao longo da curva características plana associada à EDP, que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, o lado esquerdo da EDP (3.29) (a parte que envolve as derivadas parciais de 1.a ordem da EDP) pode ser escrito na forma

$$\frac{d}{dt}[u(x_0, t)], \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

isto é, o lado esquerdo da EDP (3.29), pode ser escrito, ao longo da curva característica plana associada à mesma que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, como:

$$\frac{d}{dt}[u(x_0, t)] = h(x_0, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (3.31)$$

Portanto, para encontrarmos o valor da solução u , no ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, basta integrar a EDO (3.31) acima, em relação à variável t , de $t = p(x_0)$ (que corresponde ao ponto $(x_0, p(x_0))$) até $t = y_0$ (que corresponde ao ponto (x_0, y_0)) - veja a figura abaixo).



Com isto, utilizando as idéias acima, obteremos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) - u(x_0, p(x_0)) &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \int_{p(x_0)}^{y_0} \frac{d}{dt}[u(x_0, t)] dt \\ &\stackrel{(3.31)}{=} \int_{p(x_0)}^{y_0} h(x_0, t) dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \overbrace{u(x_0, p(x_0))}^{=(3.30) f(x_0)} + \int_{p(x_0)}^{y_0} h(x_0, t) dt \\ &= f(x_0) + \int_{p(x_0)}^{y_0} h(x_0, t) dt, \quad \text{para cada } x_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$u(x, y) = f(x) + \int_{p(x)}^y h(x, t) dt, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.32)$$

Notemos que $u \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, pois $f, p \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $h \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

Reciprocamente, se a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por (3.32), então a função u será solução do problema de Cauchy (3.29)-(3.30) pois:

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &\stackrel{(3.32)}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left[f(x) + \int_{p(x)}^y h(x, t) dt \right] \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} [f(x)]}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{p(x)}^y h(x, t) dt \right] \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} h(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$\begin{aligned} u(x, p(x)) &\stackrel{(3.32)}{=} f(x) + \underbrace{\int_{p(x)}^{p(x)} h(x, t) dt}_{=0} \\ &= f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mostrando que a função $u \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, dada por (3.32), satisfaz o problema de Cauchy (3.29)-(3.30).

Conclusão: o problema de Cauchy (3.29)-(3.30) admite uma única solução na classe $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (isto é, clássica) dada por (3.32). □

Observação 3.33 Podemos pensar em estudar a dependência contínua da solução do problema de Cauchy (3.29)-(3.30) em relação ao dado inicial (isto é, em relação a função f).

Podemos mostrar que a solução depende continuamente da função f , relativamente à norma do supremo da função e de sua derivada em $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ou seja, o problema de Cauchy (3.29)-(3.30) é bem-posto em $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

3.2 O problema de Cauchy

Nesta seção estudaremos vários problemas de Cauchy associados à EDP linear de 1.a ordem em duas variáveis

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) = c(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \quad (3.34)$$

onde o conjunto $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 .

Observação 3.35

1. Observemos que, na EDP (3.34), a função incógnita $u = u(x, y)$ aparece somente na parte principal da EDP (3.34).
2. EDP lineares de 1.a ordem, em duas variáveis, mais gerais, serão estudadas mais adiante.
3. Como vimos nos Exemplos da seção (3.1) anterior, deve existir alguma relação entre a curva inicial, ao longo das quais conhecemos a solução \underline{u} (isto é, o dado inicial), e a geometria das curvas características planas contidas no subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, para que tenhamos existência e unicidade de solução do problema de Cauchy associado à EDP (3.34).

Mais precisamente, o conjunto $\underline{\Omega}$ deverá ser "coberto" por curvas características planas associadas à EDP, que interceptam a curva inicial em, exatamente, um ponto.

4. Olharemos, a seguir, esta situação de um ponto de vista mais preciso.

Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e limitado de \mathbb{R} (ou seja, um subconjunto conexo cujo fecho é compacto de \mathbb{R}), $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada em $\underline{\Omega}$ (isto é, o traço da curva $\underline{\gamma}$, está contido em $\underline{\Omega}$, ou ainda $\gamma(I) \subseteq \Omega$) dada por

$$\gamma(t) \doteq (\sigma(t), \rho(t)), \quad \text{para cada } t \in I,$$

onde $\sigma, \rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções que satisfazem algumas condições que serão apresentadas mais adiante.

Consideremos o problema de Cauchy

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) = c(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (3.36)$$

$$u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), \quad \text{para cada } t \in I. \quad (3.37)$$

Para iniciar colocaremos as seguintes condições:

(H1) a curva (parametrizada) inicial $\underline{\gamma}$ é suave, ou seja, as funções σ, ρ pertencem à $C^1(I; \mathbb{R})$ e

$$[\sigma'(t)]^2 + [\rho'(t)]^2 \neq 0, \quad \text{para } t \in I, \quad (3.38)$$

isto é, o vetor $\gamma'(t)$ não é o vetor nulo, para cada $t \in I$ (ou ainda, o vetor tangente à curva parametrizada não se anula em nenhum instante);

(H2) a função f pertence à $C^1(I; \mathbb{R})$;

(H3) as funções a, b, c pertencem à $C(\Omega; \mathbb{R})$ e satisfazem

$$[a(x, y)]^2 + [b(x, y)]^2 \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.39)$$

isto é, as funções a e b não se anulam, simultaneamente, em $\underline{\Omega}$ (para garantir que a EDP (3.36) seja de 1.a ordem em $\underline{\Omega}$).

Para encontrar uma solução do problema de Cauchy (3.36)-(3.37) agiremos como nos Exemplos apresentados na seção (3.1) anterior, ou seja, procuraremos as curvas características planas associadas à EDP (3.36), ao longo das quais, o lado esquerdo da EDP (3.36) (isto é, a parte da EDP que envolve as derivadas parciais de 1.a ordem) possa ser escrito como uma derivada total.

Denotemos por \underline{C} uma curva característica plana, contida em $\underline{\Omega}$, associada à EDP (3.36), que vamos supor estar parametrizada por

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para cada } s \in J, \quad (3.40)$$

onde $J \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e

$$[\alpha'(s)]^2 + [\beta'(s)]^2 \neq 0, \quad \text{para } s \in J, \quad (3.41)$$

ou seja, o vetor tangente à curva característica plana \underline{C} , cujo traço está contido em $\underline{\Omega}$, associada à EDP (3.36), é um vetor não nulo, para cada $s \in J$.

Logo, ao longo da característica plana \underline{C} , o lado esquerdo da EDP (3.36) pode ser escrito como uma derivada total, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] &= a(\alpha(s), \beta(s)) u_x(\alpha(s), \beta(s)) \\ &\quad + b(\alpha(s), \beta(s)) u_y(\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para cada } s \in J. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Notemos que, da regra da cadeia para funções de váriais variáveis, segue que:

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] \stackrel{\text{Regra da cadeia}}{=} u_x(\alpha(s), \beta(s)) \alpha'(s) + u_y(\alpha(s), \beta(s)) \beta'(s) \quad (3.43)$$

para cada $s \in J$.

Logo, para cada $s \in J$, comparando (3.42) e (3.43), segue que, para encontrar as funções

$$\alpha = \alpha(s) \quad \text{e} \quad \beta = \beta(s), \quad \text{para cada } s \in J,$$

é suficiente que exista uma função $\lambda: J \rightarrow \mathbb{R}$, com

$$\lambda(s) \neq 0, \quad \text{para cada } s \in J,$$

de modo que

$$\alpha'(s) = \lambda(s) a(\alpha(s), \beta(s)), \quad (3.44)$$

$$\beta'(s) = \lambda(s) b(\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para } s \in J. \quad (3.45)$$

Notemos que

$$\lambda(s) \neq 0, \quad \text{para cada } s \in J$$

pois deveremos ter (3.41).

Neste caso a EDP (3.36) tornar-se-á

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \lambda(s) c(\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para } s \in J. \quad (3.46)$$

Observação 3.47

1. Observemos que as condições (3.44) e (3.45) significam, geometricamente, que, para cada $s \in J$, o vetor tangente à curva característica plana \underline{C} , no ponto $(\alpha(s), \beta(s))$ (isto é, o vetor $(\alpha'(s), \beta'(s))$) deve ser paralelo ao vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$.
2. Observemos também que a função $\lambda = \lambda(s)$, para $s \in J$, pode ser tomada constante e igual a $\underline{1}$.

Para vermos isto notemos, primeiramente, que a função $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua em J .

De fato, como a curva característica plana \underline{C} é suave (isto é, de classe $C^1(J; \Omega)$) e as funções a e b não se anulam, simultaneamente em $\underline{\Omega}$, temos as seguinte duas possibilidades:

2.1 se

$$a(\alpha(s_0), \beta(s_0)) = 0,$$

então, de (3.39), deveremos ter

$$b(\alpha(s_0), \beta(s_0)) \neq 0. \quad (3.48)$$

Neste caso, como a função

$$r \mapsto b(\alpha(r), \beta(r))$$

é, em particular, uma função contínua em J e temos (3.48), segue que existe intervalo aberto $J_s \subseteq J$, com $s_0 \in J_s$, de modo que

$$b(\alpha(r), \beta(r)) \neq 0, \quad \text{para cada } r \in J_s.$$

Logo, de (3.45), teremos:

$$\lambda(r) = \frac{\beta'(r)}{b(\alpha(r), \beta(r))}, \quad \text{para } r \in J_0,$$

mostrando que a função λ é contínua em $s_0 \in J$, para cada $s_0 \in J$.

2.2 por outro lado, se

$$b(\alpha(s_1), \beta(s_1)) = 0,$$

então, de (3.39), deveremos ter

$$a(\alpha(s_1), \beta(s_1)) \neq 0. \quad (3.49)$$

Neste caso, como a função

$$r \mapsto a(\alpha(r), \beta(r))$$

é, em particular, uma função contínua em J e vale (3.49), segue que existe intervalo aberto $J_s \subseteq J$, com $s_1 \in J_s$, de modo que

$$a(\alpha(r), \beta(r)) \neq 0, \quad \text{para cada } r \in J_0.$$

Logo, de (3.44), teremos:

$$\lambda(r) = \frac{\alpha'(r)}{a(\alpha(r), \beta(r))}, \quad \text{para } r \in J_0,$$

mostrando que a função λ é contínua em $s_1 \in J$, para cada $s_1 \in J$.

Seja $\Lambda : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que é uma primitiva associada a função $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, a função Λ é diferenciável em J e, além disso,

$$\Lambda'(s) = \lambda(s), \quad \text{para cada } s \in J.$$

Como $\lambda \in C(J; \mathbb{R})$ teremos

$$\Lambda \in C^1(J; \mathbb{R}).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \Lambda'(s) &= \lambda(s) \neq 0, \quad \text{para cada } s \in J, \\ \text{segue que, } \Lambda'(s) &> 0 \quad \text{ou} \quad \Lambda'(s) < 0, \quad \text{para todo } s \in J. \end{aligned}$$

Portanto a função $\Lambda = \Lambda(s)$ é estritamente crescente em J , se $\Lambda'(s) > 0$ para $s \in J$, ou estritamente decrescente em J , se $\Lambda'(s) < 0$ para $s \in J$, ou seja, a função

$\Lambda : J \rightarrow \Lambda(J)$ é bijetora, em particular, uma função inversível, ou seja, podemos considerar a seguinte mudança de variáveis

$$t \doteq \Lambda(s), \quad \text{para } s \in J \quad \text{ou} \quad s = \Lambda^{-1}(t), \quad \text{para } t \in K \doteq \Lambda(J), \quad (3.50)$$

e com esta obter uma reparametrização da curva característica \underline{C} , que indicaremos por

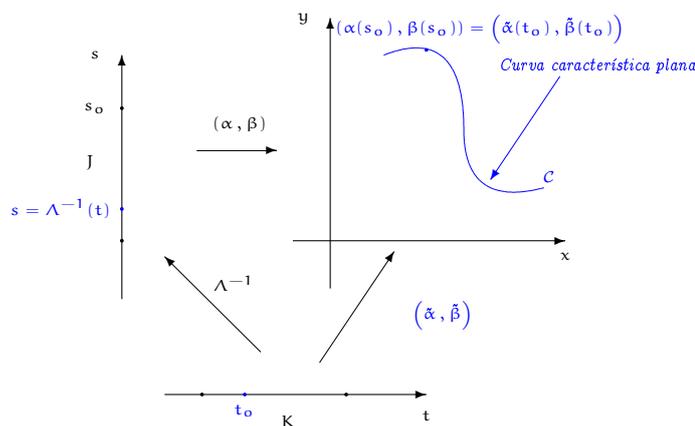
$$t \mapsto (\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)), \quad \text{para cada } t \in K,$$

isto é:

$$\tilde{\alpha}(t) \doteq \alpha(\Lambda^{-1}(t)), \quad (3.51)$$

$$\tilde{\beta}(t) \doteq \beta(\Lambda^{-1}(t)), \quad \text{para cada } t \in K. \quad (3.52)$$

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Assim, de (3.44)-(3.45) e (3.51)-(3.52), para cada $t \in K$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(t) &\stackrel{(3.51)}{=} \frac{d}{dt} [\underbrace{\alpha(\Lambda^{-1}(t))}_{=s}] \\ &\stackrel{\text{Regra da cadeia}}{=} \alpha'(s) \frac{ds}{dt}(t) \\ &\stackrel{\text{Teor. Der. Função Inversa}}{=} \alpha'(s) \frac{1}{\frac{dt}{ds}[t(s)]} \\ &\stackrel{(3.50)}{=} \alpha'(s) \frac{1}{\lambda(s)} \\ &\stackrel{(3.44)}{=} a(\alpha(s), \beta(s)) \\ &\stackrel{s=\Lambda^{-1}(t)}{=} a(\alpha(\Lambda^{-1}(t)), \beta(\Lambda^{-1}(t))) \\ &\stackrel{(3.51)}{=} a(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

De modo semelhante, para cada $t \in K$, teremos

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}'(t) &\stackrel{(3.52)}{=} \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\beta(\Lambda^{-1}(t))}_{=s} \right] \\ &\stackrel{\text{Regra da cadeia}}{=} \beta'(s) \frac{ds}{dt}(t) \\ &\stackrel{\text{Teor. Der. Função Inversa}}{=} \beta'(s) \frac{1}{\frac{dt}{ds}[t(s)]} \\ &\stackrel{(3.50)}{=} \beta'(s) \frac{1}{\lambda(s)} \stackrel{(3.44)}{=} b(\alpha(s), \beta(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{s=\Lambda^{-1}(t)}{=} b(\alpha(\Lambda^{-1}(t)), \beta(\Lambda^{-1}(t))) \\ &\stackrel{(3.51)}{=} b(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)), \end{aligned} \tag{3.54}$$

ou seja, nas novas variáveis, teremos

$$\tilde{\lambda}(t) = 1, \quad \text{para cada } t \in K.$$

3. **Conclusão:** as curvas características planas associadas à EDP (3.36) são curvas suaves, cujos traços estão contidas em $\underline{\Omega}$, que admitem parametrizações do tipo

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para cada } s \in J,$$

onde suas funções coordenadas devem satisfazer ao seguinte sistema de EDO's:

$$\alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)), \tag{3.55}$$

$$\beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para } s \in J. \tag{3.56}$$

4. O sistema de EDO's acima tem, em geral, uma infinidade de soluções.

Para obtermos uma única solução do sistema de EDO's (3.55)-(3.56) acima, será preciso fixar as condições iniciais, ou seja, fixar

$$\alpha(s_0) = x_0 \quad e \quad \beta(s_0) = y_0,$$

para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Mais precisamente utilizaremos o seguinte resultado básico da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias:

Teorema 3.57 *Seja $(x_0, y_0) \in \Omega$, onde o conjunto Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e suponhamos que $a, b \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$.*

Então existe um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$, de modo que $s_0 \in J$, e uma única solução

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$$

definida em J , pertencente à $C^1(J; \mathbb{R}^2)$, do sistema (3.55)-(3.56) satisfazendo:

$$\alpha(s_0) = x_0, \quad (3.58)$$

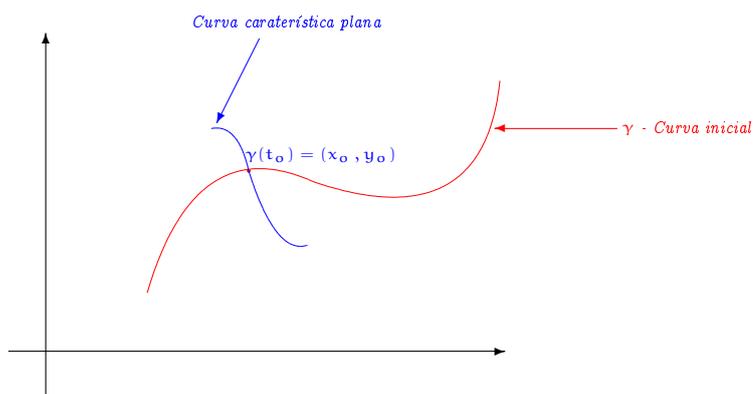
$$\beta(s_0) = y_0. \quad (3.59)$$

Além disso a solução obtida acima, depende continuamente dos dados iniciais.

Observação 3.60

1. *A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [11].*
2. *Utilizaremos o resultado acima para produzirmos muitas curvas características planas associadas à EDP (3.36), contidas em Ω , que interceptam o traço da curva inicial.*

Mais precisamente, pelo Teorema (3.57) acima, para cada ponto $\gamma(t_0)$, que pertence à curva inicial γ , existe uma (única) curva característica plana associada à EDP (3.36), que passa pelo ponto $\gamma(t_0)$ (veja a figura abaixo).



3. *Vimos, nos Exemplos da seção (3.1) anterior, que a existência e a unicidade de solução do problema de Cauchy do tipo (3.36)-(3.37), depende da existência e de como as curvas características planas associadas à EDP (3.36) interceptam o traço da curva inicial γ .*

Isto ficará mais claro nas próximas seções.

3.2.1 Curva característica plana que não é tangente à curva inicial

Consideraremos primeiramente o caso em que o traço da curva inicial $\underline{\gamma}$ **nunca** é tangente às curvas características planas associadas à EDP (3.36), obtidas pelo Teorema (3.57) (situação análoga ao Exemplo (3.28)).

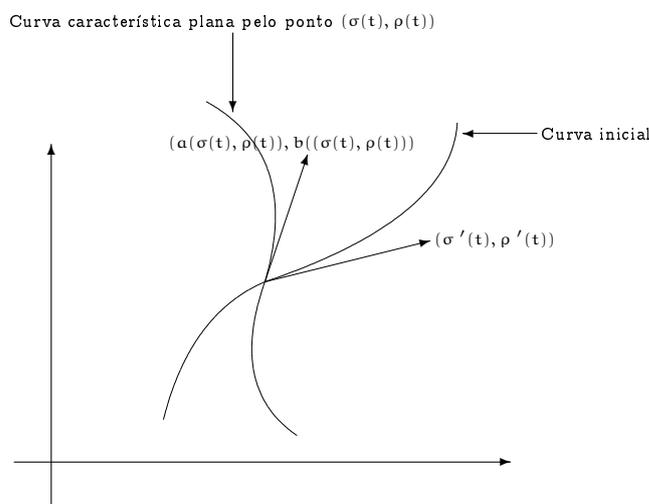
Se tais curvas não são tangentes, nos respectivos pontos de intersecção segue, de (3.55) e (3.56), que o vetor tangente à curva inicial, em um ponto da mesma, ou seja, o vetor $(\sigma'(t), \rho'(t))$, para algum $t \in I$, não será paralelo ao vetor $(a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$ (veja a figura abaixo), ou seja, os vetores

$$(\sigma'(t), \rho'(t)) \quad \text{e} \quad (a(\sigma(t), \rho(t)), b(\sigma(t), \rho(t)))$$

são L.I. em \mathbb{R}^2 , para cada $t \in I$, ou ainda:

(H4) para cada $t \in I$, deveremos ter:

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$



Com isto, para cada $t \in I$, existe uma única curva característica plana associada à EDP (3.36), que indicaremos por \underline{C}_t , passando pelo ponto $(\sigma(t), \rho(t))$ (ponto que pertence ao traço da curva inicial $\underline{\gamma}$), ou seja, uma única solução do sistema de EDO's (3.55)-(3.56), satisfazendo (3.58)-(3.59) (as condições iniciais), definida em uma vizinhança de s_0 (reparametrizando o traço da curva característica plana, se necessário, que podemos supor que $s_0 = 0$), com

$$x_0 \doteq \sigma(t) \quad \text{e} \quad y_0 \doteq \rho(t).$$

Observação 3.61

1. Observemos que, se duas curvas características planas se interceptassem, elas deverão coincidir a partir do ponto da intersecção.

De fato, isto deve ocorrer por causa da unicidade de soluções dada pelo Teorema (3.57) (veja a figura abaixo à esquerda).

2. Observemos que, na situação acima, para cada $t \in I$ fixado, o ponto $(\sigma(t), \rho(t))$ será o único ponto de intersecção do traço da curva inicial $\underline{\gamma}$ com a curva característica associada à EDP (3.36) (isto é, à curva C_t), que passa pelo ponto $(\sigma(t), \rho(t))$. Daremos uma explicação, para a afirmação acima, baseada em argumentos geométricos.

Suponhamos que existissem dois instantes, que indicaremos por

$$t_0, t_1 \in I,$$

diferentes e consecutivos, onde a curvas característica plana e a curva inicial se interceptam (veja a figura abaixo).

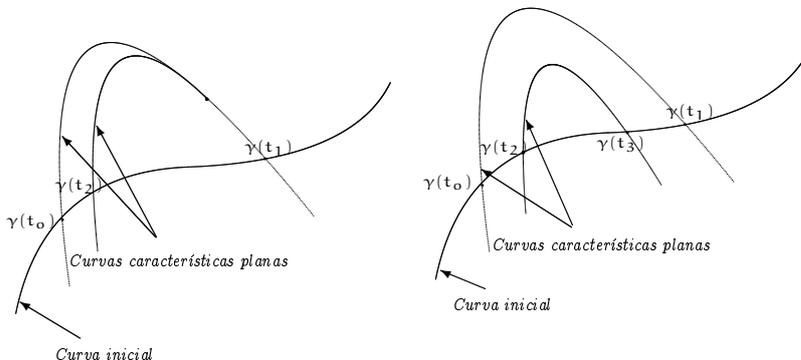
Escolhendo um outro instante

$$t_2 \in (t_0, t_1)$$

e considerando a curva característica plana associada à EDP (3.36), que passa pelo ponto $(\sigma(t_2), \rho(t_2))$, segue que só poderemos ter duas possibilidades para esta curva, a saber:

- ou, pelo item 1. acima, ela intercepta a curva característica plana associada à EDP (3.36), que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ (veja a figura abaixo à esquerda);
- ou ela interceptará a curva inicial em um instante (veja a figura abaixo à direita)

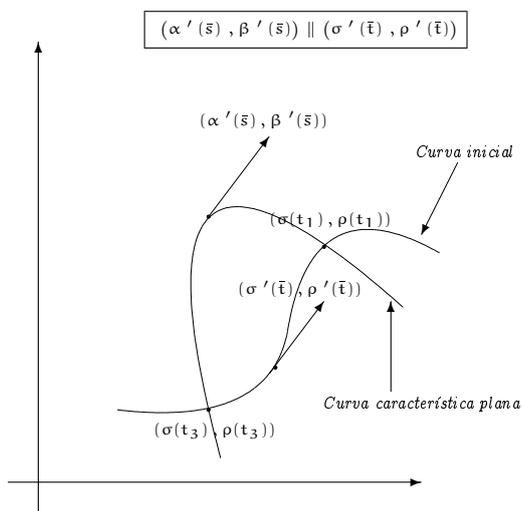
$$t_3 \in (t_2, t_1).$$



Notemos que em qualquer das situações acima existirão instantes

$$\bar{s} \in J \quad e \quad \bar{t} \in (t_3, t_1),$$

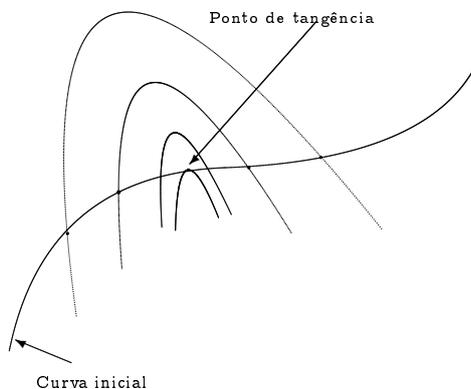
de modo que os vetores tangentes à curva característica plana associada à EDP (3.36), no ponto $(\alpha(\bar{s}), \beta(\bar{s}))$ e curva inicial, no instante \bar{t} , serão paralelos (veja a figura abaixo).



Independente de uma das duas situações acima que ocorrer, segue que quando fizermos o ponto

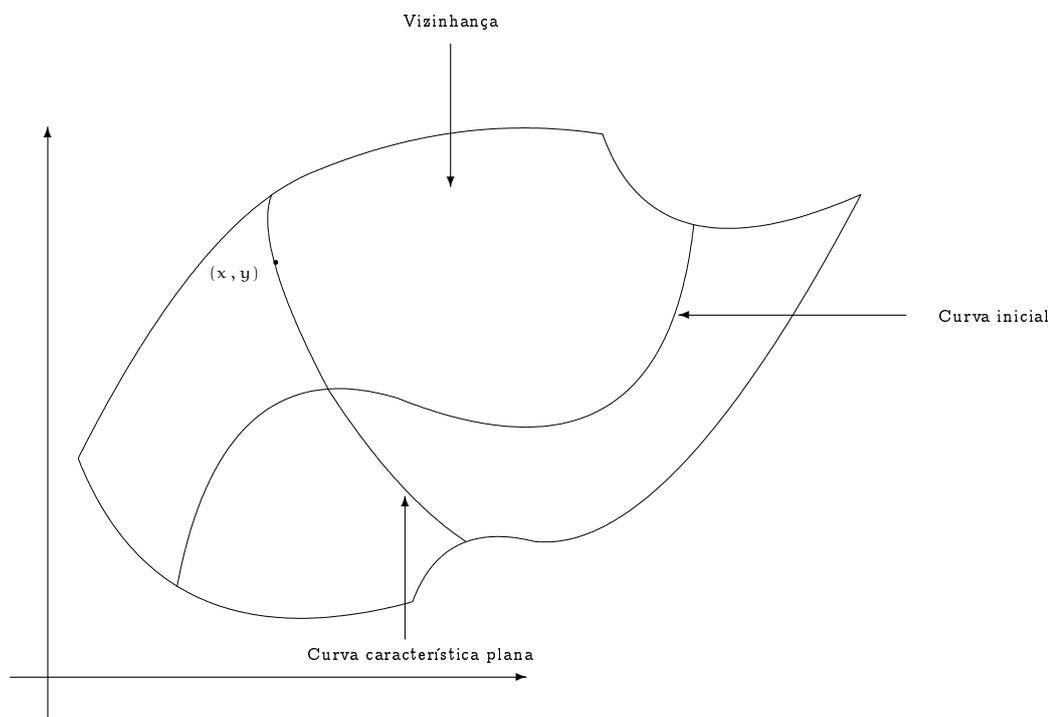
$$t_3 \rightarrow t_1,$$

o vetores tangentes obtidos no parágrafo acima, tenderão a ser um mesmo vetor, ou seja, teremos uma curva característica plana associada à EDP (3.36), que será tangente à curva inicial, em algum instante do intervalo (t_0, t_1) , o que contraria nossa hipótese (H4) (a figura abaixo ilustra a situação descrita acima).



Com as observações acima, podemos obter uma vizinhança do traço da curva inicial

γ , de modo que todo ponto dessa vizinhança pertence a uma única curva característica plana associada à EDP (3.36), que interceptará a curva inicial em um único ponto (não paralelamente - veja a figura abaixo).



Observemos que, para cada $t_0 \in I$ fixado, denotando-se uma parametrização da curva característica plana associada à EDP (3.36), que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ (que pertence à curva inicial) por

$$s \mapsto (x(s, t_0), y(s, t_0)),$$

então, de (3.55)-(3.56), deveremos ter

$$x_s(s, t_0) = a(x(s, t_0), y(s, t_0)), \quad (3.62)$$

$$y_s(s, t_0) = b(x(s, t_0), y(s, t_0)), \quad (3.63)$$

$$x(0, t_0) = \sigma(t_0), \quad (3.64)$$

$$y(0, t_0) = \rho(t_0), \quad \text{para } s \in I_0. \quad (3.65)$$

Com isto obtemos uma aplicação

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t)),$$

cujas imagens cobrem numa vizinhança do traço da curva inicial γ .

Observação 3.66 Na verdade não foi bem isto que conseguimos mostrar. Por que?

Notemos, para cada $t \in I$ fixado, de (H4), segue que os vetores

$$(\sigma'(t), \rho'(t)) \quad \text{e} \quad \underbrace{(\alpha(x(0, t), y(0, t)), b(x(0, t), y(0, t)))}_{\substack{(3.64), (3.65) \\ (\sigma(t), \rho(t))}} \quad \text{são L.I. em } \mathbb{R}^2, \quad (3.67)$$

assim deveremos ter

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_s(0, t) & x_t(0, t) \\ y_s(0, t) & y_t(0, t) \end{vmatrix} &\stackrel{(3.62), (3.63)}{=} \begin{vmatrix} \alpha(x(0, t), y(0, t)) & x_t(0, t) \\ b(x(0, t), y(0, t)) & y_t(0, t) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(3.64), (3.65)}{=} \begin{vmatrix} \alpha(\sigma(t), \rho(t)) & \sigma'(t) \\ b(\sigma(t), \rho(t)) & \rho'(t) \end{vmatrix} \stackrel{(3.67)}{\neq} 0, \end{aligned}$$

para cada $t \in I$.

Do Teorema (3.57), as funções

$$x = x(s, t) \quad \text{e} \quad y = y(s, t)$$

dependem continuamente de s e t , assim, como a função determinante é contínua em \mathbb{R} , segue do Cálculo I (do Teorema da conservação do sinal para limites) que, para cada $t \in I$, existe uma vizinhança, que indicaremos por V , do segmento $(0, t) \in \mathbb{R}^2$, para cada $t \in I$ (que é um subconjunto cujo fecho é compacto de \mathbb{R}), de modo que

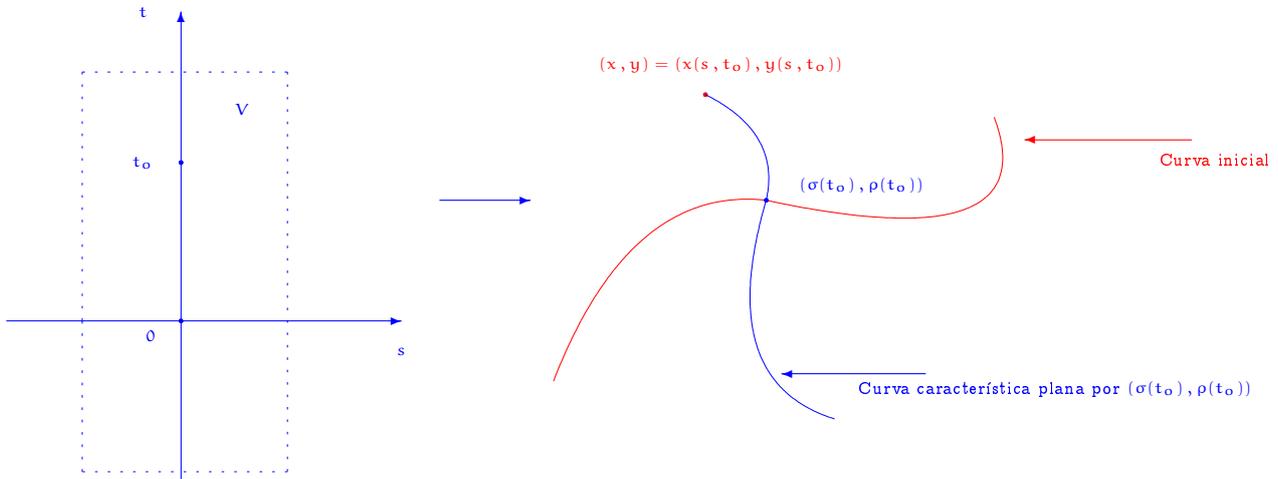
$$\begin{vmatrix} x_s(s, t) & x_t(s, t) \\ y_s(s, t) & y_t(s, t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

para cada $(s, t) \in V$.

Em particular, a transformação

$$\begin{aligned} T: \quad V &\longrightarrow \Omega \\ (s, t) &\mapsto (x(s, t), y(s, t)), \end{aligned} \quad (3.68)$$

será localmente injetora, o que nos permite (reduzindo a vizinhança V , se necessário) considerar a mesma sobre sua imagem (portanto será bijetora), ou seja, a transformação T será uma mudança de variáveis de classe $C^1(V; T(V))$ (a figura abaixo ilustra a situação).



Por fim observemos que se a função

$$u = u(x, y)$$

é solução do problema de Cauchy (3.36)-(3.37) então, definindo-se a função

$$v : V \rightarrow \mathbb{R},$$

por

$$v(s, t) \doteq u(x(s, t), y(s, t)), \quad \text{para cada } (s, t) \in V, \quad (3.69)$$

teremos que

$$\begin{aligned} v_s(s, t) &= \frac{d}{ds} [u(x(s, t), y(s, t))] \\ &\stackrel{\text{Regra da cadeia}}{=} u_x(x(s, t), y(s, t)) x_s(s, t) + u_y(x(s, t), y(s, t)) y_s(s, t) \\ &\stackrel{(3.62), (3.63)}{=} u_x(x(s, t), y(s, t)) a(x(s, t), y(s, t)) + u_y(x(s, t), y(s, t)) b(x(s, t), y(s, t)) \\ &\stackrel{(3.36)}{=} c(x(s, t), y(s, t)), \quad \text{para } (s, t) \in V. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Portanto, definido-se a função $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(s, t) \doteq c(x(s, t), y(s, t)), \quad \text{para cada } (s, t) \in V, \quad (3.71)$$

segue, de (3.70), que a função $v = v(s, t)$ será solução da seguinte EDP:

$$v_s(s, t) = h(s, t), \quad \text{para } (s, t) \in V. \quad (3.72)$$

Notemos também que, a condição inicial (3.37), nos fornecerá:

$$\begin{aligned} v(0, t) &\stackrel{(3.69)}{=} u(x(0, t), y(0, t)) \\ &\stackrel{(3.64)-(3.65)}{=} u(\sigma(t), \rho(t)) \\ &\stackrel{(3.37)}{=} f(t), \quad \text{para cada } t \in I. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Conclusão: de (3.69), (3.72), (3.73), segue que o problema de Cauchy (3.36)-(3.37) é equivalente ao seguinte problema de Cauchy:

$$v_s(s, t) = h(s, t), \quad \text{para } (s, t) \in V, \quad (3.74)$$

$$v(0, t) = f(t), \quad \text{para cada } t \in I. \quad (3.75)$$

Notemos que o problema de Cauchy acima é semelhante ao do Exemplo (3.28) e agiremos, do mesmo modo que lá, para resolvê-lo.

Para cada $t \in I$ fixado, integrando-se a EDP acima, em relação à s , de 0 à s , obteremos:

$$\begin{aligned} v(s, t) - \underbrace{v(0, t)}_{\stackrel{(3.75)}{=} f(t)} &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \int_0^s v_s(r, t) \, dr \\ &\stackrel{(3.74)}{=} \int_0^s h(r, t) \, dr \\ &\stackrel{(3.71)}{=} \int_0^s c(x(r, t), y(r, t)) \, dr, \end{aligned}$$

isto é,

$$v(s, t) = \int_0^s c(x(r, t), y(r, t)) \, dr + f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in V, \quad (3.76)$$

será a solução do problema de Cauchy (3.74)-(3.75).

Para obtermos a solução do problema de Cauchy dado inicialmente (isto é, de (3.36)-(3.37)), basta agirmos da seguinte forma:

Dado $(x, y) \in T(V)$ (a transformação \underline{T} é dada em (3.68)), consideremos

$$(t, s) \doteq T^{-1}(x, y),$$

$$\text{ou seja, } x = x(s, t) \quad \text{e} \quad y = y(s, t). \quad (3.77)$$

De (3.69) e (3.76), segue que

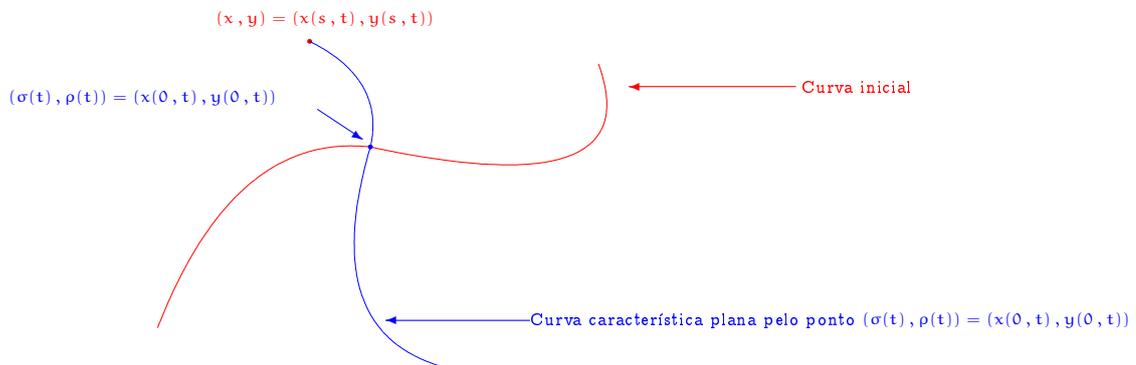
$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{(3.69)}{=} v(s, t) \\ &\stackrel{(3.76)}{=} \int_0^s c(x(r, t), y(r, t)) \, dr + f(t), \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde t e s podem ser obtidos como funções de x e y (como em (3.77)).

Portanto podemos concluir que se a função $u = u(x, y)$ é uma solução do problema de Cauchy (3.36)-(3.37), então ela deverá ser a forma (3.78).

Reciprocamente, se a função $u = u(x, y)$ é dada por (3.78), então ela será solução do problema de Cauchy (3.36)-(3.37).

A figura abaixo ilustra como obter o valor da solução \underline{u} , no ponto $(x, y) \in T(V)$.



Com isto acabamos de demonstrar o:

Teorema 3.79 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\gamma : I \rightarrow \Omega$ uma curva suave em $\underline{\Omega}$, parametrizada por*

$$t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t)) \in \Omega, \quad \text{para cada } t \in I,$$

de modo que seu vetor tangente nunca se anula em \underline{I} , $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ e $a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ satisfazendo

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

para cada $(x, y) \in \Omega$ e $t \in I$, respectivamente (ou seja, valem (H1), (H2), (H3) e (H4)).

Então o problema de Cauchy (3.36)-(3.37) terá uma única solução que pertence à $C^1(V; \mathbb{R})$, dada por (3.78), onde \underline{V} é um aberto, contido em $\underline{\Omega}$, que contém o traço da curva inicial $\underline{\gamma}$.

Observação 3.80

1. *Como vimos nos cálculos acima, o valor da solução \underline{u} do problema de Cauchy (3.36)-(3.37), no ponto*

$$(x, y) = (x(s, t), y(s, t)),$$

é obtido integrando-se a EDP (3.36), ao longo da curva característica plana associada à EDP (3.36), que intercepta a curva inicial no ponto $(x(0, t), y(0, t))$, do instante $\underline{0}$ até o instante \underline{s} (veja a figura acima e fórmula (3.78)).

2. *A representação geométrica do gráfico da solução \underline{u} do problema de Cauchy (3.36)-(3.37), será uma superfície que é o gráfico da função \underline{u} , ou seja, o conjunto:*

$$\{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in T(V)\},$$

em \mathbb{R}^3 que será denominada superfície solução do problema de Cauchy (3.36)-(3.37).

3. Uma parametrização para a superfície solução acima é dada por

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), v(s, t)),$$

para $(s, t) \in V$, onde a função v é dada por (3.76) e as funções x e y são dadas por (3.62)-(3.63)-(3.64)-(3.65).

4. Como veremos a seguir poderá, eventualmente, ser mais simples encontrar as curvas características planas associada à EDP (3.36) diretamente e integrar ao longo dessas, do que utilizar a expressão (3.78).

Aplicaremos as técnicas desenvolvidas acima aos seguintes exemplos:

Exemplo 3.81 Encontrar, se existir, uma solução clássica para o problema de Cauchy

$$-y u_x(x, y) + x u_y(x, y) = 4xy, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (3.82)$$

$$u(t, 0) = f(t), \quad \text{para cada } t \in (0, \infty), \quad (3.83)$$

onde $f \in C^1((0, \infty); \mathbb{R})$.

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma, \rho : I \doteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$a(x, y) \doteq -y, \quad (3.84)$$

$$b(x, y) \doteq x, \quad (3.85)$$

$$c(x, y) \doteq 4xy, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.86)$$

$$(\sigma(t), \rho(t)) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in (0, \infty). \quad (3.87)$$

Logo $a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, $\sigma, \rho \in C^1((0, \infty); \mathbb{R})$,

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) = (-y)^2 + x^2 \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} &\stackrel{(3.84), (3.85)}{=} \begin{vmatrix} -\rho(t) & \sigma(t) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(3.87)}{=} \begin{vmatrix} -0 & t \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -t \neq 0, \quad \text{para } t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Logo, do Teorema (3.79), segue que o problema de Cauchy (3.82)-(3.83) possui uma única solução, definida em um subconjunto aberto de $\underline{\Omega}$, que contém o traço da curva inicial, ou seja, o conjunto

$$(0, \infty) \times \{0\},$$

ou seja, o semi-eixo positivo de \underline{Ox} , que é a curva inicial.

A seguir aplicaremos o procedimento obtido na demonstração do Teorema (3.79) para obter, explicitamente, a solução $u = u(x, y)$.

Começaremos observando que se

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$$

é uma parametrização de uma curva característica plana associada à EDP (3.82), então deveremos ter (ver (3.55)-(3.56)):

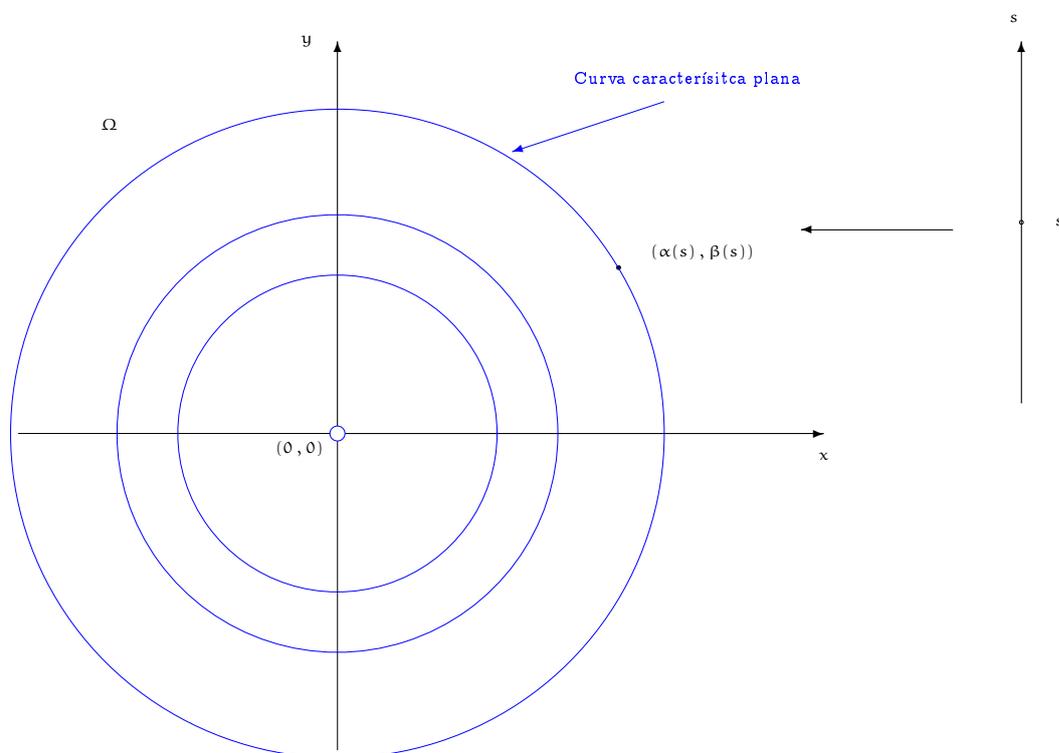
$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)) \\ &\stackrel{(3.84)}{=} -\beta(s), \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)) \\ &\stackrel{(3.85)}{=} \alpha(s), \quad \text{para } s \in I. \end{aligned} \quad (3.89)$$

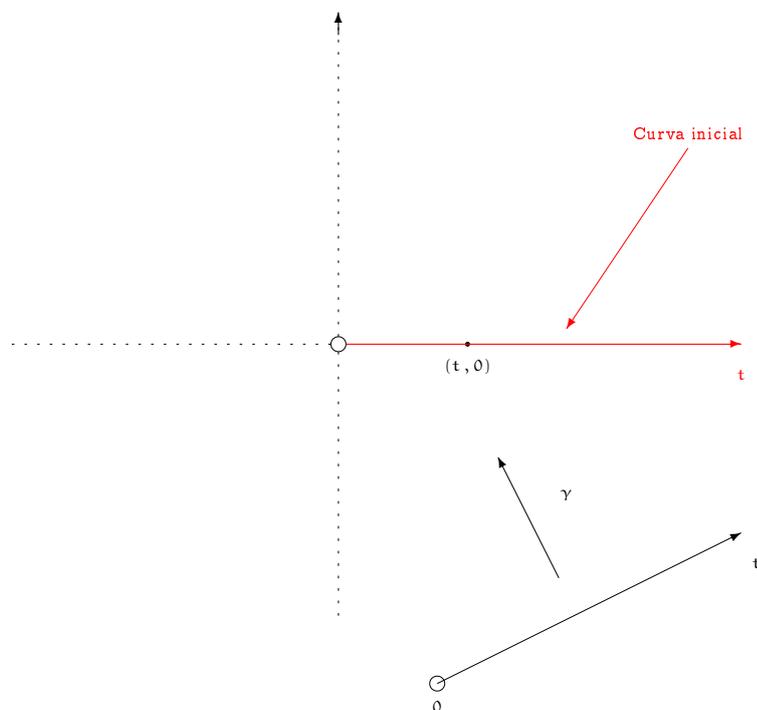
Para cada $s \in I$, multiplicando-se a EDO (3.88) por $\alpha(s)$, multiplicando-se a EDO (3.89) por $\beta(s)$ e somando-se as EDO's obtidas, obteremos a seguinte EDO:

$$\begin{aligned} \alpha(s) \alpha'(s) + \beta(s) \beta'(s) &= 0, \\ \text{ou seja, } \underbrace{\frac{d}{ds} [\alpha^2(s) + \beta^2(s)]}_{\text{regra da cadeia } 2\alpha(s)\alpha'(s) + 2\beta(s)\beta'(s)} &= 0, \\ \text{ou ainda, } \alpha^2(s) + \beta^2(s) &= \text{constante, para cada } s \in J. \end{aligned} \quad (3.90)$$

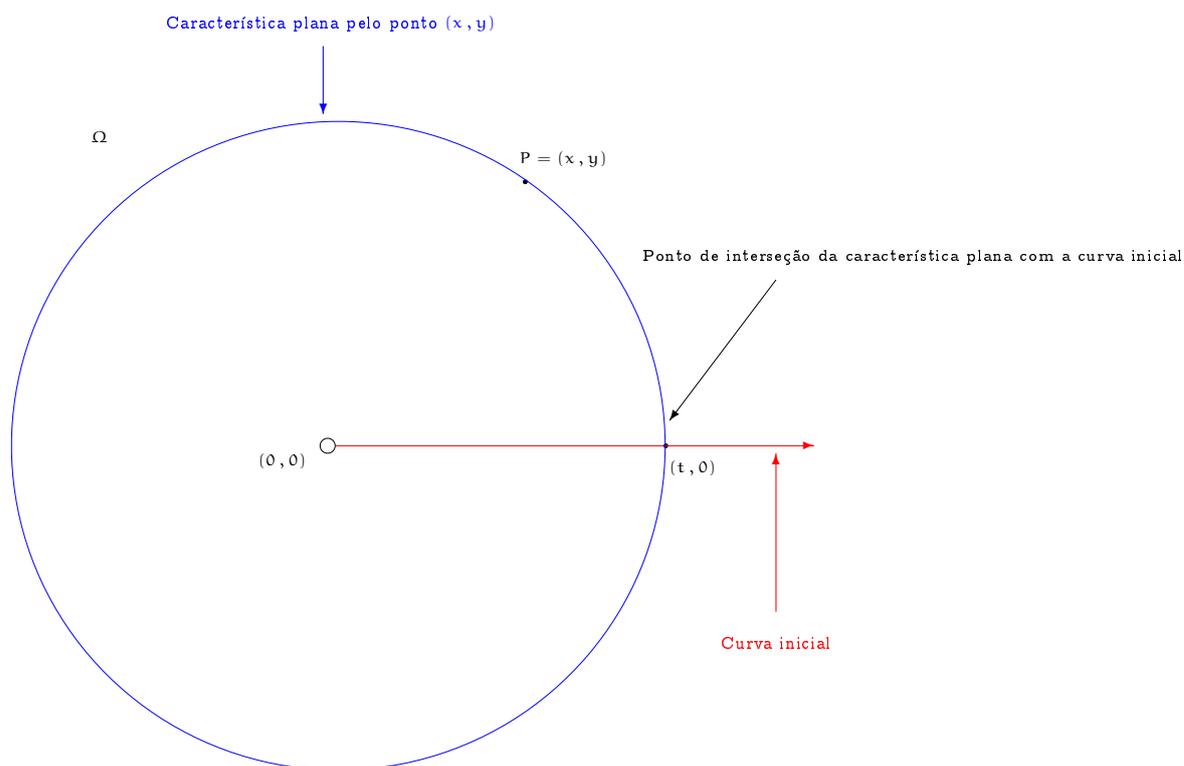
Conclusão: as curvas características planas associada à EDP (3.82), serão circunferências, centradas na origem $(0, 0)$ (veja a figura abaixo).



Lembremos novamente que, de (3.87), a curva inicial é o semi-eixo positivo contido no eixo \underline{Ox} (veja a figura abaixo).



Para cada $P = (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, consideremos a curva característica plana associada à EDP (3.82), que passa pelo ponto $P = (x, y)$, ou seja, uma circunferência de centro na origem e que passa pelo ponto $P = (x, y)$, isto é, seu raio será igual a $r \doteq d(P, O)$ (veja a figura abaixo).



Notemos que a curva característica plana pelo ponto $P = (x, y)$, interceptará o traço da curva inicial, ortogonalmente, em um único ponto, em $\underline{\Omega}$.

Com isto podemos concluir que, dado um ponto de

$$P = (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

este pertencerá a uma única curva característica plana e esta interceptará o traço da curva inicial transversalmente (isto é, não paralelamente) em um ponto $(t, 0)$, para algum $t \in (0, \infty)$.

Se indicarmos por $s \in \mathbb{R}$, o ângulo que o segmento \overline{OP} faz com o traço da curva inicial (que é a semi-reta positiva do eixo \underline{Ox}), temos que (veja a figura abaixo):

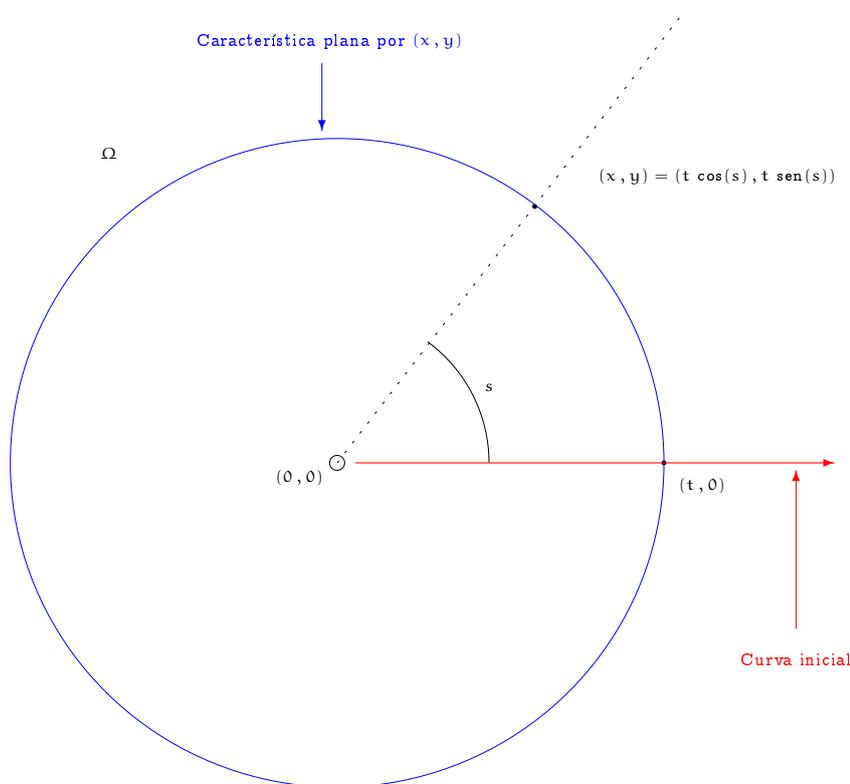
$$x = x(s, t) \doteq t \cos(s), \quad (3.91)$$

$$y = y(s, t) \doteq t \sin(s), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \quad (3.92)$$

Notemos que, para cada $(s, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, teremos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\stackrel{(3.91),(3.92)}{=} [t \cos(s)]^2 + [t \operatorname{sen}(s)]^2 \\ &= t^2 [\cos^2(s) + \operatorname{sen}^2(s)] \\ &= t^2, \end{aligned}$$

mas $t \in (0, \infty)$, assim: $t = \sqrt{x^2 + y^2}$. (3.93)



Logo, ao longo da curva característica plana da EDP (3.82) (que é um circunferência de centro na origem e de raio igual a $t > 0$), a EDP (3.82) poderá ser escrita na seguinte forma (o lado esquerdo da EDP será uma derivada total):

$$\frac{d}{ds}[u(x(s, t), y(s, t))] = 4x(s, t)y(s, t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

ou seja, de (3.91) e (3.92), segue que, para cada $t \in (0, \infty)$ fixado, a EDO acima, tornar-se-á:

$$\frac{d}{ds}[u(t \cos(s), t \operatorname{sen}(s))] \stackrel{(3.91),(3.92)}{=} \underbrace{4t \cos(s) t \operatorname{sen}(s)}_{4t^2 \cos(s) \operatorname{sen}(s)}, \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Logo, para cada $t \in (0, \infty)$ fixado, integrando-se a EDP acima, em relação a variável s , de 0 à s , obteremos (do Teorema Fundamental do Cálculo):

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= u(x(s, t), y(s, t)) \\
 &\stackrel{(3.91), (3.92)}{=} u(t \cos(s), t, \operatorname{sen}(s)) \\
 &= \int_0^s 4 t^2 \cos(r) \operatorname{sen}(r) dr + \underbrace{u(t, 0)}_{\stackrel{(3.83)}{=} f(t)} \\
 &= f(t) + 4 t^2 \int_0^s \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2r) dr \\
 &= f(t) + 4 \frac{1}{2} t^2 \left[-\frac{1}{2} \cos(2r) \right] \Big|_{r=0}^{r=s} \\
 &= f(t) + t^2 [-\cos(2s) + \cos(2 \cdot 0)] \\
 &= f(t) + t^2 \underbrace{[1 - \cos(2s)]}_{=2 \operatorname{sen}^2(s)} \\
 &= f\left(\underbrace{t}_{\stackrel{(3.93)}{=} \sqrt{x^2 + y^2}}\right) + 2 \underbrace{[t \operatorname{sen}(s)]^2}_{\stackrel{(3.92)}{=} y^2} \\
 &= f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + 2y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,
 \end{aligned}$$

ou seja, a solução do problema de Cauchy (3.82)-(3.83) será dada por:

$$u(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + 2y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Notemos que $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}; \mathbb{R})$, ou seja, é uma solução clássica do do problema de Cauchy (3.82)-(3.83).

□

Observação 3.94

Observemos que a função

$$(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

não é diferenciável em $(0, 0)$ (que é um ponto que não pertence ao conjunto Ω).

Além disso, a diferenciabilidade da função $u = u(x, y)$ depende, também, da diferenciabilidade da função f .

Consideremos agora o:

Exemplo 3.95

$$2y u_x(x, y) + u_y(x, y) = -(2y^2 + x) \operatorname{sen}(2xy), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (3.96)$$

$$u(x, e^{-2x}) = \cos^2(x e^{-2x}), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (3.97)$$

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma, \rho : I \doteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$a(x, y) \doteq 2y, \quad (3.98)$$

$$b(x, y) \doteq 1, \quad (3.99)$$

$$c(x, y) \doteq -(2y^2 + x) \operatorname{sen}(2xy), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.100)$$

$$(\sigma(t), \rho(t)) \doteq (t, e^{-2t}), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (3.101)$$

$$f(t) \doteq \cos^2(t e^{-2t}), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (3.102)$$

Com isto temos que $a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, $f, \sigma, \rho \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} a^2(x, y) + b^2(x, y) &\stackrel{(3.98), (3.99)}{=} (2y)^2 + 1^2 \\ &= 4y^2 + 1 \neq 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} &\stackrel{(3.98), (3.99)}{=} \begin{vmatrix} 2\rho(t) & 1 \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(3.101)}{=} \begin{vmatrix} 2e^{-2t} & 1 \\ 1 & -2e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= -4e^{-2t} - 1 \\ &= -(4e^{-2t} + 1) \neq 0, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, do Teorema (3.79), segue que o problema de Cauchy (3.96)-(3.97) possui uma única solução definida em um subconjunto aberto de $\underline{\Omega}$, que contém o traço da curva inicial.

A seguir aplicaremos o procedimento obtido na demonstração do Teorema (3.79) para obter, explicitamente, a solução $u = u(x, y)$.

Começaremos observando que se

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s))$$

é uma parametrização de uma curva característica plana associada à EDP (3.96), então deveremos ter (ver (3.55)-(3.56)):

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)) \\ &\stackrel{(3.98)}{=} 2\beta(s), \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)) \\ &\stackrel{(3.99)}{=} 1, \quad \text{para } s \in I. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Logo, da EDO (3.104), teremos

$$\beta(s) = s + C_1, \quad \text{para cada } s \in \mathbb{R}, \quad (3.105)$$

onde $C_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Substituindo (3.105) na EDO (3.103), teremos:

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &\stackrel{(3.103)}{=} \stackrel{(3.105)}{=} 2s + 2C_1, \\ \text{ou seja, } \alpha(s) &= s^2 + 2C_1s + C_2 \\ &= (s + C_1)^2 + C_2 - C_1^2, \quad \text{para } s \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias.

Notemos que, como

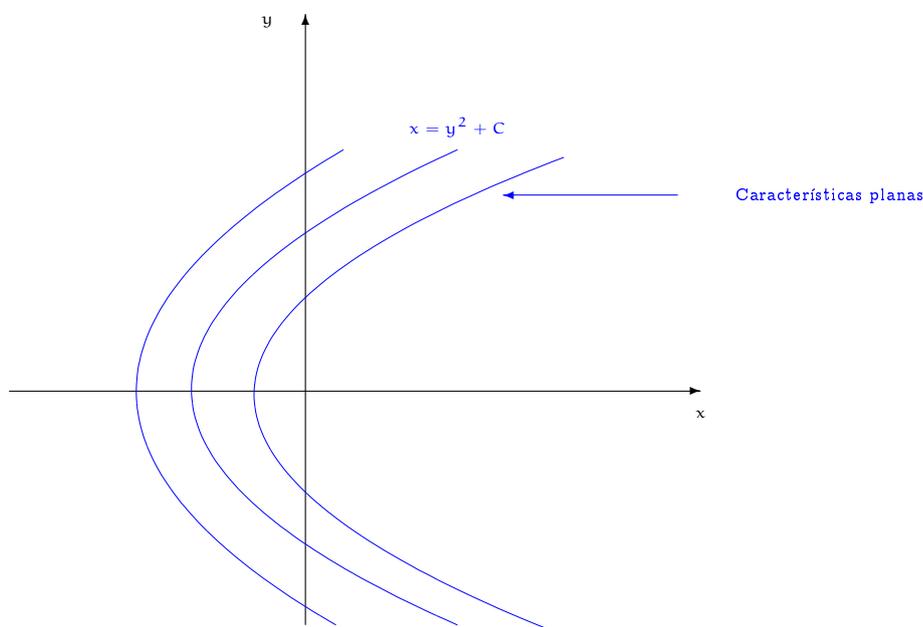
$$y = \beta(s) \stackrel{(3.105)}{=} s + C_1,$$

$$\text{de (3.106), segue que: } x = \alpha(s) = y^2 + C,$$

onde $C \doteq C_2 - C_1^2$, ou seja, as curvas características planas associadas à EDP (3.96), serão parábolas no plano xOy .

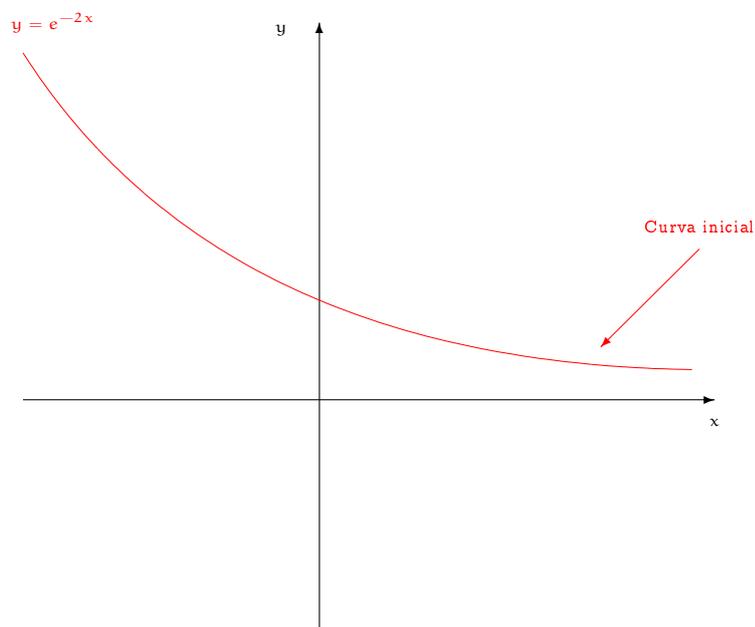
Conclusão: as curvas características planas associada à EDP (3.96) serão as parábolas (veja a figura abaixo)

$$x = y^2 + C. \quad (3.107)$$



Notemos que geometricamente, de (3.101), o traço da curva inicial é dada pela representação geométrica do gráfico da função (veja figura abaixo)

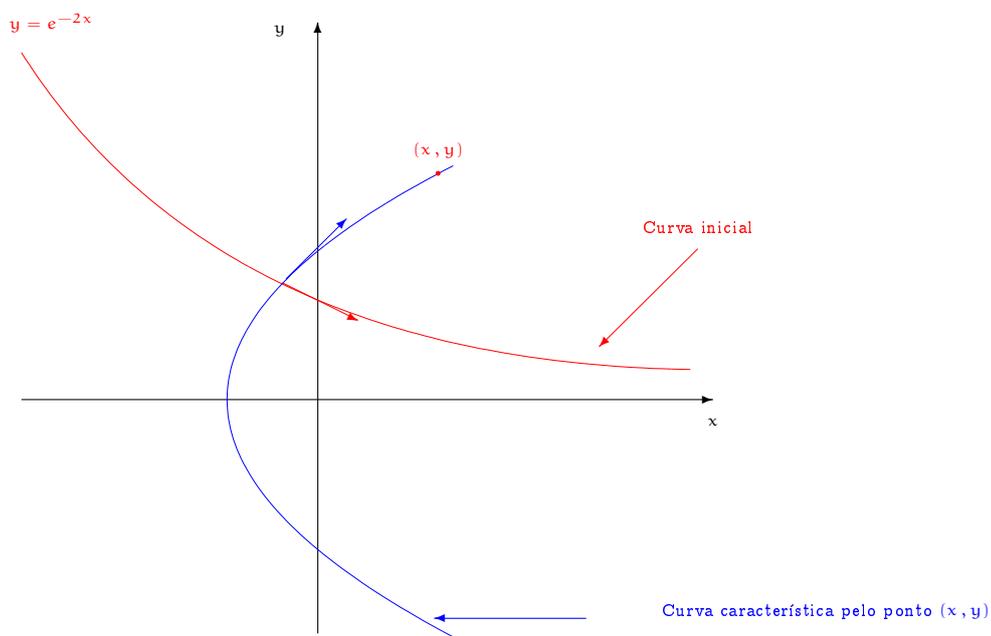
$$x \mapsto e^{-2x}.$$



Logo, para cada

$$P = (x, y) \in \Omega,$$

consideremos a curva característica plana associada à EDP (3.96), que passa pelo ponto $P = (x, y)$, ou seja, a parábola que passa pelo ponto $P = (x, y)$ (veja a figura abaixo).



Notemos que o coeficiente angular da reta tangente à parábola

$$x = y^2 + C$$

é dado por $\frac{1}{2y}$, enquanto o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função

$$y = e^{-2x},$$

será dado por $-2y$, ou seja, são diferentes.

Com isto temos que a curva característica plana, pelo ponto (x, y) , interceptará a curva inicial transversalmente (isto é, não paralelamente) em um único ponto, em $\underline{\Omega}$.

Com isto podemos concluir que, dado um ponto de $\Omega = \mathbb{R}^2$, este pertencerá a uma única curva característica plana associada à EDP (3.96) e interceptará a curva inicial transversalmente no ponto em questão.

Logo, dado

$$(x_1, y_1) \in \Omega = \mathbb{R}^2,$$

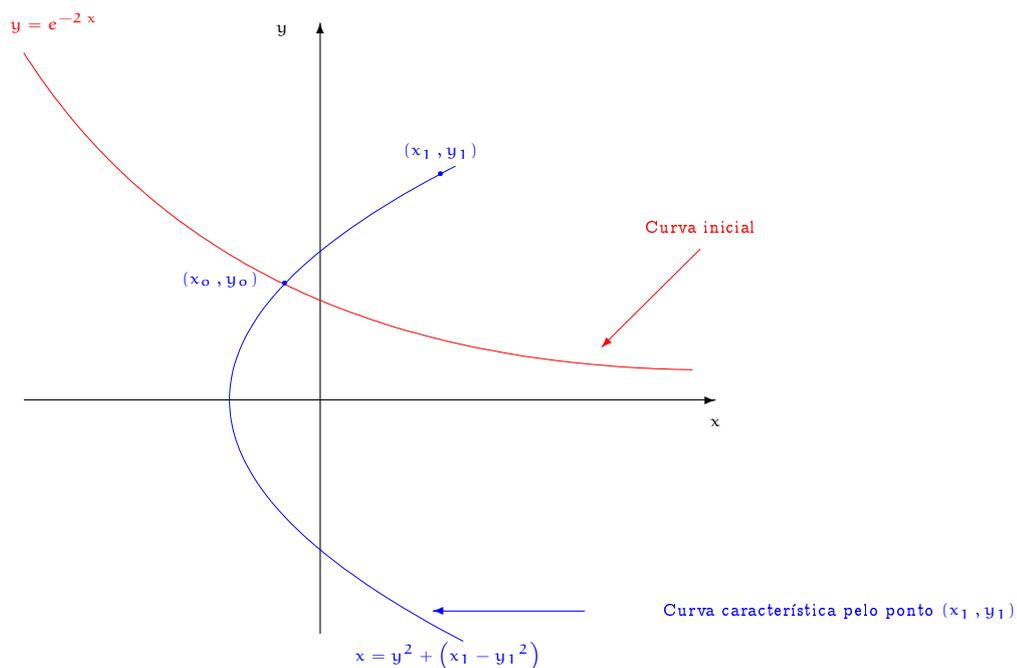
para encontrar o valor da solução \underline{u} nesse ponto, podemos considerar a curva característica plana associada à EDP (3.96), que passa pelo ponto (x_1, y_1) , que será dada por

$$x = y^2 + (x_1 - y_1^2). \quad (3.108)$$

Esta curva interceptará a curva inicial no ponto (x_0, y_0) , onde (veja a figura abaixo), ou seja:

$$x_0 = y_0^2 + (x_1 - y_1^2) \quad (\text{pertence a curva característica}), \quad (3.109)$$

$$y_0 = e^{-2x_0}. \quad (\text{pertence a curva inicial}) \quad (3.110)$$



Agiremos um pouco diferente do usual, para obtermos a solução do problema de Cauchy em questão, a saber, utilizaremos o fato que o lado direito da EDP (3.96) pode ser escrito ao longo das suas características planas associadas à EDP (3.96), como uma derivada total.

Depois a integraremos, ao longo da mesma, do instante correspondente ao ponto inicial (x_0, y_0) (sobre a curva inicial) até o instante correspondente ao ponto final (x_1, y_1) , para obter o valor da solução no ponto (x_1, y_1) .

Consideremos a seguinte parametrização da curva característica plana associada à EDP (3.96) (que é uma parábola), que liga o ponto (x_0, y_0) , ao ponto (x_1, y_1) :

$$s \mapsto (s^2 + (x_1 - y_1^2), s), \quad (3.111)$$

para $s \in [y_0, y_1]$, se $y_0 < y_1$, ou $s \in [y_1, y_0]$, se $y_1 < y_0$.

Deste modo, o lado esquerdo da EDP (3.96), poderá ser escrito, ao longo da curva característica plana dada por (3.111), como uma derivada total, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u \underbrace{(\alpha(s), \beta(s))}_{\stackrel{(3.111)}{=} (s^2 + x_1 - y_1^2, s)} &= c \underbrace{(\alpha(s), \beta(s))}_{\stackrel{(3.111)}{=} (s^2 + x_1 - y_1^2, s)} \\ &= c (s^2 + x_1 - y_1^2, s) \\ &\stackrel{(3.100)}{=} - [2s^2 + (s^2 + x_1 - y_1^2)] \operatorname{sen} [2 (s^2 + x_1 - y_1^2) s], \end{aligned} \quad (3.112)$$

para $s \in [y_0, y_1]$, ou $s \in [y_1, y_0]$, respectivamente.

Integrando a EDO acima, em relação a s , de $s = y_0$ a $s = y_1$ (que corresponde a integrar a EDP (3.96), ao longo da curva característica, do ponto (x_0, y_0) até o ponto (x_1, y_1) - veja a figura acima) obteremos:

$$\begin{aligned} u \underbrace{(y_1^2 + x_1 - y_1^2, y_1)}_{=(x_1, y_1)} - u \underbrace{\left(\overbrace{y_0^2 + x_1 - y_1^2}^{=x_0}, y_0 \right)}_{=(x_0, y_0)} \\ = \int_{y_0}^{y_1} - [2s^2 + (s^2 + x_1 - y_1^2)] \operatorname{sen} [2 (s^2 + x_1 - y_1^2) s] ds \\ = - \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) \operatorname{sen} \{2 [s^3 + (x_1 - y_1^2) s]\} ds. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Na integral definida acima, fazendo-se a mudança de variáveis

$$r \doteq s^3 + (x_1 - y_1^2) s, \quad \text{segue que: } dr = 3s^2 + x_1 - y_1^2,$$

e notando que, se:

$$\begin{aligned} s = y_0, \quad \text{teremos: } r &= y_0^3 + (x_1 - y_1^2) y_0 \\ &= \left(\underbrace{y_0^2 + x_1 - y_1^2}_{\stackrel{(3.109)}{=} x_0}} \right) y_0 \\ s = y_1 \quad \text{teremos: } r &= y_1^3 + (x_1 - y_1^2) y_1 \\ &= x_1 y_1, \end{aligned}$$

obteremos, do Teorema de mudança de variáveis na integral definida (visto no Cálculo 1), segue que:

$$\begin{aligned} - \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) \operatorname{sen} \{ 2 [s^3 + (x_1 - y_1^2) s] \} ds \\ = - \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} \operatorname{sen}(2s) ds \\ = - \int_{x_0 y_0}^{x_1 y_1} 2 \operatorname{sen}(s) \cos(s) ds. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} - \int 2 \operatorname{sen}(s) \cos(s) ds \stackrel{z = \cos(s), \text{ teremos: } dz = -\operatorname{sen}(r) dr}{=} \int 2z dz \\ = z^2 + C \\ \stackrel{z = \cos(s)}{=} \cos^2(s) + C. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Logo, de (3.114) e (3.115), segue que:

$$\begin{aligned} - \int_{y_0}^{y_1} (3s^2 + x_1 - y_1^2) \operatorname{sen} \{ [s^3 + (x_1 - y_1^2) s] \} ds &= [\cos^2(r)] \Big|_{r=x_0 y_0}^{r=x_1 y_1} \\ &= \cos^2(x_1 y_1) - \cos^2(x_0 y_0). \end{aligned}$$

Logo, substituindo esta em (3.113), obteremos:

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) &= u(x_0, \underbrace{y_0}_{\stackrel{(3.110)}{=} e^{-2x_0}}) + \cos^2(x_1 y_1) - \cos^2(x_0, y_0) \\ &= \underbrace{u(x_0, e^{-2x_0})}_{\stackrel{(3.98)}{=} \cos^2(x_0 y_0)}} - \cos^2(x_1 y_1) - \cos^2(x_0 y_0) \\ &= \cos^2(x_1 y_1), \quad \text{para cada } (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Portanto a solução do problema de Cauchy (3.97)-(3.98) será dada por

$$u(x, y) = \cos^2(xy), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.116)$$

□

Observação 3.117

1. Notemos que a solução acima pertence a $C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.
2. Poderíamos ter resolvido o problema utilizando os argumentos da demonstração do Teorema (3.79), ou seja, encontrando a mudança de coordenadas

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t)),$$

cuja imagem cobre numa vizinhança do traço da curva inicial $\underline{\gamma}$.

Para obter tal mudança de coordenadas, observemos que as equações das curvas características planas (veja (3.107)), serão dadas por:

$$\begin{aligned} & x = y^2 + C \\ \text{ou ainda, } & \begin{cases} x = s^2 + 2sC_1 + C_1^2 + C \\ y = s + C_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.118)$$

para constantes $C, K \in \mathbb{R}$ convenientes.

Utilizando-se a curva inicial, se

$$s = 0, \quad \text{teremos: } \begin{cases} y = e^{-2t} \\ x = t \end{cases}. \quad (3.119)$$

Fazendo $s = 0$ em (3.118) e, comparando com (3.119), obteremos:

$$C_1^2 + C = t \quad \text{e} \quad C_1 = e^{-2t}.$$

Com isto, das igualdades acima e de (3.118), obteremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$x(s, t) \doteq s^2 + 2s e^{-2t} + t, \quad (3.120)$$

$$y(s, t) \doteq s + e^{-2t}, \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.121)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x_s(s, t) & x_t(s, t) \\ y_s(s, t) & y_t(s, t) \end{vmatrix} \stackrel{(3.121)}{=} \begin{vmatrix} 2s + 2e^{-2t} & -4se^{-2t} + 1 \\ 1 & -2e^{-2t} \end{vmatrix} \\ & = -(4e^{-4t} + 1) \neq 0, \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Logo, definido-se,

$$v(s, t) \doteq u(x(s, t), y(s, t)), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.123)$$

$$\text{ou ainda, } u(x, y) = v(s(x, y), t(x, y)), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.124)$$

teremos que

$$\begin{aligned} v(0, t) &\stackrel{s=0 \text{ em (3.123)}}{=} u(\underbrace{x(0, t)}_{\stackrel{(3.120)}{=}t}, \underbrace{y(0, t)}_{\stackrel{(3.121)}{=}e^{-2t}}) \\ &= u(t, e^{-2t}) \\ &\stackrel{(3.97)}{=} \cos^2(t e^{-2t}), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Além disso, da regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} v_s(s, t) &\stackrel{(3.123)}{=} \frac{d}{ds} [u(x(s, t), y(s, t))] \\ &\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} u_x \cdot x_s + u_y \cdot y_s \\ &\stackrel{(3.118)}{=} u_x \cdot \underbrace{(2s + 2e^{-2t})}_{\stackrel{(3.121)}{=}2y} + u_y \cdot 1 \\ &= 2y u_x + u_y \\ &\stackrel{(3.96)}{=} -(2y^2 + x) \operatorname{sen}(2xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &_{y=s+e^{-2t}, x=s^2+2se^{-2t}+t} - \left[2(s + e^{-2t})^2 + s^2 + 2se^{-2t} + t \right] \\ &\quad \cdot \operatorname{sen} \left[2(s^2 + 2se^{-2t} + t)(s + e^{-2t}) \right] \\ &= -(3s^2 + 6se^{-2t} + 2e^{-4t} + t) \operatorname{sen} \left[2(s^3 + 3s^2e^{-2t} + st + 2se^{-4t} + te^{-2t}) \right], \end{aligned}$$

para cada $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$, integrando a EDP acima, em relação a s , de 0 à s , obtemos:

$$\begin{aligned} v(s, t) - v(0, t) &= - \int_0^s (3r^2 + 6re^{-2t} + 2e^{-4t} + t) \\ &\quad \cdot \operatorname{sen} \left[2(r^3 + 3r^2e^{-2t} + rt + 2re^{-4t} + te^{-2t}) \right] dr. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis na integral definida acima (para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado):

$$\begin{aligned} w &\doteq r^3 + 3r^2e^{-2t} + rt + 2re^{-4t} + te^{-2t}, \\ \text{teremos: } dw &= 3r^2 + 6re^{-2t} + t + 2e^{-4t}. \end{aligned}$$

Com isto,

$$\text{se } r = 0, \quad \text{segue que: } w = te^{-2t},$$

$$\text{se } r = s, \quad \text{segue que: } w = s^3 + 3s^2 e^{-2t} + st + 2se^{-4t} + te^{-2t},$$

e assim

$$\begin{aligned} & \int_0^s - (3r^2 + 6re^{-2t} + 2e^{-4t} + t) \operatorname{sen} [2 (r^3 + 3r^2 e^{-2t} + rt + 2re^{-4t} + te^{-2t})] dr = \\ & = - \int_{te^{-2t}}^{s^3 + 3s^2 e^{-2t} + st + 2se^{-4t} + te^{-2t}} 2 \operatorname{sen}(w) \cos(w) dw \\ & = [\cos^2(w)] \Big|_{w=te^{-2t}}^{w=s^3 + 3s^2 e^{-2t} + st + 2se^{-4t} + te^{-2t}} \\ & = \cos^2 (s^3 + 3s^2 e^{-2t} + st + 2se^{-4t} + te^{-2t}) - \cos^2 (te^{-2t}), \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= v(s, t) \\ &= \cos^2 \left(\underbrace{s^3 + 3s^2 e^{-2t} + st + 2se^{-4t} + te^{-2t}}_{\substack{(3.120) \\ \equiv (3.121)_{xy}}} \right) - \cos^2 (te^{-2t}) + \underbrace{v(0, t)}_{\substack{(3.125) \\ \equiv \cos^2(te^{-2t})}} \\ &= \cos^2(xy), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

como obtida anteriormente.

3.3 Solução geral

Nesta seção vamos tratar de problema de obter solução geral para uma EDP linear de 1.a ordem em duas variáveis, ou seja, do tipo (3.2).

Para isto consideremos $\underline{\Omega}$ um subconjunto aberto em \mathbb{R}^2 e o "operador" diferencial linear de 1.a ordem

$$L \doteq a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \tag{3.126}$$

agindo em funções $u \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, onde

$$a = a(x, y), \quad b = b(x, y), \quad c = c(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega$$

são funções dadas, ou seja,

$$(Lu)(x, y) \doteq a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + c(x, y) u(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega.$$

Nosso objetivo encontrar (quando possível), uma solução geral, em $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, da EDP

$$(Lu)(x, y) = d(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \quad (3.127)$$

para $d: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma função bem comportada dada, ou seja, encontrar uma solução de modo que toda solução da EDP (3.127) possa ser obtida em termos da solução geral encontrada, ou seja, da EDP

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + c(x, y) u(x, y) = d(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega.$$

Suponhamos que

$$a, b, c, d \in C(\Omega; \mathbb{R}). \quad (3.128)$$

A idéia do método que iremos desenvolver a seguir é a seguinte:

Para encontrarmos a solução geral da EDP (3.127), procuraremos uma mudança de variáveis (se existir)

$$s = s(x, y), \quad (3.129)$$

$$t = t(x, y), \quad (3.130)$$

para $(x, y) \in \Omega' \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \Omega$, de modo que, em relação às novas variáveis (isto é, em relação às variáveis (s, t)), a parte da EDP (3.127) que envolve as derivadas parciais de 1.a ordem (ou seja, a parte principal da EDP (3.127)), possa ser escrita como uma derivada total, de uma função que envolve a solução u procurada, calculada ao longo de uma curva parametrizada diferenciável (a saber, uma curva característica plana).

Se isto for possível, isto nos permitirá obter a solução geral da EDO obtida (que dependerá de um parâmetro) e depois retornamos às variáveis originais (isto é, as variáveis (x, y)) utilizando as funções inversas relacionadas com a mudança de variáveis (3.129) e (3.130).

Antes de aplicarmos as idéias acima no caso geral, consideraremos alguns exemplos:

Exemplo 3.131 *Encontrar (se possível) a solução geral, em $C^1((0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, da EDP linear de 1.a ordem:*

$$x u_x(x, y) + u(x, y) = x^2, \quad \text{para } (x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (3.132)$$

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c, d: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$\Omega \doteq (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (3.133)$$

$$a(x, y) \doteq x, \quad (3.134)$$

$$b(x, y) \doteq 0, \quad (3.135)$$

$$c(x, y) \doteq 1, \quad (3.136)$$

$$d(x, y) \doteq x^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.137)$$

$$(3.138)$$

ou seja, $a, b, c, d \in C(\Omega; \mathbb{R})$ e

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \stackrel{(3.134), (3.135)}{=} x^2 + 0^2 \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Notemos que, para cada $(x, y) \in \Omega$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} [x u(x, y)] = \underbrace{u(x, y) + x u_x(x, y)}_{\text{lado esquerdo da EDP (3.132)}}.$$

Logo, podemos escrever a EDP (3.132) como:

$$\frac{\partial}{\partial x} [x u(x, y)] = x^2, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \stackrel{(3.133)}{=} (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (3.139)$$

ou seja, escrevemos a parte relacionada com as derivadas parciais de 1.a ordem na EDP (3.132) (ou seja, a parte principal da EDP (3.132)), como uma derivada total de uma função que envolve a solução procurada u , calculada ao longo de uma curva parametrizada diferenciável (a saber, uma curva característica plana).

Observemos que, para cada $y \in \mathbb{R}$ fixado, a equação (3.139) é uma EDO na variável x .

Logo, para cada $y \in \mathbb{R}$ fixado, integrando-se ambos os membros da mesma, em relação a variável x , obtermos:

$$\begin{aligned} x u(x, y) &= \int x^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} + f(y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \stackrel{(3.133)}{=} (0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.140)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Como $x \in (0, \infty)$, teremos que a solução geral da EDP (3.132) será dada por:

$$u(x, y) \stackrel{(3.14)}{=} \frac{x^2}{3} + \frac{f(y)}{x}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \stackrel{(3.133)}{=} (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (3.141)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária. □

Observação 3.142 Notemos que no Exemplo (3.131) acima, mostramos que toda função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que é solução da EDP (3.132), e que pertence a $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, deverá ser da forma (3.141) para alguma $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Reciprocamente, para cada $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, a função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por (3.141), será uma solução da EDP (3.132) que pertence à $C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Um outro caso é dado pelo:

Exemplo 3.143 Encontrar (se possível) a solução geral, em $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, da EDP

$$-2y u_x(x, y) + u_y(x, y) = y e^x, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.144)$$

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$\Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (3.145)$$

$$a(x, y) \doteq -2y, \quad (3.146)$$

$$b(x, y) \doteq 1, \quad (3.147)$$

$$c(x, y) \doteq 0, \quad (3.148)$$

$$d(x, y) \doteq x e^x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.149)$$

ou seja, $a, b, c, d \in C(\Omega; \mathbb{R})$ e

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \stackrel{(3.146), (3.147)}{=} (-2y)^2 + 1^2 \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Para este caso podemos utilizar as idéias da seção anterior, isto é, utilizar as curvas características planas associadas à EDP (3.144) (o coeficiente do termo $u(x, y)$ é igual a zero!) e escolher, **de modo conveniente**, uma curva auxiliar suave (que fará o papel da curva inicial) que intercepte, transversalmente, as curvas características planas associadas à EDP (3.144).

Se conseguirmos isso, podemos fazer uma mudança de variáveis

$$s = s(x, y),$$

$$t = t(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega' \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \Omega,$$

de modo transformar a EDP (3.144) em uma EDP mais simples de encontrarmos soluções.

Notemos que, para cada $t \in I$ fixado, o traço da curva parametrizada

$$s \mapsto (x(s, t), y(s, t))$$

será uma curva característica plana associada à EDP (4.154) e, para $s = 0$, será a curva parametrizada

$$t \mapsto (x(0, t), y(0, t))$$

será a curva parametrizada que fará o papel de curva inicial (que será escolhida de modo conveniente).

Começemos encontrando as curvas características planas associadas à EDP (3.144), isto é, as soluções do sistema de EDO's:

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x(s), y(s)) \\ &\stackrel{(3.146)}{=} -2y(s), \end{aligned} \quad (3.150)$$

$$\begin{aligned} y'(s) &= b(x(s), y(s)) \\ &\stackrel{(3.147)}{=} 1, \quad \text{para } s \in I \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Integrando a EDO (3.151), em relação à s , obteremos

$$y(s) = s + C_1, \quad \text{para cada } s \in \mathbb{R}, \quad (3.152)$$

para $C_1 \in \mathbb{R}$ arbitrária.

Substituindo-se a função (3.152) na EDO (3.150), obteremos

$$x'(s) \stackrel{(3.152)}{\stackrel{(3.150)}}{=} -2(s + C_1), \quad \text{para } s \in \mathbb{R}, \quad (3.153)$$

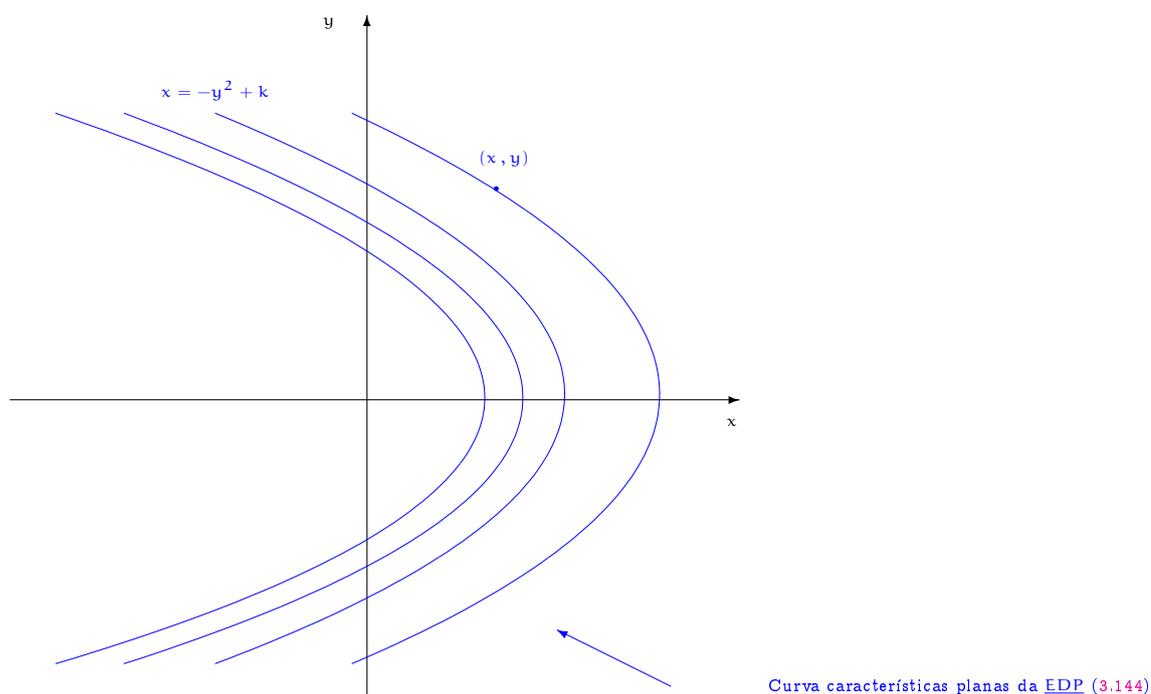
e integrando-a, em relação à s , obteremos:

$$\begin{aligned} x(s) &= -s^2 - 2C_1 s + C_2 \\ &= -\underbrace{(s + C_1)^2}_{\stackrel{(3.152)}{=} y}} + \underbrace{C_1^2 + C_2}_{\doteq K} \\ &= -y^2 + K, \end{aligned} \quad (3.154)$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é arbitrária, ou seja, as curvas características planas associadas à EDP (3.144) são, no plano xOy , as parábolas que são do tipo (veja a figura abaixo)

$$x = -y^2 + K, \quad (3.155)$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é arbitrária.



Consideraremos, como curva auxiliar, o eixo Ox (que fará o papel de curva inicial), que é ortogonal (logo transversal) a todas as curvas características planas obtidas (ou seja, às parábolas (3.155) acima).

Uma parametrização do eixo Ox pode ser dada por:

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (t, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Lembremos que a mudança de variáveis que pretendemos obter deverá ter a curva

$$t \mapsto (x(0, t), y(0, t))$$

coincidindo com a curva inicial, que no caso é a nossa curva auxiliar, isto é, o eixo Ox .

Baseado nisto, podemos tentar obter uma mudança de variáveis, como sendo:

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$$

dada por (veja (3.152) e (3.154)):

$$x(s, t) \doteq -[s + D_1(t)]^2 + D_2(t), \quad (3.156)$$

$$x(0, t) \doteq t, \quad (3.157)$$

$$y(s, t) \doteq s + D_1(t), \quad (3.158)$$

$$y(0, t) \doteq 0. \quad (3.159)$$

Notemos que, fazendo $s = 0$ em (3.156), em (3.158), utilizando-se (3.157) e (3.159), obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(3.159)}{=} y(0, t) \\ &\stackrel{s=0 \text{ em } (3.158)}{=} 0 + D_1(t) \\ &= D_1(t), \end{aligned}$$

ou seja, $D_1(t) = 0$, para cada $t \in \mathbb{R}$, (3.160)

$$\begin{aligned} t &\stackrel{(3.157)}{=} x(0, t) \\ &\stackrel{s=0 \text{ em } (3.156)}{=} -[0 + \underbrace{D_1(t)}_{(3.160)_0}]^2 + D_2(t), \end{aligned}$$

ou seja, $D_2(t) = t$, para cada $t \in \mathbb{R}$. (3.161)

Portanto, de (3.156), (3.157), (3.158), (3.159), (3.160) e (3.161), segue que a mudança de variáveis será dada por:

$$y(s, t) = s, \tag{3.162}$$

$$x(s, t) = -s^2 + t, \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.163}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} x &= -s^2 + t \\ &\stackrel{s \stackrel{(3.162)}{=} y}{=} -y^2 + t, \end{aligned} \tag{3.164}$$

assim, de (3.162), (3.163) e (3.164), segue que

$$s(x, y) = y, \tag{3.165}$$

$$t(x, y) = x + y^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.166}$$

será a transformação inversa associada à mudança de variáveis (3.162)-(3.22) acima, isto é, (3.162)-(3.163) define, realmente, uma mudança de variáveis, que pertence a $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$.

Observação 3.167 *Observemos que a função*

$$t = t(x, y),$$

dada por (3.166), é constante ao longo das curvas características planas associadas à EDP (3.144) (veja (3.155)).

Além disso, a função

$$s = s(x, y),$$

dada por (3.165), é constante ao longo da curva auxiliar (a curva que faz o papel de curva inicial escolhida), isto é, o eixo Ox (ou seja, $y = 0$ - veja (3.165)).

Consideremos agora a função $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} v(s, t) &\doteq u(x(s, t), y(s, t)), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \\ \text{ou ainda: } u(x, y) &\doteq v(s(x, y), t(x, y)), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Utilizando-se (3.70), (3.150) e (3.151), segue que:

$$\begin{aligned} v_s(s, t) &= d(x(s, t), y(s, t)) \\ &\stackrel{(3.149)}{=} y(s, t) e^{x(s, t)} \\ &\stackrel{(3.162), (3.163)}{=} s e^{-s^2+t}, \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

ou seja, a função $v = v(s, t)$ deverá satisfazer a seguinte EDP:

$$v_s(s, t) = s e^{-s^2+t}, \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.169)$$

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, integrando a equação (3.169), em relação a s , obteremos:

$$\begin{aligned} v(s, t) &= \int s e^{-s^2+t} ds + f(t) \\ &\stackrel{r \doteq -s^2+t \text{ logo: } dr = -2s ds}{=} \int e^r \frac{dr}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} e^r + f(t) \\ &\stackrel{r = -s^2+t}{=} -\frac{1}{2} e^{-s^2+t} + f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.170)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Deste modo teremos que

$$v(s, t) \doteq -\frac{1}{2} e^{-s^2+t} + f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.171)$$

será uma solução geral da EDP (3.169).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Como

$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{(3.168)}{=} v(s(x, y), t(x, y)) \\ &\stackrel{(3.171)}{=} -\frac{1}{2} e^{\overbrace{(-s^2+t)}^{(3.165) x}} + f(\overbrace{t}^{(3.166) x+y^2}) \\ &= -\frac{1}{2} e^x + f(x+y^2), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.172)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Portanto a solução geral da EDP (3.144) será dada por:

$$u(x, y) \doteq -\frac{1}{2}e^x + f(x + y^2), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.173)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária. □

Observação 3.174 *Notemos que no Exemplo (3.143) acima, mostramos que toda solução $u = u(x, y)$ da EDP (3.144), que pertence a $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, deverá ser da forma (3.173).*

Reciprocamente, se uma função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por (3.173), ela será uma solução da EDP (3.144), que pertence a $C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Temos também o:

Exemplo 3.175 *Encontrar (se possível) a solução geral, em $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, da EDP*

$$a u_x(x, y) + b u_y(x, y) + c u(x, y) = d, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.176)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são constantes fixadas satisfazendo

$$a^2 + b^2 \neq 0. \quad (3.177)$$

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$\Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (3.178)$$

$$a(x, y) \doteq a, \quad (3.179)$$

$$b(x, y) \doteq b, \quad (3.180)$$

$$c(x, y) \doteq c, \quad (3.181)$$

$$d(x, y) \doteq d, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.182)$$

ou seja, $a, b, c, d \in C(\Omega; \mathbb{R})$ e

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \stackrel{(3.179), (3.180)}{=} a^2 + b^2 \stackrel{(3.177)}{\neq} 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Na verdade estamos tratando de encontrar solução geral de uma EDP de 1.a ordem linear com coeficientes constantes, em duas variáveis reais.

Agiremos como no Exemplo (3.143) acima, isto é, utilizaremos as características planas associadas à EDP (3.176) e encontraremos uma curva auxiliar suave (que fará o papel da curva inicial) que intercepte, transversalmente, as curvas características planas associadas à EDP (3.176).

Se conseguirmos isso, poderemos fazer uma mudança de variáveis

$$\begin{aligned} s &= s(x, y), \\ t &= t(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega' \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \Omega, \end{aligned}$$

de modo transformar a EDP (3.176), em uma EDP mais simples de encontrarmos soluções.

Notemos que, para cada $t \in I$ fixado, o traço da curva parametrizada

$$s \mapsto (x(s, t), y(s, t))$$

é uma curva característica plana associada à EDP (4.154) e o traço da curva parametrizada

$$t \mapsto (x(0, t), y(0, t))$$

é a curva escolhida de modo conveniente (que fará o papel de curva inicial),

Começemos encontrando as curvas características planas associadas à EDP (3.176), isto é, as soluções de

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x(s), y(s)) \\ &\stackrel{(3.179)}{=} \underline{a}, \end{aligned} \tag{3.183}$$

$$\begin{aligned} y'(s) &= b(x(s), y(s)) \\ &\stackrel{(3.180)}{=} \underline{b}, \quad \text{para } s \in I \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.184}$$

As soluções das EDO (3.183) e (3.184) serão:

$$x(s) = \underline{a} s + C_1, \tag{3.185}$$

$$y(s) = \underline{b} s + C_2, \quad \text{para cada } s \in \mathbb{R}, \tag{3.186}$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ são arbitrárias.

Notemos que fazendo, multiplicando a equação (3.186) por \underline{a} , e subtraindo da equação (3.185), multiplicada \underline{b} , obteremos:

$$\begin{aligned} \underline{a} y - \underline{b} x &= (\underline{b} \underline{a} s + \underline{a} C_2) - (\underline{a} \underline{b} s + \underline{b} C_1) \\ &= \underline{a} C_2 - \underline{b} C_1 \doteq K_1, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{3.187}$$

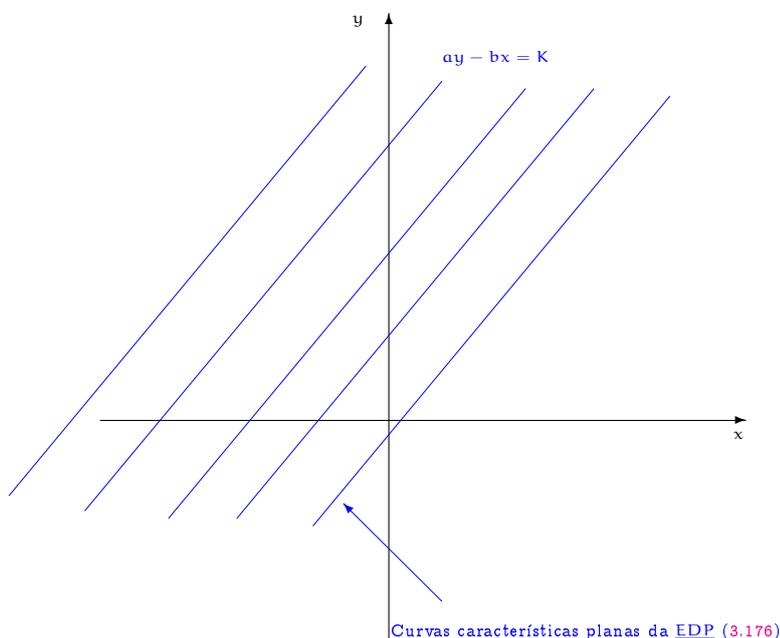
onde $K_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, ou seja, as curvas características planas associadas à EDP (3.176) serão as retas

$$\underline{a} y - \underline{b} x = K_1, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.188}$$

onde $K_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Logo as curvas características planas associadas à EDP (3.176) serão retas paralelas à reta (veja a figura abaixo)

$$\underline{a} y - \underline{b} x = 0.$$



Observemos que, para cada $K_2 \in \mathbb{R}$, a reta

$$-b y + a x = K_2, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.189)$$

é uma reta ortogonal a cada uma das curvas características planas obtidas acima (em particular, é transversal às mesmas).

Consideremos a aplicação

$$(x, y) \mapsto (s, t),$$

de modo que

$$t = t(x, y)$$

seja constante ao longo das características planas associadas à EDP (3.176) e

$$s = s(x, y)$$

seja constante ao longo das retas (3.189) (que são ortogonais às curvas características planas), isto é, das considerações acima, de (3.188) e de (3.189), definiremos:

$$s(x, y) = a x + b y, \quad (3.190)$$

$$t(x, y) = -b x + a y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.191)$$

Notemos que a aplicação

$$T : (x, y) \mapsto (s, t)$$

é um operador linear em \mathbb{R}^2 e que a matriz desse operador, em relação à base canônica de \mathbb{R}^2 , a saber, a base

$$\mathcal{B} \doteq \{(1, 0), (0, 1)\}$$

de \mathbb{R}^2 , será dada por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

cujos determinante será $a^2 + b^2 \stackrel{(3.177)}{\neq} 0$.

Logo o operador linear acima será um operador inversível (e cujo operador inverso também é um operador linear) e portanto (3.190) e (3.191) definem uma mudança de variáveis que será de classe $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$.

Consideremos agora

$$v(s, t) \doteq u[x(s, t), y(s, t)], \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.192)$$

ou seja,

$$u(x, y) = v[s(x, y), t(x, y)], \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.193)$$

Notemos que, da regra da cadeia para funções de várias variáveis, a valores reais, , teremos:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_s[s(x, y), t(x, y)] \underbrace{s_x(x, y)}_{\stackrel{(3.190)}{=} a} + v_t[s(x, y), t(x, y)] \underbrace{t_x(x, y)}_{\stackrel{(3.191)}{=} -b} \\ &= a v_s[s(x, y), t(x, y)] - b v_t[s(x, y), t(x, y)], \end{aligned} \quad (3.194)$$

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= v_s[s(x, y), t(x, y)] \underbrace{s_y(x, y)}_{\stackrel{(3.190)}{=} b} + v_t[s(x, y), t(x, y)] \underbrace{t_y(x, y)}_{\stackrel{(3.191)}{=} a} \\ &= b v_s[s(x, y), t(x, y)] + a v_t[s(x, y), t(x, y)] \end{aligned} \quad (3.195)$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Logo, substituindo (3.194) e (3.195) na EDP (3.176), obteremos:

$$\begin{aligned} d &\stackrel{(3.176)}{=} a u_x(x, y) + b u_y(x, y) + c u(x, y) \\ &\stackrel{(3.192), (3.194), (3.195)}{=} a [a v_s(s, t) - b v_t(s, t)] + b [b v_s(s, t) + a v_t(s, t)] + c v(s, t) \\ &= a^2 v_s(s, t) - a b v_t(s, t) - b a v_t(s, t) + c v(s, t) \\ &= (a^2 + b^2) v_s(s, t) + c v(s, t), \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

ou seja, a função $v = v(s, t)$ deverá satisfazer a seguinte EDP:

$$(a^2 + b^2) v_s(s, t) + c v(s, t) = d, \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Como $a^2 + b^2 \stackrel{(3.177)}{\neq} 0$, esta EDP será equivalente à:

$$v_s(s, t) + \frac{c}{a^2 + b^2} v(s, t) = \frac{d}{a^2 + b^2}, \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.196)$$

- Se $c = 0$, a EDP (3.196) tornar-se-á:

$$v_s(s, t) = \frac{d}{a^2 + b^2}, \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.197)$$

cuja solução geral (integrando-se, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, na variável s) será dada por:

$$v(s, t) = \frac{d}{a^2 + b^2} s + f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.198)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Logo, de (3.193), teremos:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{(3.193)}{=} v(s, t) \\ &= \frac{d}{a^2 + b^2} s + f(t) \\ &\stackrel{(3.190),(3.191)}{=} \frac{d}{a^2 + b^2} (ax + by) + f(-bx + ay), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.199)$$

ou seja, quando $c = 0$, uma solução geral da EDP (3.176), será dada por:

$$u(x, y) \doteq \frac{d}{a^2 + b^2} (ax + by) + f(-bx + ay), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.200)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

- Se $c \neq 0$, multiplicando-se a EDP (3.196) por

$$e^{\frac{cs}{a^2+b^2}}, \quad \text{para cada } s \in \mathbb{R}$$

(é um fator integrante da EDO obtida, quando fixamos $t \in \mathbb{R}$ na EDP (3.196)) obteremos a seguinte EDP:

$$e^{\frac{cs}{a^2+b^2}} \left[v_s(s, t) + \frac{c}{a^2 + b^2} v(s, t) \right] = \frac{d}{a^2 + b^2} e^{\frac{cs}{a^2+b^2}}, \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Notemos que o lado esquerdo da EDP acima poderá ser escrito como uma "derivada total", mais precisamente, teremos (verifique!)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[e^{\frac{cs}{a^2+b^2}} v(s, t) \right] = \frac{d}{a^2 + b^2} e^{\frac{cs}{a^2+b^2}}, \quad \text{para } s \in \mathbb{R}. \quad (3.201)$$

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, integrando-se a EDO (3.201), em relação a s , obteremos:

$$\begin{aligned} e^{\frac{cs}{a^2+b^2}} v(s, t) &= \int \frac{d}{a^2+b^2} e^{\frac{cs}{a^2+b^2}} ds \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{d}{a^2+b^2} \left(\frac{1}{\frac{c}{a^2+b^2}} e^{\frac{cs}{a^2+b^2}} + f(t) \right) \\ &= \frac{d}{c} e^{\frac{cs}{a^2+b^2}} + f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$v(s, t) = \frac{d}{c} + e^{\frac{-cs}{a^2+b^2}} f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.202)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Logo, de (3.193), teremos:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{(3.193)}{=} v(s, t) \\ &\stackrel{(3.202)}{=} \frac{d}{c} + e^{\frac{-cs}{a^2+b^2}} f(t) \\ &\stackrel{(3.190),(3.191)}{=} \frac{d}{c} + e^{\frac{-c(ax+by)}{a^2+b^2}} f(-bx+ay), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.203)$$

isto é, quando $c \neq 0$, uma solução geral da EDP (3.176) será dada por:

$$u(x, y) \doteq \frac{d}{c} + e^{\frac{-c(ax+by)}{a^2+b^2}} f(-bx+ay), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.204)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

□

Observação 3.205

1. Notemos que no Exemplo (3.175) acima, mostramos que toda solução $u = u(x, y)$ da EDP (3.176), que pertence à $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, deverá ser da forma (3.204), se $c \neq 0$, ou da forma (3.200), se $c = 0$.

Reciprocamente, dada uma função $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por (3.204), para $c \neq 0$, ou da forma (3.200), para $c = 0$, será uma solução da EDP (3.176), que pertence à $C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor

2. A idéia utilizada no Exemplo (3.175) acima poderá também ser aplicada em casos em que a EDP não tem coeficientes constantes, a saber: EDP do tipo:

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) + c(x, y) u(x, y) = d(x, y), \quad (3.206)$$

para cada $(x, y) \in \Omega$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto em \mathbb{R}^2 , $a, b, c, d \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ são dadas satisfzendo

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \neq 0, \quad (3.207)$$

para $(x, y) \in \Omega$.

Neste caso as curvas características planas associadas à EDP serão soluções do sistema de EDO's:

$$x'(s) = a(x(s), y(s)), \quad (3.208)$$

$$y'(s) = b(x(s), y(s)), \quad \text{para } s \in I \subseteq \mathbb{R}. \quad (3.209)$$

Notemos que a curva

$$s \mapsto (x(s), y(s))$$

será solução da EDO de 1.a ordem linear (na forma de diferencial)

$$a(x, y) dy - b(x, y) dx = 0. \quad (3.210)$$

Para ver isto basta notar que se

$$a(x_0, y_0) \neq 0,$$

então, da continuidade da função a segue que

$$a(x, y) \neq 0,$$

para (x, y) em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) , contida em Ω .

Logo, aplicando a regra da cadeia e a derivação da função inversa nessa vizinhança, teremos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \\ &\stackrel{\text{derivada da função inversa}}{=} \frac{dy}{ds} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{ds}} \\ &= \frac{y'(s)}{x'(s)} \\ &\stackrel{(3.208), (3.209)}{=} b(x, y) \frac{1}{a(x, y)}, \end{aligned}$$

$$\text{ou, equivalentemente: } a(x, y) dy - b(x, y) dx = 0.$$

Se

$$a(x_0, y_0) = 0,$$

então, de (3.207) deveremos ter

$$b(x_0, y_0) \neq 0$$

e assim podemos aplicar as idéias acima para obter $\frac{dx}{dy}$ e com isto obter a EDO, na forma diferencial (3.210).

Deixaremos os detalhes deste caso como exercício para o leitor.

Notemos agora que, se as soluções da EDO (3.210) forem da forma (também conhecidas como curvas integrais, ou integrais primeiras)

$$t(x, y) = K, \quad \text{para cada } K \in \mathbb{R}, \quad (3.211)$$

é natural considerarmos a função

$$t \doteq t(x, y) \quad (3.212)$$

como uma das novas variáveis, como vimos nos Exemplos (3.175) acima (veja (3.189) e (3.191)), ou seja,

$$t = t(x, y)$$

deverá ser constante ao longo das curvas características planas associadas à EDP (3.206).

Para a escolha da expressão da outra função da mudança de variáveis, a saber,

$$s = s(x, y),$$

temos uma certa liberdade, ou seja, basta garantir que a transformação

$$s = s(x, y), \quad (3.213)$$

$$t = t(x, y) \quad (3.214)$$

seja uma mudança de variáveis de classe $C^1(\Omega'; \mathbb{R})$, onde Ω' um subconjunto aberto, contido em Ω .

Notemos que para isto bastará que o jacobiano

$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)}(x, y) \doteq \begin{vmatrix} s_x(x, y) & s_y(x, y) \\ t_x(x, y) & t_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega,$$

pois podemos utilizar o Teorema da função inversa, estudado no curso de Cálculo II.

Lembremos que tal Teorema nos fornece transformações inversas locais.

3. Notemos que se

$$t_y(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega$$

(respectivamente,

$$t_x(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega),$$

segue que podemos tomar

$$s(x, y) \doteq x, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega$$

ou, mais geralmente, uma função linear afim na variável x (respectivamente,

$$s(x, y) \doteq y, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

ou, mais geralmente, uma função linear afim na variável y).

De fato pois, neste caso, o jacobiano acima será dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)}(x, y) &\doteq \begin{vmatrix} s_x(x, y) & s_y(x, y) \\ t_x(x, y) & t_y(x, y) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t_x(x, y) & t_y(x, y) \end{vmatrix} \\ &= t_y(x, y) \neq 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Analogamente, para o caso que $t_x(x, y) \neq 0$, para cada $(x, y) \in \Omega$.

4. Observemos que, se a função

$$s = s(x, y)$$

é uma função não constante, for constante ao longo das curvas ortogonais às curvas características planas associadas à EDP acima, o jacobiano acima nunca se anulará em Ω .

De fato, pois as curvas de nível das funções

$$t = t(x, y) \quad \text{e} \quad s = s(x, y)$$

serão curvas ortogonais.

Logo os seus respectivos vetores tangentes serão ortogonais, em cada ponto de interseção das mesmas, em particular L.I. em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ e, como consequência, o jacobiano acima será não nulo em Ω .

5. Notemos que as curvas ortogonais às curvas características planas associadas a EDP dada, serão as soluções a EDO (na forma diferencial):

$$b(x, y) dy + a(x, y) dx = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega. \quad (3.215)$$

Para ver isto vamos supor que estamos na situação acima.

De (3.210), se $y = y(x)$ (se $x = x(y)$, algo do mesmo tipo ocorrerá) teremos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega.$$

Logo as curvas ortogonais a estas deverão ter coeficientes angulares das retas tangentes dados por

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\frac{b(x, y)}{a(x, y)}} \\ &= -\frac{a(x, y)}{b(x, y)}, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } b(x, y) dy + a(x, y) dx = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \quad (3.216)$$

como afirmamos acima.

6. Vale observar que, escrever uma EDO na forma (3.210) nos traz a grande vantagem de podermos resolvê-la tanto tentando encontrar uma solução do tipo uma função diferenciável:

$$y = y(x), \quad \text{para cada } x \in I,$$

ou uma solução do tipo uma função diferenciável:

$$x = x(y), \quad \text{para cada } y \in J$$

ou, em geral, como uma curva parametrizada diferenciável

$$s \mapsto (x(s), y(s)), \quad \text{para cada } s \in K,$$

onde I, J, K são intervalos abertos de \mathbb{R} .

Apliquemos as idéias acima ao:

Exemplo 3.217 Encontrar uma solução geral clássica (isto é, na classe $C^1((-\infty, 0) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$) da EDP:

$$x^2 u_x(x, y) - xy u_y(x, y) + y u(x, y) = xy^2, \quad \text{para } (x, y) \in (-\infty, 0) \times \mathbb{R}. \quad (3.218)$$

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$\Omega \doteq (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \quad (3.219)$$

$$a(x, y) \doteq x^2, \quad (3.220)$$

$$b(x, y) \doteq -xy, \quad (3.221)$$

$$c(x, y) \doteq y, \quad (3.222)$$

$$d(x, y) \doteq xy^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.223)$$

ou seja, $a, b, c, d \in C(\Omega; \mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} a^2(x, y) + b^2(x, y) &\stackrel{(3.220), (3.221)}{=} x^2 + (-xy)^2 \\ &= x^2(1 + y^2) \neq 0 \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in \Omega = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$.

Na verdade estamos tratando de encontrar solução geral de uma EDP de 1.a ordem linear com coeficientes **não constantes**, em duas variáveis reais.

Neste caso as curvas características planas associadas à EDP (3.218) serão as soluções da EDO que, na forma diferencial (veja (3.210)), será dada por:

$$x^2 dy - (-xy) dx = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \doteq (-\infty, 0) \times \mathbb{R}. \quad (3.224)$$

Como $x \in (-\infty, 0)$, a EDO (3.224) acima poderá ser escrita na forma usual, da seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{y(x)}{x},$$

ou seja, $\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x},$

ou ainda, $\frac{d}{dx}[\ln(y(x))] = -\frac{1}{x},$

isto é, $\ln[y(x)] = -\int \frac{1}{x} dx,$

ou seja, $\ln(y) = -\ln(|x|) + C.$

Como $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$, existe $K_1 \neq 0$, tal que, $\ln(y) = -\ln(|x|) + \ln(|K_1|),$

isto é, $\ln(y) = \ln\left(\frac{|K_1|}{|x|}\right),$

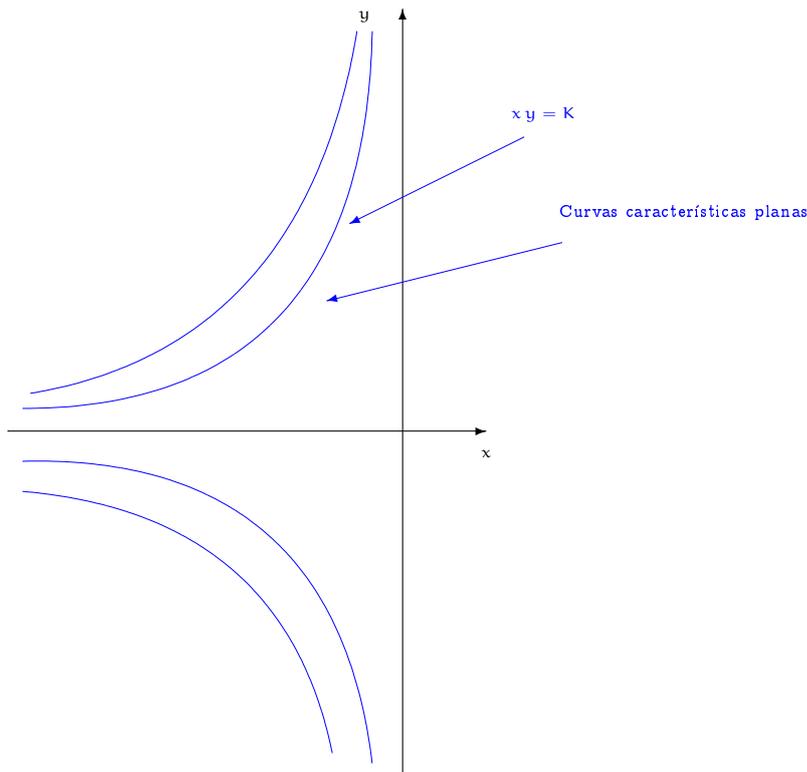
ou seja, $y = \frac{K}{x},$

ou ainda, $xy = K, \quad \text{para cada } x \in (-\infty, 0),$

onde $K \in \mathbb{R}$, ou seja, as curvas características planas associadas à EDP (3.218) serão as hipérbolas

$$xy = K, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \doteq (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \quad (3.225)$$

onde $K \in \mathbb{R}$ (veja a figura abaixo).



Logo, baseado nas idéias do item 2. da Observação (3.205), se considerarmos

$$t(x, y) \doteq xy, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \doteq (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \quad (3.226)$$

teremos, em particular, que a função

$$t = t(x, y)$$

será constante ao longo das curvas características planas associadas à EDP (3.218) (como foi sugerido no item 2. da Observação (3.205)).

Notemos que

$$t_y(x, y) \stackrel{(3.226)}{=} x \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \doteq (-\infty, 0) \times \mathbb{R}.$$

Assim, baseado no item 3. da Observação (3.205), podemos considerar como candidata a outra função da mudança de variáveis, a função:

$$s(x, y) \doteq x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \doteq (-\infty, 0) \times \mathbb{R}. \quad (3.227)$$

Com isto podemos considerar a mudança de variáveis em $\underline{\Omega}$:

$$T(x, y) \doteq (s(x, y), t(x, y)), \quad \text{onde:} \quad (3.228)$$

$$s(x, y) \doteq x, \quad (3.228)$$

$$t(x, y) \doteq xy, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.229)$$

e

$$\Lambda \doteq T(\Omega) = (-\infty, 0) \times \mathbb{R},$$

que é a imagem de $\underline{\Omega}$ por essa transformação.

Notemos que a transformação inversa, $T^{-1} : \Lambda \rightarrow \Omega$, será dada por:

$$x(s, t) \doteq s, \quad (3.230)$$

$$y(s, t) \doteq \frac{t}{s}, \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda. \quad (3.231)$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Definamos a função $v : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$v(s, t) \doteq u[x(s, t), y(s, t)], \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda, \quad (3.232)$$

ou ainda,

$$u(x, y) \doteq v[s(x, y), t(x, y)], \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (3.233)$$

Com isto, pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} v_s(s, t) &\stackrel{(3.232) \text{ e a regra da cadeia}}{=} u_x[x(s, t), y(s, t)] \underbrace{x_s(s, t)}_{\stackrel{(3.230)}{=} 1} + u_y[x(s, t), y(s, t)] \underbrace{y_s(s, t)}_{\stackrel{(3.231)}{=} -\frac{t}{s^2}} \\ &= u_x[x(s, t), y(s, t)] - u_y[x(s, t), y(s, t)] \underbrace{\frac{t}{s}}_{\stackrel{(3.231)}{=} y} \underbrace{\frac{1}{s}}_{\stackrel{(3.230)}{=} \frac{1}{x}} \\ &= u_x(x, y) - u_y(x, y) \frac{y}{x}, \end{aligned} \quad (3.234)$$

para cada $(s, t) \in \Lambda$, assim:

$$\begin{aligned} s^2 v_s(s, t) &\stackrel{s^2 \stackrel{(3.228)}{=} x^2 \text{ e } (3.234)}{=} x^2 \left[u_x(x, y) - u_y(x, y) \frac{y}{x} \right] \\ &= x^2 u_x(x, y) - x^2 u_y(x, y) \frac{y}{x} \\ &= x^2 u_x(x, y) - xy u_y(x, y) \\ &\stackrel{(3.218)}{=} -y u(x, y) + xy^2 \\ &= y^{\stackrel{(3.231)}{=} \frac{t}{s}} x^{\stackrel{(3.230)}{=} s} \stackrel{(3.232)}{=} -\frac{t}{s} v(s, t) + s \frac{t^2}{s^2} \\ &= -\frac{t}{s} v(s, t) + \frac{t^2}{s}, \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda, \end{aligned}$$

ou seja, a função $v = v(s, t)$ deverá satisfazer a seguinte EDP:

$$s^2 v_s(s, t) = -\frac{t}{s} v(s, t) + \frac{t^2}{s}, \quad \text{para } (s, t) \in \Lambda,$$

ou, como $s \in (-\infty, 0)$, esta será equivalente à seguinte EDP:

$$v_s(s, t) + \frac{t}{s^3} v(s, t) = \frac{t^2}{s^3}, \quad \text{para } (s, t) \in \Lambda = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}. \quad (3.235)$$

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, a EDP (3.235), tornar-se-á uma EDO linear de 1.a ordem, cujo um fator integrante é dado por:

$$e^{\int \frac{t}{s^3} ds} = e^{-\frac{t}{2s^2}}, \quad \text{para cada } s \in (-\infty, 0). \quad (3.236)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, multiplicando-se a EDO pelo fator integrante (3.236) acima, obteremos:

$$\underbrace{e^{-\frac{t}{2s^2}} v_s(s, t) + e^{-\frac{t}{2s^2}} \frac{t}{s^3} v(s, t)}_{= \frac{\partial}{\partial s} \left[e^{-\frac{t}{2s^2}} v(s, t) \right]} = e^{-\frac{t}{2s^2}} \frac{t^2}{s^3}, \quad \text{para } s \in (-\infty, 0),$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[e^{-\frac{t}{2s^2}} v(s, t) \right] = e^{-\frac{t}{2s^2}} \frac{t^2}{s^3}, \quad \text{para } (s, t) \in \Lambda. \quad (3.237)$$

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, integrando-se a equação (3.237) acima, em relação a \underline{s} , obteremos:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t}{2s^2}} v(s, t) &= \int e^{-\frac{t}{2s^2}} \frac{t^2}{s^3} ds + f(t) \\ &\stackrel{w = -\frac{t}{2s^2}, \text{ assim: } dw = \frac{t}{s^3} ds}{=} \int t e^w dw + f(t) \\ &= t e^w + f(t) \\ &\stackrel{w = -\frac{t}{2s^2}}{=} t e^{-\frac{t}{2s^2}} + f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda, \end{aligned}$$

ou seja,

$$v(s, t) = t + f(t) e^{\frac{t}{2s^2}}, \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda, \quad (3.238)$$

será a solução geral da EDP (3.235), onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Utilizando-se (3.233), (3.228) e (3.229) segue que a solução geral da EDP (3.218) será dada por:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{(3.233)}{=} v(s, t) \\ &\stackrel{(3.238)}{=} t + f(t) e^{\frac{t}{2s^2}} \\ &\stackrel{(3.228)}{=} s \stackrel{(3.229)}{=} x, t \stackrel{(3.229)}{=} xy \quad xy + f(xy) e^{\frac{xy}{2x^2}} \\ &= xy + f(xy) e^{\frac{y}{2x}}, \quad \text{para cada } (x, y) \in (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(x, y) = xy + f(xy) e^{\frac{y}{2x}}, \quad \text{para cada } (x, y) \in (-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \quad (3.239)$$

será uma solução geral da EDP (3.218), onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Observação 3.240 *Notemos que no Exemplo (3.217) acima, mostramos que toda solução $u = u(x, y)$ da EDP (3.218), que pertence a $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, deverá ser da forma (3.238), para alguma $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.*

Reciprocamente, a função $u = u(x, y)$, dada por (3.238), onde $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, será uma solução da EDP (3.218), que pertence a $C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Apliquemos as mesmas idéias acima ao:

Exemplo 3.241 *Encontrar uma solução geral clássica (isto é, na classe $C^1((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$) da EDP linear de 1.a ordem:*

$$x u_x(x, y) + (x - 1) u_y(x, y) + x u(x, y) = e^{x-y}, \quad \text{para } (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}. \quad (3.242)$$

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$\Omega \doteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \quad (3.243)$$

$$a(x, y) \doteq x, \quad (3.244)$$

$$b(x, y) \doteq x - 1, \quad (3.245)$$

$$c(x, y) \doteq x, \quad (3.246)$$

$$d(x, y) \doteq e^{x-y}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.247)$$

ou seja, $a, b, c, d \in C(\Omega; \mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} a^2(x, y) + b^2(x, y) &\stackrel{(3.244), (3.245)}{=} x^2 + (x - 1)^2 \\ &= 2x^2 - 2x + 1 \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0 \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in \Omega$.

Como no Exemplo (3.217) anterior, estamos tratando de encontrar solução geral de uma EDP de 1.a ordem linear com coeficientes não constantes em duas variáveis reais.

Neste caso as curvas características planas associadas à EDP (3.242) serão as soluções da EDO, na forma diferencial (veja (3.210)), será dada por:

$$x \, dy - (x - 1) \, dx = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega. \quad (3.248)$$

Como $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a EDO (3.248) acima, será equivalente a seguinte EDO:

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx}(x) = \frac{x-1}{x}, \\ & \text{ou seja, } \frac{dy}{dx}(x) = 1 - \frac{1}{x}, \\ & \text{integrando-a, em relação à } x, \text{ teremos: } y = x - \ln(|x|) + C, \\ & \text{ou seja, } e^y = e^{x - \ln(|x|) + C} \\ & \qquad \qquad \qquad = e^x \frac{1}{|x|} e^C, \\ & \text{tomando-se } K_1 \doteq e^C, \text{ teremos } |x| e^{y-x} = K_1, \\ & \text{isto é, } x e^{y-x} = K, \end{aligned} \quad (3.249)$$

para $K \in \mathbb{R}$ arbitrária, ou seja, as curvas características planas associadas a EDP (3.242) serão da forma (veja a figura abaixo)

$$y = x - \ln(|x|) + C, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.250)$$

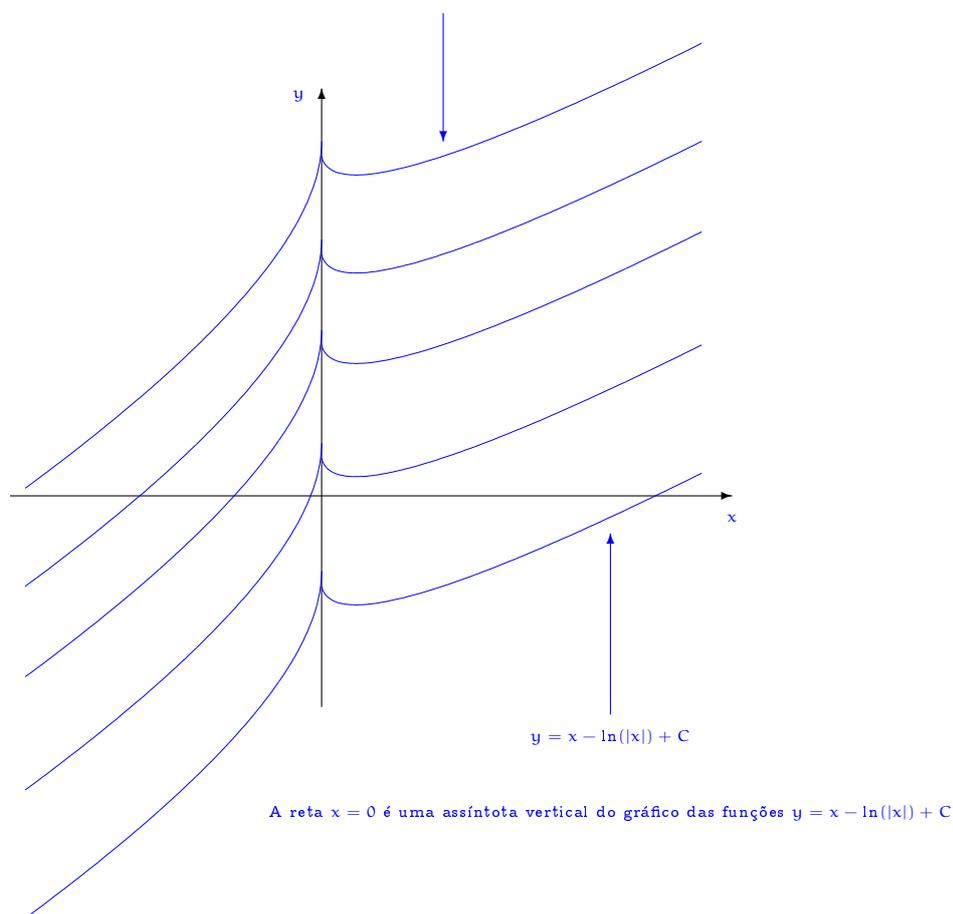
para cada $K \in \mathbb{R}$, ou ainda,

$$x e^{y-x} = K, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.251)$$

para cada $K \in \mathbb{R}$.

A representação geométrica do gráfico das curvas acima é dada pela figura abaixo.

Curvas características planas associadas a EDP (3.242)



Utilizando-se as idéias do item 2. da Observação (3.205), vamos considerar

$$t(x, y) \doteq x e^{y-x}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.252)$$

que é uma função a valores reais, de classe $C^1(\Omega; \mathbb{R})$ (na verdade de classe $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$).

Observemos que, para cada $(x, y) \in \Omega$, teremos:

$$\begin{aligned} t_x(x, y) &\stackrel{(3.252)}{=} e^{y-x} + x e^{y-x} \cdot (-1) \\ &= (1 - x) e^{y-x} \\ &= 0 \quad \text{se, e somente se, } x = 1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$t_y(x, y) \stackrel{(3.252)}{=} x e^{y-x} \cdot 1 \neq 0, \quad \text{pois } (x, y) \in \Omega = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

Notemos que (veja o item 3. da Observação (3.205)), se considerarmos

$$s(x, y) \doteq y - x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.253)$$

segue que, a função a valores reais, $s = s(x, y)$, pertencerá à $C^1(\Omega; \mathbb{R})$ (na verdade pertencerá à $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$) e

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} s_x(x, y) & s_y(x, y) \\ t_x(x, y) & t_y(x, y) \end{vmatrix} &\stackrel{(3.252), (3.253)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ (1-x)e^{y-x} & xe^{y-x} \end{vmatrix} \\ &= -xe^{y-x} - (1-x)e^{y-x} \\ &= -e^{y-x} \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.254)$$

Logo, a transformação

$$T : (x, y) \mapsto (s, t),$$

dada por:

$$s(x, y) = y - x, \quad (3.255)$$

$$t(x, y) = xe^{y-x}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (3.256)$$

é uma mudança de variáveis de classe $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, sobre a imagem $\Lambda \doteq T(\Omega) = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Notemos que se

$$s = y - x \quad \text{então, de (3.256), segue que } t = xe^s,$$

o que implicará que

$$x = te^{-s},$$

ou seja, a transformação inversa $T^{-1} : \Lambda \rightarrow \Omega$, será dada por:

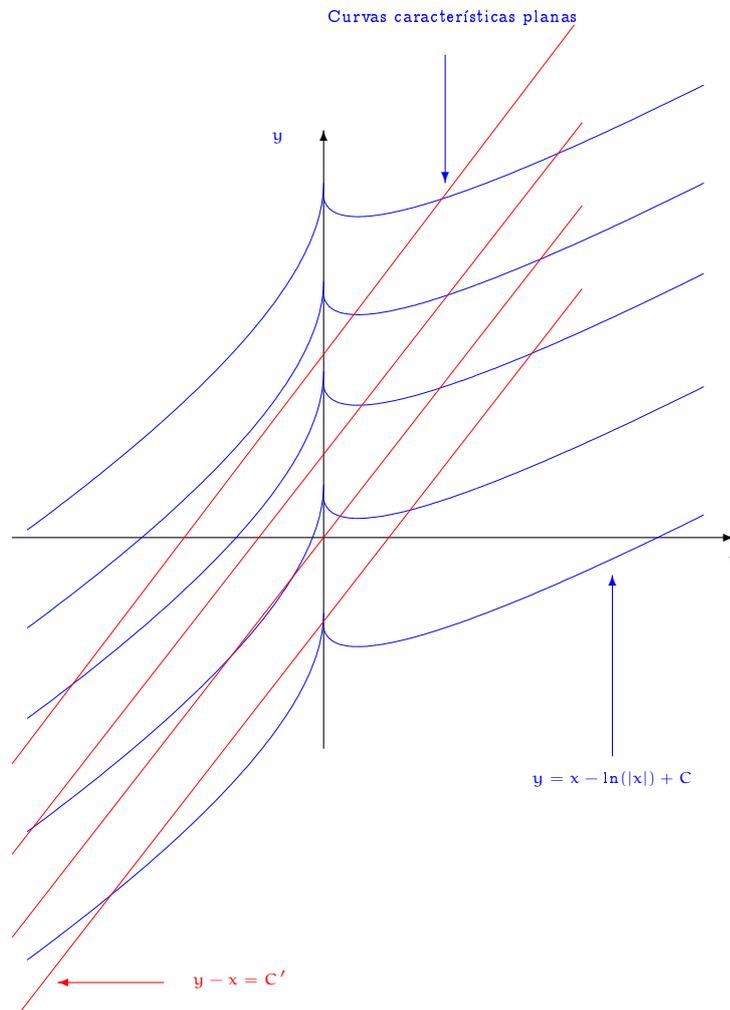
$$x(s, t) = te^{-s}, \quad (3.257)$$

$$y(s, t) = s + te^{-s}, \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda. \quad (3.258)$$

A figura abaixo ilustra as curvas características planas associadas à EDP dada por (3.251) e as curvas

$$y - x = K_2, \quad (3.259)$$

para $K_2 \in \mathbb{R}$.



Notemos que as duas famílias de curvas, dadas pelas equações (3.251) e (3.259), são transversais, em cada ponto de intersecção das mesmas, como indica o jacobiano (3.254) acima.

Definamos a função $v : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(s, t) \doteq u[x(s, t), y(s, t)], \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda, \quad (3.260)$$

ou ainda,

$$u(x, y) \doteq v[s(x, y), t(x, y)], \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (3.261)$$

Com isto, de (3.260) e da regra da cadeia, segue que:

$$\begin{aligned} v_s(s, t) &= u_x[x(s, t), y(s, t)] \underbrace{x_s(s, t)}_{\stackrel{(3.257)}{=} t e^{-s} (-1)}} + u_y[x(s, t), y(s, t)] \underbrace{y_s(s, t)}_{\stackrel{(3.258)}{=} 1 + t e^{-s} (-1)}} \\ &= - \underbrace{t e^{-s}}_{\stackrel{(3.257)}{=} x}} u_x[x(s, t), y(s, t)] + (1 - \underbrace{t e^{-s}}_{\stackrel{(3.257)}{=} x}}) u_y[x(s, t), y(s, t)] \end{aligned}$$

$$= -x u_x(x, y) + (1 - x) u_y(x, y). \quad (3.262)$$

Logo

$$\begin{aligned} v_s(s, t) - \underbrace{t e^{-s}}_{(3.257)_x} v(s, t) &\stackrel{(3.262), (3.260)}{=} [-x u_x(x, y) + (1 - x) u_y(x, y)] - x u(x, y) \\ &= -[x u_x(x, y) + (x - 1) u_y(x, y) + x u(x, y)] \\ &\stackrel{(3.242)}{=} -e^{x-y} \\ &\stackrel{(3.255)}{=} y^{-x} - e^{-s}, \quad \text{para } (s, t) \in \Lambda, \end{aligned}$$

ou seja, a função $v = v(s, t)$ deverá satisfazer a seguinte EDP:

$$v_s(s, t) - t e^{-s} v(s, t) = -e^{-s}, \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda. \quad (3.263)$$

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, a EDP (3.263), tornar-se-á uma EDO linear de 1.a ordem, cujo um fator integrante será dado por:

$$e^{\int -t e^{-s} ds} = -e^{t e^{-s}}, \quad \text{para cada } s \in \mathbb{R}. \quad (3.264)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, multiplicando-se a EDO (3.263) pelo fator (3.264) acima, obtemos:

$$\underbrace{e^{t e^{-s}} v_s(s, t) - e^{t e^{-s}} t e^{-s} v(s, t)}_{= \frac{\partial}{\partial s} [e^{t e^{-s}} v(s, t)]} = -e^{t e^{-s}} e^{-s},$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial s} [e^{t e^{-s}} v(s, t)] = -e^{t e^{-s}} e^{-s}, \quad \text{para } (s, t) \in \Lambda. \quad (3.265)$$

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, integrando-se a equação (3.265) acima, em relação a \underline{s} , obteremos:

$$\begin{aligned} e^{t e^{-s}} v(s, t) &= - \int e^{t e^{-s}} e^{-s} ds + f(t) \\ &\stackrel{w=e^{-s}, \text{ assim: } dw=-e^{-s} ds}{=} \\ &= \int e^{t w} dw + f(t) \\ &= \frac{e^{t w}}{t} + f(t) \\ &\stackrel{w=e^{-s}}{=} \frac{e^{t e^{-s}}}{t} + f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda, \end{aligned}$$

ou seja, a função

$$v(s, t) \doteq \frac{1}{t} + e^{-te^{-s}} f(t), \quad \text{para cada } (s, t) \in \Lambda, \quad (3.266)$$

será a solução geral da EDP (3.242), onde $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Utilizando-se (3.261), (3.255) e (3.256) segue que a solução geral da EDP (3.242) será dada por

$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{(3.261)}{=} v(s, t) \\ &\stackrel{(3.266)}{=} \frac{1}{t} + e^{-te^{-s}} f(t) \\ &\stackrel{(3.255)}{=} \frac{1}{x e^{y-x}} + f(x e^{y-x}) e^{-x e^{y-x} e^{-(y-x)}} \\ &= \frac{e^{y-x}}{x} + f(x e^{y-x}) e^{-x}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(x, y) = \frac{e^{y-x}}{x} + f(x e^{y-x}) e^{-x}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \quad (3.267)$$

será a solução geral da EDP (3.242), onde $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Observação 3.268

1. Notemos que no Exemplo (3.241) acima, mostramos que toda solução $u = u(x, y)$ da EDP (3.242), que pertence à $C^1(\Omega; \mathbb{R})$, deverá ser da forma (3.267), para alguma $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R})$.

Reciprocamente, a função $u = u(x, y)$ dada por (3.267), onde $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R})$, será uma solução da EDP (3.242), que pertence à $C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. Observemos que os coeficientes da EDP (3.242) são funções de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (na verdade são funções analíticas em \mathbb{R}^2) e a solução (3.267) tem uma descontinuidade em $x = 0$.

3.4 Exercícios

Capítulo 4

Equações de Primeira Ordem: Alguns Problemas

Neste capítulo investigaremos alguns problemas quando a teorema de existência e unicidade não se aplica e analisaremos alguns exemplos associados a EDP 's não é lineares.

4.1 Alguns problemas relacionados com EDP 's de 1.a ordem lineares

118g Consideremos a EDP

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) = c(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \quad (4.1)$$

onde Ω é um aberto de \mathbb{R}^2 , $a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Observação 4.2

1. Como no Capítulo anterior, as curvas características planas associadas à EDP (4.1) são curvas parametrizadas

$$s \in J \mapsto (\alpha(s), \beta(s)) \in \Omega$$

de classe $C^1(J; \mathbb{R})$ de modo que, para cada $s \in J$, o vetor tangente a essa curva no ponto $(\alpha(s), \beta(s))$ seja paralelo ao vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)))$, isto é,

$$\alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \quad (4.3)$$

$$\beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para } s \in J. \quad (4.4)$$

2. Se a curva inicial $\gamma: I \rightarrow \Omega$ admite uma parametrização do tipo

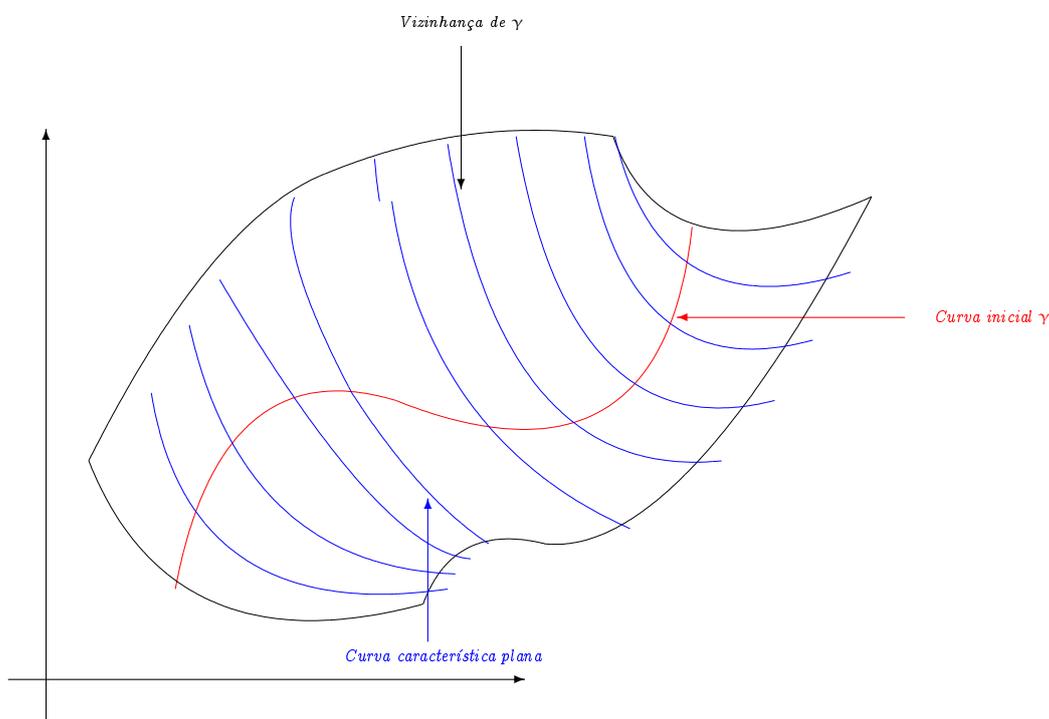
$$t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t)) \in \Omega, \quad (4.5)$$

que é de classe $C^1(I; \mathbb{R})$ e não é tangente às curvas características associadas à EDP (4.1), vimos que o problema de Cauchy

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) = c(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \quad (4.6)$$

$$u[\sigma(t), \rho(t)] = f(t), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (4.7)$$

onde $f \in C^1(I; \mathbb{R})$, terá um única solução, definida em uma vizinhança do traço da curva $\underline{\gamma}$, contida em $\underline{\Omega}$ (veja a figura abaixo).



3. Um questão que podemos colocar é a seguinte: o que acontecerá com o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) se a curva inicial $\underline{\gamma}$ é uma curva característica plana associada à EDP (4.6) ou é tangente à um destas ?
4. De alguns Exemplos que vimos no Capítulo anterior, o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) poderá **não** ter solução (veja Exemplo (3.11)) ou pode ter uma infinidade de soluções (veja Exemplo (3.18)).
5. Como veremos a seguir, isso é o que ocorre em geral, quando a curva inicial é uma curva característica plana associada à EDP (4.6).
6. O que irá diferenciar um caso do outro (isto é, não ter solução ou ter infinitas soluções), será o conceito que iremos introduzir a seguir, de curva característica es-

pacial associada à EDP (4.6) (dai, mais um motivo da curva anterior chamar-se "curva característica plana").

Temos a:

Definição 4.8 *Uma a curva parametrizada no espaço,*

$$s \in K \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s)) \in \mathbb{R}^3,$$

pertencente à $C^1(K; \mathbb{R}^3)$, onde o conujunto K é um intervalo aberto de \mathbb{R} , será denominada curva característica espacial associada à EDP (4.6), se seu vetor tangente, no ponto $(\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ é paralelo ao vetor

$$(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)), c(\alpha(s), \beta(s))),$$

para cada $s \in K$, mais precisamente, tenhamos:

$$\alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)), \quad (4.9)$$

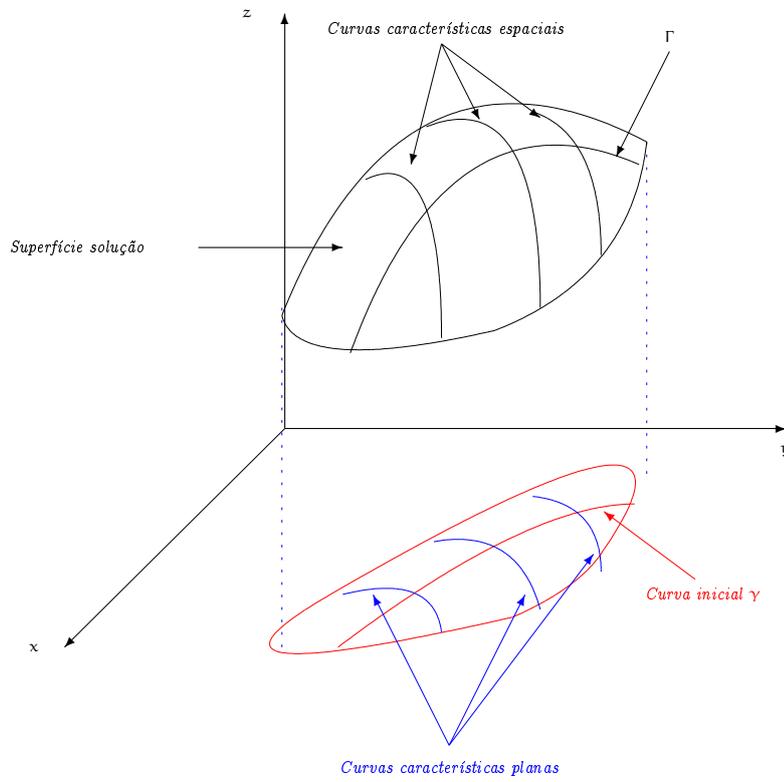
$$\beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)), \quad (4.10)$$

$$\xi'(s) = c(\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para cada } s \in K. \quad (4.11)$$

Observação 4.12 *Notemos que quando a curva inicial γ não é tangente a nenhuma das curvas características planas associadas à EDP (4.6), a superfície solução associada à EDP (4.6) (ou seja, a representação geométrica do gráfico da solução $u = u(x, y)$), será formada pela curva*

$$\Gamma : t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t), f(t)) \quad (4.13)$$

juntamente com todas as curvas características espaciais que interceptam a curva Γ (veja a figura abaixo).



De fato, pois, dado um ponto

$$P_0 \doteq (\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0)) \in \Gamma,$$

podemos encontrar uma parametrização

$$s \in J \doteq [-\varepsilon, \varepsilon] \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s)) \in \mathbb{R}^3$$

para a curva característica espacial associada à EDP (4.6), que passa pelo ponto P_0 .

Mais precisamente, podemos encontrar uma solução para o PVI associado ao sistema de EDO's (4.9)-(4.10)-(4.11), satisfazendo

$$\alpha(0) = \sigma(t_0), \quad \beta(0) = \rho(t_0) \quad e \quad \xi(0) = f(t_0). \quad (4.14)$$

Logo, de (4.9) e (4.10), segue que a curva característica plana associada à EDP (4.6), que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$, será dada por:

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para cada } s \in J.$$

Portanto a EDP (4.6), poderá ser colocada na forma:

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = c(\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para } s \in J. \quad (4.15)$$

Assim, para cada $t_0 \in I$ fixado, integrando-se a EDO (4.15) acima, em relação s , de 0 até s , obteremos:

$$\begin{aligned}
 u[\alpha(s), \beta(s)] - \underbrace{u[\alpha(0), \beta(0)]}_{\stackrel{(4.14)}{=} u(\sigma(t_0), \rho(t_0)) \stackrel{(4.7)}{=} f(t_0)}} &= \int_0^s c[\alpha(s), \beta(s)] ds \\
 &\stackrel{(4.11)}{=} \int_0^s \xi'(s) ds \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \xi(s) - \underbrace{\xi(0)}_{\stackrel{(4.14)}{=} f(t_0)}} \\
 &= \xi(s) - f(t_0),
 \end{aligned}$$

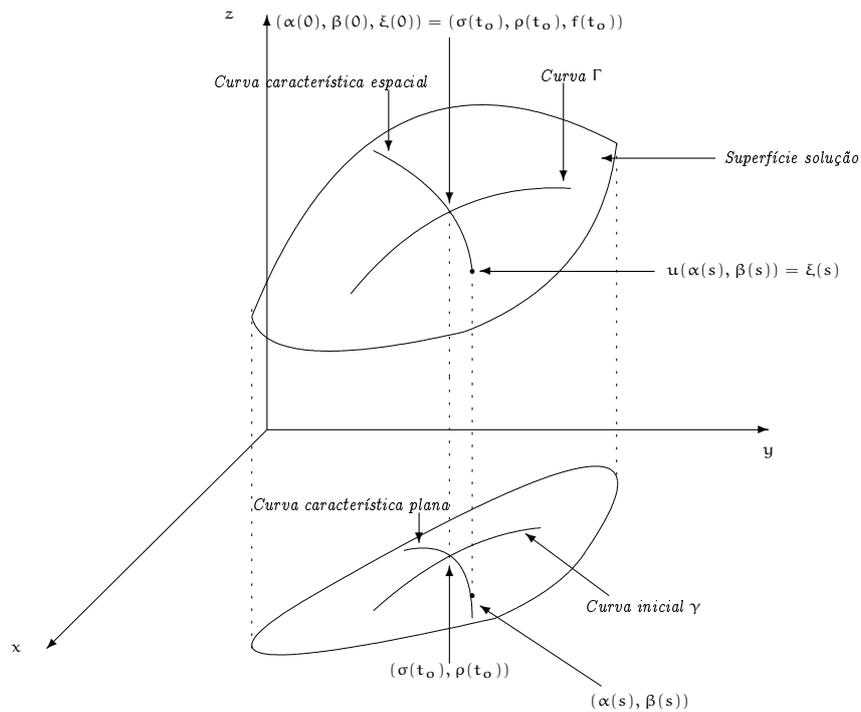
ou seja,

$$u[\alpha(s), \beta(s)] = \xi(s), \quad \text{para cada } s \in J,$$

o que mostra que a curva característica espacial associada à EDP (4.6), que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0)) \in \Gamma$, que tem parametrização dada por,

$$s \in J \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s)),$$

estará contida na superfície solução associada ao PVI da EDP (4.6), isto é, no gráfico da função $z = u(x, y)$, onde a função $u = u(x, y)$ é solução da EDP (4.6) (veja a figura abaixo).



Por outro lado, a superfície solução pode ser parametrizada (de modo C^1 , em Ω') por

$$(s, t) \in \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto (x(s, t), y(s, t), v(s, t)),$$

como visto no Capítulo anterior (veja o item 3. da Observação (3.80)).

Logo, para cada $t_0 \in I$ fixado, definindo-se as funções $\alpha, \beta, \xi: J \rightarrow \mathbb{R}$, por:

$$\alpha(s) \doteq x(s, t_0), \quad (4.16)$$

$$\beta(s) \doteq y(s, t_0), \quad (4.17)$$

$$\xi(s) \doteq v(s, t_0), \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

teremos que $\alpha, \beta, \xi \in C^1(J; \mathbb{R})$, e satisfazem

$$\alpha(0) = x(0, t_0) = \sigma(t_0), \quad \beta(0) = y(0, t_0) = \rho(t_0) \quad e \quad \xi(0) = v(0, t_0) = f(t_0),$$

ou seja,

$$(\alpha(0), \beta(0), \xi(0)) = (\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0)) \in \Gamma.$$

Notemos que, devido a (3.62), (3.63), (3.64), (3.65) e (3.76), as funções α, β, ξ satisfazem as equações (4.9), (4.10) e (4.11), assim a curva parametrizada

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$$

será uma curva característica espacial associada à EDP (4.6), que intercepta o traço da curva Γ , quando $s = 0$, ou seja, a superfície solução, associada à EDP (4.6), pode ser obtida do traço da curva Γ , juntamente o mesmo as traços das curvas características espaciais, associada à EDP (4.6), que à interceptam, completando a demonstração da afirmação.

4.2 A curva inicial coincide com uma curva característica plana

A seguir passaremos a discussão do caso em que:

(H1) a curva inicial $\underline{\gamma}$ é uma curva característica plana associada à EDP (4.6).

Na situação acima, mostraremos os seguintes casos:

I: Se a curva Γ , dada por (4.13), não for uma curva característica espacial associada à EDP (4.1), então o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) não terá solução.

II: Se a curva Γ , dada por (4.13), for uma curva característica espacial associada à EDP (4.1), então o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) terá infinitas soluções.

4.2.1 Caso I: a curva Γ não é uma curva característica espacial associada à EDP (4.6)

Consideremos primeiramente o caso I, isto é, quando a curva Γ , dada por (4.13), não é uma curva característica espacial associada à EDP (4.6).

Suponhamos, por absurdo, que o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) tenha, pelo menos, uma solução clássica $u = u(x, y)$, definida em uma vizinhança do traço da curva inicial $\underline{\gamma}$, contida em $\underline{\Omega}$.

Como $f \in C^1(I; \mathbb{R})$, derivando-se a relação (4.7), em relação à t , e utilizando-se a regra da cadeia, obteremos:

$$\begin{aligned} u_x[\sigma(t), \rho(t)] \sigma'(t) + u_y[\sigma(t), \rho(t)] \rho'(t) &= \frac{d}{dt}[u[\sigma(t), \rho(t)]] \\ &= f'(t), \quad \text{para cada } t \in I. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por outro lado, avaliando-se a EDP (4.6), ao longo da curva inicial $(\sigma(t), \rho(t))$, para cada $t \in I$, obteremos:

$$a[\sigma(t), \rho(t)] u_x[\sigma(t), \rho(t)] + b[\sigma(t), \rho(t)] u_y[\sigma(t), \rho(t)] = c[\sigma(t), \rho(t)]. \quad (4.21)$$

Como, para cada $t \in I$, sabemos que os vetores

$$(\sigma'(t), \rho'(t)) \quad \text{e} \quad (a[\sigma(t), \rho(t)], b[\sigma(t), \rho(t)])$$

são paralelos (na verdade podem ser tomados coincidentes), pois a curva inicial $\underline{\gamma}$ é uma curva característica plana associada à EDP (4.6).

Comparando as equações (4.20) e (4.21), obteremos os vetores

$$(\sigma'(t), \rho'(t), f'(t)) \quad \text{e} \quad (a[\sigma(t), \rho(t)], b[\sigma(t), \rho(t)], c[\sigma(t), \rho(t)])$$

deverão ser paralelos, ou seja, os vetores deverão ser um múltiplo do outro.

Podemos supor, sem perda de generalidade (por meio de uma mudança de variáveis, como fizemos no item 2. da Observação (3.47)), que

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= a(\sigma(t), \rho(t)), \\ \rho'(t) &= b(\sigma(t), \rho(t)) \\ f'(t) &= c(\sigma(t), \rho(t)), \quad \text{para } t \in I, \end{aligned}$$

ou seja, a curva Γ , dada por (4.13), será uma curva característica espacial associada à EDP (4.6), o que contradiz a hipótese que a curva Γ não é uma curva característica espacial associada à EDP (4.6).

Portanto o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) não admite solução.

4.2.2 Caso II: a curva Γ é uma curva característica espacial associada à EDP (4.6)

Consideremos agora o caso II, isto é, quando a curva Γ , dada por (4.13), é uma curva característica espacial associada à EDP (4.6).

Consideremos $\delta : I_\varepsilon \doteq (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por

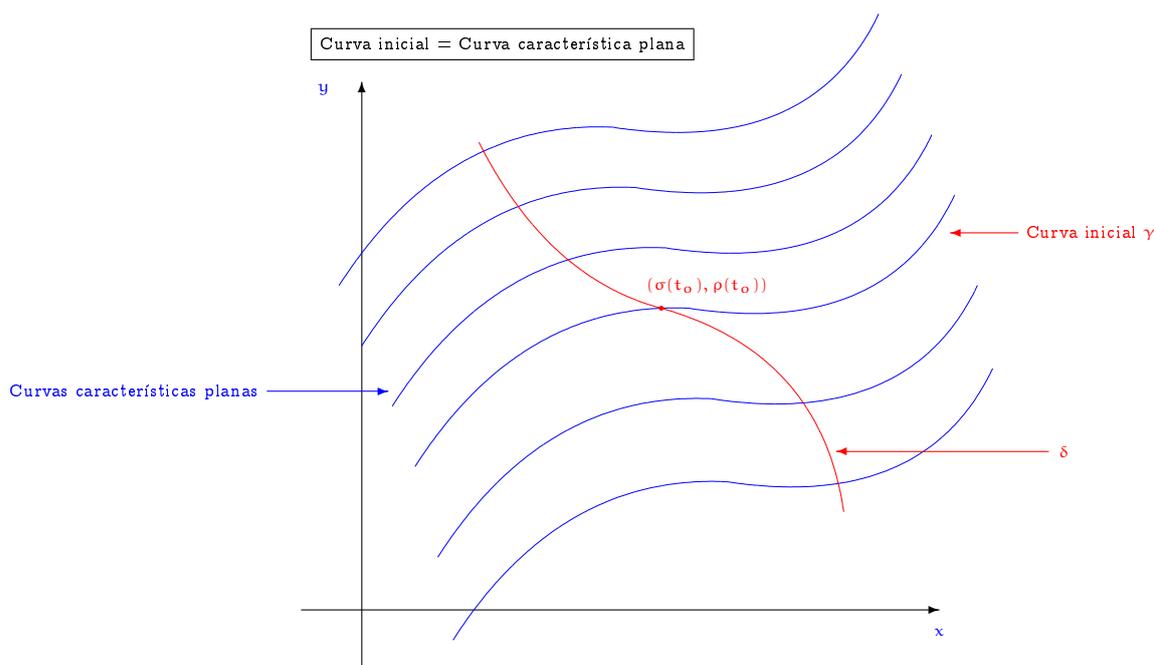
$$\delta(t) \doteq (p(t), q(t)), \quad \text{para cada } t \in I_\varepsilon,$$

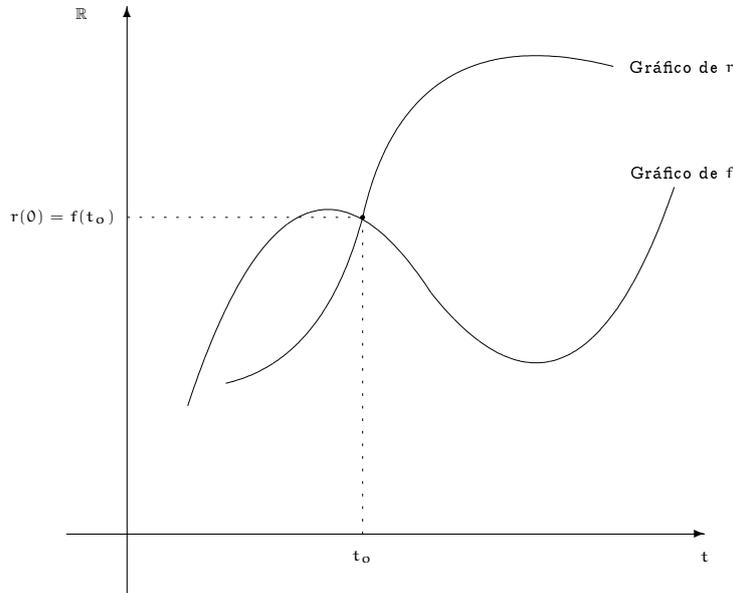
contida no plano xOy , que não é tangente às curvas características planas associadas à EDP (4.6), e que intercepte, transversalmente, o traço da curva inicial γ , no ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ (veja a figura abaixo), que vamos supondo pertencer a classe $C^1(I_\varepsilon; \mathbb{R}^2)$, satisfazendo

$$(p(0), q(0)) = (\sigma(t_0), \rho(t_0)) \quad (4.22)$$

e $r \in C^1(I_\varepsilon; \mathbb{R}^2)$ (veja a segunda figura abaixo) tal que

$$r(0) = f(t_0). \quad (4.23)$$





Como vimos no capítulo anterior, o problema de Cauchy

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) = c(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \quad (4.24)$$

$$u(p(t), q(t)) = r(t), \quad \text{para cada } t \in I_\varepsilon, \quad (4.25)$$

terá uma única solução

$$u = u(x, y),$$

definida em uma vizinhança do traço da curva inicial $\underline{\delta}$, pois o traço da curva $\underline{\delta}$ é transversal às curvas características planas associadas à EDP (4.6).

Além disso, a superfície solução associada à função $u = u(x, y)$, conterá o traço da curva parametrizada $\Delta : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\Delta(t) \doteq (p(t), q(t), r(t)), \quad \text{para cada } t \in I_\varepsilon,$$

e também deverá conter todas as curvas características espaciais associadas à EDP (4.6) que interceptam o traço da curva $\underline{\Delta}$ (como visto anteriormente na Observação (4.12)).

Em particular, essa superfície solução contém o traço da curva $\underline{\Gamma}$.

De fato, pois, (4.22) e (4.23), segue que

$$\underbrace{(p(0), q(0), r(0))}_{\in \text{traço de } \Delta} = \underbrace{(\sigma(t_0), \rho(t_0), f(s_0))}_{\in \text{traço de } \Gamma} \in \Gamma \cap \Delta,$$

e, por hipótese, a curva $\underline{\Gamma}$, dada por (4.13), é uma curva característica espacial associada à EDP (4.1) que satisfaz

$$\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset.$$

Portanto, podemos concluir que a função $u = u(x, y)$ será uma solução do problema de Cauchy (4.6)-(4.7), quando a curva Γ , dada por (4.13), for uma curva característica espacial associada à EDP (4.6).

Observação 4.26

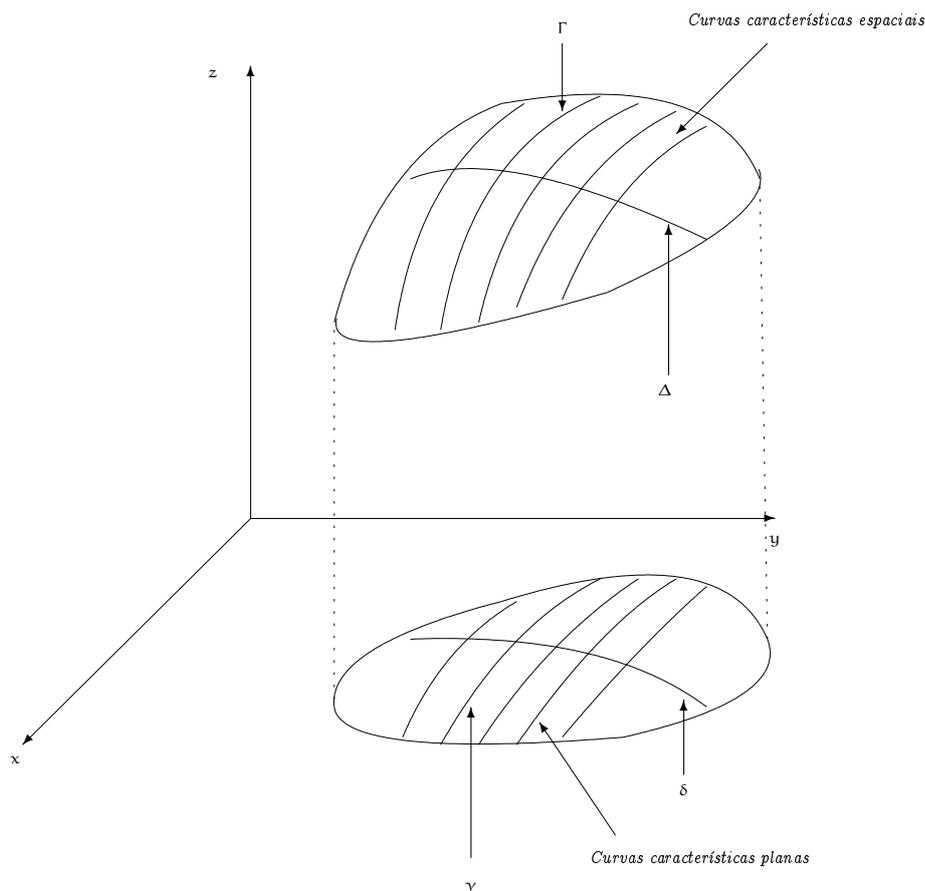
1. Um outro modo de mostrarmos a afirmação acima, seria notar que a função

$$u = u(x, y)$$

satisfaz a EDP (4.6) e, além disso temos que

$$u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), \quad \text{para cada } t \in I,$$

pois o traço da curva Γ , dada por (4.13), está contida no gráfico da superfície $z = u(x, y)$ (veja a figura abaixo).



2. Notemos que existe uma infinidade de possibilidades para a escolha da curva δ e para a função \underline{r} no item 1. desta Observação.

Logo o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) terá infinitas soluções no caso em que a curva Γ , dada por (4.13), for uma curva característica espacial associada à EDP (4.6).

Observação 4.27 Resumindo os dois casos acima temos:

1. Se a curva Γ , dada por (4.13), não é uma curva característica espacial associada à EDP (4.6), então o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) não terá soluções.
2. Se a curva Γ , dada por (4.13), é uma curva característica espacial associada à EDP (4.6), então o problema de Cauchy (4.6)-(4.7) terá infinitas soluções.

Podemos aplicar as idéias acima ao seguinte:

Exemplo 4.28 Estudar a existência de soluções para o seguinte problema de Cauchy:

$$u_x(x, y) = 2x, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.29)$$

$$u(t, 0) = f(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (4.30)$$

onde $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ é uma função dada.

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$\Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.31)$$

$$a(x, y) \doteq 1, \quad (4.32)$$

$$b(x, y) \doteq 0, \quad (4.33)$$

$$c(x, y) \doteq 2x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (4.34)$$

ou seja, $a, b, c, d \in C(\Omega; \mathbb{R})$ e

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \stackrel{(4.32), (4.33)}{=} 1^2 + 0^2 = 1 \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Além disso, observamos que o traço da curva inicial γ é o eixo Ox , ou seja, pode ser parametrizada por

$$(\sigma(t), \rho(t)) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (4.35)$$

Se as curvas características planas associadas à EDP (4.29) são curvas parametrizadas por

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)), \quad \text{para cada } s \in I$$

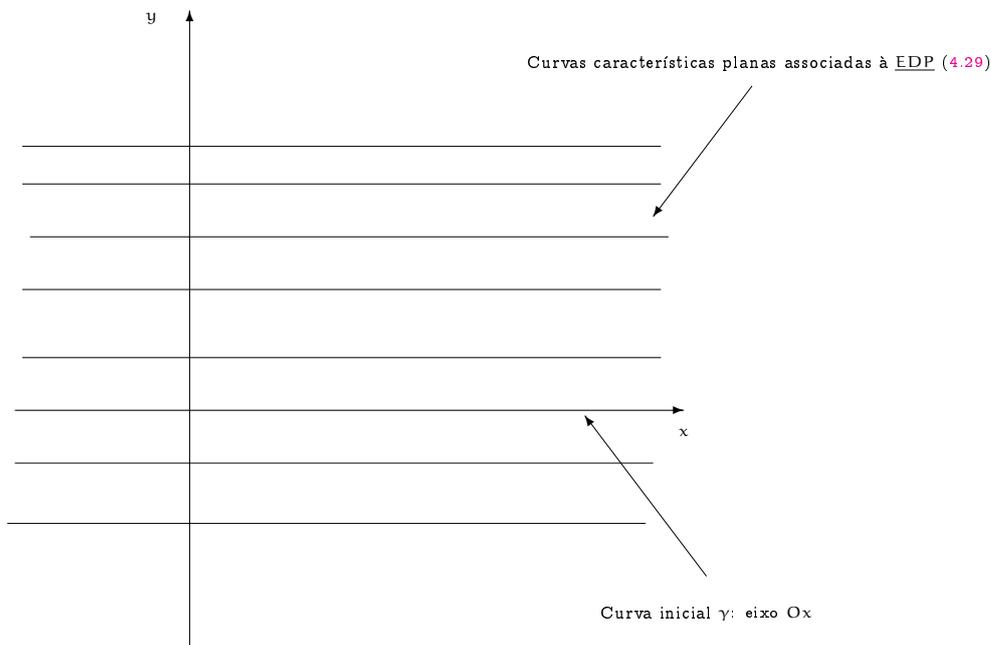
de classe $C^1(I; \mathbb{R}^2)$, elas deverão satisfazer ao seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \quad \stackrel{(4.32)}{=} 1, \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)) \\ \quad \stackrel{(4.32)}{=} 0, \end{cases}$$

ou seja, $\begin{cases} \alpha(s) = s + C_1, \\ \beta(s) = C_2, \end{cases}$, para cada $s \in J$, (4.36)

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ são arbitrárias, ou seja, as curvas características planas associadas à EDP (4.29) são retas horizontais (veja a figura abaixo)

$$y = C.$$



Portanto a curva inicial $\underline{\gamma}$ é uma curva característica plana associada à EDP (4.29) (a saber o eixo Ox).

Conclusão: o problema de Cauchy (4.29)-(4.30) pode ter infinitas soluções, se a curva $\underline{\Gamma}$, dada por (4.13), for uma curva característica espacial associada à EDP (4.29) ou, não terá solução, se a curva $\underline{\Gamma}$, dada por (4.13), não for uma curva característica espacial associada à EDP (4.29)).

Uma parametrização da curva Γ , dada por (4.13), pode ser dada por:

$$\Gamma(t) \doteq (\sigma(t), \rho(t), f(t)) \stackrel{(4.35)}{=} (t, 0, f(t)), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Logo o problema de Cauchy (4.29)-(4.30) terá infinitas soluções se, e somente se, os vetores

$$(\sigma'(t), \rho'(t), f'(t)) \quad \text{e} \quad (\alpha[\sigma(t), \rho(t)], b[\sigma(t), \rho(t)], c[\sigma(t), \rho(t)]) \quad (4.37)$$

forem paralelos, para cada $t \in \mathbb{R}$, pois, neste caso, a curva Γ será uma curva característica espacial associada à EDP (4.29).

Notemos que, para cada $t \in \mathbb{R}$, teremos:

$$(\sigma'(t), \rho'(t), f'(t)) \stackrel{(4.35)}{=} (1, 0, f'(t)) \quad (4.38)$$

$$\text{e} \quad (\alpha[\sigma(t), \rho(t)], b[\sigma(t), \rho(t)], c[\sigma(t), \rho(t)]) \stackrel{(4.32), (4.33), (4.35)}{=} (1, 0, 2t), \quad (4.39)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Logo, de (4.38) e (4.39), os vetores (4.37) acima serão paralelos se, e somente se,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \\ \text{o que implicará em: } f(t) &= t^2 + C, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

para $C \in \mathbb{R}$ fixada.

Neste caso, tomando-se, por exemplo, o traço da curva inicial δ , como sendo o eixo Oy , cuja parametrização $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, pode ser dada por:

$$\delta(t) \doteq (0, t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}$$

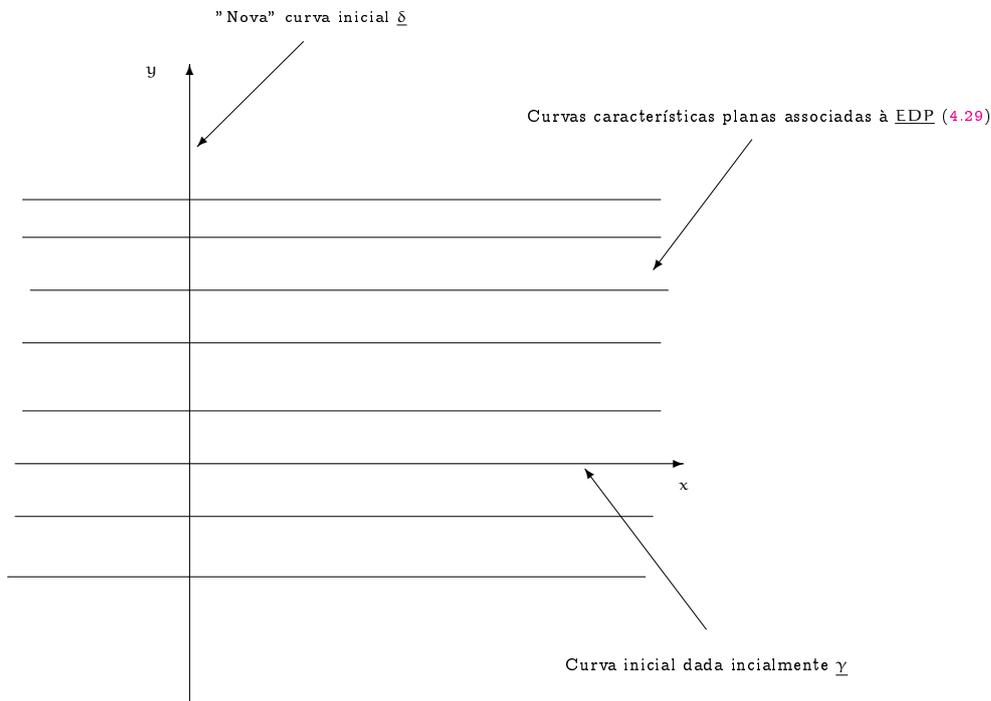
e a função $r \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, de modo que (veja a figura abaixo)

$$r(0) = f(0) \stackrel{(4.40)}{=} C, \quad (4.41)$$

obteremos o seguinte problema de Cauchy:

$$u_x(x, y) = 2x, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.42)$$

$$u(0, t) = r(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (4.43)$$



Notemos que neste caso, a "nova" curva inicial é transversal a todas as curvas características planas associadas à EDP (4.29) e assim o problema de Cauchy (4.42)-(4.43) acima terá uma única solução clássica, que pode ser obtida integrando-se ao longo das curvas características planas associadas à EDP (4.29).

Neste caso, os traços das curvas características planas associadas à EDP (4.29) são retas paralelas ao eixo Ox .

Assim, para cada $y \in \mathbb{R}$ fixado, integrando-se à EDP (4.29) calculada ao longo das retas horizontais, isto é, na variável x , de 0 a x , ou ainda, considerando a parametrização da curva característica que contém o ponto (x, y) , a saber, a curva parametrizada:

$$s \mapsto (s, y), \quad \text{para cada } s \in [0, x],$$

obteremos:

$$\begin{aligned} u(x, y) - \underbrace{u(0, y)}_{\stackrel{(4.43)}{=} r(y)}} &= \int_0^x 2c(s, y) ds \\ &\stackrel{(4.34)}{=} \int_0^x 2s ds \\ &= x^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Como a função f é da forma

$$f(t) \doteq t^2 + C, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

segue, de (4.44), que o problema de Cauchy (4.29)-(4.30) terá uma solução da forma

$$u(x, y) = x^2 + r(y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.45)$$

onde $r \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfaz

$$r(0) = C \stackrel{(4.41)}{=} f(0).$$

Observação 4.46 *Resumindo:*

1. se a função f for da forma

$$f(x) = t^2 + C, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

para algum $C \in \mathbb{R}$ fixado, então o problema de Cauchy (4.29)-(4.30) terá uma solução $u = u(x, y)$ dada por (4.45), onde $r \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária que satisfaz

$$r(0) = f(0) = C.$$

2. Notemos que, na situação acima, a solução **não** será única, pois podemos escolher uma infinidade de funções continuamente diferenciáveis r , de modo que seu valor no zero seja pré-estabelecido, no caso, igual a $C = f(0)$.
3. Por outro lado, se $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ **não** for da forma

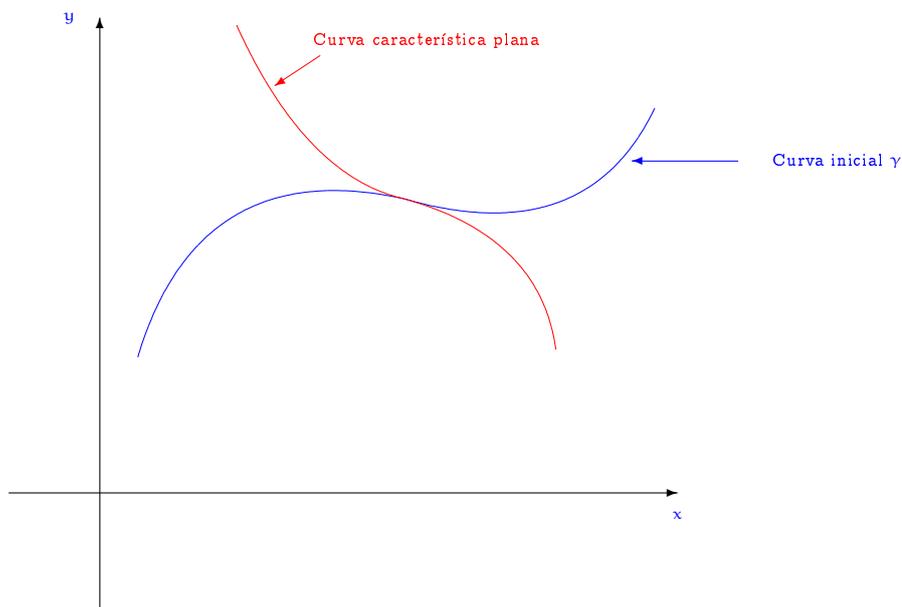
$$f(x) \doteq t^2 + C, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

para algum $C \in \mathbb{R}$, então o problema de Cauchy (4.29)-(4.30) **não** terá solução.

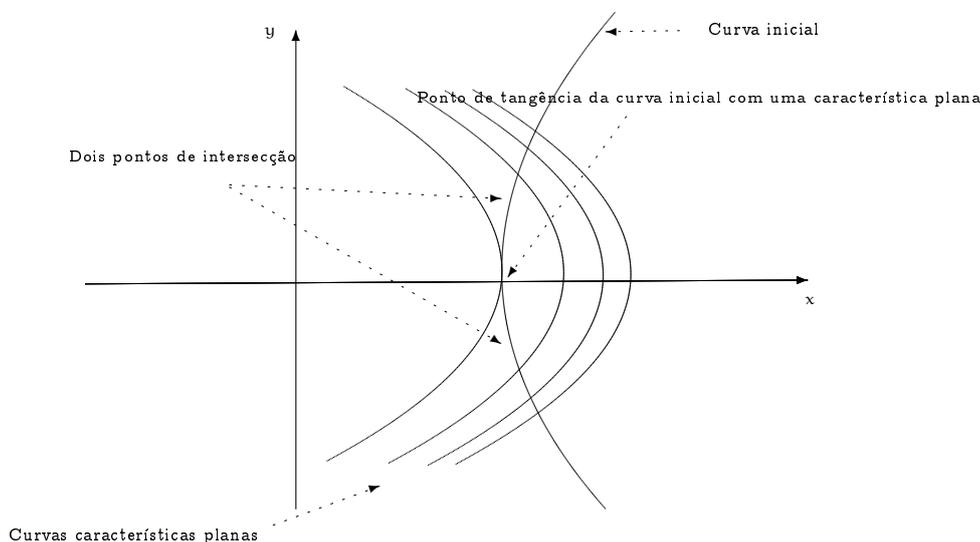
4.3 Curva inicial é tangente e não coincide com uma curva característica plana

Retornemos ao problema de Cauchy (4.6)-(4.7).

Consideremos agora o caso em que o traço da curva inicial é tangente, em um único ponto (em particular, não é coincidente), ao traço de alguma curva característica plana associada à EDP (4.6) (veja a figura abaixo).



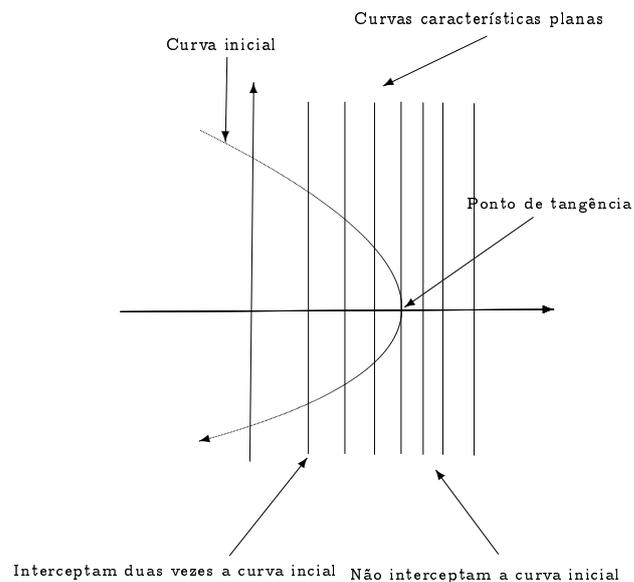
Nessa situação, como vimos no Exemplo (3.18), podem ocorrer situações em que, para qualquer vizinhança do ponto de tangência do traço da curva inicial $\underline{\gamma}$ com uma característica plana associada à EDP (4.6), existam curvas características planas associadas à EDP (4.6), que interceptem a curva inicial em mais de um ponto e outras curvas características planas associadas à EDP que não interceptam a curva inicial (veja a figura abaixo).



A existência de uma curva característica plana que intercepta a curva inicial em mais de um ponto nos levará a impor, para que exista solução do problema de Cauchy, restrições adicionais sobre o dado inicial, isto é, sobre a função f .

Para ver isto, basta lembrar que o valor da solução em um ponto da interseção determinará, de algum modo, o valor da solução ao longo de toda a curva característica plana que passa por esse ponto de interseção.

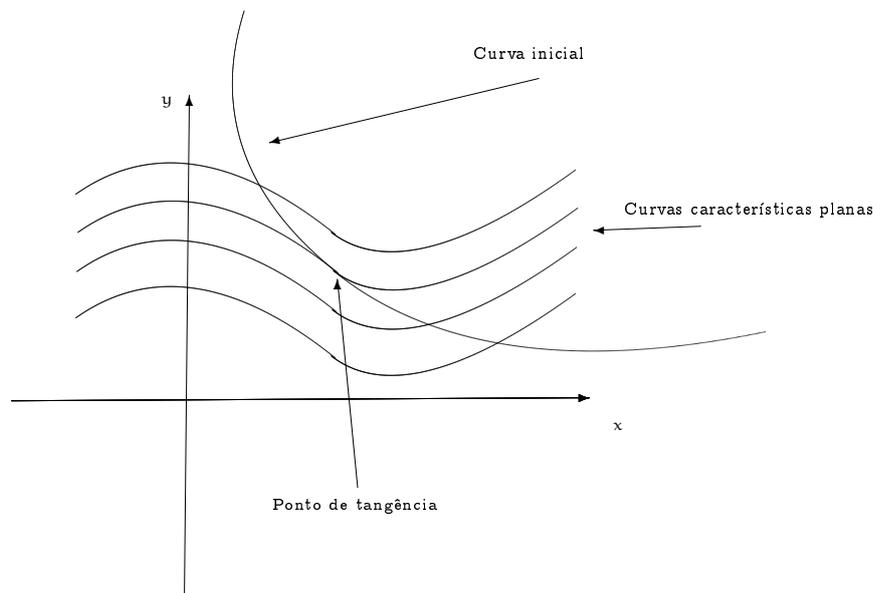
Portanto alguma restrição sobre o dado inicial \underline{f} deverá ocorrer.



A existência de uma curva característica plana que não intercepta a curva inicial $\underline{\gamma}$ fará com que a solução, caso exista, não seja única.

De fato, pois o valor da solução, ao longo dessas curvas características planas, não estará bem determinado, pois as mesmas não interceptam a curva inicial (veja a figura acima).

Uma outra situação seria de, mesmo uma curva característica plana sendo tangente à curva inicial $\underline{\gamma}$, em cada ponto do traço da curva inicial $\underline{\gamma}$, perto do ponto de interseção, passe, exatamente, uma curva característica plana que intercepta o traço da curva inicial $\underline{\gamma}$, somente naquele ponto (veja a figura abaixo).



Neste caso podemos agir como anteriormente, isto é, integrarmos a EDP (4.6), ao longo das curvas características planas associadas à mesma embora, como veremos em exemplos a seguir, possamos, eventualmente, perder diferenciabilidade da solução obtida, ou seja, a solução poderá não ser uma solução clássica.

Para exemplificar, consideremos o:

Exemplo 4.47 *Estudar a existência de soluções para o seguinte problema de Cauchy:*

$$u_x(x, y) = x^2, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.48)$$

$$u(t, t^3) = f(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (4.49)$$

onde $f \in C^1(I; \mathbb{R})$.

Resolução:

Observemos que, neste caso, as funções $a, b, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$\Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.50)$$

$$a(x, y) \doteq 1, \quad (4.51)$$

$$b(x, y) \doteq 0, \quad (4.52)$$

$$c(x, y) \doteq x^2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (4.53)$$

ou seja, $a, b, c \in C(\Omega; \mathbb{R})$ e

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \stackrel{(4.50), (4.51)}{=} 1^2 + 0^2 = 1 \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Além disso, observamos que o traço da curva inicial $\underline{\gamma}$ é o gráfico da cúbica

$$y = x^3,$$

cuja parametrização pode ser dada por

$$(\sigma(t), \rho(t)) \doteq (t, t^3), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (4.54)$$

As curvas características planas associadas a EDP (4.48) são curvas parametrizadas

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)),$$

de classe $C^1(J; \mathbb{R})$, que deverão satisfazer ao seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a(\alpha(s), \beta(s)) \\ \quad \stackrel{(4.51)}{=} 1, \\ \beta'(s) = b(\alpha(s), \beta(s)) \\ \quad \stackrel{(4.52)}{=} 0 \end{cases}, \quad \text{para } s \in J,$$

ou seja,
$$\begin{cases} \alpha(s) = s + C_1, \\ \beta(s) = C_2, \end{cases} \quad \text{para cada } s \in \mathbb{R}, \quad (4.55)$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ são arbitrárias, ou seja, as curvas características planas associadas à EDP (4.48) são retas horizontais, ou seja,

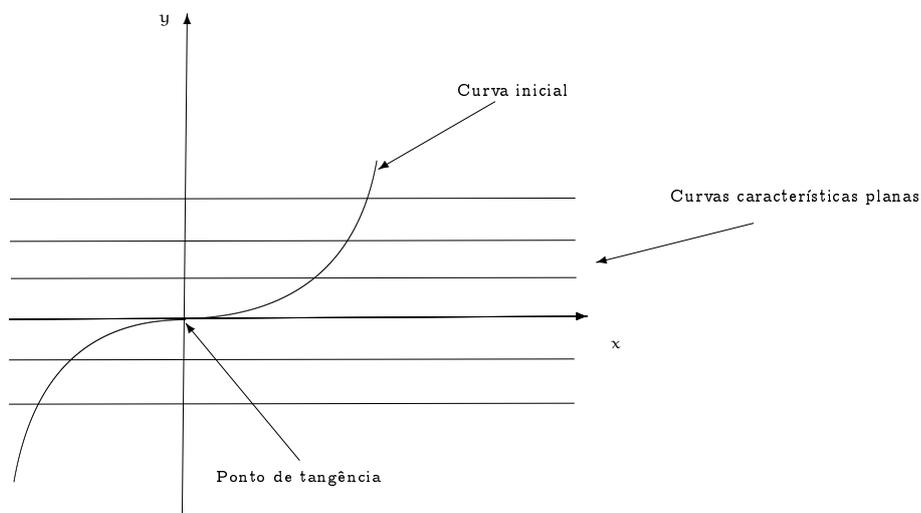
$$y = C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$.

Logo ao traço da curva inicial é tangente ao traço da curva característica plana

$$y = 0,$$

no ponto $(0, 0)$ (veja a figura abaixo).



Observemos que, excetuando-se a curva característica plana

$$y = 0,$$

todas as outras curvas características planas (isto é, as retas horizontais) são transversais à curva inicial, ou ainda, interceptam a curva inicial em um, e somente um, ponto e não tangencialmente.

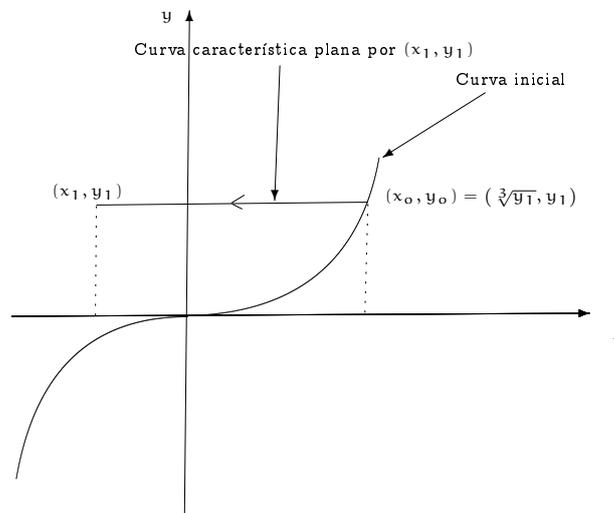
O que faremos é, como anteriormente, é integrar a EDP (4.48), ao longo das curvas características planas, para tentar obter uma expressão para a candidata a solução do problema de Cauchy (4.48)-(4.49).

Mais precisamente, dado $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, consideremos a curva característica plana associada à EDP (4.48), que passa por esse ponto, a saber, (veja a figura abaixo):

$$y = y_1.$$

Esta curva característica plana interceptará a curva inicial no ponto (veja a figura abaixo)

$$(\sqrt[3]{y_1}, y_1).$$



Logo, procedendo como nos exemplos que antecederam, isto é, integrando ao longo da característica plana associada à EDP (4.48) que passa pelo ponto (x_1, y_1) , que pode ser parametrizada por

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)) \doteq (s, y_1),$$

para $s \in [\sqrt[3]{y_1}, x_1]$ (veja a figura acima), temos que:

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) - \underbrace{u}_{\substack{=f(\sqrt[3]{y_1}) \\ \sqrt[3]{y_1} \quad y_1}}(\underbrace{x_0}_{\sqrt[3]{y_1}}, \underbrace{y_0}_{y_1}) &= \int_{\sqrt[3]{y_1}}^{x_1} \underbrace{c(\alpha(s), \beta(s))}_{(4.53) s^2} ds \\ &= \frac{1}{3} s^3 \Big|_{s=\sqrt[3]{y_1}}^{x_1} \\ &= \frac{x_1^3}{3} - \frac{y_1}{3}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + f(\sqrt[3]{y}), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.56)$$

será a solução do problema de Cauchy (4.48)-(4.49) exceto, eventualmente em

$$(x, 0), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

se a função

$$y \mapsto f(\sqrt[3]{y})$$

não for diferenciável em $y = 0$.

□

Observação 4.57

1. Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que, de fato, a função $u = u(x, y)$, dada por (4.56), é solução do problema de Cauchy (4.48)-(4.49), se a função

$$y \mapsto f(\sqrt[3]{y})$$

for diferenciável em $y = 0$.

2. Notemos que, dependendo da escolha da função $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ dada, a solução $u = u(x, y)$, dada por (4.56), não será de classe $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

Por exemplo, se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(t) \doteq t, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

segue que a solução $u = u(x, y)$ não será diferenciável em

$$(x, 0), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

isto é, sobre o eixo Ox pois, de (4.56), teremos:

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + \underbrace{\sqrt[3]{y}}_{\text{não é diferenciável em } y=0}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Isto confirma o que observamos no início desta seção, a saber a solução não será clássica em todo \mathbb{R}^2 .

3. Poderíamos ter aplicado o processo original de fazer uma mudança de variáveis para tornar a EDP (4.48) mais simples, resolver esta última e depois voltar para as variáveis originais.

Na verdade a EDP (4.48) já está na sua forma mais simples!

De qualquer modo, a "tentativa" de mudança de variáveis

$$(s, t) \mapsto (x, y)$$

deverá satisfazer:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_s(s, t) = a(x(s, t), y(s, t)) \\ \quad \stackrel{(4.51)}{=} 1, \\ y_s(s, t) = b(x(s, t), y(s, t)) \\ \quad \stackrel{(4.52)}{=} 0, \\ x(0, t) = \sigma(t) \\ \quad \stackrel{(4.54)}{=} t, \\ y(0, t) = \rho(t) \\ \quad \stackrel{(4.54)}{=} t^3, \end{array} \right.$$

$$\text{ou seja: } x(s, t) = s + C_1(t), \quad (4.58)$$

$$y(s, t) = C_2(t), \quad (4.59)$$

$$x(0, t) = t, \quad (4.60)$$

$$y(0, t) = t^3, \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.61)$$

Mas

$$\left\{ \begin{array}{l} t \stackrel{(4.60)}{=} x(0, t) \\ \stackrel{(4.58)}{=} 0 + C_1(t) \\ t^3 \stackrel{(4.59)}{=} y(0, t) \\ \stackrel{(4.59)}{=} C_2(t) \end{array} \right.$$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} C_1(t) = t \\ C_2(t) = t^3 \end{cases}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (4.62)$$

$$\text{logo: } \begin{cases} x(s, t) = s + t \\ y(s, t) = t^3 \end{cases}, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.63)$$

$$\text{ou, equivalentemente, } \begin{cases} s(x, y) = x - \sqrt[3]{x} \\ t(x, y) = \sqrt[3]{y} \end{cases}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.64)$$

Logo será uma mudança de variáveis que está em

$$C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y); x = 0 \text{ ou } y = 0\}; \mathbb{R}).$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} &= \begin{vmatrix} x_s(s, t) & x_t(s, t) \\ y_s(s, t) & y_t(s, t) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(4.63)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3t^2 \end{vmatrix} = 3t^2 \neq 0, \quad \text{para } t \neq 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Notemos que tal jacobiano se anula quando $t = 0$ e este corresponde ao eixo Ox .

Mesmo com esse problema, se definirmos a função $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(s, t) \doteq u(x(s, t), y(s, t)), \quad \text{para cada } (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.66)$$

ou ainda,

$$u(x, y) \doteq v(s(x, y), t(x, y)), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.67)$$

teremos que a função $v = v(s, t)$ irá satisfazer ao seguinte problema de Cauchy:

$$v_s(s, t) = c(x(s, t), y(s, t)), \quad \text{para } (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.68)$$

$$v(0, t) = f(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (4.69)$$

cuja dificuldade de resolver é, essencialmente, a mesma que resolver o problema de Cauchy (4.48)-(4.49).

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{(4.67)}{=} v(s, t) \\ &\stackrel{(4.68)}{=} \int_0^s \underbrace{c(x(r, t), y(r, t))}_{\stackrel{(4.63)}{=} c(r+t, t^3) \stackrel{(4.53)}{=} (r+t)^2} \, dr + \underbrace{v(0, t)}_{\stackrel{(4.69)}{=} f(t)} \\ &= \frac{(r+t)^3}{3} \Big|_{r=0}^{r=s} + f(t) \\ &= \frac{\stackrel{(4.63)}{=} x}{(s+t)^3} - \frac{\stackrel{(4.63)}{=} y}{(0+t)^3} + f(\stackrel{(4.63)}{=} \sqrt[3]{y}) \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3} + f(\sqrt[3]{y}), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (4.70)$$

obtendo, desta forma, a mesma expressão que em (4.56).

A seguir faremos algumas observações relacionadas com as situações relativamente a tangência da curva inicial com curvas características planas associadas à EDP em questão.

Observação 4.71

1. No desenvolvimento abstrato do método da integração ao longo das curvas características planas associadas à uma EDP linear de 1.a ordem, para resolver o problema de Cauchy associado à mesma, se o traço da curva inicial $\underline{\gamma}$ **não** for tangente ao traço de nenhuma curva característica plana, teremos que o jacobiano da transformação

$$(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t))$$

será diferente de zero, em um vizinhança do traço da curva inicial $\underline{\gamma}$ (ou seja, será uma mudança de variáveis nessa vizinhança).

2. No caso em que temos um ponto de tangência do traço da curva inicial com o traço de alguma curva característica plana associada à EDP, o jacobiano acima irá se anular no ponto de tangência, logo poderemos não ter uma mudança de variáveis de classe C^1 em uma vizinhança daquele ponto.
3. Observemos também que, mesmo no caso em que somente o traço de uma única curva característica plana interceptar o traço da curva inicial $\underline{\gamma}$, em um único ponto (veja Exemplo (4.47)), a mudança de variáveis acima poderá **não** ser diferenciável e assim a solução encontrada (integrando-se a EDP, ao longo das curvas características planas associadas à EDP) poderá **não** ser uma solução clássica do problema de Cauchy, isto é, poderá não pertencer a classe $C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Isto pode ser visto, uma vez mais, no exemplo a seguir.

Exemplo 4.72 Encontrar (se existir) solução do problema de Cauchy

$$u_x(x, y) = 1, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.73)$$

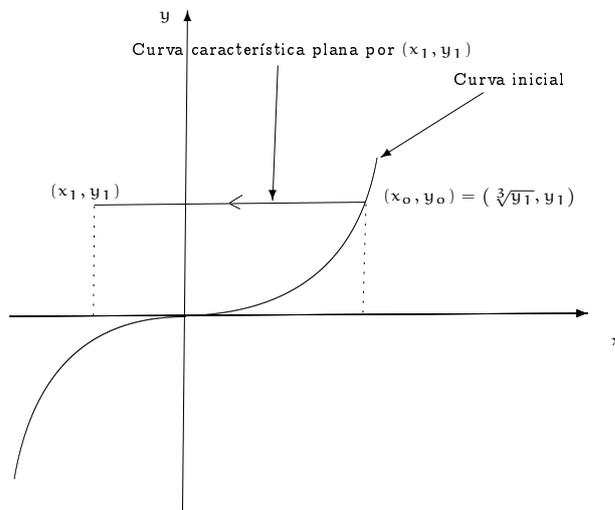
$$u(t, t^3) = f(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (4.74)$$

onde $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ é uma função dada.

Resolução:

Como vimos no Exemplo (4.47), as curvas características planas serão as retas horizontais

$$y = C, \quad \text{para cada } C \in \mathbb{R}.$$



Agindo como no Exemplo (4.47), isto é, dado $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, integrando a EDP (4.73) ao longo da curva característica plana associada à EDP (4.73) que passa pelo ponto (x_1, y_1) , que pode ser parametrizada por

$$s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)) \doteq (s, y_1),$$

para $s \in [\sqrt[3]{y_1}, x_1]$ (veja figura acima) teremos:

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) - \underbrace{u}_{=1} \left(\underbrace{x_0}_{=\sqrt[3]{y_1}}, \underbrace{y_0}_{=y_1} \right) &= \int_{\sqrt[3]{y_1}}^{x_1} \underbrace{c(\alpha(s), \beta(s))}_{=1} ds \\ &= s \Big|_{s=\sqrt[3]{y_1}}^{x_1} \\ &= x_1 - \sqrt[3]{y_1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(x, y) = x - \sqrt[3]{y} + f(\sqrt[3]{y}), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.75)$$

será a solução do problema de Cauchy (4.73)-(4.74) exceto, eventualmente em

$$(x, 0), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}$$

(ou seja, o eixo Ox), se a função

$$y \mapsto f(\sqrt[3]{y})$$

não for diferenciável em $y = 0$.

Observação 4.76

1. Mesmo antes de determinarmos a existência ou não de soluções do problema de Cauchy (4.24)-(4.25) é possível, formalmente, conhecermos as derivadas parciais da solução $u = u(x, y)$ (caso existam) em qualquer ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$, pertencente à curva inicial $\underline{\gamma}$, onde ela não for tangente às curvas características planas associadas à EDP (4.24).

Na verdade, podemos obter não só as derivadas de 1.a ordem mas de qualquer ordem, desde que

$$a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \quad e \quad \sigma, \rho, f \in C^\infty(I; \mathbb{R}).$$

Para calcular, por exemplo, as derivadas parciais de 1.a ordem da solução

$$u = u(x, y)$$

no ponto da curva inicial $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$, começamos escrevendo o problema de Cauchy (4.24), sobre a curva inicial $\underline{\gamma}$, isto é,

$$a[\sigma(t), \rho(t)] u_x[\sigma(t), \rho(t)] + b[\sigma(t), \rho(t)] u_y[\sigma(t), \rho(t)] = c[\sigma(t), \rho(t)], \quad (4.77)$$

$$u[\sigma(t), \rho(t)] = f(t), \quad \text{para cada } t \in I. \quad (4.78)$$

Supondo que a função

$$t \mapsto u(\sigma(t), \rho(t))$$

é diferenciável, em relação à t em I , derivando a condição inicial (4.78), em relação à t e utilizando-se a regra da cadeia, obteremos:

$$u_x[\sigma(t), \rho(t)] \sigma'(t) + u_y[\sigma(t), \rho(t)] \rho'(t) = f'(t), \quad \text{para cada } t \in I.$$

Com isto, de (4.77) e da identidade acima, obtemos seguinte sistema linear:

$$a[\sigma(t), \rho(t)] u_x[\sigma(t), \rho(t)] + b[\sigma(t), \rho(t)] u_y[\sigma(t), \rho(t)] = c[\sigma(t), \rho(t)], \quad (4.79)$$

$$\sigma'(t) u_x[\sigma(t), \rho(t)] + \rho'(t) u_y[\sigma(t), \rho(t)] = f'(t), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (4.80)$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} a[\sigma(t), \rho(t)] & b[\sigma(t), \rho(t)] \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x[\sigma(t), \rho(t)] \\ u_y[\sigma(t), \rho(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c[\sigma(t), \rho(t)] \\ f'(t) \end{pmatrix}, \quad (4.81)$$

para cada $t \in I$.

Como, por hipótese, estamos supondo que o traço da curva inicial intercepta transversalmente os traços das curvas características planas, deveremos ter:

$$\begin{vmatrix} a[\sigma(t_0), \rho(t_0)] & b[\sigma(t_0), \rho(t_0)] \\ \sigma'(t_0) & \rho'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Logo, da continuidade das funções envolvidas e do fato que o determinante acima é não nulo, segue que existe uma vizinhança de \underline{t}_0 , que indicaremos por $J = J(\underline{t}_0) \subseteq I$, de modo que:

$$\begin{vmatrix} a[\sigma(t), \rho(t)] & b[\sigma(t), \rho(t)] \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{para cada } t \in J.$$

Logo podemos resolver, algebricamente, o sistema linear (4.79)-(4.80) (ou a equação matricial (4.81)), para obtermos

$$u_x[\sigma(t), \rho(t)] \quad e \quad u_y[\sigma(t), \rho(t)],$$

para t na vizinhança J , do ponto \underline{t}_0 , em termos das funções

$$\sigma(t), \sigma'(t), \rho(t), \rho'(t), a[\sigma(t), \rho(t)], b[\sigma(t), \rho(t)] \quad e \quad c[\sigma(t), \rho(t)],$$

ou seja, obtemos as derivadas parciais de 1.ª ordem da solução $u = u(x, y)$, ao longo de todos os pontos da curva inicial $\underline{\gamma}$.

2. Para obtermos as derivadas parciais de ordem maior ou igual a dois da solução $u = u(x, y)$ ao longo de todos os pontos da curva inicial, bastará derivarmos a EDP (4.24) em relação a \underline{x} , ou a \underline{y} e utilizarmos as mesmas idéias acima.

Por exemplo, se soubermos que $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, para encontramos

$$u_{xx}(\sigma(t), \rho(t)), \quad \text{para cada } t \in I,$$

derivamos a EDP (4.24), em relação a \underline{x} e a restringimos sobre a curva inicial $\underline{\gamma}$, obtendo-se:

$$\begin{aligned} a_x[\sigma(t), \rho(t)] u_x[\sigma(t), \rho(t)] + a[\sigma(t), \rho(t)] u_{xx}[\sigma(t), \rho(t)] + b_x[\sigma(t), \rho(t)] u_y[\sigma(t), \rho(t)] \\ + b[\sigma(t), \rho(t)] u_{yx}[\sigma(t), \rho(t)] = c_x[\sigma(t), \rho(t)], \quad \text{para } t \in I, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a[\sigma(t), \rho(t)] u_{xx}[\sigma(t), \rho(t)] + b[\sigma(t), \rho(t)] u_{yx}[\sigma(t), \rho(t)] = c_x[\sigma(t), \rho(t)] \\ - a_x[\sigma(t), \rho(t)] u_x[\sigma(t), \rho(t)] - b_x[\sigma(t), \rho(t)] u_y[\sigma(t), \rho(t)], \quad \text{para } t \in I. \end{aligned}$$

Notemos que, derivando-se a função

$$t \mapsto u_x(\sigma(t), \rho(t)),$$

em relação a \underline{t} , em \underline{I} (que foi encontrada no item acima) segue que, da regra da cadeia, que

$$\frac{d}{dt} \{u_x[\sigma(t), \rho(t)]\} = u_{xx}[\sigma(t), \rho(t)] \sigma'(t) + \underbrace{u_{xy}[\sigma(t), \rho(t)]}_{\text{Teor. Schwarz } u_{yx}[\sigma(t), \rho(t)]} \rho'(t), \quad \text{para cada } t \in I.$$

Logo, das duas equações acima obteremos o seguinte sistema linear:

$$a[\sigma(t), \rho(t)] u_{xx}[\sigma(t), \rho(t)] + b[\sigma(t), \rho(t)] u_{yx}[\sigma(t), \rho(t)] = F(t), \quad (4.82)$$

$$\sigma'(t) u_{xx}[\sigma(t), \rho(t)] + \rho'(t) u_{yx}[\sigma(t), \rho(t)] = G(t), \quad (4.83)$$

para $t \in I$, onde

$$F(t) \doteq c_x[\sigma(t), \rho(t)] - a_x[\sigma(t), \rho(t)] u_x[\sigma(t), \rho(t)] - b_x[\sigma(t), \rho(t)] u_y[\sigma(t), \rho(t)] \quad (4.84)$$

$$G(t) \doteq \frac{d}{dt} \{u_x[\sigma(t), \rho(t)]\}, \quad \text{para cada } t \in I, \quad (4.85)$$

são funções conhecidas.

Como no item anterior (a matriz dos coeficientes desse sistema linear é a mesma do item anterior), o sistema (4.82)-(4.83) poderá ser resolvido, algebricamente, para obtermos

$$u_{xx}[\sigma(t), \rho(t)] \quad \text{e} \quad u_{yx}[\sigma(t), \rho(t)],$$

para \underline{t} em uma vizinhança de \underline{t}_0 , contida em \underline{I} , ou seja, obtivemos as derivadas parciais de 1.ª ordem da solução $u = u(x, y)$ ao longo de todos pontos curva inicial $\underline{\gamma}$.

3. Continuando o processo acima (desde que as funções envolvidas sejam de classe C^∞ , nos seus respectivos domínios) podemos, formalmente, escrever a solução do problema de Cauchy (4.24)-(4.25) em termos de uma série de Taylor em torno do ponto

$$(x_0, y_0) = (\sigma(t_0), \rho(t_0)),$$

isto é,

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} (x - x_0)^n (y - y_0)^m, \quad (4.86)$$

onde

$$c_{nm} \doteq \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} (x_0, y_0), \quad (4.87)$$

pois conhecemos todas as derivadas parciais da solução $u = u(x, y)$, no ponto $(x_0, y_0) = (\sigma(t_0), \rho(t_0))$.

4. Algumas perguntas naturais podem ser colocadas, como por exemplo:

(a) quando a série de funções em (4.86) converge?

(b) caso esta série de funções seja convergente, a soma da mesma será solução do problema de Cauchy (4.24)-(4.25)?

5. A resposta as essas questões é afirmativa, caso as funções envolvidas, $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma, \rho, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, além de satisfazerem as condições anteriores, sejam funções **analíticas** nos pontos $(x_0, y_0) \in \Omega$ e $t_0 \in I$, respectivamente, isto é, as séries de Taylor das funções a, b, c , centradas em (x_0, y_0) , convergem em uma vizinhança desse ponto, contida em $\underline{\Omega}$, e as séries de Taylor das funções σ, ρ, f , centradas em t_0 , convergem em uma vizinhança de t_0 , contida em \underline{I} .

6. Neste caso a série de Taylor (4.86) será convergente em um vizinhança $V = V(x_0, y_0)$, do ponto (x_0, y_0) , contida em $\underline{\Omega}$ e sua soma será solução da EDP (4.24) nessa vizinhança \underline{V} e irá satisfazer a condição inicial (4.25), para t em um vizinhança do ponto t_0 , contida no intervalo \underline{I} , ou seja, será solução do problema de Cauchy (4.24)-(4.25) em uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) , contida em $\underline{\Omega}$.

7. A afirmação acima é uma versão simplificada do conhecido como **Teorema de Cauchy-Kovalewski**.

4.4 Propagação de singularidades

Retornemos ao problema de Cauchy

$$a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) = c(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^2 \quad (4.88)$$

$$u(\sigma(t), \rho(t)) = f(t), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (4.89)$$

onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo da reta,

$$t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t))$$

é uma parametrização da curva inicial $\underline{\gamma}$, $a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$, $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ e o traço da curva inicial $\underline{\gamma}$ **não** é tangente aos traços das curvas características planas associadas à EDP (4.88).

Vimos que, neste caso, o problema de Cauchy acima tem uma única solução definida numa vizinhança \underline{V} do traço da curva inicial (contida em Ω).

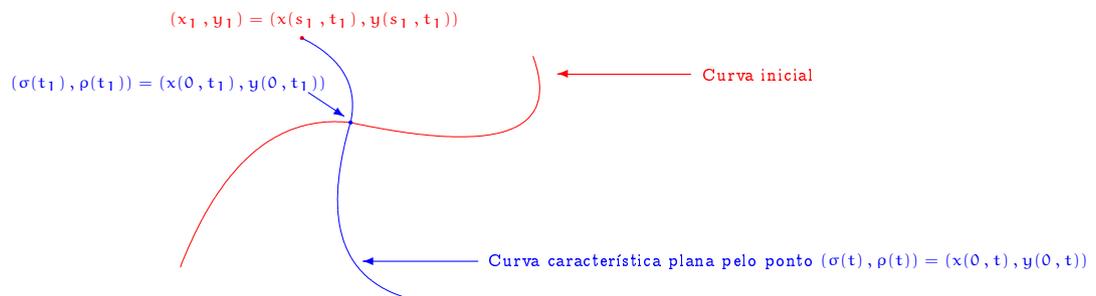
O valor da solução \underline{u} no ponto $(x_1, y_1) \in V$ pode ser obtido, integrando-se a EDP (4.88), ao longo da curva característica plana associada à EDP (4.88), que passa pelo ponto (x_1, y_1) , de $s = 0$, que corresponde ao ponto

$$(\sigma(t_1), \rho(t_1)) = (x(0, t_1), y(0, t_1)),$$

até $s = s_1$, que corresponde ao ponto (veja figura abaixo)

$$(x_1, y_1) = (x(s_1, t_1), y(s_1, t_1)).$$

A figura abaixo ilustra a situação acima.



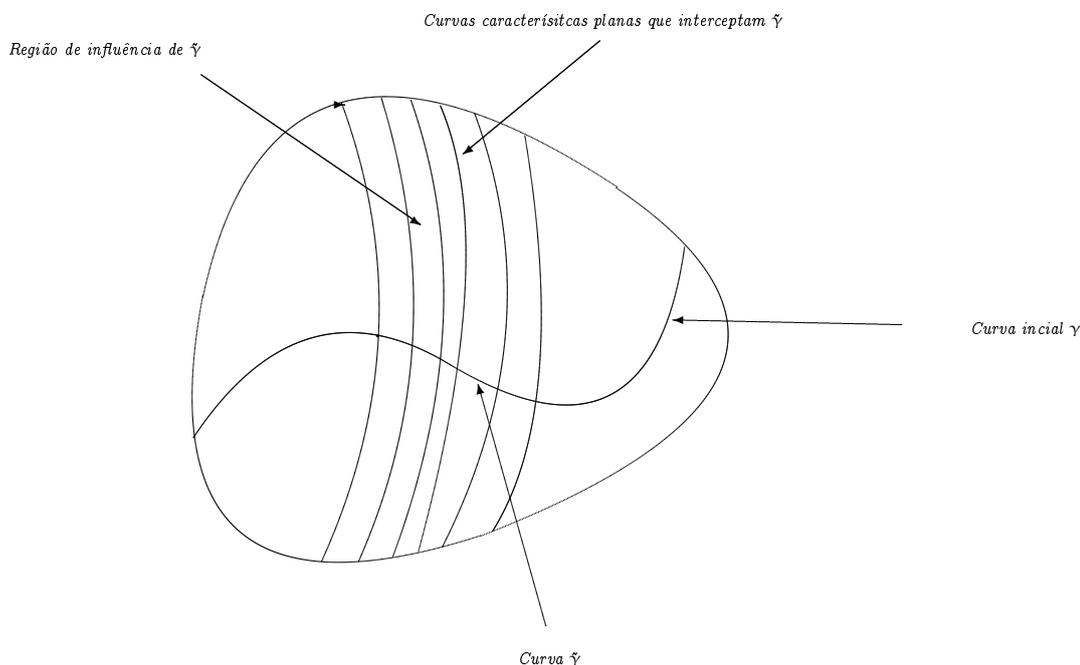
Conclusão: o valor da solução u no ponto (x_1, y_1) , só dependerá do valor do dado inicial no ponto $(\sigma(t_1), \rho(t_1))$.

Devido a este fato temos a:

Definição 4.90 O ponto $(\sigma(t_1), \rho(t_1))$, que está sobre a curva inicial, será dito pertencer ao domínio de dependência do ponto (x_1, y_1) .

De modo semelhante podemos introduzir a:

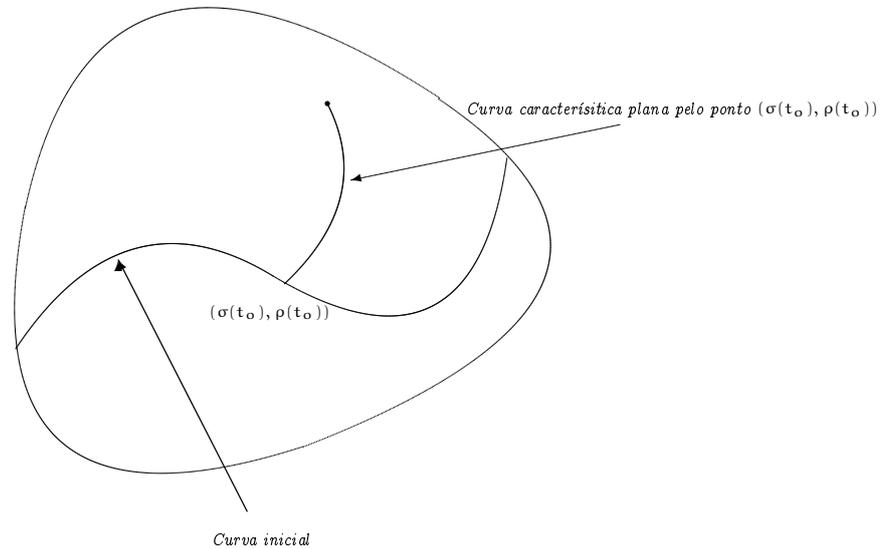
Definição 4.91 *Dado $\tilde{\gamma}$, uma curva parametrizada, cujo traço está contido no traço da curva inicial γ , o conjunto formado por todas as curvas características planas associadas à EDP (4.88) que interceptam a curva $\tilde{\gamma}$ será denominada região de influência da curva $\tilde{\gamma}$ (veja a figura abaixo).*



Observação 4.92

1. O domínio de dependência do ponto (x_1, y_1) é o conjunto formado pelos pontos sobre a curva inicial, que "interferem" no valor da solução do problema de Cauchy no ponto (x_1, y_1) .
2. A região de influência da curva $\tilde{\gamma}$ (contida no traço da curva inicial γ) é um subconjunto contido na vizinhança $V \subseteq \Omega$, formado pelos pontos que dependem do valor da solução sobre a curva $\tilde{\gamma}$.
3. Se retirarmos a hipótese $f \in C^1(I; \mathbb{R})$, mantendo as outras hipóteses, podemos proceder como anteriormente (integrar a EDP ao longo das curvas características planas etc.) e obter uma solução $u = u(x, y)$ definida em uma vizinhança do traço da curva inicial mas esta, em princípio, poderá **não** ser uma solução clássica (isto é, a função $u = u(x, y)$ poderá **não** pertencer a $C^1(V; \mathbb{R})$).

Se, por exemplo, a função f (ou a função f') **não** for contínua no ponto $t_0 \in I$, então a solução $u = u(x, y)$ (respectivamente, alguma(s) de sua(s) derivada(s) parcial(ais)) terá, provavelmente, uma descontinuidade (respectivamente, alguma(s) de sua(s) derivada(s) parcial(ais)) ao longo da curva característica plana associada à EDP (4.88), que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ (veja a figura abaixo).



4. **Conclusão:** as singularidades da função f podem ser propagadas ao longo das curvas características planas associadas à EDP (4.88), isto é, se acontece alguma "coisa ruim" com a função f em, por exemplo, $t = t_0$, ocorrerá, em princípio, algo do mesmo tipo para a solução $u = u(x, y)$, ao longo da curva característica plana associada à EDP (4.88), que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$.

Para ilustrar os fatos tratados descritos na observação acima consideraremos o:

Exemplo 4.93 Encontre uma solução do problema de Cauchy

$$-y u_x(x, y) + x u_y(x, y) = 4xy, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.94)$$

$$u(t, 0) = f(t), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (4.95)$$

onde a função $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} t^2, & \text{para } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{para } t \in (1, \infty) \end{cases}, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (4.96)$$

Resolução:

Notemos que, de (4.95), temos que o traço da curva inicial é o eixo Ox , cuja parametrização pode ser dada por

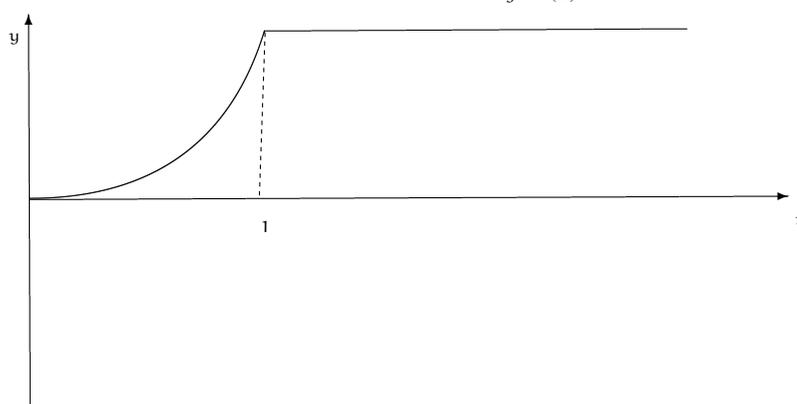
$$t \mapsto (\sigma(t), \rho(t)),$$

onde:

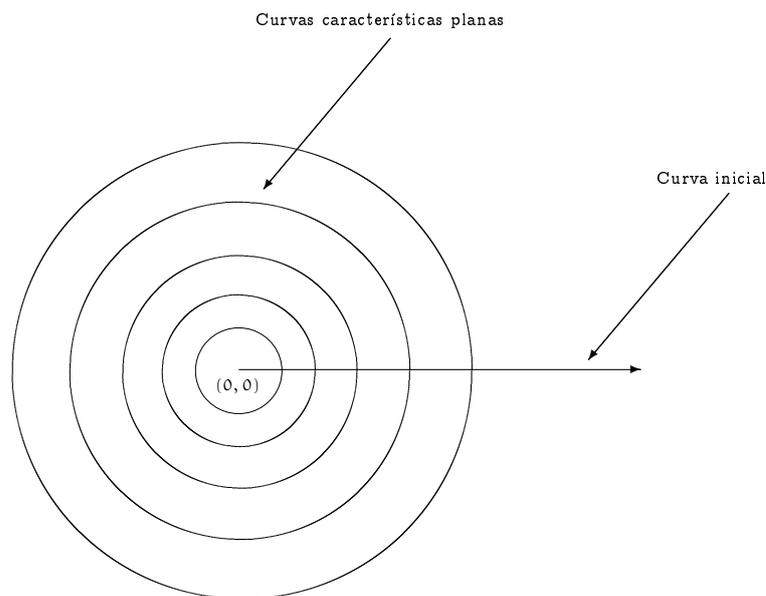
$$(\sigma(t), \rho(t)) \doteq (t, 0), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty).$$

Notemos que, de (4.96), o dado inicial (isto é, a função f) é uma função contínua em $[0, \infty)$, mas não é diferenciável em $t = 1$.

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo.



Como vimos no Exemplo (3.81), as curvas características planas associadas à EDP (4.94) serão circunferências centradas na origem (veja a figura abaixo)



Além disso, como vimos no referido Exemplo (3.81), a solução do problema de Cauchy (4.94)-(4.95), será da forma:

$$u(x, y) = 2y^2 + f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.97)$$

Notemos que, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{satisfazendo: } 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,$$

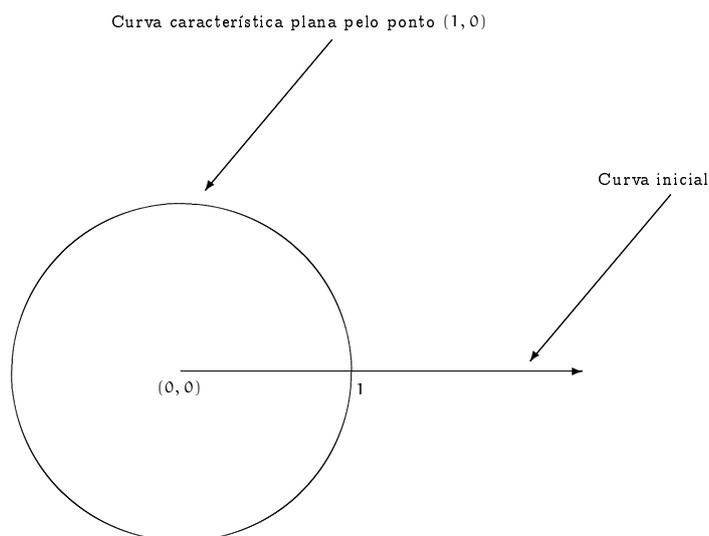
$$\text{segue, de (4.96), que: } f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2; \quad (4.98)$$

$$\text{satisfazendo: } x^2 + y^2 > 1,$$

$$\text{segue, de (4.96), que: } f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 1. \quad (4.99)$$

Logo, de (4.97), (4.98) e (4.99) (veja a figura abaixo),

$$u(x, y) = \begin{cases} 2y^2 + (x^2 + y^2) \\ = x^2 + 3y^2, & \text{para } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 2y^2 + 1, & \text{para } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad (4.100)$$



Observemos que

$$u \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

De fato, em qualquer ponto de \mathbb{R}^2 , excetuando-se os pontos sobre a circunferência \underline{C} , centrada na origem e raio igual a $\underline{1}$, a função \underline{u} , dada por (4.100), será contínua.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Analisemos os pontos sobre a circunferência \underline{C} , na verdade analisaremos o que ocorre nos pontos da circunferência \underline{C} que estão no 1.º quadrante.

A verificação do que ocorre nos pontos sobre a circunferência \underline{C} que estão nos outros três quadrantes é semelhante a que iremos fazer e será deixada como exercício para o leitor.

Neste caso, um ponto sobre a circunferência \underline{C} , terá as seguintes coordenadas:

$$\left(x_0, \underbrace{\sqrt{1-x_0^2}}_{=y_0} \right).$$

Devemos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, \sqrt{1-x_0^2})} u(x, y) = u(x_0, \sqrt{1-x_0^2}). \quad (4.101)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} u(x_0, \sqrt{1-x_0^2}) &\stackrel{(4.100)}{=} x_0^2 + 3(\sqrt{1-x_0^2})^2 \\ &= 3 - 2x_0^2. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Observemos que:

- se o ponto (x, y) está no interior da circunferência \underline{C} , teremos:

$$\begin{aligned} |u(x, y) - u(x_0, y_0)| &\stackrel{(4.100)}{=} \stackrel{(4.102)}{=} |(x^2 + 3y^2) - (3 - 2x_0^2)| \\ &= |x^2 + 2x_0^2 + 3y^2 - 3|. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, \sqrt{1-x_0^2})} (x^2 + 2x_0^2 + 3y^2 - 3) &= x_0^2 + 2x_0^2 + 3(\sqrt{1-x_0^2})^2 - 3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e isto implicará em (4.101).

- se o ponto (x, y) está no exterior da circunferência \underline{C} , teremos:

$$\begin{aligned} |u(x, y) - u(x_0, y_0)| &\stackrel{(4.100)}{=} \stackrel{(4.102)}{=} |(2y^2 + 1) - (3 - 2x_0^2)| \\ &= 2|y^2 + x_0^2 - 1|. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, \sqrt{1-x_0^2})} (y^2 + x_0^2 - 1) &= (\sqrt{1-x_0^2})^2 + x_0^2 - 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto implicará em (4.101).

Juntando as duas situações acima podemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$, de modo que se

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta, \quad \text{teremos: } |u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

ou seja, a função $u = u(x, y)$ será contínua em $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$.

A verificação desta última afirmação será deixada como exercício para o leitor.

Notemos também que a função \underline{u} , dada por (4.100), não é diferenciável sobre a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$.

Mostremos que a função \underline{u} , dada por (4.100), não é diferenciável no ponto

$$(x_0, y_0) = (x_0, \sqrt{1 - x_0^2}),$$

ou seja, nos pontos da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ que estão no 1.º quadrante.

A verificação do que ocorre nos outros pontos sobre a circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ que estão nos outros três quadrantes será deixada como exercício para o leitor.

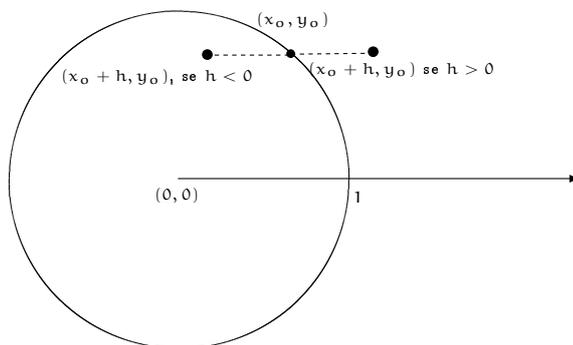
Notemos que para a existência das derivadas parciais de 1.ª ordem da função \underline{u} , em relação a \underline{x} e em relação a \underline{y} , no ponto (x_0, y_0) , é necessário e suficiente, que existam os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0)}{k}. \quad (4.103)$$

Observemos que para cada $h, k > 0$, temos que os pontos

$$(x_0 + h, y_0) \quad \text{e} \quad (x_0, y_0 + k)$$

pertencerão ao exterior da circunferência $\underline{\mathcal{C}}$ (veja a figura abaixo para o caso $h > 0$).



Mas para $h > 0$, temos que:

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0) &\stackrel{(4.100), x=x_0+h, y=y_0}{=} 2 \left(\underbrace{y_0}_{=\sqrt{1-x_0^2}} \right)^2 + 1 \\ &= 3 - 2x_0^2 \\ u(x_0, y_0) &= \stackrel{(4.100), x=x_0, y=y_0}{=} (x_0)^2 + 3 \left(\underbrace{y_0}_{=\sqrt{1-x_0^2}} \right)^2 \\ &= 3 - 2x_0^2, \end{aligned}$$

o que implicará que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(3 - 2x_0^2) - (3 - 2x_0^2)}{h} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Por outro lado, se $h < 0$ segue que:

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0) &\stackrel{(4.100), x=x_0+h, y=y_0}{=} (x_0 + h)^2 + 3y_0^2 \\ &\text{e} \\ u(x_0, y_0) &= \stackrel{(4.100), x=x_0, y=y_0}{=} x_0^2 + 3y_0^2 \end{aligned}$$

e com isto teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[(x_0 + h)^2 + 3y_0^2] - (x_0^2 + 3y_0^2)}{h} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 2x_0. \end{aligned} \tag{4.105}$$

Logo se $x_0 \neq 0$ é tal que o ponto (x_0, y_0) está na circunferência \underline{C} , no 1.º quadrante, de (4.104) e (4.105), segue que não existe o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h},$$

ou seja, que a função \underline{u} , dada por (4.100), não tem derivada parcial, em relação a \underline{x} , nos pontos sobre a circunferência \underline{C} , que estão no 1.º quadrante) em particular, a função \underline{u} não é pertencerá a $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.

Observação 4.106 *Observemos que a função \underline{u} , dada por (4.100), é na verdade de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus C; \mathbb{R})$ e satisfaz a EDP (4.94) em $\mathbb{R}^2 \setminus C$.*

Notemos que \underline{C} é uma curva característica plana associada à EDP (4.94), que passa pelo ponto $(1, 0)$, isto é, a não diferenciabilidade do dado inicial \underline{f} no instante $t = 1$ (que corresponde ao ponto $(1, 0) = (\sigma(1), \rho(1))$ sobre a curva inicial), propagou-se ao longo da curva característica plana associada à EDP (4.94), que passa pelo ponto $(1, 0)$, no caso, a circunferência \underline{C} , de centro na origem e raio igual a 1.

Para finalizar a seção temos o:

Exercício 4.107 *Encontrar uma solução (se existir) do problema de Cauchy*

$$u_x(x, y) + b u_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2 \quad (4.108)$$

$$u(0, t) = \frac{1}{t}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.109)$$

onde $b \in \mathbb{R}$ é uma constante fixada.

Resolução:

Notemos que $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ será dada por

$$f(t) \doteq \frac{1}{t}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.110)$$

Neste caso, de (4.109), segue que o traço da curva inicial é eixo \underline{Oy} , menos a origem $(0, 0)$.

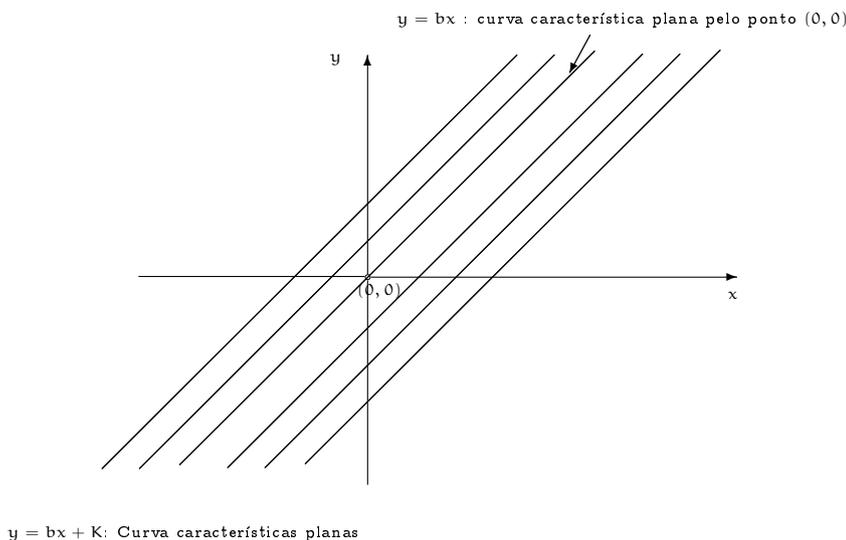
As curvas características planas associadas a EDP (4.108) serão retas (veja o Exemplo (3.175), com $c = d = 0$), dadas por:

$$y = b x + K, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária e a solução do problema de Cauchy (4.108)-(4.109) acima, será dada por (veja o Exemplo (3.175)):

$$u(x, y) \doteq f(-b x + y) \stackrel{(4.110)}{=} \frac{1}{y - b x}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathcal{A} \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \neq b x\}. \quad (4.111)$$

Logo a solução $u = u(x, y)$ **não** estará definida ao longo da curva característica plana associada à EDP (4.108), que passa pelo ponto $(0, 0)$ (veja a figura abaixo) e será solução clássica da EDP (4.108), em \mathcal{A} .



Conclusão: a função f , dada por (4.110), não está definida em $t = 0$ e a solução \underline{u} , dada por (4.111), não está definida ao longo da curva característica plana associada à EDP (4.108), que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0)) = (0, 0)$.

4.5 Uma EDP não linear de 1.a ordem

Começaremos esta seção com as seguintes observações:

Observação 4.112

1. A situação no caso de uma EDP não-linear, tanto ao que refere-se à propagação de singularidade quanto ao comportamento da solução é bastante diferente do caso de uma EDP linear.

Para vermos isto, consideraremos a EDP não-linear da forma:

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x [f(u)](t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (4.113)$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função fixada não constante.

Notemos que a EDP (4.113) pode ser reescrita (utilizando-se a regra da cadeia) na seguinte forma:

$$\partial_t u(t, x) + b[u(t, x)] \partial_x u(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (4.114)$$

onde

$$b(r) \doteq f'(r), \quad \text{para cada } r \in \mathbb{R}. \quad (4.115)$$

Tais EDP's aparecem no estudo de fenômenos ondulatórios (por exemplo, dinâmica de gases ou fluídos).

No caso, o que corresponderá às curvas características planas associadas à EDP (4.114) (ou (4.113)) em $\underline{\Omega}$, serão as curvas parametrizadas, cujo traço está contido em $\underline{\Omega}$, que satisfazem a seguinte EDO:

$$\frac{dx}{dt}(t) = b[u(t, x(t))], \quad \text{para } t \in I \subseteq \mathbb{R}. \quad (4.116)$$

Notemos que, ao longo dessas curvas parametrizadas, a solução da EDP (4.114) (ou (4.113)) será constante.

De fato, pois para $t \in I$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u(t, x(t))] &\stackrel{\text{da Regra da Cadeia}}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t)) \underbrace{\frac{dx}{dt}(t)}_{\stackrel{(4.116)}{=} b[t, x(t)]} + \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) \underbrace{\frac{dt}{dt}(t)}_{=1} \\ &\stackrel{(4.116)}{=} b[u(t, x(t))] \partial_x u(t, x(t)) + \underbrace{\partial_t u(t, x(t))}_{\stackrel{(4.114)}{=} -b[u(t, x(t))] \partial_x u(t, x(t))}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$u(t, x(t)) = K, \quad \text{para cada } t \in I,$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária, como queríamos mostrar.

Com isto podemos concluir que, na verdade, as curvas parametrizadas definidas pela EDO (4.116), serão retas.

De fato, pois

$$u(t, x(t)) = K, \quad \text{para cada } t \in I,$$

ou ainda,

$$u(t, x(t)) = u(t_0, x(t_0)), \quad \text{para cada } t \in I, \quad (4.117)$$

para algum $t_0 \in I$ fixado.

Assim

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= b[u(t, x(t))] \\ &\stackrel{(4.117)}{=} \underbrace{b[u(t_0, x(t_0))]}_{\text{constante}}, \quad \text{para } t \in I \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Tais retas não podem ser determinadas a priori, pois seus coeficientes angulares dependem de conhecer o valor da solução $u = u(t, x)$, ao longo da própria curva, isto é, nos pontos $(t, x(t))$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

No entanto, podemos utilizar estas curvas para encontrar o valor da solução do seguinte problema de Cauchy associado à EDP (4.113), ou seja, o seguinte problema de Cauchy:

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x [f(u)](t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (4.119)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (4.120)$$

onde $u_0 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ está fixada.

Vale observar que, mais adiante, consideraremos dados iniciais \underline{u}_0 mais gerais.

A idéia que desenvolveremos a seguir é semelhante a utilizada no caso linear, isto é, vamos construir a solução via as "curvas características planas" que interceptam a curva inicial plana quando $t = 0$ (veja a figura abaixo).

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, como vimos acima, a solução procurada

$$u = u(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega$$

deverá ser constante ao longo da reta (4.116) que passa pelo ponto $(0, x_0)$, ou seja, a solução procurada \underline{u} , será igual a

$$u(0, x_0) = u_0(x_0),$$

para $(t, x) \in \Omega$ que está sobre a reta (4.116).

Como tal reta tem inclinação $b[u_0(x_0)]$ (veja (4.116)), deveremos ter

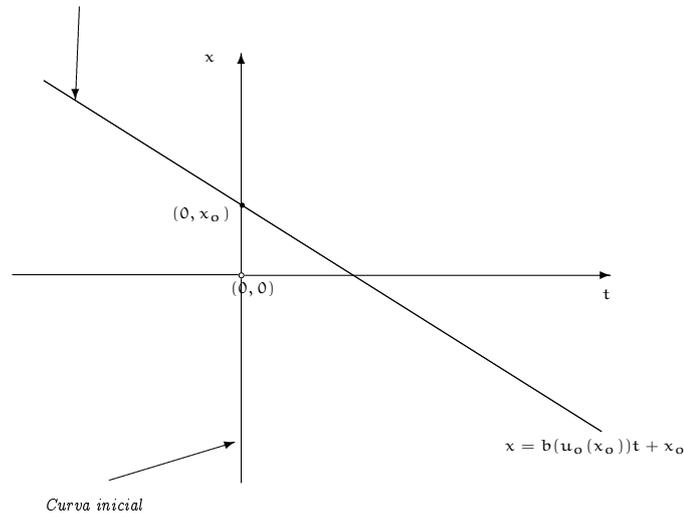
$$u(t, x) = u_0(x_0) \quad (4.121)$$

para $(t, x) \in \Omega$, que pertença à reta

$$x = b[u_0(x_0)]t + x_0, \quad (4.122)$$

cuja representação geométrica é dada pela figura abaixo.

Curva característica plana associada à EDP (4.105) pelo ponto $(0, x_0)$



2. As retas de equação (4.122), serão denominadas retas características planas, associadas ao problema de Cauchy (4.119)-(4.120).
3. Lembremos que no caso de uma EDP linear, as curvas características planas determinam, em geral, a solução do problema de Cauchy considerado.

Logo é natural esperarmos que o mesmo ocorra no caso da EDP não-linear (4.119), isto é, que determinem a solução do problema de Cauchy (4.119)-(4.120).

Isto, de fato, é o que ocorre para o problema de Cauchy (4.119)-(4.120), em uma faixa $(0, T) \times \mathbb{R}$, para algum $T \in (0, \infty)$ fixado.

Porém, ao contrário do caso de uma EDP linear, as curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.119)-(4.120) podem se interceptar e não permanecerem coincidentes após a intersecção.

O exemplo a seguir ilustra esse fato.

Exemplo 4.123 Encontre uma solução do problema de Cauchy

$$u_t(t, x) + u(t, x) u_x(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.124)$$

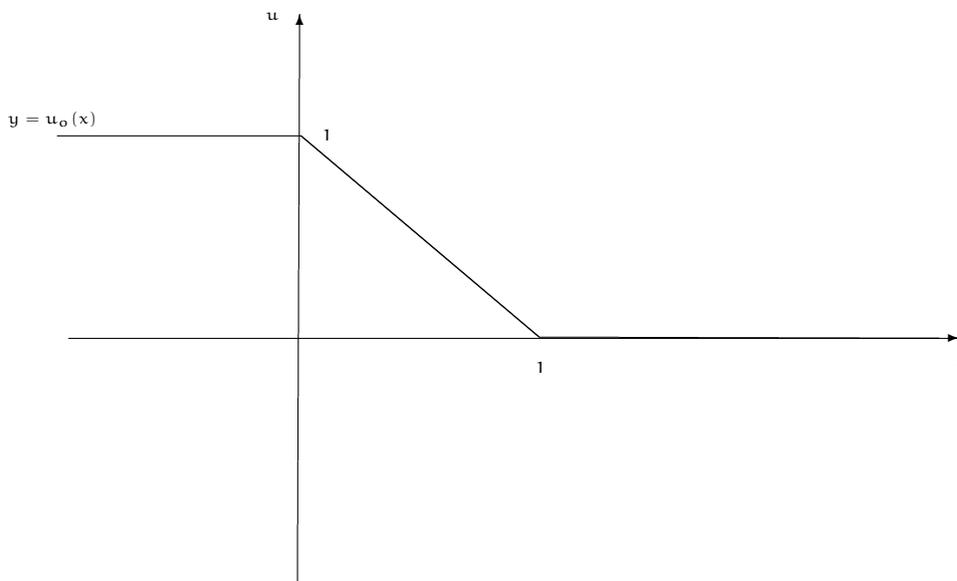
$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (4.125)$$

onde o dado inicial $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por:

$$u_0(x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{para } x \in (-\infty, 0) \\ 1 - x, & \text{para } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{para } x \in (1, \infty). \end{cases} \quad (4.126)$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função u_0 é dada pela figura abaixo.



Observemos que neste caso a função $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (em (4.114)) será dada por

$$b(r) \doteq r, \quad \text{para cada } r \in \mathbb{R}. \quad (4.127)$$

A EDP não-linear (4.124) é conhecida na literatura como Equação de Burger sem viscosidade e pode ser colocada na forma (4.113), tomando-se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(r) \doteq \frac{r^2}{2}, \quad \text{para cada } r \in \mathbb{R}.$$

Neste caso as curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.124)-(4.125) serão da forma:

$$x = \underbrace{b[u_0(x_0)]}_{\stackrel{(4.127)}{=} u_0(x_0)} t + x_0,$$

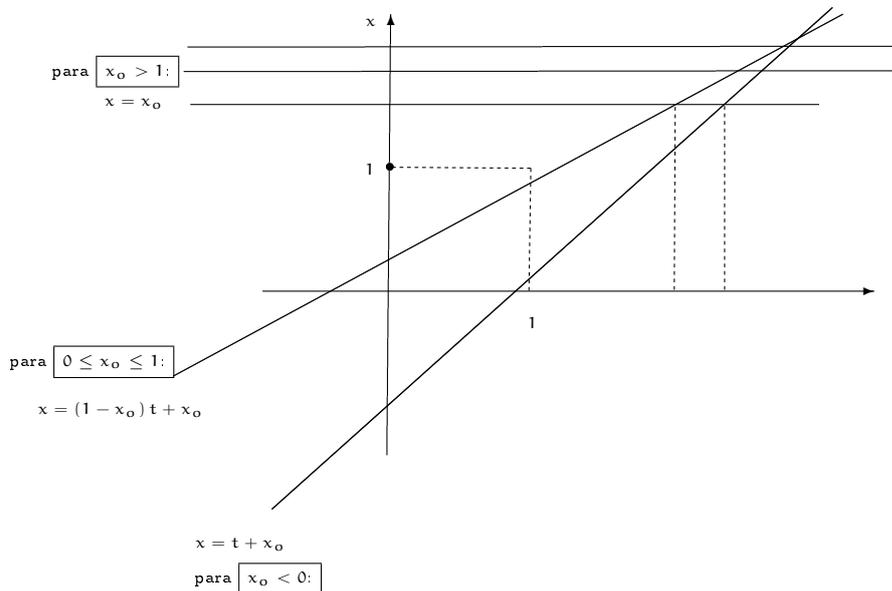
$$\text{o que implicará em: } x = u_0(x_0) t + x_0, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}, \quad (4.128)$$

ou seja, de (4.126), segue que:

$$x = \begin{cases} t + x_0, & \text{para } x_0 \in (-\infty, 0) \\ (1 - x_0) t + x_0, & \text{para } x_0 \in [0, 1] \\ x_0, & \text{para } x_0 \in (1, \infty), \end{cases} \quad (4.129)$$

cujos gráficos, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, encontram-se na figura abaixo:

Curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.124)-(4.125)



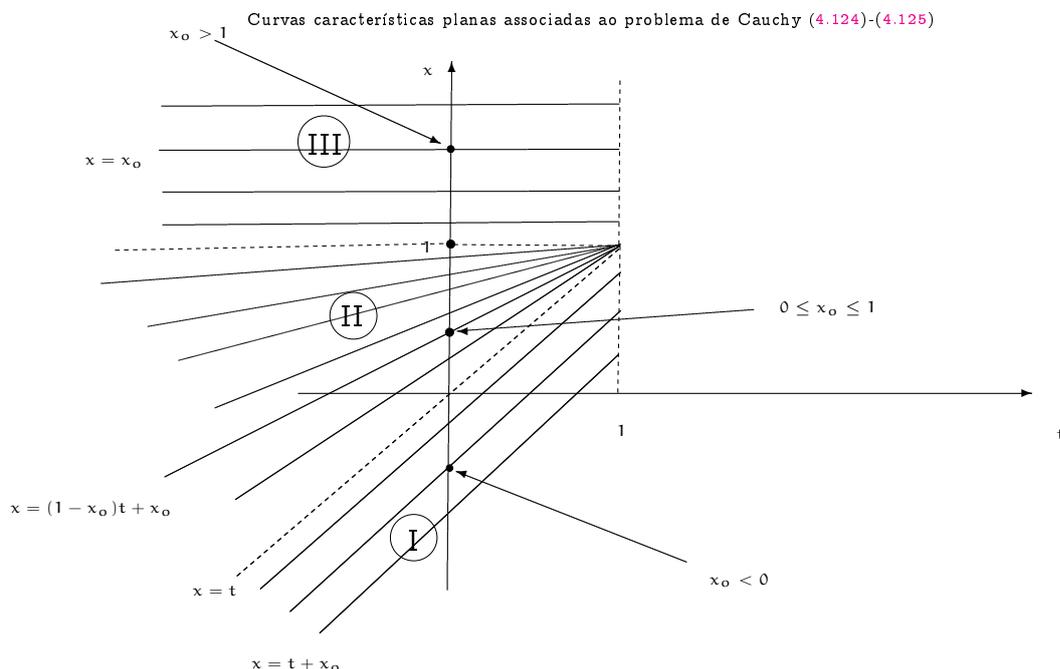
Logo as curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.124)-(4.125) se interceptam para cada $t \in [1, \infty)$.

Portanto a solução do problema de Cauchy, dada por (4.121)-(4.122), utilizando as curvas características associadas ao problema de Cauchy acima, só será ter a expressão válida para $t \in (-\infty, 1)$, pois nestes casos não haverá interseção das curvas características planas, isto é, das retas (4.129) (veja a figura abaixo).

Consideremos as seguintes regiões do plano (t, x) :

$$\begin{aligned} \text{I} &\doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; x < t < 1\}, \\ \text{II} &\doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t \leq x < 1\}, \\ \text{III} &\doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; t < 1 < x\}. \end{aligned}$$

(4.130)



Com isto temos que, para cada (t, x) satisfazendo:

- para

$$x < t < 1,$$

de (4.129), segue que as curvas características planas serão as retas

$$x = t + x_0,$$

para algum

$$x_0 < 0,$$

ou seja, o ponto (t, x) pertencerá à região I da figura acima.

Logo

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(x_0) \\ &\stackrel{(4.126)}{=} \text{com } x_0 < 0 \text{ } 1. \end{aligned} \tag{4.131}$$

- para

$$t \leq x < 1,$$

de (4.129), segue que as curvas características planas serão as retas

$$x = (1 - x_0)t + x_0, \tag{4.132}$$

para algum

$$0 \leq x_0 \leq 1,$$

ou seja, o ponto (t, x) pertencerá à região II da figura acima.

Logo

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(x_0) \\ &\stackrel{(4.126), \text{ com } 0 \leq x_0 \leq 1}{=} 1 - x_0 \\ &\stackrel{x_0 \stackrel{(4.132)}{=} \frac{x-t}{1-t}}{=} 1 - \frac{x-t}{1-t} \\ &= \frac{1-x}{1-t}. \end{aligned} \tag{4.133}$$

- para

$$t < 1 < x,$$

de (4.129), segue que as curvas características planas serão as retas

$$x = x_0,$$

para algum

$$x_0 > 1,$$

ou seja, o ponto (t, x) pertencerá à região III da figura acima.

Logo

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(x_0) \\ &\stackrel{(4.126) \text{ com } x_0 > 1}{=} 0. \end{aligned} \tag{4.134}$$

Conclusão: de (4.131), (4.133) e (4.134) segue que uma solução do problema de Cauchy (4.124)-(4.125), será dada por:

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x < t < 1, \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{para } t \leq x < 1, \\ 0, & \text{para } t < 1 \leq x. \end{cases} \tag{4.135}$$

□

Observação 4.136

1. Notemos que a função $u = u(t, x)$ acima, dada por (4.135), não é uma solução clássica do problema de Cauchy (4.124)-(4.125), pois $u \notin C^1((0, 1) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

De fato, a função $u = u(t, x)$, dada por (4.135), não é diferenciável ao longo das curvas

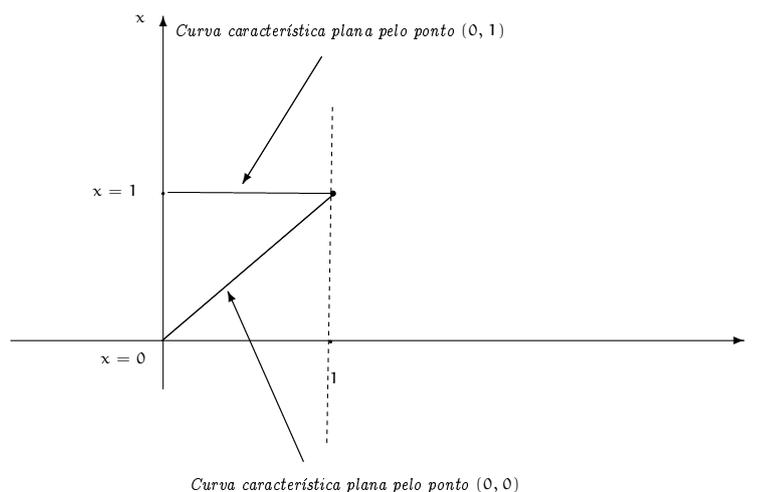
$$C_1 \doteq \{(t, t); t \in [0, 1]\} \quad \text{e} \quad C_2 \doteq \{(t, 1); t \in [0, 1]\}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. Isto era esperado pois as curvas características planas associadas ao problema de Cauchy dado, passando pelos pontos

$$(0, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1),$$

são as curvas dadas por C_1 e C_2 , respectivamente, e a condição inicial não é diferenciável em $x = 0$ e $x = 1$ (veja a figura abaixo).



3. Na faixa

$$(0, 1) \times \mathbb{R},$$

excetuando-se os segmentos de reta C_1 e C_2 , a função $u = u(t, x)$, dada por (4.135), será solução da EDP (4.124).

4. Notemos também que $u \in C([0, 1) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ e satisfaz a condição inicial (4.125). A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

O exemplo seguir mostra que o caso não-linear é bem diferente do caso linear, no que diz respeito a propagação de singularidades.

Exemplo 4.137 *Resolva o problema de Cauchy*

$$u_t(t, x) + u(t, x) u_x(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (4.138)$$

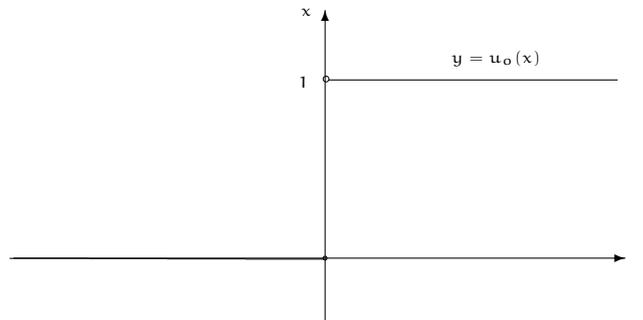
$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (4.139)$$

onde

$$u_0(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0), \\ 1, & \text{para } x \in (0, \infty). \end{cases} \quad (4.140)$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função u_0 é dada pela figura abaixo.



As curvas características planas associadas ao problema de Cauchy acima serão retas da forma

$$x = b[u_0(x_0)]t + x_0,$$

$$\text{que implicará em: } x = u_0(x_0)t + x_0,$$

ou seja, serão as seguintes retas:

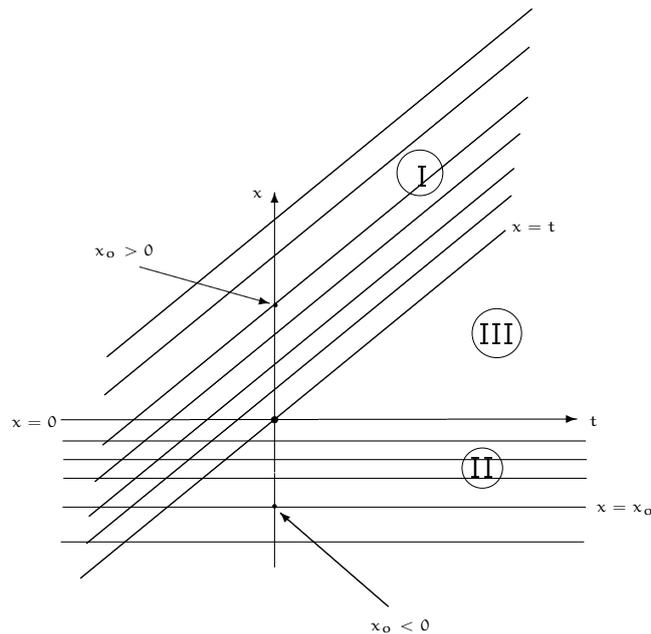
$$x = \begin{cases} x_0, & \text{para } x_0 < 0, \\ t + x_0, & \text{para } x_0 > 0, \end{cases} \quad (4.141)$$

que se interceptam para $t \in (-\infty, 0)$ (veja a figura abaixo).

Logo a solução, dada por (4.121)-(4.122), só poderá ser definida para $t \in [0, \infty)$, pois não haverá cruzamento das retas (4.141) acima (que são as curvas características) nessa região.

Na verdade a solução também não estará bem definida na região III da figura abaixo, mais especificamente só estará bem definida (por meio das curvas características) nas regiões I e II, ou seja, na região

$$\{(t, x); t \geq 0 \text{ e } x \geq t \text{ ou } t \geq 0 \text{ e } x \leq 0\}.$$



Com isto teremos:

- para

$$x \in (-\infty, 0) \quad \text{e} \quad t \in [0, \infty),$$

de (4.141) segue que, as curvas características planas serão as retas (veja a região II na figura acima)

$$x = x_0,$$

para algum

$$x_0 < 0.$$

Logo deveremos ter

$$u(t, x) = u_0(x_0) \stackrel{(4.140) \text{ com } x_0 < 0}{=} 0. \quad (4.142)$$

- para

$$0 \leq t < x,$$

de (4.141) segue que, as curvas características planas serão as retas (veja a região I na figura acima)

$$x = t + x_0,$$

para algum

$$x_0 > 0.$$

Logo deveremos ter

$$u(t, x) = u_0(x_0) \stackrel{(4.140) \text{ com } x_0 > 0}{=} 1. \quad (4.143)$$

Notemos que na região $\boxed{\text{III}}$, na figura acima, não temos nenhuma restrição sobre a função $u = u(t, x)$.

Logo se considerarmos, por exemplo (na região $\boxed{\text{III}}$ a escolha abaixo foi feita de modo conveniente),

$$u(t, x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0) \text{ e } t \in [0, \infty), \\ \frac{x}{t}, & \text{para } 0 \leq x \leq t \text{ e } t \neq 0, \\ 1, & \text{para } 0 \leq t < x, \end{cases} \quad (4.144)$$

obtemos uma função contínua em

$$([0, \infty) \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$$

que será solução do problema de Cauchy (4.138)-(4.139) para $t \in (0, \infty)$, excetuando-se a curva característica que passa pelo ponto $(0, 0)$, isto é, a reta

$$x = t.$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

□

Observação 4.145

1. Notemos que no Exemplo (4.137) acima podemos ter uma solução contínua para $t \in (0, \infty)$, embora a condição inicial, dada por (4.140), seja uma função descontínua, ou seja, a descontinuidade da condição inicial u_0 no ponto $x = 0$, **não** propagou-se ao longo da curva característica plana associada ao problema de Cauchy (4.138)-4.139 que contém o ponto $(0, 0)$, a saber, a reta

$$x = t.$$

2. Também no Exemplo (4.137) acima (caso não-linear), temos que as derivadas parciais de 1.a ordem são funções descontínuas ao longo da curva característica plana associada ao problema de Cauchy (4.138)-(4.139) que passa pelo ponto $(0, 0)$, a saber, a reta

$$x = t.$$

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

4.6 Ondas de choque associadas à EDP (4.124)

Retornemos ao Exemplo (4.123) e consideremos as seguintes observações sobre o mesmo:

Observação 4.146

1. Notemos que não é possível encontrar uma solução global, isto é, uma solução definida em

$$\{(t, x); t \in (0, \infty) \text{ e } x \in \mathbb{R}\},$$

que seja contínua no ponto $(1, 1)$.

De fato, como

$$u(t, x) = 1, \quad \text{na região II},$$

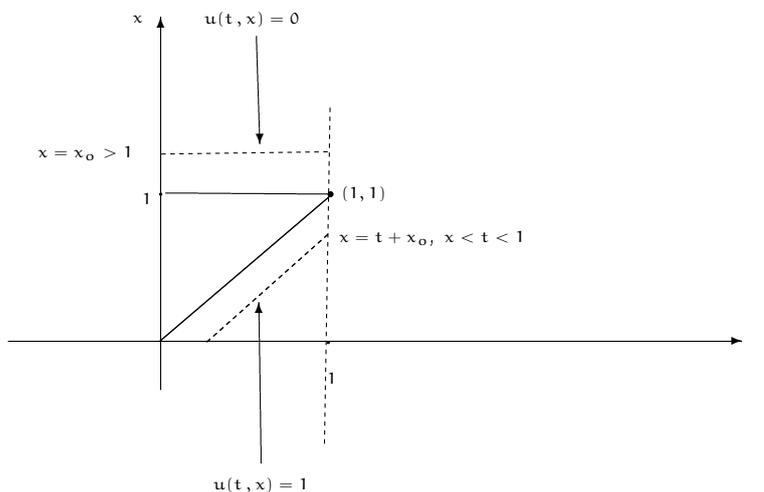
isto é, para (t, x) satisfazendo $x < t < 1$

e

$$u(t, x) = 0, \quad \text{na região III},$$

isto é, para (t, x) satisfazendo $t < 1 < x$,

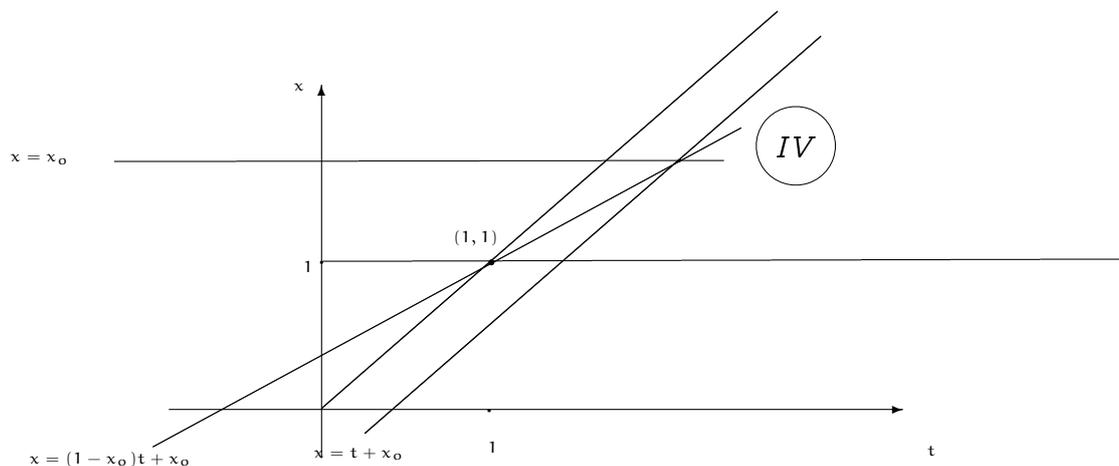
segue que a função $u = u(t, x)$ não poderá ser contínua no ponto $(1, 1)$ (veja a figura abaixo).



2. Notemos também que, admitindo soluções que sejam descontínuas (por exemplo, funções que são descontínuas ao longo de uma curva suave e que satisfazem a EDP fora dessa curva) ainda assim não saberíamos como determinar a solução na região IV (veja a figura abaixo), isto é, em

$$\{(t, x); 1 < x < t\},$$

já que em cada ponto dessa região passam três curvas características planas distintas (no caso, três retas que se interceptam nessa região).

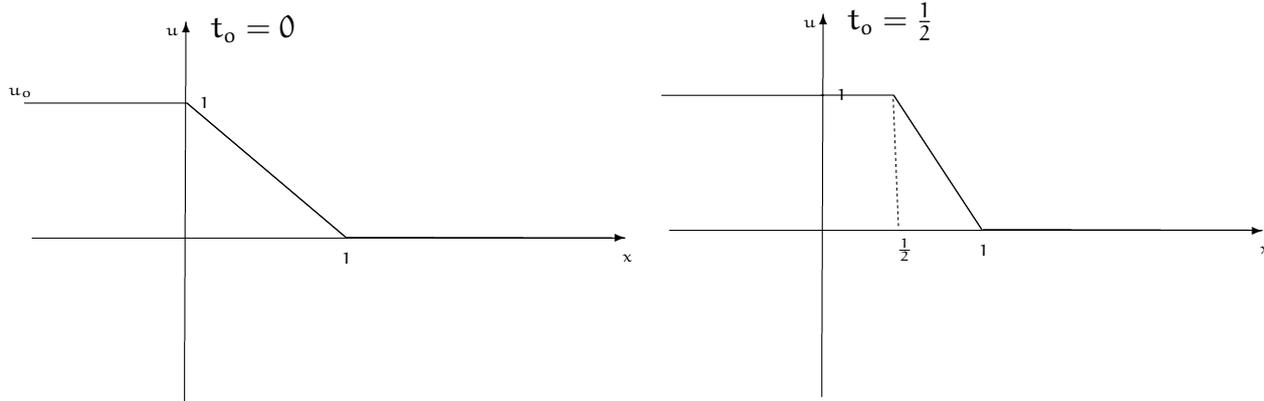


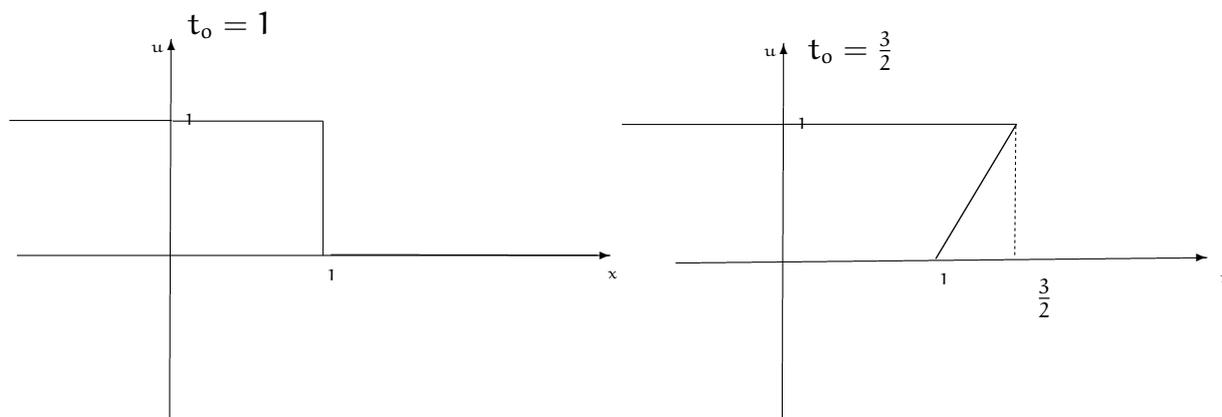
3. Ainda em relação ao problema de Cauchy (4.124)-(4.125), as equações (4.121) e (4.122) determinam em \mathbb{R}^3 uma superfície (que, em geral, não é gráfico de uma função de (t, x)) parametrizada por \underline{t} e por \underline{x}_0 .

As figuras abaixo mostram as projeções das curvas

$$s \mapsto (t_0, x(t_0, s), u(t_0, x(t_0, s)))$$

no plano \underline{xOu} , para diferentes valores \underline{t}_0 .





Notemos que a mudança no comportamento da curva quando passamos por $t_0 = 1$

4. O Exemplo (4.123) é um modelo típico do que ocorre quando as curvas características planas se cruzam.

5. Observemos que se

$$x_1 < x_2,$$

as curvas características planas que passam pelos pontos

$$(x_1, 0) \quad \text{e} \quad (x_2, 0),$$

que denotaremos por l_1 e l_2 , respectivamente, terão equações gerais dadas por:

$$l_1 : x = b[u_0(x_1)] t + x_1,$$

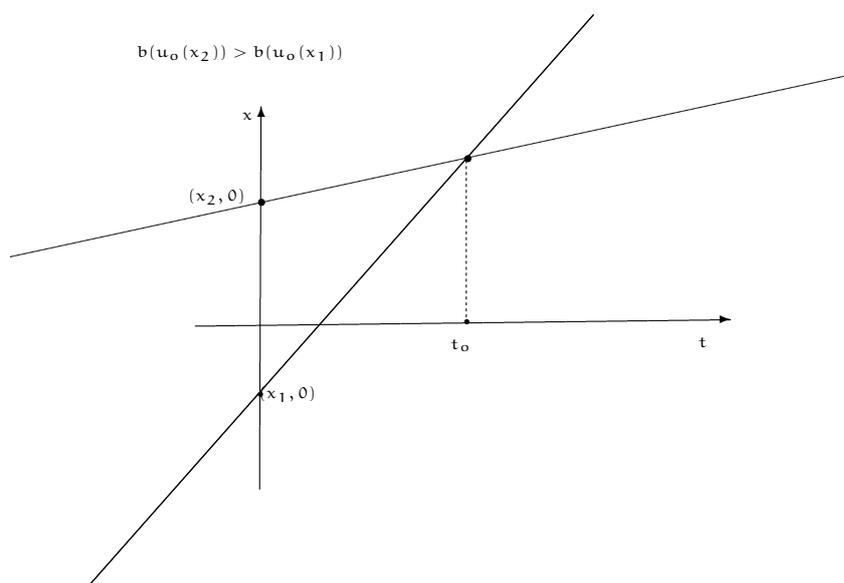
$$l_2 : x = b[u_0(x_2)] t + x_2.$$

Logo

$$l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$$

se, e somente se, (veja a figura abaixo)

$$b[u_0(x_1)] > b[u_0(x_2)] \tag{4.147}$$



Neste caso, se

$$u_0(x_1) \neq u_0(x_2),$$

uma solução global será, necessariamente, descontínua no ponto (t_0, x_0) pois, quando $t \rightarrow t_0^-$, ao longo da curva \underline{l}_1 , teremos

$$u(t, x) \rightarrow u_0(x_1),$$

enquanto, quando $t \rightarrow t_0^-$, ao longo da curva \underline{l}_2 , teremos

$$u(t, x) \rightarrow u_0(x_2).$$

Com isto temos a:

Definição 4.148 No caso acima diremos que uma onda de choque é formada no instante $t = t_0$.

Observação 4.149 Ainda com relação ao problema de Cauchy acima temos as seguintes considerações:

1. Soluções descontínuas podem fazer sentido do ponto de vista físico (por exemplo, para EDP's associadas a fluídos compressíveis).
2. A seguir, procuraremos soluções da EDP que serão descontínuas ao longo de uma curva que é gráfico de uma função

$$g = g(t), \quad \text{para } t \in [t_0, \infty),$$

e que satisfaz a EDP em uma região "exterior" dessa curva.

3. Se a função

$$x \mapsto b[u_0(x)]$$

é monótona não decrescente, então as curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.138)-(4.139) nunca se interceptarão.

De fato, pois

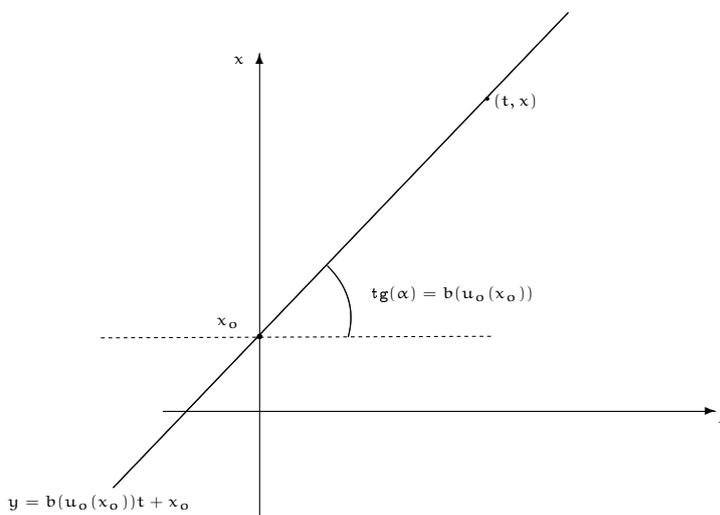
$$x_1 < x_2, \quad \text{segue que,} \quad b(u_0(x_1)) \leq b(u_0(x_2)),$$

e, de (4.147), segue que as curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.138)-4.139 não se interceptam.

Neste caso, como as funções b e u_0 são bem comportadas, segue que deveremos ter

$$\frac{d}{dx} b[u_0(x)] \geq 0$$

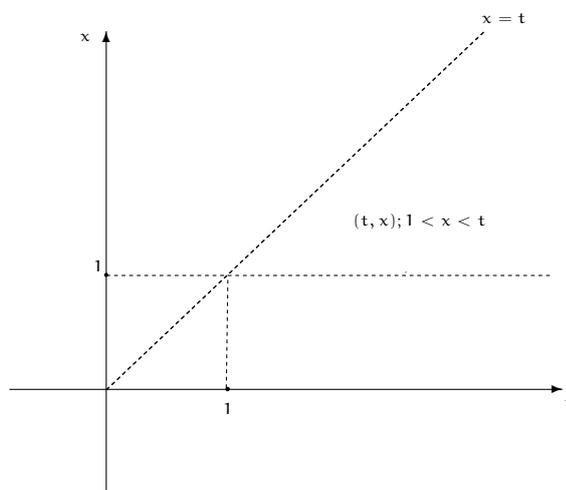
e assim (4.121) e (4.122) nos fornecerão a solução do problema de Cauchy considerado, para $t \in (0, \infty)$.



Retornemos ao problema de Cauchy (4.124)-(4.125).

Vamos enfraquecer o conceito de soluções, aceitando soluções que sejam descontínuas e encontrar um modo de, analisando o problema físico, definir a solução na região R , definida por (veja a figura abaixo)

$$R \doteq \{(t, x); 1 < x < t\}.$$

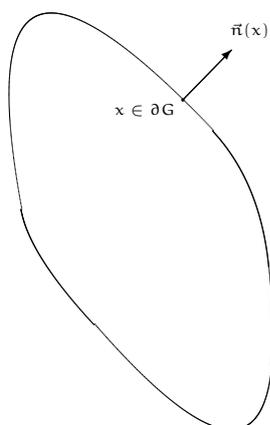


Antes porém vamos tratar de algumas coisas relacionadas com a origem da EDP (4.119).

Equações do tipo (4.119) são originárias do que se costuma chamar de leis de conservação, que envolvem integrais e são, em geral, da forma

$$\frac{d}{dt} \int_G u(t, x) dx = - \int_{\partial(G)} f[t, x, u(t, x)] \vec{n}(x) ds, \quad (4.150)$$

onde o conjunto G é uma região limitada do plano e a função $u = u(t, x)$ mede a densidade de alguma "entidade física", sabendo-se que a função f descreve o fluxo ao longo da fronteira do conjunto G e o vetor \vec{n} é o normal exterior à fronteira de G , que estamos supondo ser "bem comportada" (veja a figura abaixo).



Observação 4.151

1. A equação integral (4.150) nos diz que a taxa de variação da quantidade total da "entidade física", contida na região \underline{G} , é igual a menos o fluxo da "entidade física" que atravessa a fronteira de \underline{G} .
2. No caso unidimensional, isto é, se

$$G = [x_0, x_0 + h], \quad \text{para } h > 0,$$

com $f = f(u)$, a equação integral (4.150) tornar-se-á:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} u(t, s) ds = -[f(u(t, x_0 + h)) + f(u(t, x_0))]. \quad (4.152)$$

3. Supondo que podemos derivar sob o sinal de integração em (4.152), o lado esquerdo da equação (4.152), nos fornecerá a seguinte identidade:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} u_t(t, s) ds.$$

Logo, utilizando esta informação, dividindo a equação (4.152), por h , e fazendo $h \rightarrow 0$, obteremos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} u_t(t, s) ds}_{\text{Teor. Fund. Cálculo } \partial_t u(t, x_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f[u(t, x_0)] - f[u(t, x_0 + h)]}{h}}_{=-\partial_x [f(u(t, x))]_{x=x_0}},$$

ou seja, (trocando-se x_0 por x), obteremos a seguinte EDP não-linear:

$$u_t(t, x) + [f(u(t, x))]_x = 0,$$

ou seja, a EDP não-linear (4.124).

Passemos agora a tentar encontrar soluções globais $u = u(t, x)$, do problema de Cauchy (4.124)-(4.125), isto é, definidas em

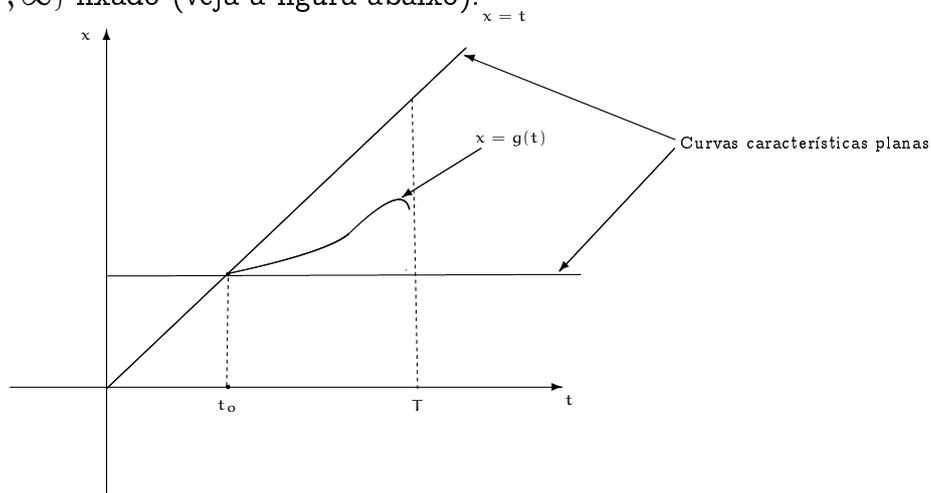
$$(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

exceto em uma curva contida nessa região, que não estará definida ao longo de uma curva \underline{C} suave, que é a representação geométrica do gráfico de uma função

$$x = g(t), \quad \text{para } t \in [t_0, \infty),$$

onde $t_0 \in (0, \infty)$ é o menor valor de t para os quais há intersecção de curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.124)-(4.125).

Suponhamos que a função $u = u(t, x)$ dá um "salto" ao passar pela curva \underline{C} , para $t \in [t_0, T]$, para algum $T \in (0, \infty)$ fixado (veja a figura abaixo).



Consideremos

$$a < b,$$

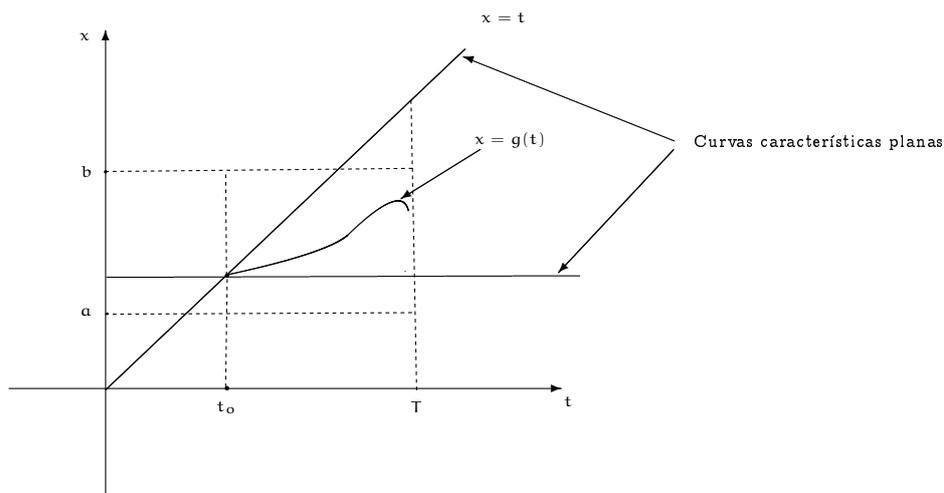
de modo que a parte da curva \underline{C} , para $t \in [0, T]$, esteja contida na faixa

$$\{(t, x); x \in (a, b)\},$$

do plano tOx , ou ainda, $a, b \in \mathbb{R}$ são escolhidos, de modo que a curva

$$t \in [t_0, T] \mapsto (t, g(t)),$$

esteja contida no retângulo $[t_0, T] \times [a, b]$ (veja a figura abaixo).



Definamos a função $I : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$I(t) \doteq \int_a^b u(t, x) dx, \quad \text{para cada } t \in [t_0, T]. \tag{4.153}$$

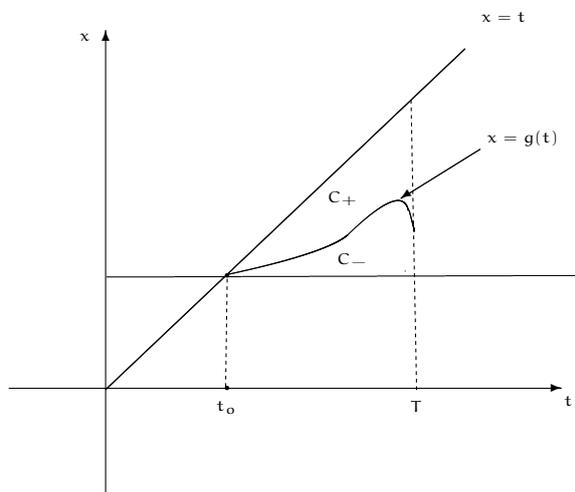
Logo, para cada $t \in [t_0, T]$, de (4.152), segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &\stackrel{(4.153)}{=} \frac{d}{dt} \left[\int_a^b u(t, x) dx \right] \\ &\stackrel{(4.152)}{=} f[u(t, a)] - f[u(t, b)]. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Denotemos por

$$u_+ \quad \text{e} \quad u_- \quad (4.155)$$

as soluções definidas nas regiões, contidas em $[t_0, T] \times [a, b]$, que situa-se acima da curva \underline{C} , que indicaremos por \underline{C}_+ , e que situa-se abaixo da curva \underline{C} , que indicaremos por \underline{C}_- (veja a figura abaixo).



Com isto, para cada $t \in [t_0, T]$, a equação (4.153), poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_a^{g(t)} \underbrace{u(t, x)}_{=u_-(t, x), x \in [a, g(t)]} dx + \int_{g(t)}^b \underbrace{u(t, x)}_{=u_+(t, x), x \in [g(t), a]} dx \\ &= \int_a^{g(t)} u_-(t, x) dx + \int_{g(t)}^b u_+(t, x) dx. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Observemos que, da definição das funções u_+ e u_- (veja (4.155)), os valores

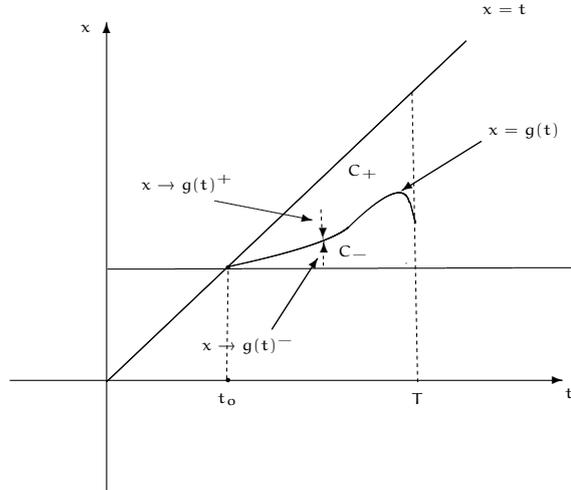
$$u_+(t, g(t)) \quad \text{e} \quad u_-(t, g(t))$$

nada mais são que os limites laterais da função $u(t, x)$, quando

$$x \rightarrow g(t)^+ \quad \text{e} \quad x \rightarrow g(t)^-,$$

respectivamente (veja a figura abaixo), isto é,

$$u_+(t, g(t)) \doteq \lim_{x \rightarrow g(t)^+} u(t, x) \quad \text{e} \quad u_-(t, g(t)) \doteq \lim_{x \rightarrow g(t)^-} u(t, x).$$



Logo, para cada $t \in [t_0, T]$, derivando a expressão (4.156), em relação à t , obteremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} I(t) &= \frac{d}{dt} \left[\int_a^{g(t)} u_-(t, x) dx + \int_{g(t)}^b u_+(t, x) dx \right] \\
 &\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} u_-(t, g(t)) g'(t) + \int_a^{g(t)} \partial_t u_-(t, x) dx - u_+(t, g(t)) g'(t) + \int_{g(t)}^b \partial_t u_+(t, x) dx \\
 &\stackrel{(4.119)}{=} g'(t) [u_-(t, g(t)) - u_+(t, g(t))] + \int_a^{g(t)} \{-\partial_x [f(u_-(t, g(t)))]\} dx \\
 &\quad + \int_{g(t)}^b \{-\partial_x [f(u_+(t, g(t)))]\} dx \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} g'(t) [u_-(t, g(t)) - u_+(t, g(t))] - [f(u_-(t, g(t))) - \underbrace{f(u_-(t, g(a)))}_{u(t,a)}] \\
 &\quad - [f(\underbrace{u_+(t, b)}_{=u(t,b)}) - f(u_+(t, g(t)))] \\
 &= g'(t) [u_-(t, g(t)) - u_+(t, g(t))] - f(u_-(t, g(t))) + f(u(t, a)) \\
 &\quad - f(u(t, b)) + f(u_+(t, g(t))). \tag{4.157}
 \end{aligned}$$

Comparando (4.154) com (4.157), obteremos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
 &g'(t) [u_-(t, g(t)) - u_+(t, g(t))] - f(u_-(t, g(t))) + f(u(t, a)) - f(u(t, b)) \\
 &\quad + f(u_+(t, g(t))) = f(u(t, a)) - f(u(t, b)),
 \end{aligned}$$

ou seja, $f(u_+(t, g(t))) - f(u_-(t, g(t))) = g'(t) [u_-(t, g(t)) - u_+(t, g(t))]$,

ou ainda, a função $x = g(t)$ deverá satisfazer a seguinte EDO:

$$[f] = s[u], \tag{4.158}$$

onde

$$s \doteq g'(t) \quad (4.159)$$

$$[u] \doteq u_+(t, g(t)) - u_-(t, g(t)) \quad (4.160)$$

$$[f] \doteq f(u_+(t, g(t))) - f(u_-(t, g(t))). \quad (4.161)$$

Observação 4.162 *Notemos que o valor $[u]$, dado por (4.160), nos fornece o valor do "salto" da função $u = u(t, x)$, quando ela cruza a curva \underline{C} e o valor $[f]$, dado por (4.161), é diferença do valor da função f aplicada nos respectivos "saltos" da função $u = u(t, x)$.*

Com isto temos a:

Definição 4.163 *A condição (4.158) é denominada condição de salto.*

Apliquemos estas idéias ao

Exemplo 4.164 *Encontre uma solução global para o seguinte problema de Cauchy*

$$u_t(t, x) + u(t, x) u_x(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (4.165)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (4.166)$$

onde

$$u_0(x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{para } x \in (-\infty, 1), \\ 1 - x, & \text{para } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{para } x \in (1, \infty). \end{cases} \quad (4.167)$$

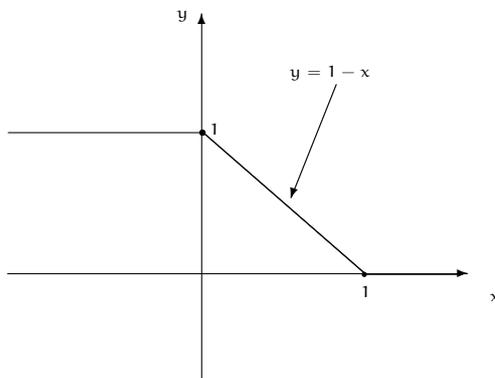
Resolução:

Lembremos que, neste caso, (veja (4.113)) temos que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(r) \doteq \frac{r}{2} \text{ para } r \in [0, \infty).$$

A representação geométrica do gráfico da função u_0 , dada por (4.167), isto é, do dado inicial, é dada pela figura abaixo:

Gráfico de $y = u_0(x)$



Vimos no Exemplo (4.123) que na região

$$I \cup II \cup III,$$

definidas na figura abaixo, a solução será dada por:

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x < t < 1 \quad (\text{que corresponde a região I}) \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{para } t \leq x \leq 1 \quad (\text{que corresponde a região II}) \\ 0, & \text{para } t < 1 < x \quad (\text{que corresponde a região III}) \end{cases} . \quad (4.168)$$

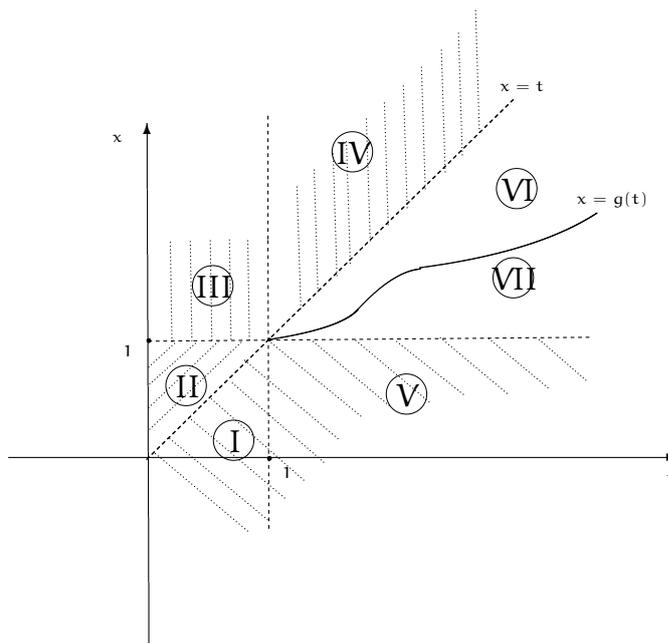
Logo, é natural estendermos a solução

$$u = u(t, x),$$

da seguinte maneira (veja figura abaixo):

$$u(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in IV \doteq \{(t, x); 1 \leq t < x\}, \quad (4.169)$$

$$u(t, x) = 1, \quad \text{para cada } (t, x) \in V \doteq \{(t, x); 1 \leq t \text{ e } x \leq 1\}. \quad (4.170)$$



Assim como será natural definirmos (veja a figura acima):

$$u_+(t, x) \doteq 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in VI \doteq \{(t, x); g(t) < x \leq t\}, \quad (4.171)$$

$$u_-(t, x) \doteq 1, \quad \text{para cada } (t, x) \in VII \doteq \{(t, x); 1 \leq x < g(t)\}. \quad (4.172)$$

Observemos que $t_0 = 1$ é o menor valor de t para os quais há uma intersecção de curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.165)-(4.166).

Logo

$$\begin{aligned}
 [u] &\stackrel{(4.160)}{=} u_+(t, g(t)) - u_-(t, g(t)) \\
 &\stackrel{(4.171), (4.172)}{=} 0 - 1 \\
 &= -1,
 \end{aligned} \tag{4.173}$$

$$\begin{aligned}
 [f] &\stackrel{(4.161)}{=} f(\underbrace{u_+(t, g(t))}_{(4.171)_0}) - f(\underbrace{u_-(t, g(t))}_{(4.172)_1}) \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.174}$$

Mas, de (4.158) (isto é, da condição de salto), deveremos ter

$$\underbrace{s}_{(4.159)_{g'(t)}} \underbrace{[u]}_{(4.173)_{-1}} = \underbrace{[f]}_{(4.174)_{-\frac{1}{2}}},$$

que é equivalente a: $g'(t) = \frac{1}{2}$,

ou ainda, $g(t) = \frac{1}{2}t + C$, para cada $t \in [1, \infty)$,

para algum $C \in \mathbb{R}$.

Como o cruzamento das curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.165)-(4.166) iniciam-se no ponto $(1, 1)$ (veja a figura acima), deveremos ter:

$$g(1) = 1,$$

ou seja, $g(t) = \frac{1}{2}t$, para $t \in [1, \infty)$,

cujos gráficos estão contidos no traço da reta

$$2x = t + 1.$$

Portanto a solução global que obtemos será dada por:

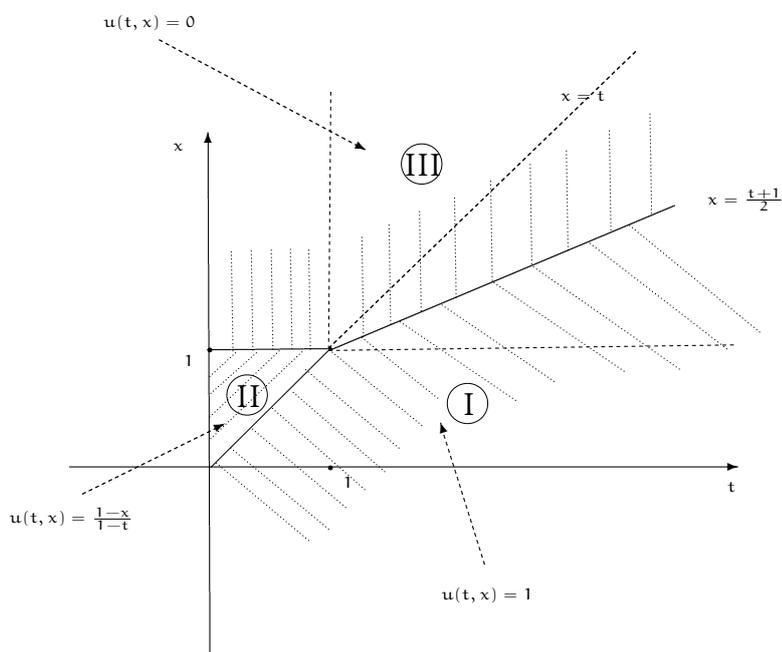
$$u(t, x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{para } (t, x) \in I \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{para } (t, x) \in II \\ 0, & \text{para } (t, x) \in III, \end{cases} \tag{4.175}$$

onde (veja a figura abaixo):

$$I \doteq \{(t, x); x < t < 1 \text{ ou } 2x < t + 1 \text{ e } 1 \leq t\},$$

$$II \doteq \{(t, x); 0 \leq t < x < 1\},$$

$$III \doteq \{(t, x); 1 \leq x \text{ e } 0 \leq t \leq 1 \text{ ou } 2 \leq t + 1 < 2x\}.$$



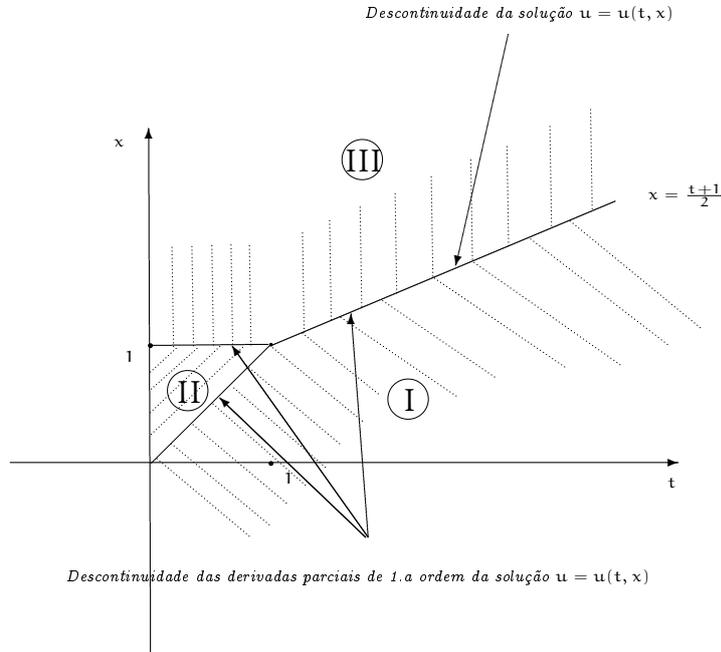
Observação 4.176

1. Os pontos de descontinuidades da solução $u = u(t, x)$, dada por (3.163), ocorrerão ao longo da semi-reta (veja a figura abaixo)

$$2x = t + 1, \quad \text{para cada } t \in [1, \infty).$$

2. Já as derivadas parciais da solução $u = u(t, x)$, serão descontínuas também ao longo dos segmentos de retas (veja a figura abaixo)

$$x = t, \quad \text{para } t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad x = 1, \quad \text{para } t \in [0, 1].$$



3. *Estendendo o conceito de solução do problema de Cauchy em questão, tornamos possível resolvê-lo, com condições iniciais do tipo (4.126) ou (4.140), para as quais não existem soluções globais clássicas.*
4. *Existe a questão de termos aumentado demais a classe onde procuraremos as soluções do problema de Cauchy em questão podendo, com isto, correr o risco de ser perder a unicidade da solução.*

Para ilustrar essa situação consideremos o (veja o Exemplo (4.137)):

Exemplo 4.177 *Encontre uma solução do problema de Cauchy*

$$u_t(t, x) + u(t, x) u_x(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (4.178)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (4.179)$$

onde

$$u_0(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0), \\ 1, & \text{para } x \in (0, \infty). \end{cases} \quad (4.180)$$

Resolução:

Do Exemplo (4.137), temos que as curvas características planas associadas ao problema de Cauchy (4.138)-(4.139), serão dadas por:

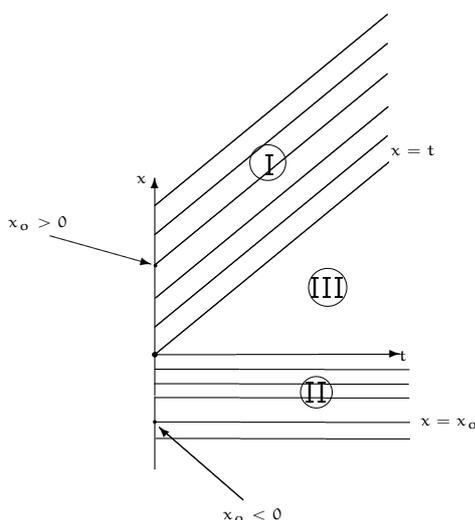
$$x = b(u_0(x_0)) t + x_0,$$

ou seja, $x = u_0(x_0) t + x_0,$

ou seja, serão as seguintes retas

$$x = \begin{cases} x_0, & \text{para } x_0 \in (-\infty, 0), \\ t + x_0, & \text{para } x_0 \in (0, \infty), \end{cases} \quad (4.181)$$

que se interceptam para $t \in (-\infty, 0)$ (veja a figura abaixo).



Notemos que, neste caso, as curvas características planas não se interceptam para $t \in (0, \infty)$ e existe uma solução clássica do problema para $t \in (0, \infty)$ que não está definida na região III (veja a figura acima), onde

$$\text{III} \doteq \{(t, x); 0 \leq x \leq t\}.$$

Procedendo como anteriormente, se a representação geométrica do gráfico da função

$$x = g(t), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty),$$

é tal que a função $u = u(t, x)$ tem um "salto" ao cruzar o gráfico da mesma, então como

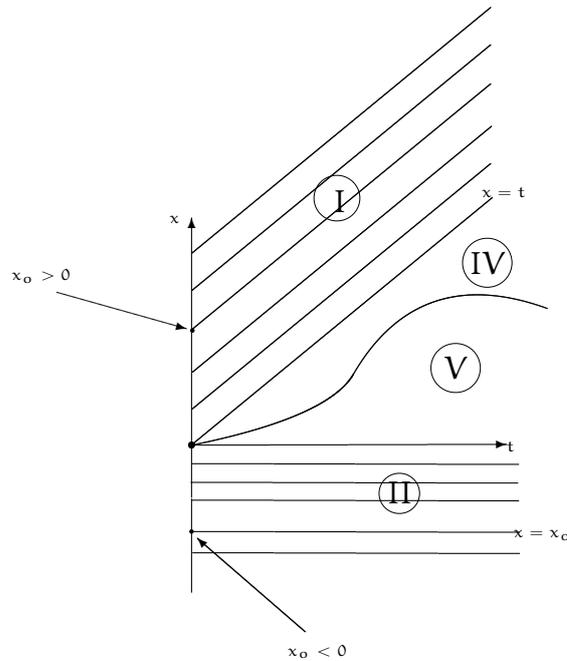
$$u(t, x) = 1, \quad \text{para cada } (t, x) \in \text{I} \doteq \{(t, x); 0 \leq t < x\},$$

$$u(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \text{II} \doteq \{(t, x); x \in (-\infty, 0) \text{ e } t \in [0, \infty)\},$$

é natural definirmos (veja a figura abaixo):

$$u_+(t, x) \doteq 1, \quad \text{para } (t, x) \in IV \doteq \{(t, x); g(t) < x < t, \text{ para } t \in (0, \infty)\}, \quad (4.182)$$

$$u_-(t, x) \doteq 0, \quad \text{para } (t, x) \in V \doteq \{(t, x); 0 < x < g(t), \text{ para } t \in (0, \infty)\}. \quad (4.183)$$



Assim deveremos ter

$$\begin{aligned} [u] &\stackrel{(4.160)}{=} u_+(t, g(t)) - u_-(t, g(t)) \\ &\stackrel{(4.182), (4.183)}{=} 1 - 0 \\ &= 1, \end{aligned} \quad (4.184)$$

$$\begin{aligned} [f] &\stackrel{(4.161)}{=} f(u_+(t, g(t))) - f(u_-(t, g(t))) \\ &\stackrel{f(r)=\frac{r^2}{2}, (4.182), (4.183)}{=} \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.185)$$

Assim, de (4.158), segue que:

$$s[u] = [f],$$

$$\text{e, de (4.184) e (4.185)} \quad s \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{como, s} \stackrel{(4.159)}{=} g'(t), \text{ teremos: } g'(t) = \frac{1}{2},$$

$$\text{portanto: } g(t) = \frac{1}{2}t + C, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty).$$

Como as curvas características começam a cruzar-se no ponto $(0,0)$ (que corresponde a $t = 0$, ou seja, é o menor t para os quais as curvas características planas se interceptam - veja a figura acima), segue que

$$g(0) = 0, \\ \text{segue que: } g(t) = \frac{1}{2}, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (4.186)$$

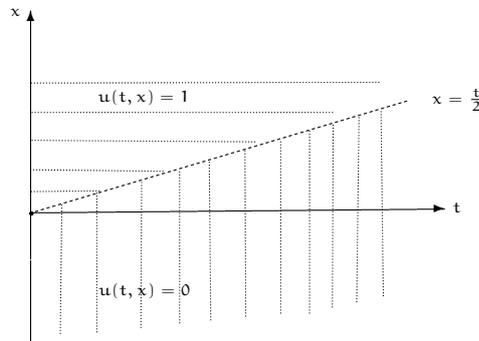
Assim, uma solução global do problema de Cauchy (4.178)-(4.179), será dada por:

$$u_1(t, x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < x < \frac{t}{2}, \\ 1, & \text{para } x > \frac{t}{2} > 0 \end{cases}, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \quad (4.187)$$

que vai satisfazer a EDP (4.178) no 1.º quadrante, exceto sobre a reta

$$x = \frac{t}{2}$$

e satisfaz, evidentemente, a condição inicial (4.179) (veja a figura abaixo).



Observação 4.188

1. Notemos que a função $u_2 : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$u_2(t, x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0) \text{ e } t \in [0, \infty), \\ \frac{x}{t}, & \text{para } 0 < x \leq t, \\ 1, & \text{para } 0 \leq t < x, \end{cases} \quad (4.189)$$

é uma função que pertence à $C^1((\mathbb{R} \times [0, \infty)) \setminus \{(0,0)\}; \mathbb{R})$, satisfaz a EDP (4.178), excetundao-se sobre às curvas características associadas ao problema de Cauchy,

que passam pela origem $(0,0)$, a condição inicial (4.179) e a condição de salto (4.158).

De fato, pois, neste caso teremos

$$g(t) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty) \quad (4.190)$$

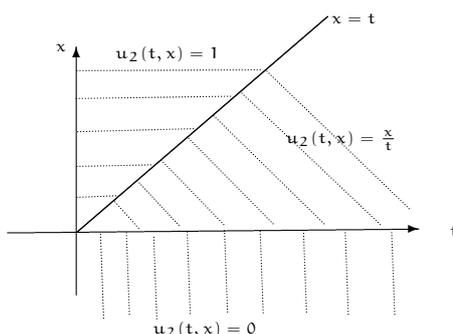
e assim

$$\begin{aligned} [u] &\stackrel{(4.160)}{=} u_+(t, g(t)) - u_-(t, g(t)) \\ &\stackrel{(4.190)}{=} u_+(t, 0) - u_-(t, 0) \\ &\stackrel{(4.189)}{=} 0, \end{aligned} \quad (4.191)$$

$$\begin{aligned} [f] &\stackrel{(4.161)}{=} f(u_+(t, g(t))) - f(u_-(t, g(t))) \\ &\stackrel{(4.190)}{=} f(u_+(t, 0)) - f(u_-(t, 0)) \\ &\stackrel{f(r)=\frac{r}{2}, (4.189)}{=} 0. \end{aligned} \quad (4.192)$$

Logo, a condição de salto (4.158) (veja a figura abaixo), irá se verificar, pois

$$\underbrace{s}_{(4.190)_0} \underbrace{[u]}_{(4.191)_0} = 0 = \underbrace{[f]}_{(4.192)_0}.$$



Conclusão: não temos unicidade de soluções para o problema de Cauchy (4.178)-(4.179).

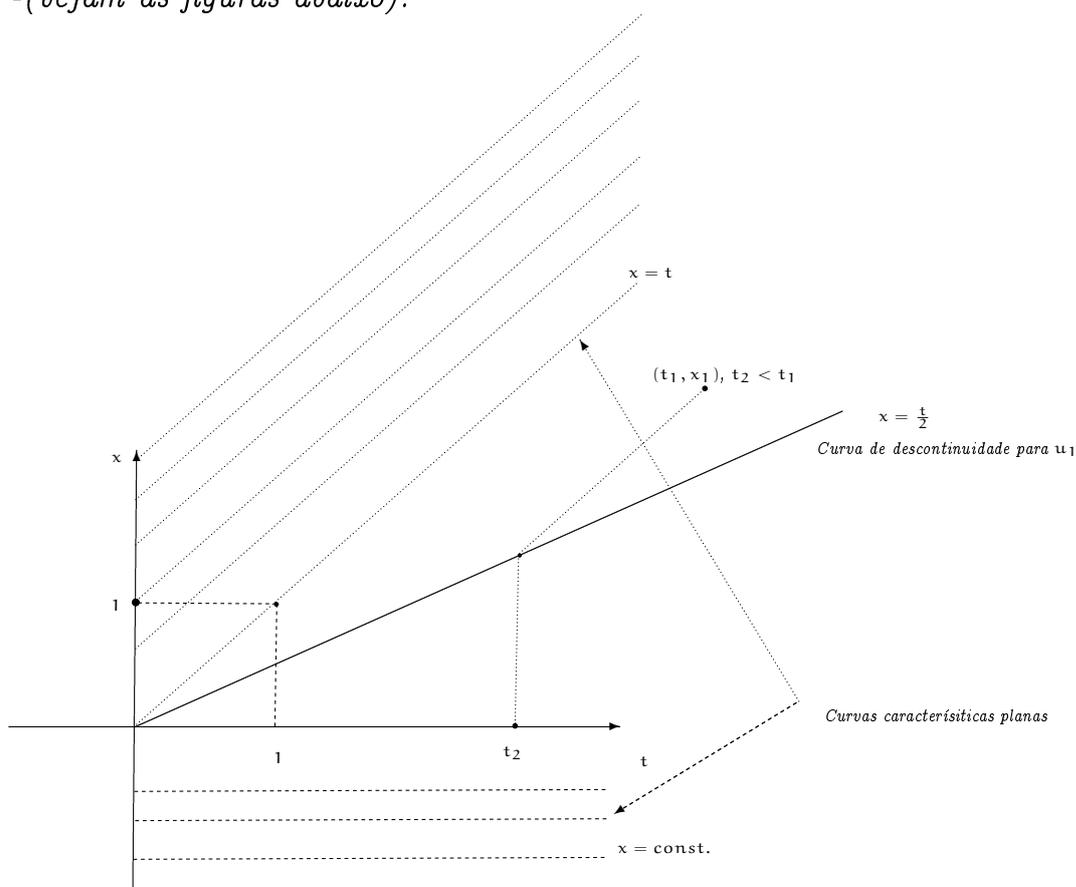
2. Apenas uma das soluções acima tem significado físico.

O problema é saber qual delas é que tem significado físico?

Para respondermos esta questão, introduziremos o seguinte critério:

Hipótese: Dado o ponto (t_1, x_1) , com $t_1 > t_0$, fora da curva de descontinuidade existe uma curva característica plana associada ao problema de Cauchy (4.178)-(4.179), que passa pelo ponto (t_1, x_1) , que intercepta a curva de descontinuidade, em um ponto (t_2, x_2) , com $t_2 > t_1$.

Como esta hipótese adicional, segue que a função $u_1 = u_1(t, x)$ será a solução descartada, pois sua curva de descontinuidade é a semi-reta $x = \frac{t}{2}$, para $t \in (0, \infty)$ -(vejam as figuras abaixo).

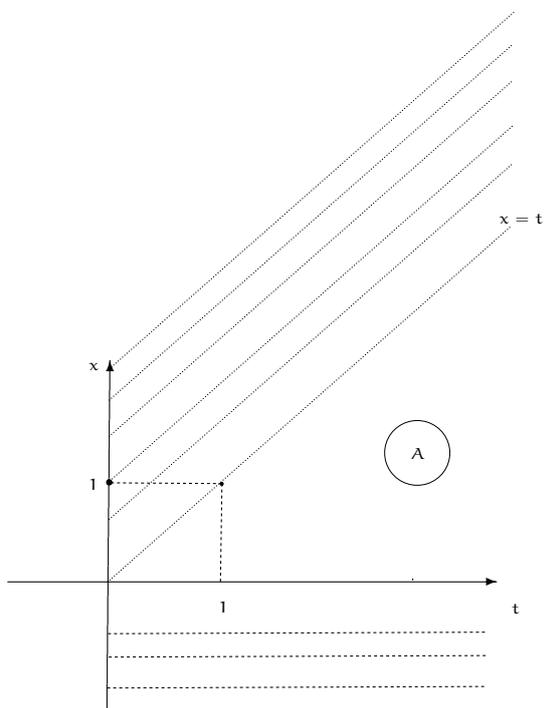


3. Notemos que não existe nenhuma curva na região

$$A \doteq \{(t, x); 0 < x < t\}$$

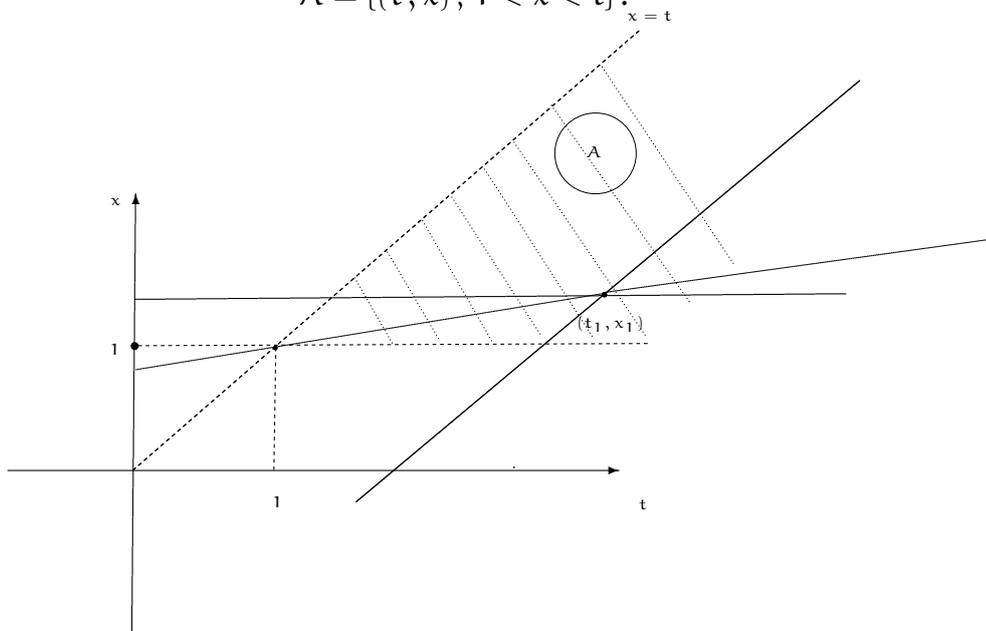
que satisfaça a hipótese acima (veja a figura abaixo).

Logo a solução global deverá ser contínua na região acima.



4. O significado da hipótese acima fica mais claro se analisarmos o Exemplo (4.164). Notemos que, por cada ponto do semi-plano $\{(t, x); \text{ para } x \in (0, \infty)\}$, passam três curvas características planas pelo ponto (t_1, x_1) pertencente à região (veja a figura abaixo):

$$A \doteq \{(t, x); 1 < x < t\}.$$



Porém apenas uma delas intercepta a curva de descontinuidade

$$2x = t + 1, \quad \text{para cada } t \in [1, \infty),$$

em um instante $t > t_1$, se $2x_1 \neq t_1 + 1$.

Isto significa que, com a hipótese acima, as funções

$$u_- \quad \text{e} \quad u_+$$

serão determinadas pela condição inicial \underline{u}_0 .

5. Observemos que, se

$$b(u_-(t, x_1)) > g'(t) > b(u_+(t, x_2)) \quad (4.193)$$

e

$$x_1 < g(t) < x_2, \quad \text{para } t_0 < t,$$

então a hipótese acima estará satisfeita.

4.7 Exercícios

Capítulo 5

Equações Semi-lineares de Segunda Ordem

Neste capítulo estudaremos as EDP's semi-lineares de 2.a ordem em duas variáveis.

Introduziremos a noção de curva característica para estas e suas formas canônicas.

5.1 Classificação de EDP's semi-lineares de segunda ordem

Nesta seção trataremos da classificação desta classe de EDP's exemplos.

Observação 5.1

1. Na disciplina Geometria Analítica, o estudo de curvas definidas por equações do 2.o grau nas variáveis xOy (denominadas cônicas) é facilitado pela redução dessas equações à suas, denominadas, formas normais (ou reduzidas).

Através de uma mudança de variáveis do tipo

$$(x, y) \mapsto (\xi, \eta),$$

a equação do 2.a grau dada inicialmente, será transformada, em relação às novas variáveis, na sua forma canônica, que pode ser uma parábola, hipérbole, elipse, retas paralelas, retas concorrentes, um ponto ou o conjunto vazio.

O novo sistema de coordenadas $\xi O \eta$, será o sistema de coordenadas em relação a qual a curva, cujo traço é a representação geométrica da equação do 2.o grau dada inicialmente, tem a representação analítica mais simples.

2. Nesta seção faremos algo semelhante para EDP's semi-lineares de 2.a ordem nas variáveis x, y , ou seja, iremos classificar tais EDP's e, mais adiante, encontraremos uma "forma canônica" para cada um dos tipos dessas EDP's, dependendo do respectivo tipo.

3. Lembremos que uma EDP semi-linear de 2.a ordem, nas variáveis x, y , terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} a(x, y) u_{xx}(x, y) + 2b(x, y) u_{xy}(x, y) + c(x, y) u_{yy}(x, y) \\ = f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)), \end{aligned} \quad (5.2)$$

para $(x, y) \in \Omega$, onde o conjunto Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas, assim como a função $f : A \subseteq \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$.

A parte principal da EDP acima será determinada pelo operador linear

$$[L(u)](x, y) \doteq a(x, y) u_{xx}(x, y) + 2b(x, y) u_{xy}(x, y) + c(x, y) u_{yy}(x, y), \quad (5.3)$$

para $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$.

4. Em analogia ao caso das cônicas estudadas em Geometria Analítica, classificaremos uma EDP do tipo (5.2), analisando sua parte principal.

5. Suponhamos que as funções $a, b, c \in C(\Omega; \mathbb{R})$ não se anulam simultaneamente, isto é,

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) + c^2(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.4)$$

Com isto temos a:

Definição 5.5 Definimos o discriminante associado à EDP (5.2) como sendo a função $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\delta(x, y) \doteq b^2(x, y) - a(x, y) c(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (5.6)$$

ou, de modo abreviado, por

$$\delta \doteq b^2 - ac, \quad \text{em } \Omega. \quad (5.7)$$

Com isto, diremos que a EDP (5.2) (ou operador linear L , dado por (5.3)), será:

1. parabólica, no ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$, se

$$\delta(x_0, y_0) = 0; \quad (5.8)$$

2. hiperbólica, no ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se

$$\delta(x_0, y_0) > 0, \quad (5.9)$$

3. elítica, no ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se

$$\delta(x_0, y_0) < 0. \quad (5.10)$$

Observação 5.11

1. A EDP (5.2) (ou operador linear \underline{L} , dado por (5.3)) será dita parabólica em $\underline{\Omega}$, se ela (ou o operador linear \underline{L} , dado por (5.3)) for parabólica em cada um dos pontos do conjunto $\underline{\Omega}$.

De modo semelhante, diremos que a EDP (5.2) (ou operador linear \underline{L} , dado por (5.3)) é hiperbólica (elítica, respectivamente) em $\underline{\Omega}$ se ela (ou o operador linear \underline{L} , dado por (5.3)) hiperbólica (elítica, respectivamente) em cada um dos pontos do conjunto $\underline{\Omega}$.

2. A EDP (5.2) (ou operador linear \underline{L} , dado por (5.3)) pode, eventualmente, mudar de tipo, dependendo do ponto $(x, y) \in \Omega$, como veremos em exemplos a seguir.

Neste caso diremos que a EDP (5.2) (ou operador linear \underline{L} , dado por (5.3)) é do tipo misto em $\underline{\Omega}$.

3. Isto não ocorrerá se a EDP (5.2) (ou operador linear \underline{L} , dado por (5.3)) tem coeficientes constantes, isto é, se

$$a(x, y) \doteq a, \quad b(x, y) \doteq b \quad e \quad c(x, y) \doteq c, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes fixadas.

Analisemos os seguintes exemplos:

Exemplo 5.12 A equação de Burger com viscosidade

$$u_t(t, x) + u(t, x) u_x(t, x) - \nu u_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad (5.13)$$

é uma EDP semi-linear de 2.a ordem nas variáveis t e x , do tipo parabólica em $\underline{\Omega}$.

Resolução:

De fato, neste caso, temos que as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas por:

$$a(t, x) \doteq 0, \quad b(t, x) \doteq 0 \quad e \quad c(t, x) \doteq -\nu, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega. \quad (5.14)$$

Logo, para cada $(t, x) \in \Omega$, o discriminante (5.6), associado à EDP (5.13) acima será dado por:

$$\begin{aligned} \delta(t, x) &\stackrel{(5.6)}{=} b^2(t, x) - a(t, x) c(t, x) \\ &\stackrel{(5.14)}{=} 0^2 - 0 \cdot (-\nu) = 0, \end{aligned}$$

logo, de (5.8), segue que a EDP (5.13) (ou seja, a equação de Burger com viscosidade) é parabólica em $\underline{\Omega}$.

□

Exemplo 5.15 *A equação do calor*

$$u_t(t, x) - \alpha^2 u_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2 \quad (5.16)$$

é uma EDP semi-linear de 2.a ordem nas variáveis t , x , parabólica em $\underline{\Omega}$.

Resolução:

De fato, neste caso, temos que as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas por:

$$a(t, x) \doteq 0, \quad b(t, x) \doteq 0 \quad \text{e} \quad c(t, x) \doteq -\alpha^2, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega. \quad (5.17)$$

Logo, para cada $(t, x) \in \Omega$, o discriminante (5.6), associado à EDP (5.16) acima será dado por:

$$\begin{aligned} \delta(t, x) &\stackrel{(5.6)}{=} b^2(t, x) - a(t, x) c(t, x) \\ &\stackrel{(5.17)}{=} 0^2 - 0 \cdot (-\alpha^2) = 0. \end{aligned}$$

Assim, de (5.8), segue que a EDP (5.16) (ou seja, a equação do calor) é parabólica em $\underline{\Omega}$. \square

Exemplo 5.18 *A equação da onda*

$$u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2 \quad (5.19)$$

é uma EDP semi-linear de 2.a ordem nas variáveis t e x que é hiperbólica em $\underline{\Omega}$.

Resolução:

De fato, neste caso, temos que as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas por:

$$a(t, x) \doteq 1, \quad b(t, x) \doteq 0 \quad \text{e} \quad c(t, x) \doteq -c^2, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega. \quad (5.20)$$

Logo, para cada $(t, x) \in \Omega$, o discriminante (5.6), associado à EDP (5.19) acima, será dado por:

$$\begin{aligned} \delta(t, x) &\stackrel{(5.6)}{=} b^2(t, x) - a(t, x) c(t, x) \\ &\stackrel{(5.20)}{=} 0^2 - 1 \cdot (-c^2) \\ &= c^2 > 0. \end{aligned}$$

Assim, de (5.9), segue que a EDP (5.19) (ou seja, a equação da onda) é hiperbólica em $\underline{\Omega}$. \square

Exemplo 5.21 *A equação de Laplace*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2 \quad (5.22)$$

é uma EDP semi-linear de 2.a ordem nas variáveis x e y que é elíptica em $\underline{\Omega}$.

Resolução:

De fato, neste caso, temos que as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas por:

$$a(x, y) \doteq 1, \quad b(x, y) \doteq 0 \quad \text{e} \quad c(x, y) \doteq 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.23)$$

Logo, para cada $(x, y) \in \Omega$, o discriminante (5.6), associado à EDP (5.22) acima, será dado por:

$$\begin{aligned} \delta(t, x) &\stackrel{(5.6)}{=} b^2(t, x) - a(t, x) c(t, x) \\ &\stackrel{(5.23)}{=} 0^2 - 1 \cdot 1 \\ &= -1 < 0. \end{aligned}$$

Assim, de (5.10), segue que a EDP (5.22) (ou seja, a equação de Laplace) é elíptica em $\underline{\Omega}$. □

Exemplo 5.24 *A equação de Poisson*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = h(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2 \quad (5.25)$$

é uma EDP semi-linear de 2.a ordem nas variáveis x e y que é elíptica em $\underline{\Omega}$.

Resolução:

De fato, neste caso, temos que as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas por:

$$a(x, y) \doteq 1, \quad b(x, y) \doteq 0 \quad \text{e} \quad c(x, y) \doteq 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.26)$$

Logo, para cada $(x, y) \in \Omega$, o discriminante (5.6), associado à EDP (5.25) acima, será dado por:

$$\begin{aligned} \delta(t, x) &\stackrel{(5.6)}{=} b^2(t, x) - a(t, x) c(t, x) \\ &\stackrel{(5.26)}{=} 0^2 - 1 \cdot 1 \\ &= -1 < 0. \end{aligned}$$

Assim, de (5.10), segue que a EDP (5.25) (ou seja, a equação de Laplace) é elíptica em $\underline{\Omega}$. □

Exemplo 5.27 A equação de Tricomi

$$y u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2 \quad (5.28)$$

é uma EDP semi-linear de 2.a ordem nas variáveis x e y que é de tipo misto em Ω .

Resolução:

De fato, neste caso, temos que as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas por:

$$a(x, y) \doteq y, \quad b(x, y) \doteq 0 \quad \text{e} \quad c(x, y) \doteq 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.29)$$

Logo, para cada $(x, y) \in \Omega$, o discriminante (5.6), associado à EDP (5.28) acima, será dado por:

$$\begin{aligned} \delta(t, x) &\stackrel{(5.6)}{=} b^2(t, x) - a(t, x) c(t, x) \\ &\stackrel{(5.26)}{=} 0^2 - y \cdot 1 \\ &= -y. \end{aligned}$$

Logo a EDP (5.28) será (veja a figura abaixo):

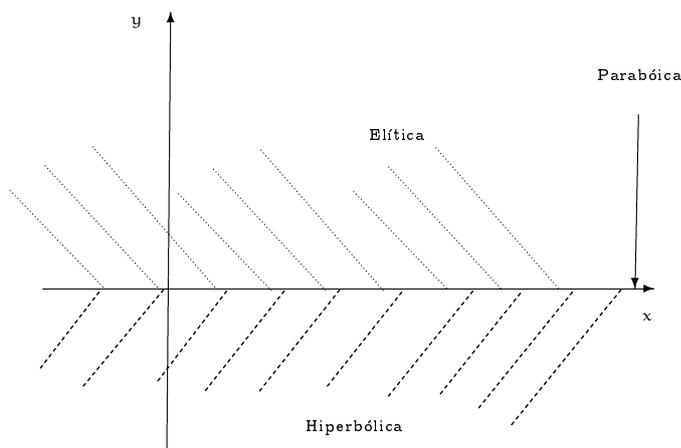
7.1 elítica, no semi-plano

$$\{(x, y); y \in (0, \infty)\};$$

7.2 hiperbólica, no semi-plano

$$\{(x, y); y \in (-\infty, 0)\};$$

7.3 parabólica, sobre eixo Ox .



□

Observação 5.30

1. O tipo de uma EDP semi-linear de 2.a ordem, em duas variáveis independentes, não muda com uma mudança de coordenadas "suave".

De fato, suponhamos que

$$\xi, \eta : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

são funções a valores reais, que possuem derivadas parciais até a 2.a ordem contínuas em uma vizinhança de $(x_0, y_0) \in \Omega$, contida em $\underline{\Omega}$, e tal que o jacobiano

$$\begin{aligned} j(x_0, y_0) &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) \\ &\doteq \begin{vmatrix} \xi_x(x_0, y_0) & \xi_y(x_0, y_0) \\ \eta_x(x_0, y_0) & \eta_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, da continuidade da função jacobiano e do fato que as funções

$$\xi_x, \quad \xi_y, \quad \eta_x \quad \text{e} \quad \eta_y$$

são contínuas em (x_0, y_0) , segue que

$$j(x, y) = \xi_x(x, y) \cdot \eta_y(x, y) - \xi_y(x, y) \cdot \eta_x(x, y) \neq 0 \quad (5.31)$$

para cada (x, y) pertencente a uma vizinhança, que indicaremos por \underline{U} , do ponto (x_0, y_0) , contida em $\underline{\Omega}$.

Logo, do Teorema da Função Inversa (veja Cálculo II), podemos obter funções

$$x = x(\xi, \eta) \quad \text{e} \quad y = y(\xi, \eta), \quad (5.32)$$

definidas numa vizinhança, que denotaremos por \underline{W} , de

$$(\xi_0, \eta_0) \doteq (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0)),$$

onde as funções $x, y \in C^2(W; \mathbb{R}^2)$.

Consideremos

$$V \doteq T(W) \subseteq U,$$

$$\text{onde} \quad T(\xi, \eta) \doteq (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \text{para cada} \quad (\xi, \eta) \in W,$$

que, como consequência do Teorema da Função Inversa, será uma vizinhança de (x_0, y_0) .

Consideremos a função $v : W \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(\xi, \eta) \doteq u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \text{para cada} \quad (\xi, \eta) \in W. \quad (5.33)$$

ou ainda,

$$u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad \text{para cada } (x, y) \in V. \quad (5.34)$$

Notemos que, para cada $(x, y) \in V$, da regra da cadeia e de (5.34), segue que:

$$u_x(x, y) = v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_x(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_x(x, y), \quad (5.35)$$

$$u_y(x, y) = v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_y(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_y(x, y), \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) &\stackrel{(5.35)}{=} [v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_x(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_x(x, y)]_x \\ &= \{[v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \cdot \xi_x(x, y) + v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \cdot \eta_x(x, y)] \cdot \xi_x(x, y) + v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_{xx}(x, y)\} \\ &\quad + \{[v_{\eta\xi}(\xi, \eta) \cdot \xi_x(x, y) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \cdot \eta_x(x, y)] \cdot \eta_x(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_{xx}(x, y)\} \\ &= v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \cdot [\xi_x(x, y)]^2 + 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \cdot \xi_x(x, y) \cdot \eta_x(x, y) \\ &\quad + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \cdot [\eta_x(x, y)]^2 + v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_{xx}(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_{xx}(x, y), \quad (5.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy}(x, y) &\stackrel{(5.35)}{=} [v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_x(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_x(x, y)]_y \\ &= \{[v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \cdot \xi_y(x, y) + v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \cdot \eta_y(x, y)] \cdot \xi_x(x, y) + v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_{xy}(x, y)\} \\ &\quad + \{[v_{\eta\xi}(\xi, \eta) \cdot \xi_y(x, y) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \cdot \eta_y(x, y)] \cdot \eta_x(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_{xy}(x, y)\} \\ &= \{v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \cdot \xi_x(x, y) \cdot \xi_y(x, y) + v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \cdot [\xi_x(x, y) \cdot \eta_y(x, y) \\ &\quad + \xi_y(x, y) \cdot \eta_x(x, y)]\} + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \cdot \eta_x(x, y) \cdot \eta_y(x, y) \\ &\quad + v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_{xy}(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_{xy}(x, y), \quad (5.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy}(x, y) &= [v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_y(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_y(x, y)]_y \\ &= \{[v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \cdot \xi_y(x, y) + v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \cdot \eta_y(x, y)] \cdot \xi_y(x, y) + v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_{yy}(x, y)\} \\ &\quad + \{[v_{\eta\xi}(\xi, \eta) \cdot \xi_y(x, y) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \cdot \eta_y(x, y)] \cdot \eta_y(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_{yy}(x, y)\} \\ &= v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \cdot [\xi_y(x, y)]^2 + 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \cdot \xi_y(x, y) \cdot \eta_y(x, y) \\ &\quad + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \cdot [\eta_y(x, y)]^2 + v_\xi(\xi, \eta) \cdot \xi_{yy}(x, y) + v_\eta(\xi, \eta) \cdot \eta_{yy}(x, y), \quad (5.39) \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in W$.

Logo se a função $u = u(x, y)$ é uma solução clássica da EDP (5.2) segue, de (5.35), (5.36), (5.37), (5.38) e (5.39), que a função $v = v(\xi, \eta)$ irá satisfazer a seguinte relação:

$$\begin{aligned} f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) &= a(x, y) u_{xx}(x, y) + 2b(x, y) u_{xy}(x, y) \\ &\quad + c(x, y) u_{yy}(x, y) \\ &= a \left\{ v_{\xi\xi} \cdot [\xi_x]^2 + 2v_{\xi\eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + v_{\eta\eta} \cdot [\eta_x]^2 + v_\xi \cdot \xi_{xx} + v_\eta \cdot \eta_{xx} \right\} \\ &\quad + 2b \{ v_{\xi\xi} \cdot \xi_x \cdot \xi_y + v_{\xi\eta} \cdot [\xi_x \cdot \eta_y + \xi_y \cdot \eta_x] + v_{\eta\eta} \cdot \eta_x \cdot \eta_y + v_\xi \cdot \xi_{xy} + v_\eta \cdot \eta_{xy} \} \\ &\quad + c \left\{ v_{\xi\xi} \cdot [\xi_y]^2 + 2v_{\xi\eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + v_{\eta\eta} \cdot [\eta_y]^2 + v_\xi \cdot \xi_{yy} + v_\eta \cdot \eta_{yy} \right\}, \end{aligned}$$

onde nas expressões acima temos que:

$$a = a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad b = b(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad c = c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)),$$

para cada $(\xi, \eta) \in W$.

Portanto a EDP (5.2), após a mudança de variáveis local (5.32), nos fornecerá a seguinte EDP, nas novas variáveis $\underline{\xi}$ e $\underline{\eta}$, no conjunto W:

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2B(\xi, \eta) v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + C(\xi, \eta) v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \\ = F(\xi, \eta, v(\xi, \eta), v_{\xi}(\xi, \eta), v_{\eta}(\xi, \eta)), \end{aligned} \quad (5.40)$$

para $(\xi, \eta) \in W$, onde

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &\doteq a(\xi, \eta) \cdot [\xi_x(\xi, \eta)]^2 + 2b(\xi, \eta) \cdot \xi_x(\xi, \eta) \cdot \xi_y(\xi, \eta) + c(\xi, \eta) \cdot [\xi_y(\xi, \eta)]^2, \\ B(\xi, \eta) &\doteq a(\xi, \eta) \cdot \xi_x(\xi, \eta) \cdot \eta_x(\xi, \eta) + b(\xi, \eta) \cdot [\xi_x(\xi, \eta) \cdot \eta_y(\xi, \eta) + \xi_y(\xi, \eta) \cdot \eta_x(\xi, \eta)] \\ &\quad + c(\xi, \eta) \cdot \xi_y(\xi, \eta) \cdot \eta_y(\xi, \eta), \\ C(\xi, \eta) &\doteq a(\xi, \eta) \cdot [\eta_x(\xi, \eta)]^2 + 2b(\xi, \eta) \cdot \eta_x(\xi, \eta) \cdot \eta_y(\xi, \eta) \\ &\quad + c(\xi, \eta) \cdot [\eta_y(\xi, \eta)]^2, \end{aligned} \quad (5.41)$$

para cada $(\xi, \eta) \in W$ e a função \underline{F} é o que restou, só dependendo de das funções $a, b, c, \xi, \eta, v, v_{\xi}$ e v_{η} , e

$$\begin{aligned} a(\xi, \eta) &\doteq a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ b(\xi, \eta) &\doteq b(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ c(\xi, \eta) &\doteq c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \end{aligned}$$

para cada $(\xi, \eta) \in W$.

Logo o discriminante (5.6), associado à EDP (5.40), será dado por:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, \eta) &\stackrel{(5.6)}{=} B^2(\xi, \eta) - A(\xi, \eta) \cdot C(\xi, \eta) \\ &\stackrel{(5.41)}{=} [a \cdot \xi_x \cdot \eta_x + b \cdot (\xi_x \cdot \eta_y + \xi_y \cdot \eta_x) + c \cdot \xi_y \cdot \eta_y]^2 \\ &\quad - [a \cdot \xi_x^2 + 2b \cdot \xi_y \cdot \xi_x + c \cdot \xi_y^2] \cdot [a \cdot \eta_x^2 + 2b \cdot \eta_x \cdot \eta_y + c \cdot \eta_y^2] \\ &= (b^2 - a \cdot c) \cdot (\xi_x \cdot \eta_y - \xi_y \cdot \eta_x)^2 \\ &= \delta(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot \underbrace{\left[\overset{(5.31)}{\neq 0} j(\xi, \eta) \right]^2}_{>0}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Logo podemos concluir, para cada $(\xi, \eta) = T(x, y) \in W$, o sinal de $\Delta(\xi, \eta)$ é o igual ao sinal de $\delta(x, y)$, ou seja, o sinal do discriminante da EDP (5.2) é invariante por mudança de variáveis, ou ainda, o tipo da EDP (5.2) é invariante por mudança de variáveis suave.

2. Em particular, a EDP (5.2) é parabólica (hiperbólica, elítica, respectivamente) em $(x_0, y_0) \in \Omega$ se, e somente se, a EDP (5.40) é parabólica (hiperbólica, elítica, respectivamente) em $(\xi_0, \eta_0) \in W$.
3. Outro aspecto importante na classificação dos tipos da EDP (5.2) é a existência ou não de curvas características planas.

Definimos anteriormente, curvas características planas para EDP's lineares de 1.a ordem em duas variáveis.

Para EDP's lineares de 2.a ordem em duas variáveis (isto é, da forma (5.2)) as curvas características planas, associadas à EDP (5.2), serão curvas "suaves", ao longo das quais, a parte da EDP que envolve as derivadas parciais de 2.a ordem, podem ser escritas, ao longo de tais curvas, como uma derivada total envolvendo, somente, as derivadas parciais de 1.a ordem da função incógnita $u = u(x, y)$, em relação às variáveis x e y , isto é, derivadas totais que envolve as funções u_x e u_y .

A seguir deixaremos mais claro o significado de tais curvas.

4. Curvas características planas serão, como veremos, de extrema importância no estudo de uma EDP da forma (5.2), que são do tipo hiperbólicas ou parabólicas, em um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.
5. Como veremos mais adiante, uma EDP da forma (5.2) que é do tipo elítica em um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, não possuirá curvas características planas.

Estudemos as curvas características planas associadas à EDP (5.2).

Notemos que a EDP (5.2) é de 2.a ordem em Ω , um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , ou seja, as funções $a, b, c \in C(\Omega; \mathbb{R})$ não se anulam simultaneamente, ou ainda,

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) + c^2(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Para simplificar nosso estudo vamos supor que a função a não se anula em Ω , isto é,

$$a(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.43)$$

Os outros casos são análogos e serão deixados como exercício para o leitor.

Definido-se as funções $p, q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$p(x, y) \doteq u_x(x, y),$$

$$q(x, y) \doteq u_y(x, y),$$

segue que a EDP (5.2) será equivalente ao sistema de EDP's:

$$p(x, y) = u_x(x, y), \quad (5.44)$$

$$q(x, y) = u_y(x, y), \quad (5.45)$$

$$a(x, y) p_x(x, y) + 2b p_y(x, y) + c(x, y) q_y(x, y) = f(x, y, u(x, y), p(x, y), q(x, y)), \quad (5.46)$$

para $(x, y) \in \Omega$.

Como estamos supondo que $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, derivando parcialmente a EDP (5.44), em relação a y , subtraindo da derivada parcial da EDP (5.45), em relação a x , e utilizando o Teorema de Schwarz, obteremos:

$$p_y(x, y) - q_x(x, y) = u_{xy}(x, y) - u_{yx}(x, y) \stackrel{\text{Teor. Schwarz}}{=} 0,$$

ou, resumidamente, $p_y - q_x = 0,$ (5.47)

para $(x, y) \in \Omega$.

Multiplicando-se a EDP (5.47) por uma função $\lambda \in C(\Omega; \mathbb{R})$, a ser determinada, que não se anula em $\underline{\Omega}$, e somando com a EDP (5.46), obteremos:

$$a(x, y) p_x(x, y) + 2b(x, y) p_y(x, y) + c(x, y) q_y(x, y) + \lambda(x, y) p_y(x, y) - \lambda(x, y) q_x(x, y) = f(x, y, u(x, y), p(x, y), q(x, y)), \quad (5.48)$$

para cada $(x, y) \in \Omega$, que escreveremos, de modo abreviado, como:

$$a p_x + 2b p_y + c q_y + \lambda p_y - \lambda q_x = f, \quad \text{em } \Omega. \quad (5.49)$$

Por outro lado, dada uma função $w \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ e uma curva parametrizada, cujo traço está contido em $\underline{\Omega}$, que é a representação geométrica do gráfico de uma função $y \in C^1(I; \mathbb{R})$, onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} , segue, da regra da cadeia, que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[w(x, y(x))] &\stackrel{\text{Regra da Cadeia}}{=} \frac{\partial w}{\partial x}(x, y(x)) \cdot \frac{dx}{dx}(x) + \frac{\partial w}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x) \\ &= w_x(x, y(x)) + w_y(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x), \quad \text{para cada } x \in I, \end{aligned}$$

ou, de modo abreviado

$$\frac{d}{dx}[w(x, y(x))] = w_x + w_y y', \quad \text{em } I. \quad (5.50)$$

Se tentarmos escrevermos a EDP (5.49), ao longo de uma curva parametrizada (que estamos supondo ser a representação geométrica do gráfico da função $y = y(x)$) em termos de derivadas parciais de 1.a ordem em relação à variável x (poderíamos tentar algo do mesmo tipo em relação à variável y), das derivadas 1.a ordem da função $u = u(x, y)$ (isto é, de (5.44), em termos das funções $p = p(x, y)$ e $q = q(x, y)$), deveríamos ter algo do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} \alpha(x, y(x)) \frac{dP}{dx}(x) - \lambda(x, y(x)) \frac{dQ}{dx}(x) \\ = f(x, y(x), u(x, y(x)), p(x, y(x)), q(x, y(x))), \end{aligned} \quad (5.51)$$

para $x \in I$, onde

$$P(x) \doteq p(x, y(x)) \quad \text{e} \quad Q(x) \doteq q(x, y(x)), \quad \text{para cada } x \in I, \quad (5.52)$$

que, de modo abreviado, será escrita como

$$\alpha \frac{dP}{dx} - \lambda \frac{dQ}{dx} = f, \quad \text{em } I. \quad (5.53)$$

Notemos que o coeficiente da função $P = P(x)$ deverá ser, necessariamente, $\alpha(x, y(x))$.

De fato, pois a função $\frac{dP}{dx}(x)$ deverá envolver o termo $u_{xx}(x, y(x))$ e assim, comparando com a EDP (5.2), podemos concluir que o coeficiente deverá, de fato, ser $\alpha(x, y(x))$.

De (5.52) e da regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx}(x) &= p_x(x, y(x)) + p_y(x, y(x)) y'(x) \\ \text{e} \quad \frac{dQ}{dx}(x) &= q_x(x, y(x)) + q_y(x, y(x)) y'(x), \end{aligned} \quad (5.54)$$

para cada $x \in I$.

Com isto, substituindo (5.54) na EDO (5.51), obteremos a seguinte EDO:

$$\begin{aligned} \alpha(x, y(x)) [p_x(x, y(x)) + p_y(x, y(x)) y'(x)] - \lambda(x, y(x)) [q_x(x, y(x)) + q_y(x, y(x)) y'(x)] \\ = f(x, y(x), u(x, y(x)), p(x, y(x)), q(x, y(x))) \end{aligned}$$

para cada $x \in I$, que escreveremos, de modo abreviado, como:

$$\alpha (p_x + p_y y') - \lambda (q_x + q_y y') = f, \quad \text{em } I.$$

Comparando esta equação com a EDP (5.49), calculada em $(x, y(x))$, para cada $x \in I$, deveremos ter a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \widehat{a p_x} + a p_y y' = \widehat{a p_x} + 2 b p_y + \lambda p_y \\ -\lambda q_x - \lambda q_y y' = -\lambda q_x + c q_y \end{cases}, \\ \text{ou seja,} & \begin{cases} a \widehat{p_y} y' = 2 b \widehat{p_y} + \lambda \widehat{p_y} \\ -\lambda \widehat{q_y} y' = c \widehat{q_y} \end{cases} \\ \text{supondo que } p_y, q_y \neq 0, \text{ obteremos:} & \begin{cases} a y' = 2 b + \lambda \\ -\lambda y' = c \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Como } a, \lambda \neq 0, \text{ segue-se: } \begin{cases} y' = \frac{2b + \lambda}{a} \\ y' = -\frac{c}{\lambda} \end{cases}.$$

Conclusão: a função

$$y = y(x), \quad \text{para cada } x \in I,$$

deverá satisfazer a seguinte EDO:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x) &= \frac{2b(x, y(x)) + \lambda(x, y(x))}{a(x, y(x))}, \\ \frac{dy}{dx}(x) &= -\frac{c(x, y(x))}{\lambda(x, y(x))}, \quad \text{para } x \in I, \end{aligned}$$

ou, de modo abreviado,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b + \lambda}{a} \stackrel{\text{I}}{=} -\frac{c}{\lambda}, \quad \text{em } I. \quad (5.55)$$

Notemos que, da identidade I, segue que a função $\lambda = \lambda(x, y)$ deverá satisfazer a equação

$$\frac{2b(x, y(x)) + \lambda(x, y(x))}{a(x, y(x))} = -\frac{c(x, y(x))}{\lambda(x, y(x))}, \quad \text{para cada } x \in I,$$

ou, na forma abreviada, a equação do 2.a grau

$$\lambda^2 + 2b\lambda + ac = 0, \quad (5.56)$$

calculada ao longo da curva $(x, y(x))$, para cada $x \in I$.

Notemos que se a função $y = y(x)$ é uma solução da EDO (5.55), então ela deverá satisfazer a seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \mu(x, y(x)), \quad \text{para cada } x \in I, \quad (5.57)$$

onde

$$\mu \doteq \frac{2b + \lambda}{a}$$

ou equivalentemente, $\lambda = a\mu - 2b$, em I . (5.58)

Como, para cada $(x, y) \in \Omega$, substituindo (5.58) em (5.56), segue que:

$$\begin{aligned} 0 &= (a\mu - 2b)^2 + 2b(a\mu - 2b) + ac \\ &= (a^2\mu^2 - 2a\mu 2b + 4b^2) + 2ba\mu - 4b^2 + ac \\ &= a^2\mu^2 - 2ab\mu + ac \end{aligned}$$

ou seja, $a\mu^2 - 2b\mu + c = 0$, em Ω .

ou seja, a função $\mu = \mu(x, y)$, para cada $(x, y) \in \Omega$, deverá satisfazer a equação do 2.o grau

$$a(x, y)\mu^2(x, y) - 2b(x, y)\mu(x, y) + c(x, y) = 0, \quad (5.59)$$

ou, abreviadamente,

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (5.60)$$

Conclusão: a representação geométrica da função $y = y(x)$ será uma curva característica plana associada à EDP (5.2) se, e somente se, for solução da EDO:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \mu(x, y(x)), \quad \text{para } x \in I, \quad (5.61)$$

onde a função $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deverá satisfazer a seguinte equação (do 2.o grau):

$$a(x, y)\mu^2(x, y) - 2b(x, y)\mu(x, y) + c(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

ou, de modo resumido:

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (5.62)$$

Observação 5.63

1. Observemos que, para cada $(x, y) \in \Omega$, o discriminante da equação do 2.o grau (5.62) acima (como função de $\mu = \mu(x, y)$), é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= [2b(x, y)]^2 - 4a(x, y)c(x, y) \\ &= 4[b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)] \\ &= 4\delta(x, y), \end{aligned}$$

onde $\delta = \delta(x, y)$ é o discriminante da EDP (5.2) (veja (5.6)).

Portanto o discriminante $\delta = \delta(x, y)$, para cada $(x, y) \in \Omega$, associado à EDP (5.2), determinará a existência de duas, uma ou nenhuma solução real $\mu = \mu(x, y)$ da equação do 2.a grau (5.60).

2. Com isto podemos concluir que:

- (a) no caso da EDP (5.2) ser do tipo hiperbólico em $\underline{\Omega}$ (isto é, quando $\delta(x, y) > 0$, para cada $(x, y) \in \Omega$), existem duas soluções reais distintas, que denotaremos por

$$\mu_1 = \mu_1(x, y) \quad e \quad \mu_2 = \mu_2(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

que satisfazem a equação (5.60) e portanto duas famílias (que serão L.I.) de soluções da EDO (5.57), as quais denotaremos seus geradores por

$$y_1 = y_1(x) \quad e \quad y_2 = y_2(x), \quad \text{para cada } x \in I.$$

Conclusão: No caso da EDP (5.2) ser do tipo hiperbólico em $\underline{\Omega}$, segue que existem duas funções

$$y_1 = y_1(x) \quad e \quad y_2 = y_2(x), \quad \text{para cada } x \in I$$

que são L.I., que darão origem a duas famílias de curvas características planas associadas à EDP (5.2).

- (b) no caso da EDP (5.2) ser do tipo parabólico em $\underline{\Omega}$ (isto é, quando $\delta(x, y) = 0$, para cada $(x, y) \in \Omega$), existe uma única solução real, que denotaremos por

$$\mu = \mu(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

que satisfaz a equação (5.60) e portanto uma família de soluções da EDO (5.57), as quais denotaremos seu gerador por

$$y = y(x), \quad \text{para cada } x \in I.$$

Conclusão: No caso da EDP (5.2) ser parabólica em $\underline{\Omega}$, segue que existe somente uma função

$$y = y(x), \quad \text{para cada } x \in I,$$

não nula, que dará origem a uma curva característica plana associada à EDP (5.2) (e não existe uma outra que seja L.I. com a mesma).

- (c) no caso da EDP (5.2) ser do tipo elítico em $\underline{\Omega}$ (isto é, quando $\delta(x, y) < 0$, para cada $(x, y) \in \Omega$), não existe solução real da equação (5.60) e portanto não existe solução real da EDO 5.57.

Conclusão: No caso da EDP (5.2) ser elítica em $\underline{\Omega}$, segue que não existem curvas características planas associadas à EDP (5.2).

Com isto podemos introduzir à:

Definição 5.64 *As curvas planas que são gráficos das soluções $y = y(x)$, para $x \in I$, da EDO (5.57), onde a função $\mu = \mu(x, y)$, para $(x, y) \in \Omega$, é uma solução da equação (5.60), serão denominadas curvas características planas associadas à EDP (5.2).*

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 5.65 *Encontrar as curvas características planas associadas à EDP (equação da onda)*

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.66)$$

onde $c > 0$ é uma constante fixada.

Resolução:

Notemos que

$$a(t, x) \doteq 1, \quad b(t, x) \doteq 0, \quad c(t, x) \doteq -c^2, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2. \quad (5.67)$$

Observemos que a EDP (5.66) acima é hiperbólica em \mathbb{R}^2 (veja o Exemplo (5.18)).

Logo, do item 2a. da Observação (5.63), sabemos que devem existir duas famílias de curvas características planas associadas à equação da onda (unidimensional) que serão L.I. .

Para encontrá-las precisaremos, primeiramente, encontrar as funções $\mu_1 = \mu_1(x, y)$ e $\mu_2 = \mu_2(x, y)$ que satisfazem a equação (5.60), ou seja:

$$\begin{aligned} & a \mu^2 - 2 b \mu + c = 0 \\ \text{de (5.67), teremos: } & 1 \cdot \mu^2 - 2 \cdot 0 \cdot \mu + (-c^2) = 0, \\ & \text{ou seja, } \mu^2 - c^2 = 0, \\ & \text{isto é: } \mu_1(t, x) = c \quad \text{e} \quad \mu_2(t, x) = -c, \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (5.68)$$

serão as soluções da equação (5.60).

Com isto, de (5.57) e de (5.68), obtemos as seguintes EDO's:

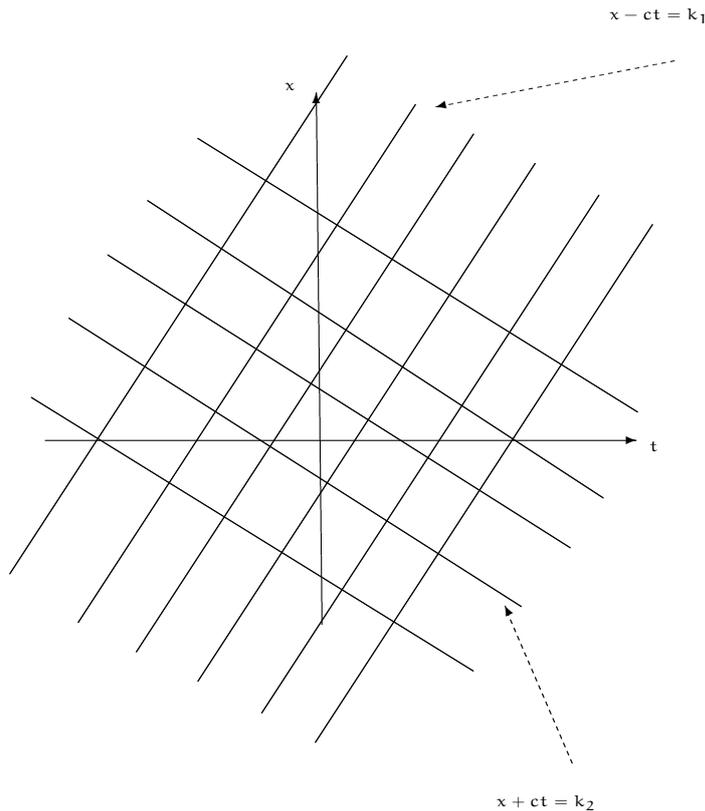
$$\begin{aligned} & \frac{dx_i}{dt}(t) = \mu_i(t, x_i(t)), \quad \text{para } i \in \{1, 2\} \\ \text{que, de (5.68), tornar-se-ão: } & \begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = c, \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = -c \end{cases}, \\ \text{isto é: } & \begin{cases} x_1 \doteq c t + k_1 \\ x_2 \doteq -c t + k_2 \end{cases}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

para cada $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Portanto, as curvas características planas associadas à equação da onda (unidimensional) (5.66) serão formadas pelas seguintes duas famílias de retas:

$$x - ct = k_1 \quad \text{e} \quad x + ct = k_2, \quad (5.70)$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são arbitrárias, cujas representações geométricas são das pela figura abaixo.



□

Observação 5.71 Notemos que, dados $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, temos que as curvas (que são gráficos de funções da variável \underline{t} , ou da variável \underline{x}) dadas por (5.70), são L.I., no espaço vetorial $(C(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +, \cdot)$, onde $\underline{+}$ e $\underline{\cdot}$ são as operações usuais de adição de funções e multiplicação de número real por função (estudado na disciplina de Álgebra Linear).

Exemplo 5.72 Encontrar as curvas características planas associadas à EDP (equação de Tricomi)

$$y u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R} \times (-\infty, 0). \quad (5.73)$$

onde $c > 0$ é uma constante fixada.

Resolução:

Notemos que

$$a(x, y) \doteq y, \quad b(x, y) \doteq 0, \quad c(x, y) \doteq 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.74)$$

Observemos que a EDP (5.73) acima é hiperbólica em \mathbb{R}^2 (veja o Exemplo (5.27)).

Logo, do item 2a. Observação (5.63), sabemos que devem existir duas famílias L.I. de curvas características planas associadas à equação de Tricomi (5.73).

Para encontrá-las precisaremos, primeiramente, encontrar as funções $\mu_1 = \mu_1(x, y)$ e $\mu_2 = \mu_2(x, y)$ que satisfazem a equação (5.60), ou seja:

$$\begin{aligned} & a \mu^2 - 2b \mu + c = 0 \\ \text{de (5.74), teremos:} & \quad y \mu^2 - 2 \cdot 0 \cdot \mu + 1 = 0 \\ & \quad \text{ou seja,} \quad y \mu^2 + 1 = 0, \\ \text{ou ainda,} & \quad \mu_+(x, y) \doteq \sqrt{-\frac{1}{y}} \quad \text{e} \quad \mu_-(x, y) \doteq -\sqrt{-\frac{1}{y}}, \end{aligned} \quad (5.75)$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$, serão as soluções da equação (5.60).

Com isto, de (5.57) e (5.75), obteremos as seguintes EDO's:

$$\begin{aligned} & \frac{dy_{\pm}}{dx}(x) = \mu_{\pm}(x, y(x)), \\ \text{de (5.75), teremos:} & \quad \frac{dy_{\pm}}{dx}(x) = \pm \sqrt{-\frac{1}{y(x)}}, \\ & \quad \text{ou seja,} \quad \sqrt{-y_{\pm}(x)} \frac{dy_{\pm}}{dx}(x) = \pm 1, \\ \text{ou ainda,} & \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{2}{3} (-y_{\pm})^{\frac{3}{2}}(x) \right] = \pm 1, \\ & \quad \text{isto é,} \quad \frac{2}{3} (-y_{\pm})^{\frac{3}{2}}(x) = \pm x + C', \\ & \quad \text{ou seja,} \quad (-y_{\pm})^{\frac{3}{2}}(x) = \pm \frac{3}{2} x + C, \\ \text{ou ainda,} & \quad y_{\pm}(x) = - \left[\pm \frac{3}{2} x + C \right]^{\frac{2}{3}}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

para cada $C \in \mathbb{R}$.

Portanto, as curvas características planas associadas à equação de Tricomi (5.73) são formadas pelas duas famílias de curvas dadas pelas representações geométricas das seguintes funções

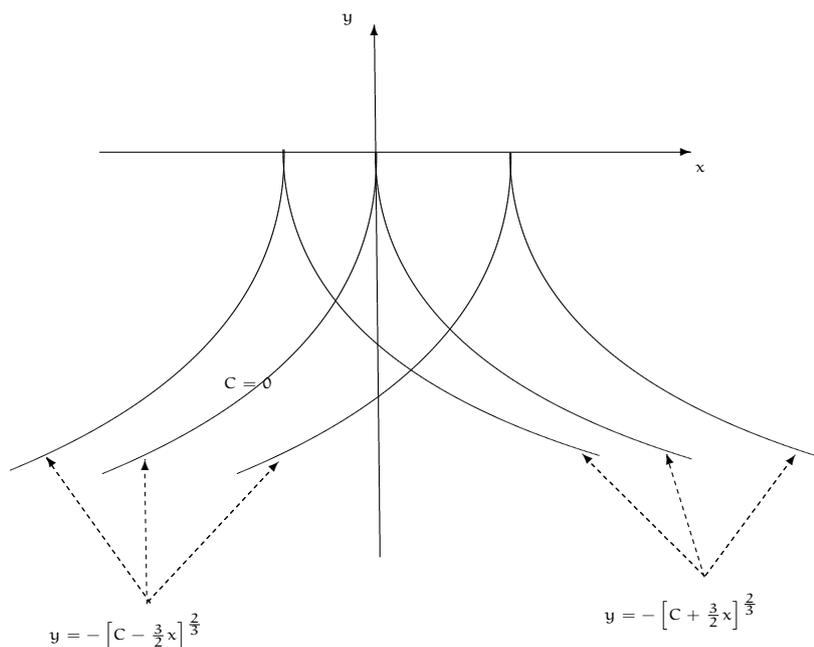
$$y_{\pm}(x) = - \left[C \pm \frac{3}{2} x \right]^{\frac{2}{3}}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (5.77)$$

ou seja,

$$(y_{\pm})^3 + \left[C \pm \frac{3}{2}x \right]^2 = 0, \quad (5.78)$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

A figura abaixo nos fornece uma representação geométrica dos gráficos de algumas das curvas características planas associadas à equação de Tricomi (5.73).



□

Observação 5.79 Notemos que, dados $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, temos que as curvas (que são gráficos de funções da variável x , dadas por (5.77), são L.I., no espaço vetorial $(C(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +, \cdot)$, onde $+$ e \cdot são as operações usuais de adição de funções e multiplicação de número real por função (estudado na disciplina de Álgebra Linear).

Exemplo 5.80 Encontrar as curvas características planas associadas à EDP (equação do calor)

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.81)$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante fixada.

Resolução:

Notemos que

$$a(t, x) \doteq \alpha^2, \quad b(t, x) \doteq 0, \quad c(t, x) \doteq 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.82)$$

Observemos que a EDP (5.81) acima é parabólica em \mathbb{R}^2 (veja o Exemplo (5.15)).

Logo, do item 2b. Observação (5.63), sabemos que existe uma família de curvas características planas associada à equação do calor (unidimensional) (5.81).

Para encontrá-la precisaremos, primeiramente, encontrar uma função $\mu = \mu(x, y)$ que satisfaz a equação (5.60), ou seja:

$$\begin{aligned} & a \mu^2 - 2 b \mu + c = 0, \\ \text{de (5.82), teremos:} & \quad \alpha^2 \mu^2 - 2 \cdot 0 \cdot \mu + 0 = 0 \\ & \text{ou seja,} & \quad \alpha^2 \mu^2 = 0 \\ \text{como } \alpha \neq 0, \text{ segue que:} & \quad \mu(t, x) = \mu_1(t, x) = \mu_2(t, x) \doteq 0, \end{aligned} \quad (5.83)$$

para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, será a única solução da equação (5.60).

Com isto, de (5.57) e (5.83), obtemos as seguintes EDO's:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \underbrace{\mu(t, x(t))}_{(5.83)_0}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \\ \text{ou seja,} & \quad \frac{dx}{dt}(t) = 0, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \\ \text{isto é,} & \quad x(t) = C, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

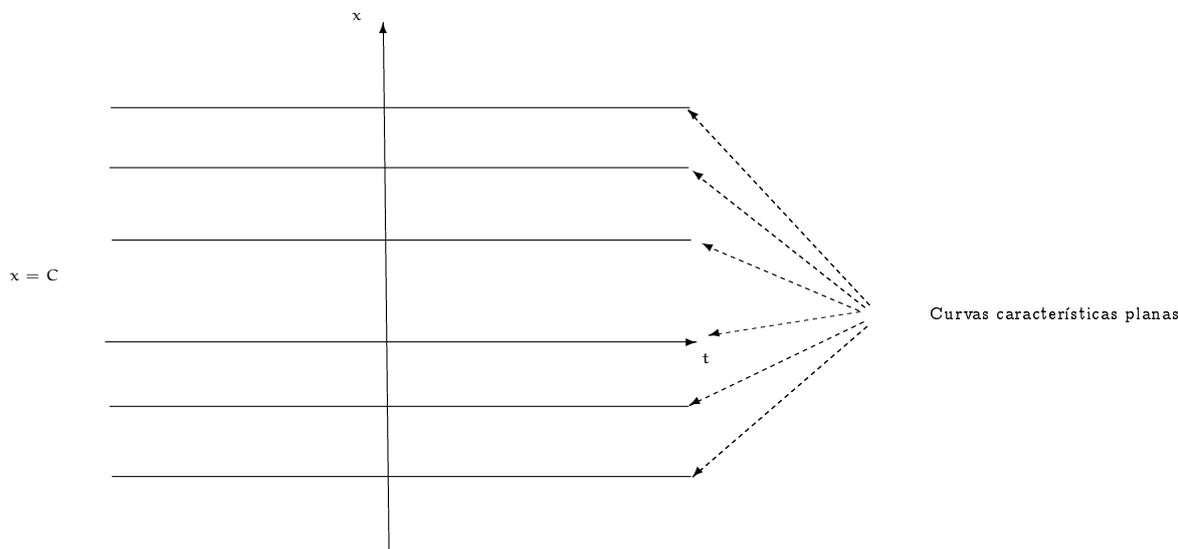
para cada $C \in \mathbb{R}$.

Portanto, as curvas características planas associada à equação do calor (unidimensional) (5.81) serão formadas pela família de retas (horizontais no plano tOx), dadas por:

$$x = C, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \quad (5.85)$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

A figura abaixo nos forence uma representação geometrica dos gráficos de algumas das curvas características planas associadas à equação do calor (5.81).



□

Exercício 5.86 *Encontrar as curvas características planas associadas a EDP (equação de Laplace)*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.87)$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante fixada.

Resolução:

Notemos que

$$a(x, y) \doteq 1, \quad b(x, y) \doteq 0, \quad c(x, y) \doteq 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.88)$$

Observemos que a EDP acima é elítica em \mathbb{R}^2 (veja o Exemplo (5.21)).

Logo, do item 2c. Observação (5.63), sabemos que não existirá nenhuma família de curvas características planas pois, neste caso, a equação (5.60), tornar-se-á:

$$\begin{aligned} a \mu^2 - 2 b \mu + c &= 0 \\ \text{de (5.88), teremos: } \mu^2 - 2 \cdot 0 \cdot \mu + 1 &= 0 \\ \text{ou seja, } \mu^2(x, y) &= -1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (5.89)$$

que não possui solução real.

□

5.2 Formas canônicas e curvas características planas associadas à EDP (5.2)

Observação 5.90 *Como no caso das cônicas estudadas no curso de Geometria Analítica, se EDP (5.2), definida em um conjunto Ω que é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , é de um*

dos tipos introduzidos na seção anterior poderemos, como veremos a seguir, encontrar uma mudança de variáveis de classe $C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, que coloque a EDP (5.2), após a mudança de variáveis, em uma forma mais simples, denominada forma canônica (ou normal) da EDP (5.2).

Podemos agora introduzir a:

Definição 5.91 *Seja $(x_0, y_0) \in \Omega$ e $V = V(x_0, y_0)$ um subconjunto aberto contido em $\underline{\Omega}$. Com isto temos:*

1. *a forma canônica da EDP (5.2) que é do tipo elítico em \underline{V} , será da forma:*

$$v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta, v_{\xi}(\xi, \eta), v_{\eta}(\xi, \eta)). \quad (5.92)$$

2. *A forma canônica da EDP (5.2) que é do tipo parabólico em \underline{V} , será da forma:*

$$v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta, v_{\xi}(\xi, \eta), v_{\eta}(\xi, \eta)). \quad (5.93)$$

3. *A forma canônica da EDP (5.2) que é do tipo hiperbólico em \underline{V} , será da forma:*

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta, v_{\xi}(\xi, \eta), v_{\eta}(\xi, \eta)), \quad (5.94)$$

ou

$$v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta, v_{\xi}(\xi, \eta), v_{\eta}(\xi, \eta)). \quad (5.95)$$

Observação 5.96

1. *No caso da EDP (5.2) ser do tipo hiperbólico em \underline{V} tem, como vemos acima, duas formas canônicas pois, embora a forma (5.94) seja mais fácil de resolvermos, a forma (5.95) permite generalizações para dimensões mais altas, ou seja, em \mathbb{R}^n , para $n \geq 3$.*
2. *Dada a EDP (5.2), para encontrar uma mudança de variáveis que transforme essa EDP em sua forma canônica precisaremos, entre outros, da "suavidade" dos coeficientes da parte principal da EDP (5.2), mais precisamente, precisaremos que*

$$a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R}).$$

3. *Notemos também que tal mudança de variáveis será local, pois a EDP (5.2) poderá mudar de tipo na região $\underline{\Omega}$ (como, por exemplo, a equação de Tricomi).*

4. Observemos que se EDP (5.2) é do tipo hiperbólica em (x_0, y_0) (isto é, se $\delta(x_0, y_0) > 0$) ou do tipo elítica em (x_0, y_0) (isto é, $\delta(x_0, y_0) < 0$), como o discriminante

$$\delta = \delta(x, y)$$

é uma função contínua em $\underline{\Omega}$, segue que existe uma vizinhança do ponto (x_0, y_0) , que indicaremos por $\underline{U} = \underline{U}(x_0, y_0)$, de tal modo que, $\delta(x, y)$ terá o mesmo sinal de $\delta(x_0, y_0)$, ou seja, a EDP (5.2) será do mesmo tipo na vizinhança \underline{U} , do ponto (x_0, y_0) .

Conclusão: se a EDP (5.2) é do tipo hiperbólico (elítico, respectivamente) no ponto (x_0, y_0) , então ela será do tipo hiperbólico (elítico, respectivamente) em uma vizinhança $\underline{U} = \underline{U}(x_0, y_0)$.

5. A situação acima pode **não** ocorrer no caso da EDP (5.2) ser do tipo parabólico em (x_0, y_0) , como mostra a equação de Tricomi que é do tipo parabólico sobre o eixo \underline{Ox} , mas é hiperbólica no semi-plano $\{(x, y); y < 0\}$ e do tipo elítico no semi-plano $\{(x, y); y > 0\}$ (veja o Exemplo (5.27)).
6. Por esta razão, nossa hipótese será que a EDP (5.2) seja de um mesmo tipo em um subconjunto aberto, contido em $\underline{\Omega}$.

Nas subseções a seguir encontraremos, para cada um dos tipos, as mudanças de variáveis que transformarão a EDP (5.2), em sua respectiva forma canônica.

5.2.1 Mudança de variáveis para o caso hiperbólico e sua forma canônica

Começaremos com o caso em que a EDP (5.2) seja do tipo hiperbólico em um subconjunto aberto contido em $\underline{\Omega}$.

Suponhamos que

$$a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$$

e que a função $a = a(x, y)$ não se anule em $\underline{\Omega}$, isto é,

$$a(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.97)$$

Os outros casos, podem ser tratados de modo semelhante, e serão deixados como exercício para o leitor.

Neste, do item 2 (a) da Observação (5.63), segue que a equação (5.60), isto é,

$$a(x, y) \mu^2(x, y) - 2b(x, y) \mu(x, y) + c(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

admitirá duas soluções reais distintas, a saber

$$\begin{aligned}\mu_1(x, y) &\doteq \frac{2b(x, y) + \sqrt{4b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y)}}{2a(x, y)} \\ &= \frac{b(x, y) + \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)}}{a(x, y)}\end{aligned}\quad (5.98)$$

$$\mu_2(x, y) \doteq \frac{b(x, y) - \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)}}{a(x, y)}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.99)$$

Com isto temos duas famílias de curvas características planas associadas às EDP (5.2), que serão geradas pelas funções

$$y_1 = y_1(x) \quad \text{e} \quad y_2 = y_2(x),$$

que satisfazem as EDO's:

$$\frac{dy_1}{dx}(x) = \mu_1(x, y_1(x)) \quad (5.100)$$

$$\frac{dy_2}{dx}(x) = \mu_2(x, y_2(x)), \quad \text{para cada } x \in I \subseteq \mathbb{R}. \quad (5.101)$$

Como no caso de EDP's de lineares de 1.a ordem, a EDP (5.2) torna-se-á "mais simples", ao longo das curvas características planas associadas às EDP (5.2).

Assim, é natural procurarmos uma mudança de variáveis (pertencente à $C^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$) do tipo

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega' \subseteq \Omega, \quad (5.102)$$

de modo que a função

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega'$$

seja constante ao longo de uma das famílias de curvas características planas associadas à EDP (5.2), por exemplo, de

$$(x, y_1(x)), \quad \text{para cada } x \in I,$$

e a função

$$\eta = \eta(x, y) \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega',$$

seja constante ao longo da outra família de curvas características planas associadas à EDP (5.2), ou seja, de

$$(x, y_2(x)), \quad \text{para cada } x \in I.$$

Portanto, procuraremos funções, "bem comportadas",

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega'$$

que satisfazem às seguintes condições:

$$\xi(x, y_1(x)) = K_1, \quad (5.103)$$

$$\eta(x, y_2(x)) = K_2, \quad \text{para cada } x \in I. \quad (5.104)$$

Notemos que, derivando as equações (5.103) e (5.104) acima, em relação à x , obteremos, pela regra da cadeia, que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} [\xi(x, y_1(x))] \\ &= \xi_x(x, y_1(x)) + \xi_y(x, y_1(x)) \cdot y_1'(x) \end{aligned}$$

e, de (5.100), segue que: $\xi_x(x, y_1(x)) + \xi_y(x, y_1(x)) \cdot \mu_1(x, y_1(x)) = 0,$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} [\eta(x, y_2(x))] \\ &= \eta_x(x, y_2(x)) + \eta_y(x, y_2(x)) \cdot y_2'(x), \end{aligned}$$

e, de (5.101), segue que: $\eta_x(x, y_2(x)) + \eta_y(x, y_2(x)) \cdot \mu_2(x, y_2(x)) = 0,$

para $x \in I$.

Logo, para nossos objetivos, é natural pedirmos que as funções

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega',$$

sejam soluções do seguinte sistema de EDP's:

$$\xi_x(x, y) + \mu_1(x, y) \xi_y(x, y) = 0,$$

$$\eta_x(x, y) + \mu_2(x, y) \eta_y(x, y) = 0,$$

para $(x, y) \in \Omega'$, que escreveremos na seguinte forma abreviada:

$$\xi_x + \mu_1 \xi_y = 0, \quad (5.105)$$

$$\eta_x + \mu_2 \eta_y = 0, \quad \text{em } \Omega'. \quad (5.106)$$

Considereremos soluções das EDP's (5.105) e (5.106) acima, de modo que

$$\xi_y(x, y) \neq 0 \quad \text{e} \quad \eta_y(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega'. \quad (5.107)$$

Isto se deve ao fato que, se

$$\xi_y(x, y) = 0, \quad \text{ou} \quad \eta_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega'$$

teríamos, pelas EDP's (5.105) e (5.106), que:

$$\xi_x(x, y) = 0, \quad \text{ou} \quad \eta_x(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega',$$

respectivamente.

Deste modo teríamos que o jacobinano, associado às funções

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x, y), \quad \text{para} \quad (x, y) \in \Omega',$$

seria nulo em $\underline{\Omega}'$, pois

$$\begin{aligned} j(x, y) &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}(x, y) \\ &= \begin{vmatrix} \xi_x(x, y) & \xi_y(x, y) \\ \eta_x(x, y) & \eta_y(x, y) \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

o que não nos forneceria uma mudança de variáveis de classe $C^1(\Omega'; \mathbb{R})$.

Como

$$a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad a(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \Omega,$$

então, das identidades dadas por (5.98) e (5.99), segue que $\mu_1, \mu_2 \in C^2(\Omega'; \mathbb{R})$.

Portanto, utilizando as técnicas desenvolvidas no capítulo anterior (para EDP's lineares, de 1.a ordem, homogêneas, nas variáveis \underline{x} e \underline{y}) segue que podemos encontrar soluções (locais)

$$\xi, \eta \in C^2(\Omega'; \mathbb{R})$$

das EDP's (5.105) e (5.106), respectivamente.

Notemos também que, de (5.98) e (5.99), segue que

$$\mu_1(x, y) \neq \mu_2(x, y), \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5.108)$$

Logo a transformação $T: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por:

$$(\xi, \eta) = T(x, y), \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \Omega' \quad (5.109)$$

será, de fato, uma mudança de variáveis local, de classe C^2 .

De fato, para cada $(x, y) \in \Omega'$, teremos:

$$\begin{aligned} j(x, y) &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}(x, y) \\ &= \begin{vmatrix} \xi_x(x, y) & \xi_y(x, y) \\ \eta_x(x, y) & \eta_y(x, y) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(5.105), (5.106)}{=} \begin{vmatrix} -\mu_1(x, y) \xi_y(x, y) & \xi_y(x, y) \\ -\mu_2(x, y) \eta_y(x, y) & \eta_y(x, y) \end{vmatrix} \\ &= -\mu_1(x, y) \xi_y(x, y) \eta_y(x, y) + \mu_2(x, y) \eta_y(x, y) \xi_y(x, y) \\ &= -\underbrace{(\mu_1(x, y) - \mu_2(x, y))}_{\stackrel{(5.108)}{\neq 0}} \underbrace{\xi_y(x, y) \eta_y(x, y)}_{\stackrel{(5.107)}{\neq 0}} \neq 0. \end{aligned}$$

Consideremos a função $v : T(\Omega') \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$v(\xi, \eta) \doteq u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in T(\Omega') \quad (5.110)$$

onde

$$x = x(\xi, \eta) \quad \text{e} \quad y = y(\xi, \eta) \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in T(\Omega'),$$

ou seja,

$$(x, y) = T^{-1}(\xi, \eta) \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in T(\Omega').$$

Utilizando o item 1. da Observação (5.30), temos que, para cada $(\xi, \eta) \in T(\Omega')$, a função $v = v(\xi, \eta)$ será solução da EDP:

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2 B(\xi, \eta) v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + C(\xi, \eta) v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \\ = F(\xi, \eta, v(\xi, \eta), v_{\xi}(\xi, \eta), v_{\eta}(\xi, \eta)), \end{aligned} \quad (5.111)$$

onde (veja (5.41)):

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &\stackrel{(5.41)}{=} a(\xi, \eta) \cdot \left[\underbrace{\overbrace{(-\mu_1(x, y) \xi_y(x, y))}^{(5.105)}}_{\xi_x(\xi, \eta)} \right]^2 + 2 b(\xi, \eta) \cdot \underbrace{\overbrace{(-\mu_1(x, y) \xi_y(x, y))}^{(5.105)}}_{\xi_x(\xi, \eta)} \cdot \xi_y(\xi, \eta) \\ &\quad + c(\xi, \eta) \cdot [\xi_y(\xi, \eta)]^2, \\ &= a \cdot [-\mu_1 \xi_y]^2 + 2 b [-\mu_1 \xi_y] \xi_y + c \xi_y^2 \\ &= a \mu_1^2 \xi_y^2 - 2 b \mu_1 \xi_y^2 + c \xi_y^2 \\ &= \underbrace{(a \mu_1^2 - 2 b \mu_1 + c)}_{(5.60)_0} \xi_y^2 = 0, \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$\begin{aligned} B(\xi, \eta) &\stackrel{(5.41)}{=} a(\xi, \eta) \cdot \underbrace{\overbrace{(-\mu_1(x, y) \xi_y(x, y))}^{(5.105)}}_{\xi_x(\xi, \eta)} \cdot \underbrace{\overbrace{(-\mu_2(x, y) \eta_y(x, y))}^{(5.106)}}_{\eta_x(\xi, \eta)} \\ &\quad + b(\xi, \eta) \cdot \left[\underbrace{\overbrace{(-\mu_1(x, y) \xi_y(x, y))}^{(5.105)}}_{\xi_x(\xi, \eta)} \cdot \eta_y(\xi, \eta) + \xi_y(\xi, \eta) \cdot \underbrace{\overbrace{(-\mu_2(x, y) \eta_y(x, y))}^{(5.106)}}_{\eta_x(\xi, \eta)} \right] \\ &\quad + c(\xi, \eta) \cdot \xi_y(\xi, \eta) \cdot \eta_y(\xi, \eta) \\ &= a (-\mu_1 \xi_y) (-\mu_2 \eta_y) + b (-\mu_1 \xi_y) \eta_y + b \xi_y (-\mu_2 \eta_y) + c \xi_y \eta_y \\ &= [a \mu_1 \mu_2 - b (\mu_1 + \mu_2) + c] \xi_y \eta_y, \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned}
C(\xi, \eta) &\stackrel{(5.41)}{=} a(\xi, \eta) \cdot \left[\stackrel{(5.106)}{=} \underbrace{-\mu_2(x, y) \eta_y(x, y)}_{\eta_x(\xi, \eta)} \right]^2 + 2b(\xi, \eta) \cdot \stackrel{(5.106)}{=} \underbrace{-\mu_2(x, y) \eta_y(x, y)}_{\eta_x(\xi, \eta)} \cdot \eta_y(\xi, \eta) \\
&\quad + c(\xi, \eta) \cdot [\eta_y(\xi, \eta)]^2 \\
&= \mu_2 \eta_y^2 - 2b \mu_2 \eta_y^2 + c \eta_y^2 \\
&= \left(\underbrace{a \mu_2^2 - 2b \mu_2 + c}_{(5.60)} \right) \eta_y^2 = 0, \tag{5.114}
\end{aligned}$$

e a função \underline{F} será o que restou, ou seja, só depende de

$$a, b, c, \xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta,$$

notando que que

$$\begin{aligned}
a(\xi, \eta) &\doteq a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\
b(\xi, \eta) &\doteq b(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\
c(\xi, \eta) &\doteq c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)),
\end{aligned}$$

para $(\xi, \eta) \in T(\Omega')$.

Como a EDP (5.2) é hiperbólica em $\underline{\Omega}$, segue que

$$0 < \Delta(\xi, \eta) = B^2(\xi, \eta) - \underbrace{A(\xi, \eta), C(\xi, \eta)}_{=0}, \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in T(\Omega'),$$

que implicará em $B(\xi, \eta) \neq 0$, para cada $(\xi, \eta) \in T(\Omega')$,

e como

$$\xi_y(\xi, \eta), \eta_y(\xi, \eta) \neq 0, \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in T(\Omega'),$$

deveremos ter (veja (5.113))

$$a \mu_1 \mu_2 - b(\mu_1 + \mu_2) + c \neq 0, \quad \text{em } T(\Omega').$$

Portanto a EDP (5.111) tornar-se-á:

$$B(\xi, \eta) v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = G(\xi, \eta, v(\xi, \eta), v_\xi(\xi, \eta), v_\eta(\xi, \eta)), \quad \text{para } (\xi, \eta) \in T(\Omega'),$$

e como

$$B(\xi, \eta) \neq 0, \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in T(\Omega'),$$

segue que

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta, v(\xi, \eta), v_\xi(\xi, \eta), v_\eta(\xi, \eta)), \quad \text{para } (\xi, \eta) \in T(\Omega'), \tag{5.115}$$

para alguma função g muito bem definida, ou, de modo abreviado:

$$v_{\xi\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta), \quad \text{em } T(\Omega'), \quad (5.116)$$

ou seja, se a EDP (5.2) é do tipo hiperbólico em $\underline{\Omega}$, com a mudança de variáveis (5.10), transformamos a mesma em uma EDP da forma (5.94) (isto é, na sua forma canônica) em $\underline{\Omega}'$, um subconjunto aberto contido em $\underline{\Omega}$.

Apliquemos as idéias acima ao seguinte:

Exemplo 5.117 *Colocar a equação da onda*

$$u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \doteq \mathbb{R}^2, \quad (5.118)$$

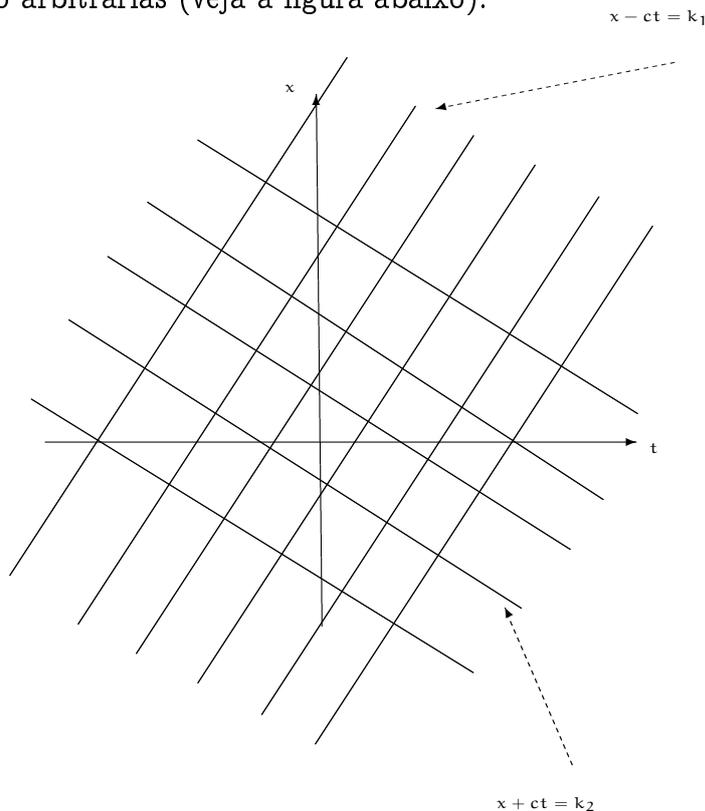
na sua forma canônica.

Resolução:

A equação da onda é de tipo hiperbólico em \mathbb{R}^2 e, como vimos no Exemplo (5.65), as curvas características planas associadas a equação da onda são dadas por

$$x + ct = k_1 \quad \text{e} \quad x - ct = k_2, \quad (5.119)$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são arbitrárias (veja a figura abaixo).



Baseado nas observações acima (isto é, (5.103) e (5.104)), consideraremos a seguinte transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por:

$$T(t, x) \doteq (\xi(t, x), \eta(t, x)), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

onde

$$\begin{cases} \xi(t, x) \doteq x + ct \\ \eta(t, x) \doteq x - ct \end{cases}, \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.120)$$

Como $c > 0$, teremos que o jacobiano associado a transformação $\underline{\Gamma}$ (na verdade é um operador linear em \mathbb{R}^2)

$$(t, x) \mapsto (\xi, \eta)$$

será dado por:

$$\begin{aligned} j(t, x) &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, x)}(t, x) \\ &= \begin{vmatrix} \xi_t(t, x) & \xi_x(t, x) \\ \eta_t(t, x) & \eta_x(t, x) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(5.120)}{=} \begin{vmatrix} c & 1 \\ -c & 1 \end{vmatrix} \\ &= c + c \\ &= 2c \neq 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Com isto temos que a transformação $\underline{\Gamma}$ (ou seja, o operador linear $\underline{\Gamma}$ em \mathbb{R}^2) será uma mudança de variáveis em \mathbb{R}^2 de classe C^2 .

Observação 5.121 *Notemos que a transformação inversa $\Gamma^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, será dada por*

$$\begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{2}, \\ t = \frac{\xi - \eta}{2c} \end{cases}, \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, definindo-se $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(\xi, \eta) \doteq u(t(\xi, \eta), x(\xi, \eta)), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.122)$$

ou ainda,

$$u(x, y) \doteq v(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.123)$$

para cada $(t, x), (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, obteremos, de (5.123) e da regra da cadeia (poderíamos ter utilizado as expressões (5.41)), que

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &\stackrel{(5.123)}{=} v_\xi(\xi, \eta) \underbrace{\xi_t(t, x)}_{(5.120)_c} + v_\eta(\xi, \eta) \underbrace{\eta_t(t, x)}_{(5.120)_{-c}} \\ &= cv_\xi(\xi, \eta) - cv_\eta(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.124)$$

$$\begin{aligned} u_x(t, x) &\stackrel{(5.123)}{=} v_\xi(\xi, \eta) \underbrace{\xi_x(t, x)}_{(5.120)_1} + v_\eta(\xi, \eta) \underbrace{\eta_x(t, x)}_{(5.120)_1} \\ &= v_\xi(\xi, \eta) + v_\eta(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.125)$$

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t, x) &\stackrel{(5.124)}{=} c \left[v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \underbrace{\xi_t(t, x)}_{(5.120)_c} + v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \underbrace{\eta_t(t, x)}_{(5.120)_{-c}} \right] \\
&\quad - c \left[v_{\eta\xi}(\xi, \eta) \underbrace{\xi_t(t, x)}_{(5.120)_c} + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \underbrace{\eta_t(t, x)}_{(5.120)_{-c}} \right] \\
&= c^2 v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - 2c^2 v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + c^2 v_{\eta\eta}(\xi, \eta)
\end{aligned} \tag{5.126}$$

$$\begin{aligned}
u_{xx}(t, x) &\stackrel{(5.125)}{=} \left[v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \underbrace{\xi_x(t, x)}_{(5.120)_1} + v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \underbrace{\eta_x(t, x)}_{(5.120)_1} \right] \\
&\quad + \left[v_{\eta\xi}(\xi, \eta) \underbrace{\xi_x(t, x)}_{(5.120)_1} + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \underbrace{\eta_x(t, x)}_{(5.120)_1} \right] \\
&= v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta).
\end{aligned} \tag{5.127}$$

Para cada $(t, x), (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, substituindo (5.126) e (5.127) na EDP (5.118), obteremos:

$$\begin{aligned}
0 &= u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) \\
&\stackrel{(5.126), (5.127)}{=} [c^2 v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - 2c^2 v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + c^2 v_{\eta\eta}(\xi, \eta)] \\
&\quad - c^2 [v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta)] \\
&= -4c^2 v_{\xi\eta}(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Como $c \neq 0$, segue que a forma canônica da equação da onda (5.118) em \mathbb{R}^2 , será dada por:

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0, \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \tag{5.128}$$

ou, de modo abreviado,

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \tag{5.129}$$

□

Observação 5.130 *Observemos que podemos encontrar a solução geral da EDP (5.128).*

Para isto notemos que, para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fixado, integrando a equação (5.129), em relação a η , obteremos

$$v_{\xi}(\xi, \eta) = \phi(\xi), \quad \text{para cada } \xi \in \mathbb{R}, \tag{5.131}$$

onde $\phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ arbitrária.

Por sua vez, para cada $\eta \in \mathbb{R}$ fixado, integrando a equação (5.131) acima, em relação à ξ , obteremos:

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.132)$$

onde $\Phi, \Psi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ são arbitrárias (notemos que no caso acima $\Phi(\xi) = \int \phi(\xi) d\xi$).

Logo, voltando para as variáveis originais, por meio da transformação (5.120) (isto é, (x, y)), obteremos a solução geral para a equação da onda (5.118), isto é,

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(5.123)}{=} v(\xi(t, x), \eta(t, x)) \\ &\stackrel{(5.132)}{=} \Phi(\xi(t, x)) + \Psi(\eta(t, x)) \\ &\stackrel{(5.120)}{=} \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (5.133)$$

onde $\Phi, \Psi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ são arbitrárias.

Esta solução para a equação da onda é conhecida como a solução de d'Alembert (16/11/1717 à 29/10/1783).

A seguir temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 5.134 Colocar a equação de Tricomi

$$y u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq \mathbb{R} \times (-\infty, 0), \quad (5.135)$$

na sua forma canônica.

Resolução:

Lembremos que a equação de Tricomi é de tipo hiperbólico em $\underline{\Omega}$ e, como vimos no Exemplo (5.72), temos as seguintes curvas características planas associadas à EDP (5.135):

$$-(y_{\pm})^{\frac{3}{2}} \pm \frac{3}{2}x = C, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (5.136)$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é arbitrária.

Baseado nas considerações acima, (isto é, (5.103) e (5.104)), consideraremos a seguinte transformação $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por:

$$T(x, y) \doteq (\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

onde

$$\begin{cases} \xi(x, y) \doteq (-y)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x \\ \eta(x, y) \doteq (-y)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x \end{cases}, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.137)$$

Somando-se as duas equações acima, obteremos:

$$\begin{aligned} \xi + \eta &= 2(-y)^{\frac{3}{2}}, \\ \text{ou seja, } (-y)^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{ou ainda, } y &= -\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (5.138)$$

para cada $(x, y) \in \Omega$.

Notemos que, se $(x, y) \in \Omega$, segue que $y < 0$ e assim teremos que o jacobiano associado a transformação $T : \Omega \rightarrow \Omega' = T(\Omega)$, dada por (5.140), será:

$$\begin{aligned} j(x, y) &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}(x, y) \\ &= \begin{vmatrix} \xi_x(x, y) & \xi_y(x, y) \\ \eta_x(x, y) & \eta_y(x, y) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(5.140)}{=} \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{9}{4}(-y)^{\frac{1}{2}} \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Com isto temos que a transformação será uma mudança de variáveis local, de classe C^2 .

Observação 5.139 *Notemos que a transformação inversa $T^{-1} : T(\Omega) \rightarrow \Omega$, será dada por:*

$$\begin{cases} x = \frac{\xi - \eta}{3} \\ y = -\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}, \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in T(\Omega). \quad (5.140)$$

Logo, definindo-se $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(\xi, \eta) \doteq u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \Omega', \quad (5.141)$$

ou ainda,

$$u(x, y) \doteq v(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (5.142)$$

para cada $(t, x) \in \Omega$ e o correspondente $(\xi, \eta) \in \Omega'$, teremos:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_\xi(\xi, \eta) \underbrace{\xi_x(x, y)}_{(5.140)_{\frac{3}{2}}} + v_\eta(\xi, \eta) \underbrace{\eta_x(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3}{2} v_\xi(\xi, \eta) - \frac{3}{2} v_\eta(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.143)$$

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= v_\xi(\xi, \eta) \underbrace{\xi_y(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}}} + v_\eta(\xi, \eta) \underbrace{\eta_y(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}}} \\ &= -\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}} v_\xi(\xi, \eta) - \frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}} v_\eta(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.144)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) &\stackrel{(5.143)}{=} \frac{3}{2} \left(v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \underbrace{\xi_x(x, y)}_{(5.140)_{\frac{3}{2}}} + v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \underbrace{\eta_x(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}}} \right) \\ &\quad - \frac{3}{2} \left(v_{\eta\xi} \underbrace{\xi_x(x, y)}_{(5.140)_{\frac{3}{2}}} + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \underbrace{\eta_x(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}}} \right), \\ &= \frac{9}{4} v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - \frac{9}{2} v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + \frac{9}{4} v_{\eta\eta}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.145)$$

$$\begin{aligned} u_{yy}(x, y) &\stackrel{(5.144)}{=} -\frac{3}{2} \left[-\frac{3}{2} \frac{1}{2} (-y)^{-\frac{1}{2}} (-1) v_\xi(\xi, \eta) \right. \\ &\quad \left. -\frac{3}{2} (-y)^{\frac{1}{2}} \left(v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \underbrace{\xi_y(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}}} + v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \underbrace{\eta_y(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}}} \right) \right. \\ &\quad \left. -\frac{3}{2} \frac{1}{2} (-y)^{-\frac{1}{2}} (-1) v_\eta(\xi, \eta) \right. \\ &\quad \left. -\frac{3}{2} (-y)^{\frac{1}{2}} \left(v_{\eta\xi}(\xi, \eta) \underbrace{\xi_y(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}}} + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \underbrace{\eta_y(x, y)}_{(5.140)_{-\frac{3}{2}(-y)^{\frac{1}{2}}}} \right) \right] \\ &= \frac{3}{4} (-y)^{-\frac{1}{2}} (v_\xi(\xi, \eta) + v_\eta(\xi, \eta)) - \frac{9}{4} y [v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + 2 v_{\eta\xi}(\xi, \eta) \\ &\quad + v_{\eta\eta}(\xi, \eta)]. \end{aligned} \quad (5.146)$$

Substituindo (5.145) e (5.146) acima na EDP (5.135), obteremos:

$$\begin{aligned}
0 &= y u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) \\
&\stackrel{(5.138)}{=} -\frac{(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{9}{4} v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - \frac{9}{2} v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + \frac{9}{4} v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \right] \\
&\quad + \left\{ \frac{3}{4} \left[-\left(-\frac{(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} [v_{\xi}(\xi, \eta) + v_{\eta}(\xi, \eta)] \right. \\
&\quad \left. - \frac{9}{4} \left[-\frac{(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} \right] [v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta)] \right\} \\
&= \frac{9}{2^{\frac{1}{3}}} (\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + \frac{3}{2^{\frac{7}{3}}} (\xi + \eta)^{\frac{1}{3}} [v_{\xi}(\xi, \eta) + v_{\eta}(\xi, \eta)],
\end{aligned}$$

para $(\xi, \eta) \in \Omega'$.

Como $\xi + \eta \neq 0$ e Ω' (veja (5.138)), segue que a forma canônica da equação de Tricomi em Ω , será dada por:

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{3 \cdot 2^{\frac{5}{3}}} (\xi + \eta)^{-\frac{1}{3}} [v_{\xi}(\xi, \eta) + v_{\eta}(\xi, \eta)], \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \Omega' = T(\Omega). \quad (5.147)$$

□

5.2.2 Mudança de variáveis para o caso parabólico

Nesta subseção consideraremos o caso em que a EDP (5.2) é do tipo parabólico em um subconjunto aberto contido em $\underline{\Omega}$.

Suponhamos que as funções $a, b, c \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ e que a função $a = a(x, y)$ não se anule em $\underline{\Omega}$, isto é,

$$a(x, y) \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.148)$$

Neste caso, temos que:

$$b^2(x, y) - a(x, y) c(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Logo a equação (5.60), isto é,

$$a(x, y) \mu^2(x, y) - 2b(x, y) \mu(x, y) + c(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

admitirá uma (única) solução real, a saber

$$\begin{aligned}
\mu(x, y) &= \frac{2b(x, y)}{2a(x, y)} \\
&= \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega.
\end{aligned} \quad (5.149)$$

Com isto temos uma família de curvas características planas associadas às EDP (5.2), que será gerada pela função $y = y(x, y)$, que deverá satisfazer à seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \mu(x, y(x)), \quad \text{para } x \in I. \quad (5.150)$$

Como a EDP (5.2) torna-se-á "mais simples", ao longo das curvas características planas associadas às EDP (5.2), uma das funções associada a mudança de variáveis que estamos procurando, será do tipo:

$$\xi(x, y(x)) = K, \quad \text{para } x \in I. \quad (5.151)$$

Derivando a identidade (5.151) acima, parcialmente em relação à x , obteremos:

$$\xi_x(x, y) + \xi_y(x, y) \underbrace{y'(x)}_{\stackrel{(5.150)}{=} \mu(x, y(x))} = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega' \subseteq \Omega,$$

ou seja, a função $\xi = \xi(x, y)$, deverá satisfazer a seguinte EDP linear, de 1.a ordem, homogênea:

$$\xi_x(x, y) + \mu(x, y) \xi_y(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega' \subseteq \Omega,$$

onde a função $\mu = \mu(x, y)$, é dada por (5.149) ou, de modo abreviado, teremos:

$$\xi_x = -\mu \xi_y, \quad \text{em } \Omega', \quad (5.152)$$

cuja solução (local) existe, pelos capítulos anteriores (é uma EDP linear de 1.a ordem nas variáveis x, y).

Escolhendo-se uma função

$$\eta = \eta(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega',$$

de modo que $\eta \in C^2(\Omega'; \mathbb{R})$ e, para cada $(x, y) \in \Omega'$, o jacobiano

$$\begin{aligned} j(x, y) &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}(x, y) \\ &= \begin{vmatrix} \xi_x(x, y) & \xi_y(x, y) \\ \eta_x(x, y) & \eta_y(x, y) \end{vmatrix} \\ &= \eta_x(x, y) \eta_y(x, y) - \xi_y(x, y) \eta_x(x, y) \neq 0, \end{aligned}$$

obtemos uma mudança de variáveis local, de classe C^2 .

Defindo-se a função $v : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(\xi, \eta) \doteq u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \Omega', \quad (5.153)$$

vimos, na Observação (5.30) item 1., que a função $v = v(\xi, \eta)$, será solução da seguinte EDP:

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2B(\xi, \eta)(\xi, \eta) v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + C(\xi, \eta) v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \\ = F(\xi, \eta, v(\xi, \eta), v_{\xi}(\xi, \eta), v_{\eta}(\xi, \eta)), \end{aligned} \quad (5.154)$$

onde, utilizado-se as expressões (5.41), teremos:

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &\doteq a(\xi, \eta) \cdot \left[\begin{array}{c} \overbrace{\xi_x(\xi, \eta)}^{(5.152) \quad -\mu(x,y) \xi_y(x,y)} \\ \xi_y(\xi, \eta) \end{array} \right]^2 + 2b(\xi, \eta) \overbrace{\xi_x(\xi, \eta)}^{(5.152) \quad -\mu(x,y) \xi_y(x,y)} \xi_y(\xi, \eta) \\ &\quad + c(\xi, \eta) [\xi_y(\xi, \eta)]^2 \\ &= a[-\mu_1 \xi_y]^2 + 2b[-\mu_1 \xi_y] \xi_y + c \xi_y^2 \\ &= a\mu^2 \xi_y^2 - 2b\mu \xi_y^2 + c \xi_y^2 \\ &= \underbrace{(a\mu^2 - 2b\mu + c)}_{(5.60)_0} \xi_y^2 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.155)$$

$$\begin{aligned} B(\xi, \eta) &\doteq a(\xi, \eta) \overbrace{\xi_x(\xi, \eta)}^{(5.152) \quad -\mu(x,y) \xi_y(x,y)} \eta_x(\xi, \eta) \\ &\quad + b(\xi, \eta) \left[\begin{array}{c} \overbrace{\xi_x(\xi, \eta)}^{(5.152) \quad -\mu(x,y) \xi_y(x,y)} \\ \eta_y(\xi, \eta) + \xi_y(\xi, \eta) \eta_x(\xi, \eta) \end{array} \right] \\ &\quad + c(\xi, \eta) \xi_y(\xi, \eta) \eta_y(\xi, \eta) \\ &= (-a\mu + b) \xi_y \eta_x + (-b\mu + c) \xi_y \eta_y, \end{aligned} \quad (5.156)$$

$$\begin{aligned} C(\xi, \eta) &\doteq a(\xi, \eta) [\eta_x(\xi, \eta)]^2 + 2b(\xi, \eta) \eta_x(\xi, \eta) \eta_y(\xi, \eta) + c(\xi, \eta) [\eta_y(\xi, \eta)]^2 \\ &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2, \end{aligned} \quad (5.157)$$

e a função \underline{F} é o que restou, ou seja, só depende de

$$a, b, c, \xi, \eta, v, v_{\xi}, v_{\eta},$$

onde, nas identidades acima, para simplificar a notação, consideramos:

$$\begin{aligned} a(\xi, \eta) &= a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ b(\xi, \eta) &= b(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\ c(\xi, \eta) &= c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)). \end{aligned}$$

Como a EDP (5.2) é do tipo parabólico em um subconjunto aberto contido em $\underline{\Omega}$, segue que

$$\begin{aligned} b^2(x, y) - a(x, y) c(x, y) &= 0, \\ \text{ou seja, } b^2(x, y) &= a(x, y) c(x, y), \end{aligned} \quad (5.158)$$

para (x, y) no aberto onde a EDP (5.2) é do tipo parabólico.

Por outro lado, de (5.149), segue que:

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \\ \text{isto é, } a(x, y) \mu(x, y) - b(x, y) &= 0, \\ \text{de modo abreviado: } a \mu - b &= 0, \end{aligned} \quad (5.159)$$

$$\begin{aligned} \text{que, multiplicada por } b(x, y), \text{ implicará em: } a(x, y) b(x, y) \mu(x, y) - b^2(x, y) &= 0 \\ \text{e, de (5.158), segue: } a(x, y) b(x, y) \mu(x, y) - a(x, y) c(x, y) &= 0 \\ \text{como } a(x, y) \neq 0, \text{ teremos: } b(x, y) \mu(x, y) - c(x, y) &= 0, \\ \text{de modo abreviado: } b \mu - c &= 0, \end{aligned} \quad (5.160)$$

para cada (x, y) no aberto onde a EDP (5.2) é do tipo parabólico.

Assim, de (5.159), (5.160) e (5.156), segue que:

$$B(\xi, \eta) \stackrel{(5.156)}{=} \underbrace{(-a \mu + b)}_{\stackrel{(5.159)}{=} 0} \xi_y \eta_x + \underbrace{(-b \mu + c)}_{\stackrel{(5.160)}{=} 0} \xi_y \eta_y = 0. \quad (5.161)$$

Portanto de (5.153), (5.154), (5.155) (5.156), (5.157) , (5.161) segue que a EDP (5.2), no caso parabólico, tornar-se-á:

$$C(\xi, \eta) v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = G(\xi, \eta, v(\xi, \eta), v_\xi(\xi, \eta), v_\eta(\xi, \eta)), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \Omega',$$

e como $C(\xi, \eta) \neq 0$ (pois a EDP (5.2) é de 2.a ordem), obteremos a seguinte EDP:

$$v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta, v(\xi, \eta), v_\xi(\xi, \eta), v_\eta(\xi, \eta)), \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \Omega', \quad (5.162)$$

ou, de modo abreviado,

$$v_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta), \quad (5.163)$$

que é a forma canônica da EDP (5.2) que é do tipo parabólico.

Observação 5.164 *Notemos que a equação do calor*

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

já está na forma canônica, já que pode ser escrita na forma:

$$u_{xx}(t, x) = \frac{1}{\alpha^2} u_t(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Apliquemos as idéias desenvolvidas acima ao:

Exemplo 5.165 Coloque a EDP:

$$x u_{xx}(x, y) + 2x u_{xy}(x, y) + x u_{yy}(x, y) = u_x(x, y) + u_y(x, y), \quad (5.166)$$

para $(x, y) \in \Omega \doteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ na sua forma canônica.

Resolução:

Notemos que as funções $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas por

$$a(x, y) \doteq x, \quad b(x, y) \doteq x, \quad c(x, y) \doteq x, \quad (5.167)$$

para cada $(x, y) \in \Omega$.

Notemos que

$$\begin{aligned} a^2(x, y) + b^2(x, y) &\stackrel{(5.167)}{=} x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \doteq (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) &\stackrel{(5.167)}{=} x^2 - x^2 \\ &= 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

ou seja, a EDP (5.166) é do tipo parabólico em Ω .

Logo, para $(x, y) \in \Omega$, temos que a equação (5.60) será:

$$\begin{aligned} &a(x, y) \mu^2(x, y) - 2b(x, y) \mu(x, y) + c = 0 \\ \text{que, de (5.167), segue: } &x \mu^2(x, y) - 2x \mu(x, y) + x = 0, \\ \text{e como } x \neq 0, \text{ teremos: } &\underbrace{\mu^2(x, y) - 2\mu(x, y) + 1}_{(\mu(x, y) - 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } \mu(x, y) = 1.$$

Logo a única solução da equação (5.60) será a função $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\mu(x, y) = 1, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.168)$$

Com isto a EDO (5.57) será da forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x) &= \mu(x, y(x)) \\ &\stackrel{(5.168)}{=} 1, \quad \text{para } x \in I, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja, } y = x + K, \quad \text{para cada } x \in I,$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é arbitrária, ou seja, a família de curvas características associadas à EDP (5.166) será dada por:

$$y - x = K. \quad (5.169)$$

Como a EDP (5.166) torna-se-á "mais simples" ao longo das curvas características planas associadas às EDP (5.166), uma das funções associada a mudança de variáveis procurada, a saber, a função $\xi = \xi(x, y)$, será do tipo

$$\xi(x, y(x)) = K,$$

ou seja, constante ao longo das curvas características planas associadas às EDP (5.166), assim definimos

$$\xi \doteq y - x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \quad (5.170)$$

Agora precisamos encontrar uma função $\eta \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ de modo que o jacobiano

$$\begin{aligned} j(x, y) &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}(x, y) \\ &\stackrel{(5.170)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \eta_x(x, y) & \eta_y(x, y) \end{vmatrix} \\ &= -\eta_y(x, y) - \eta_x(x, y) \\ &\neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (5.171)$$

Se considerarmos, por exemplo, a função $\eta = \eta(x, y)$, dada por:

$$\eta \doteq y + x, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (5.172)$$

teremos,

$$j(x, y) \stackrel{(5.171)}{=} \stackrel{(5.172)}{=} -2 \neq 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega.$$

Logo, a transformação $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por:

$$T(x, y) = (\xi, \eta),$$

onde

$$\xi = -x + y, \quad (5.173)$$

$$\eta = x + y \quad (5.174)$$

será uma mudança de variáveis suave (na verdade é um operador linear bijetor em \mathbb{R}^2).

Notemos que a transformação inversa, isto é,

$$T^{-1}(\xi, \eta) = (x, y),$$

será dada por:

$$x = \frac{\eta - \xi}{2}, \quad (5.175)$$

$$y = \frac{\xi + \eta}{2} \quad (5.176)$$

Definindo-se a função $v : \Omega' \doteq T(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(\xi, \eta) \doteq u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \Omega' \doteq T(\Omega), \quad (5.177)$$

ou ainda,

$$u(x, y) \doteq v(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (5.178)$$

teremos, pela regra da cadeia, que:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &\stackrel{(5.178)}{=} v_\xi(\xi, \eta) \overbrace{\xi_x(x, y)}^{(5.173)_{-1}} + v_\eta(\xi, \eta) \overbrace{\eta_x(x, y)}^{(5.174)_1} \\ &= -v_\xi(\xi, \eta) + v_\eta(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.179)$$

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &\stackrel{(5.178)}{=} v_\xi(\xi, \eta) \overbrace{\xi_y(x, y)}^{(5.173)_1} + v_\eta(\xi, \eta) \overbrace{\eta_y(x, y)}^{(5.173)_1} \\ &= v_\xi(\xi, \eta) + v_\eta(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.180)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) &\stackrel{(5.179)}{=} \left[v_{\xi\xi} \overbrace{\xi_x}^{(5.173)_{-1}} + v_{\xi\eta} \overbrace{\eta_x}^{(5.174)_1} \right] + \left[v_{\eta\xi} \overbrace{\xi_x}^{(5.173)_{-1}} + v_{\eta\eta} \overbrace{\eta_x}^{(5.174)_1} \right] \\ &= v_{\xi\xi}(\xi, \eta) - 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (5.181)$$

$$\begin{aligned} u_{yy}(x, y) &\stackrel{(5.180)}{=} \left[v_{\xi\xi} \overbrace{\xi_y}^{(5.173)_1} + v_{\xi\eta} \overbrace{\eta_y}^{(5.174)_1} \right] + \left[v_{\eta\xi} \overbrace{\xi_y}^{(5.173)_1} + v_{\eta\eta} \overbrace{\eta_y}^{(5.174)_1} \right] \\ &= v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + 2v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (5.182)$$

$$\begin{aligned} u_{xy}(x, y) &\stackrel{(5.179)}{=} \left[v_{\xi\xi} \overbrace{\xi_y}^{(5.173)_1} + v_{\xi\eta} \overbrace{\eta_y}^{(5.174)_1} \right] + \left[v_{\eta\xi} \overbrace{\xi_y}^{(5.173)_1} + v_{\eta\eta} \overbrace{\eta_y}^{(5.174)_1} \right] \\ &= -v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (5.183)$$

Substituindo (5.179), (5.180), (5.181), (5.182) e (5.183) na EDP (5.166), obteremos:

$$\begin{aligned}
 0 &= x u_{xx}(x, y) + 2x u_{xy}(x, y) + x u_{yy}(x, y) - u_x(x, y) - u_y(x, y) \\
 &\stackrel{(5.176)}{=} \frac{\eta - \xi}{2} [(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) + 2(-v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) + (v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) \\
 &\quad - (-v_{\xi} + v_{\eta}) - (v_{\xi} + v_{\eta})] \\
 &= 2(\eta - \xi) v_{\eta\eta} - 2v_{\eta} \\
 (\eta - \xi) v_{\eta\eta}(\xi, \eta) &= v_{\eta}(\xi, \eta).
 \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$ (veja a definição de $\underline{\Omega}$ em (5.166)), de (5.175), segue que $\xi - \eta \neq 0$ em $\underline{\Omega}'$, com isto obteremos a seguinte EDP:

$$v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta - \xi} v_{\eta}(\xi, \eta), \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \Omega', \quad (5.184)$$

ou seja, esta é a forma canônica da EDP (5.166). □

5.2.3 Mudança de variáveis para o caso elítico

O caso da EDP (5.2), por ser do tipo elítico, não será tratado, em detalhes, devido a sua complexidade.

Na verdade podemos repetir o processo acima com o auxílio de funções a valores complexo.

O Exercício 2 (página 75 do Livro de V. Iório) trata deste caso, mais precisamente:

Consideremos a EDP:

$$a(x, y) u_{xx}(x, y) + 2b(x, y) u_{xy}(x, y) + c(x, y) u_{yy}(x, y) = f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)),$$

para $(x, y) \in \Omega$.

Suponhamos que

$$\delta(x, y) \doteq b^2(x, y) - a(x, y) c(x, y) < 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega,$$

onde $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e que

$$a(x, y) \neq 0,$$

para cada $(x, y) \in \Omega$, ou seja, a EDP acima é do tipo elítico em $\underline{\Omega}$.

Podemos mostrar que se as funções

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega' \subseteq \Omega$$

satisfazem ao sistema de EDP's lineares de 1. ordem:

$$a(x, y) \xi_x(x, y) + b(x, y) \xi_y(x, y) - \sqrt{-\delta(x, y)} \eta_y(x, y) = 0 \quad (5.185)$$

$$a(x, y) \eta_x(x, y) + b(x, y) \eta_y(x, y) - \sqrt{-\delta(x, y)} \xi_y(x, y) = 0, \quad (5.186)$$

em $\Omega' \subseteq \Omega$ ou, de modo abreviado:

$$a \xi_x + b \xi_y - \sqrt{-\delta} \eta_y = 0, \quad (5.187)$$

$$a \eta_x + b \eta_y - \sqrt{-\delta} \xi_y = 0, \quad (5.188)$$

com

$$\xi_x^2(x, y) + \eta_y^2(x, y) \neq 0 \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega',$$

então a transformação $T: \Omega' \rightarrow T(\Omega')$, dada por

$$(\xi, \eta) \doteq T(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega',$$

define uma mudança de variáveis de classe C^2 (localmente) e se considerarmos a função $v: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(\xi, \eta) \doteq u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in T(\Omega'),$$

segue que a função $v = v(\xi, \eta)$ vai satisfazer uma EDP da forma

$$v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta, v(\xi, \eta), v_\xi(\xi, \eta), v_\eta(\xi, \eta)), \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \Omega',$$

que á forma canônica de uma EDP semi-linear de 2.a ordem em duas variáveis (veja o item 1. da Definição (5.91), ou ainda, (5.92)).

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

5.3 Exercícios

Capítulo 6

A Equação da Onda

O objetivo deste capítulo é estudar a equação da onda em duas variáveis, a saber, t e x .

Obteremos a solução geral da mesma assim como estudaremos o problema da corda infinita vibrante, que está contida em um plano.

Também estudaremos o caso da corda finita vibrante, contida em um plano, que têm com as extremidades fixas.

6.1 Solução geral da equação da onda

Como vimos no capítulo anterior, as curvas características planas desempenham um papel muito importante no estudo das EDP's de 2.ª ordem lineares, do tipo hiperbólico.

Vamos exemplificar isto estudando o que ocorre com a equação da onda:

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.1)$$

onde $c > 0$ é uma constante fixada.

Vimos no Exemplo (5.65), que as curvas características planas associadas a equação da onda serão as retas

$$x \pm c t = k, \quad (6.2)$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Também vimos no Exemplo (5.117) que, fazendo-se a mudança de variáveis:

$$\xi = x + c t \quad (6.3)$$

$$\eta = x - c t, \quad (6.4)$$

isto é, definido-se a função $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(\xi, \eta) \doteq u(t(\xi, \eta), x(\xi, \eta)), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.5)$$

ou ainda,

$$u(t, x) \doteq v(\xi(t, x), \eta(t, x)), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.6)$$

segue que a função $v = v(\xi, \eta)$ irá satisfazer a seguinte EDP:

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0, \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.7)$$

Notemos que, para cada $\eta \in \mathbb{R}$ fixado, podemos integrar a EDP (6.7) acima, em relação a variável ξ , para obter:

$$v_{\eta}(\xi, \eta) = \psi(\eta), \quad \text{para } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.8)$$

onde $\psi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função arbitrária.

Com isto, para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fixado, podemos integrar a EDP (6.8) acima, em relação a variável η , obtendo-se:

$$v(\xi, \eta) = \Psi(\eta) + \Phi(\xi), \quad \text{para cada } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.9)$$

onde $\Phi, \Psi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ são funções arbitrárias (na verdade, temos que $\Psi(\eta) = \int \psi(\eta) d\eta$).

Conclusão: a solução geral da equação da onda (bi-dimensional) (6.1) será dada por:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.6)}{=} v(\xi, \eta) \\ &\stackrel{(6.9)}{=} \Phi(\xi) + \Psi(\eta) \\ &\stackrel{(6.3),(6.4)}{=} \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct) \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, ou seja,

$$u(t, x) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.10)$$

onde $\Phi, \Psi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ são funções arbitrárias, será a solução geral da equação da onda (bi-dimensional) (6.1), denominada solução de d'Alembert.

Observação 6.11

1. Podemos concluir que, no caso da equação da onda (bi-dimensional) (6.1), o uso das curvas características planas associadas à mesma, foi o que nos permitiu obter a solução geral da EDP (6.1).

Baseado nisto é de se esperar que o mesmo ocorra com EDP's de 2.a ordem que sejam hiperbólicas em geral.

2. A equação da onda foi uma das EDP's mais importantes do século XVIII.

O primeiro a estudá-la, de modo sistemático, foi d'Alembert, seguido por Euler, Bernouilli e Lagrange.

Foram obtidas soluções de diversas formas e a discussão sobre o mérito e as relações entre as mesmas levantou questões importantes que só foram resolvidas no século XIX (um exemplo, foi o conceito de função que conhecemos nos dias de hoje).

3. Se \underline{t} denota o tempo (logo, $t \geq 0$) a transformação

$$\xi \doteq x + ct,$$

representa uma translação do sistema de coordenadas, à esquerda, com velocidade \underline{c} (lembramos que $c > 0$).

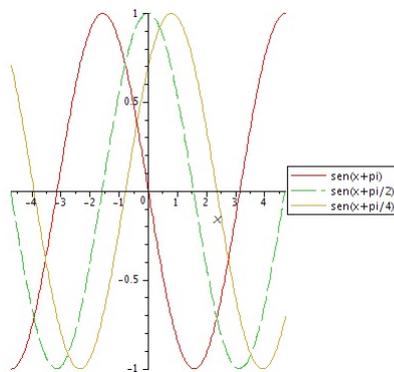
Notemos que se definirmos a função $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por:

$$u(t, x) \doteq \text{sen}(x + ct), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

então, para cada $t \in [0, \infty)$ fixado, a representação geométrica do gráfico da função

$$g_t(x) \doteq u(t, x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}$$

descreve uma senóide (ou onda senoidal) que, quando $t \in [0, \infty)$ varia, mover-se-á para à esquerda com velocidade $c > 0$ (veja a figura abaixo para os casos $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \pi$).



4. Da mesma forma, dadas as funções $\Phi, \Psi \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, teremos que as funções $u_1, u_2 : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$u_1(t, x) \doteq \Phi(x + ct), \quad u_2(t, x) \doteq \Psi(x - ct), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

descreverão ondas, cuja representação geométrica correspondentes aos respectivos gráficos das funções Φ e Ψ que, quando $t \in [0, \infty)$ vaiira, moverão-se, respectivamente, à esquerda e à direita, com velocidade $c > 0$, no plano (x, u) .

5. Logo, do que vimos acima, a solução geral da equação da onda (bi-dimensional) (6.1), dada por (6.10), descreverá a superposição das duas ondas acima, que movem-se com velocidade $c > 0$, uma para à esquerda e a outra para à direita, no plano (x, u) .

Para ilustrar temos o:

Exercício 6.12 Consideremos as funções $\phi = \psi \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, dadas por:

$$\phi(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty), \\ -(x+4), & \text{para } x \in [-4, -2], \\ x, & \text{para } x \in [-2, 2], \\ -x+4, & \text{para } x \in [2, 4] \end{cases}. \quad (6.13)$$

Encontre a representação geométrica do gráfico da solução da equação da onda

$$u(t, x) \doteq \Phi(x + ct) + \Phi(x - ct), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

para o caso que $c \doteq 1$, quando

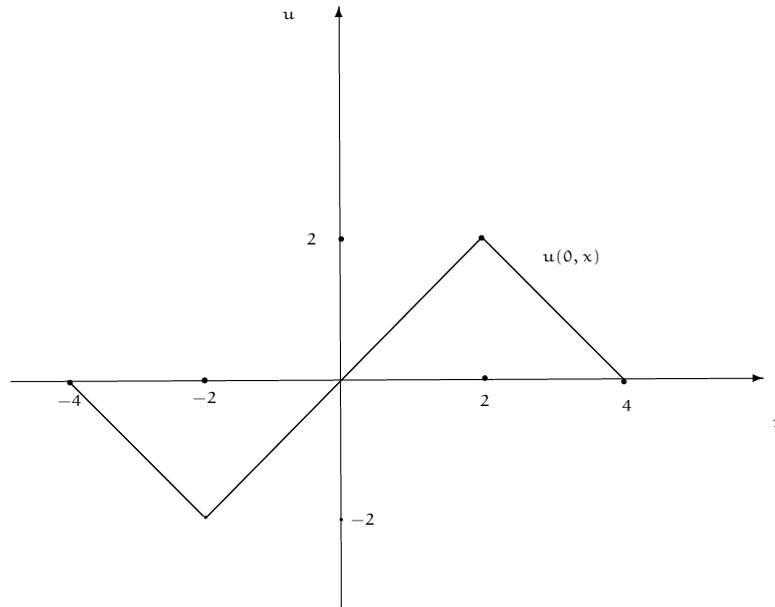
$$t = 0, \quad t = 1, \quad t = 2 \quad \text{e} \quad t = 6.$$

Resolução:

A verificação dos fatos abaixo serão deixadas como exercício para o leitor.

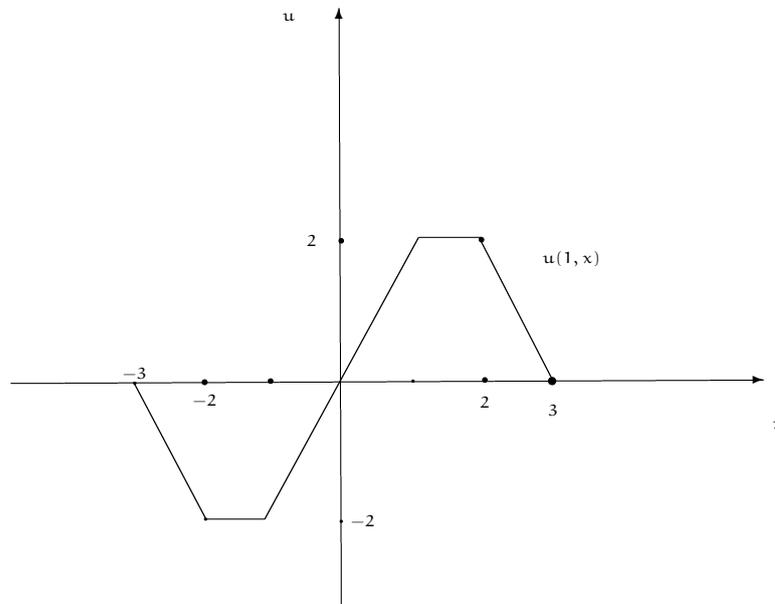
Para $t = 0$, teremos a seguinte representação geométrica para o gráfico da função

$$t \mapsto u(0, x) :$$



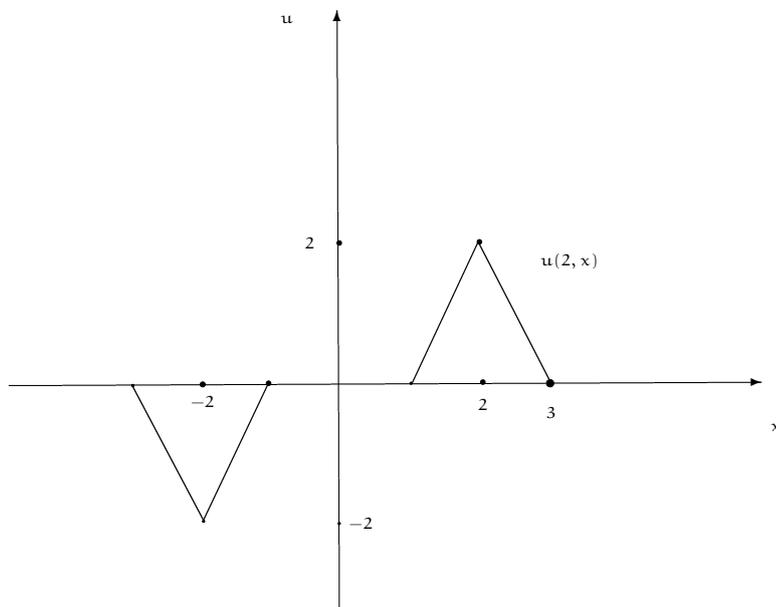
Para $t = 1$, teremos a seguinte representação geométrica para o gráfico da função

$$t \mapsto u(1, x) :$$



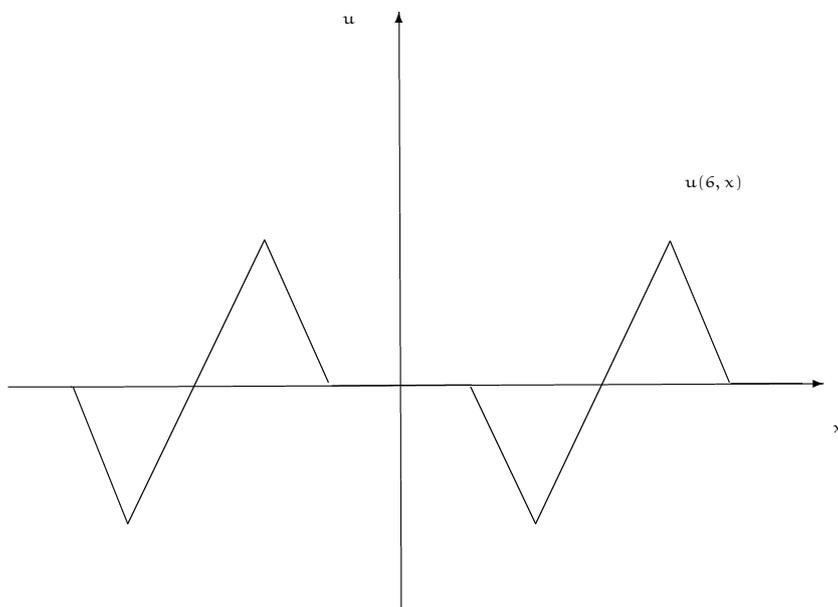
Para $t = 2$, teremos a seguinte representação geométrica para o gráfico da função

$$t \mapsto u(2, x) :$$



Para $t = 6$, teremos a seguinte representação geométrica para o gráfico da função

$$t \mapsto u(6, x) :$$



□

6.2 A corda infinita

Nesta seção utilizaremos a solução de d'Alembert para a equação da onda (6.1), dada por (6.10) (a solução geral da equação da onda unidimensional), para encontrar uma solução do problema de Cauchy associado ao problema da corda vibrante, que tem perfil e velocidades iniciais conhecidos, ou seja, trataremos do seguinte problema de Cauchy, associado à equação da onda:

$$u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.14)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (6.15)$$

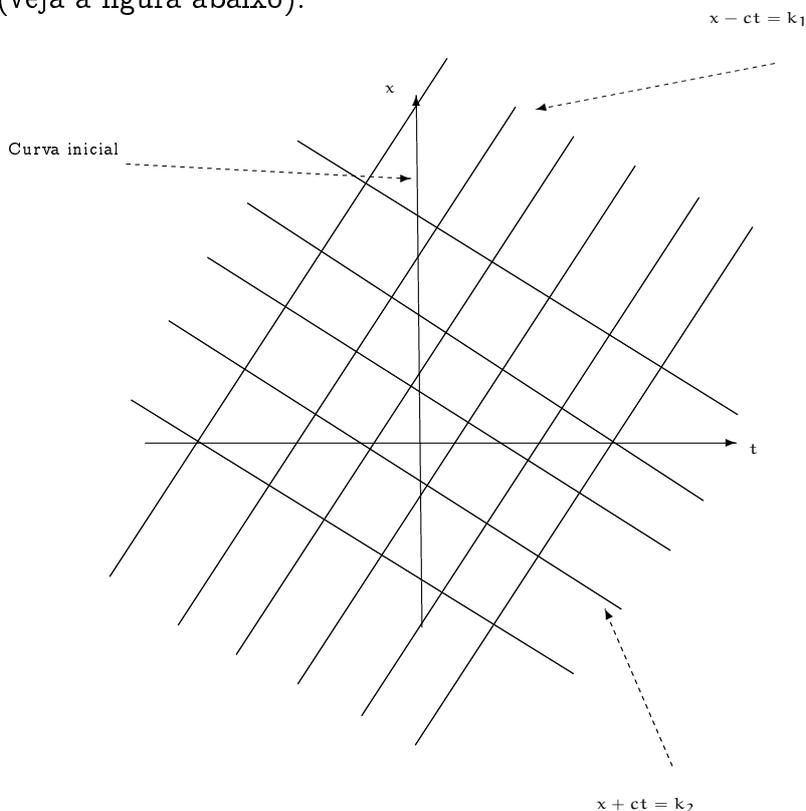
$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (6.16)$$

onde $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.

Como queremos encontrar uma solução clássica do problema de Cauchy acima, pediremos que

$$f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}). \quad (6.17)$$

Notemos que a curva inicial (isto é, o eixo Ox) não é uma curva caracterísitica plana (na verdade intercepta as curvas características planas transversalmente) e conhecemos a solução e sua derivada parcial, em relação à variável t , ao longo da mesma, dadas por (6.15) e (6.16), respectivamente (veja a figura abaixo).



Da fórmula de d'Alembert, dada por (6.10), temos que a solução geral da equação da onda

bi-dimensional (6.1), será dada por:

$$u(t, x) \doteq \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.18)$$

onde $\phi, \psi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Logo, fazendo $t = 0$ em (6.18) e utilizando (6.15), obteremos:

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Psi(x) &\stackrel{(6.18) \text{ com } t=0}{=} u(0, x) \\ &\stackrel{(6.15)}{=} f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Por outro lado, derivando parcialmente (6.18), em relação a t e utilizando a regra da cadeia, fazendo $t = 0$ e utilizando (6.16), obteremos:

$$\begin{aligned} &\Phi'(x + ct) \cdot c + \Psi'(x - ct) \cdot (-c) \stackrel{\frac{d}{dt} (6.18)}{=} u_t(t, x), \\ \text{fazendo } t = 0, \text{ teremos: } &c\Phi'(x) - c\Psi'(x) = u_t(0, x) \\ &\stackrel{(6.16)}{=} g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Conclusão: de (6.19) e (6.20) segue que deveremos encontrar funções $\Phi, \Psi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ que satisfazem as seguinte condições:

$$\Phi(x) + \Psi(x) = f(x), \quad (6.21)$$

$$c\Phi'(x) - c\Psi'(x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (6.22)$$

Notemos que, derivando a equação (6.21), em relação a x , obteremos:

$$\Phi'(x) + \Psi'(x) = f'(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (6.23)$$

Multiplicando-se a equação (6.23), por c , e somando-se a equação (6.22), segue que:

$$\begin{aligned} 2c\Phi'(x) &= cf'(x) + g(x), \\ \text{ou seja, } \Phi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

De modo semelhante, multiplicando-se a equação (6.23), por $-c$, e somando-se a equação (6.22), segue que

$$\begin{aligned} -2c\Psi'(x) &= -cf'(x) + g(x), \\ \text{ou seja, } \Psi'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

ou seja, de (6.24) e (6.25), segue que as funções Φ e Ψ , deverão satisfazer as seguintes condições:

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2c} g(x), \quad (6.26)$$

$$\Psi'(x) = \frac{1}{2} f'(x) - \frac{1}{2c} g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (6.27)$$

Integrando-se a equação (6.26) em relação a x , de 0 à x , obteremos:

$$\begin{aligned} \Phi(x) - \Phi(0) &= \int_0^x \left[\frac{1}{2} f'(s) + \frac{1}{2c} g(s) \right] ds \\ &= \left[\frac{1}{2} f(s) \right] \Big|_{s=0}^{s=x} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [f(x) - f(0)] + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Do mesmo modo, integrando-se a equação (6.27) em relação a x , de 0 à x , obteremos:

$$\begin{aligned} \Psi(x) - \Psi(0) &= \int_0^x \left[\frac{1}{2} f'(s) - \frac{1}{2c} g(s) \right] ds \\ &= \left[\frac{1}{2} f(s) \right] \Big|_{s=0}^{s=x} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [f(x) - f(0)] - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds, \end{aligned} \quad (6.29)$$

ou seja, de (6.28) e (6.29), deveremos ter:

$$\Phi(x) = \Phi(0) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds, \quad (6.30)$$

$$\Psi(x) = \Psi(0) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds, \quad (6.31)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, notemos que, se fizermos $t = 0$, na 1.a equação de (6.21), obteremos:

$$\Phi(0) + \Psi(0) = f(0). \quad (6.32)$$

Substituindo (6.30), (6.31) e (6.32) em (6.18), obteremos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.18)}{=} \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct) \\ &\stackrel{(6.30), (6.31)}{=} \left[\Phi(0) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds \right] \\ &\quad + \left[\Psi(0) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds \right] \\ &= [\Phi(0) + \Psi(0) - f(0)] + \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, \end{aligned}$$

$$\stackrel{(6.32)}{=} \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds,$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, ou seja,

$$u(t, x) \doteq \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, \quad (6.33)$$

para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Portanto se a função $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por (6.33), então ela será solução clássica do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16).

De fato pois, para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\begin{aligned} u_x(t, x) &\stackrel{\frac{d}{dx} (6.33), \text{ regra da cadeia, teor.fund.Cálc.}}{=} \frac{f'(x+ct) \cdot 1 + f'(x-ct) \cdot 1}{2} + \frac{g(x+ct) - g(x-ct)}{2c} \\ &= \frac{f'(x+ct) + f'(x-ct)}{2} + \frac{g(x+ct) - g(x-ct)}{2c}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x) &\stackrel{\frac{d}{dx} (6.34) \text{ e regra da cadeia}}{=} \frac{f''(x+ct) \cdot 1 + f''(x-ct) \cdot 1}{2} + \frac{g'(x+ct) \cdot 1 - g'(x-ct) \cdot 1}{2c} \\ &= \frac{f''(x+ct) + f''(x-ct)}{2} + \frac{g'(x+ct) - g'(x-ct)}{2c} \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &\stackrel{\frac{d}{dt} (6.33), \text{ regra da cadeia, teor.fund.Cálc.}}{=} \frac{f'(x+ct) \cdot c + f'(x-ct) \cdot (-c)}{2} \\ &\quad + \frac{g(x+ct) \cdot c - g(x-ct) \cdot (-c)}{2c} \\ &= \frac{cf'(x+ct) - cf'(x-ct)}{2} + \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &\stackrel{\frac{d}{dt} (6.36), \text{ e regra da cadeia}}{=} c \frac{f''(x+ct) \cdot c + f''(x-ct) \cdot (-c)}{2} \\ &\quad + \frac{g'(x+ct) \cdot c + g'(x-ct) \cdot (-c)}{2} \\ &= c^2 \frac{f''(x+ct) + f''(x-ct)}{2} + c \frac{g'(x+ct) - g'(x-ct)}{2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Logo, para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, de (6.35) e (6.37), segue que:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) &\stackrel{(6.35), (6.37)}{=} \left[c^2 \frac{f''(x+ct) + f''(x-ct)}{2} + c \frac{g'(x+ct) - g'(x-ct)}{2} \right] \\ &\quad - c^2 \left[\frac{f''(x+ct) + f''(x-ct)}{2} + \frac{g'(x+ct) - g'(x-ct)}{2c} \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

mostrando que a função $u = u(t, x)$, dada por (6.33), satisfaz a equação da onda (6.14).

Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} u(0, x) &\stackrel{(6.33)}{=} \stackrel{\text{com } t=0}{=} \frac{\overbrace{f(x+c \cdot 0) + f(x-c \cdot 0)}^{=f(x)+f(x)=2f(x)}}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-c \cdot 0}^{x+c \cdot 0} \overbrace{g(s) ds}^{=\int_x^x g(s) ds=0} \\ &= f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) &\stackrel{(6.36)}{=} \stackrel{\text{com } t=0}{=} \frac{\overbrace{c f'(x+c \cdot 0) - c f'(x-c \cdot 0)}{=c f'(x)-c f'(x)=0}}{2} + \frac{\overbrace{g(x+c \cdot 0) + g(x-c \cdot 0)}{=2g(x)}}{2} \\ &= g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja, a função $u = u(t, x)$ satisfaz (6.15) e (6.16), ou seja, é uma solução clássica do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16) como afirmamos, pois $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Podemos aplicar estas idéias aos:

Exercício 6.38 *Obter uma solução clássica do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16), quando*

$$c \doteq 1, \quad f(x) \doteq \text{sen}(x) \quad \text{e} \quad g(x) \doteq \text{cos}(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (6.39)$$

Resolução:

Utilizando-se a expressão (6.33), teremos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.33)}{=} \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ &\stackrel{(6.39)}{=} \frac{\text{sen}(x+t) + \text{sen}(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \text{cos}(s) ds \\ &= \frac{\text{sen}(x+t) + \text{sen}(x-t)}{2} + \left[\frac{\text{sen}(s)}{2} \right] \Big|_{s=x-t}^{s=x+t} \\ &= \frac{\text{sen}(x+t) + \text{sen}(x-t)}{2} + \frac{\text{sen}(x+t) - \text{sen}(x-t)}{2} \\ &= \text{sen}(x+t), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(t, x) \doteq \text{sen}(x+t), \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

será uma solução do problema de Cauchy, associado às condições (6.39).

□

Observação 6.40

1. *Mostraremos, mais a frente, que o problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16) tem única solução clássica em $C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.*

2. A expressão (6.33) mostra, claramente, que o valor da solução $u = u(t, x)$, no ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ depende, somente, do valor do dado inicial, isto é, da função f , nos pontos

$$x_0 + ct_0 \quad \text{e} \quad x_0 - ct_0$$

e do valor da função g no intervalo (veja a figura abaixo)

$$[x_0 + ct_0, x_0 - ct_0].$$

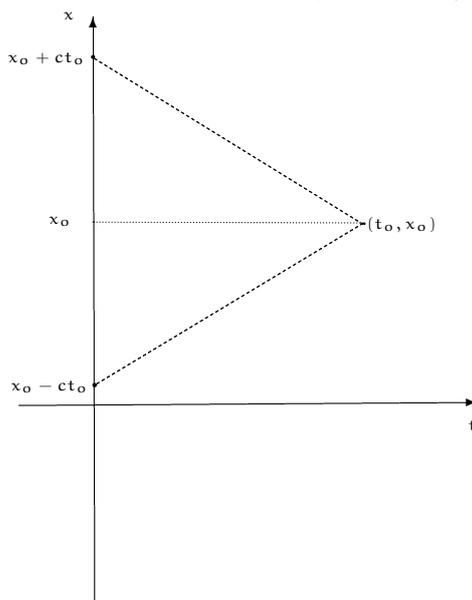
Conclusão: os dados iniciais f , g , podem ser alterados, respectivamente, fora dos pontos

$$x_0 + ct_0 \quad \text{e} \quad x_0 - ct_0$$

e do intervalo

$$[x_0 + ct_0, x_0 - ct_0],$$

que a solução $u = u(t, x)$ não alterará seu valor no ponto (t_0, x_0) .



3. Relativamente ao problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16), o intervalo

$$[x_0 + ct_0, x_0 - ct_0],$$

será denominado intervalo de dependência do ponto (t_0, x_0) .

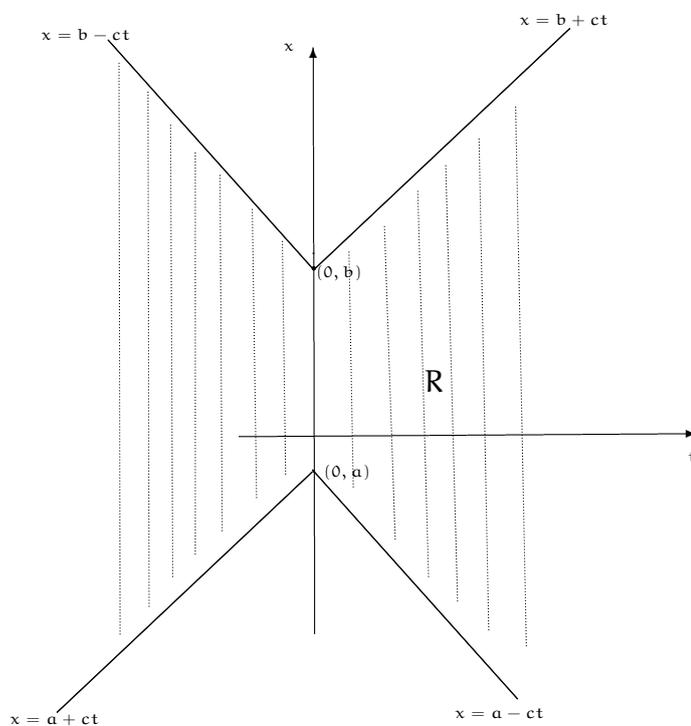
4. Relativamente ao problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16), dado um intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, a região, que denotaremos por \mathbf{R} , contida no plano tOx delimitada pelas retas características planas associadas à equação do calor que passam pelos pontos

$$(0, b) \quad \text{e} \quad (0, a)$$

e contém o conjunto

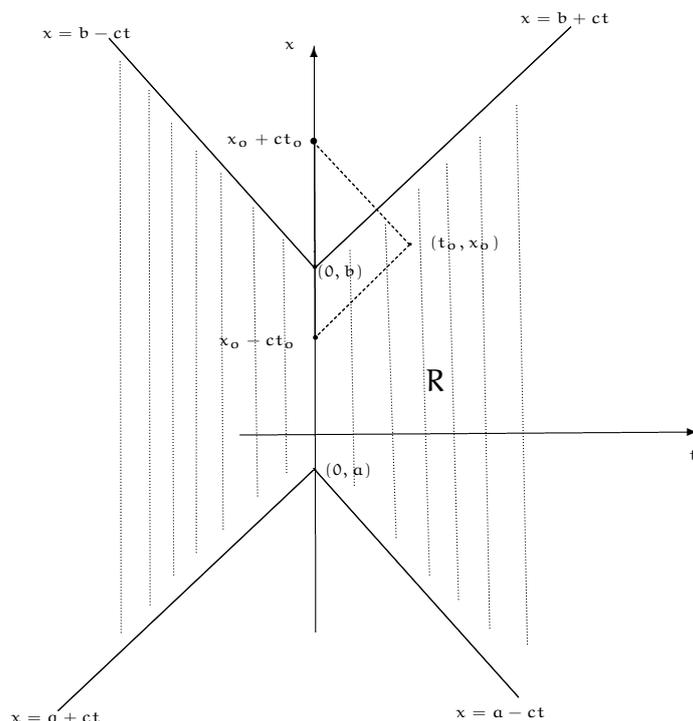
$$\{0\} \times [a, b],$$

será dita região de influência do intervalo $[a, b]$ (veja a figura abaixo).



5. Na situação acima, se $(t_0, x_0) \in R$, então o intervalo de dependência do ponto (t_0, x_0) interceptará o intervalo $[a, b]$.

Logo, se alterarmos o valor dos dados iniciais do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16) no intervalo $[a, b]$, alterará o valor da solução $u = u(t, x)$ no ponto (t_0, x_0) (veja a figura abaixo).



6. Notemos que, para que a função $u = u(t, x)$, dada por (6.33), seja solução clássica do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16) deveremos ter

$$f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad e \quad g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

Por outro lado, se admitirmos procurar soluções não clássicas do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16), por exemplo, a função f descontínua em $x_0 \in \mathbb{R}$, o que ocorrerá com a função $u = u(t, x)$, cuja expressão é dada por (6.33)?

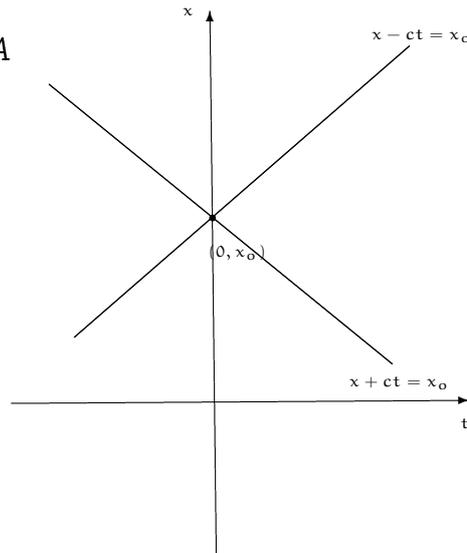
Neste caso, de (6.18), segue que a função $u = u(t, x)$ será descontínua ao longo das retas características

$$x + ct = x_0 \quad e \quad x - ct = x_0,$$

isto é, a descontinuidade da função

$$u(0, \cdot) = f$$

no ponto x_0 , propagar-se-á ao longo das retas características que passam pelo ponto $(0, x_0)$ (veja a figura abaixo).



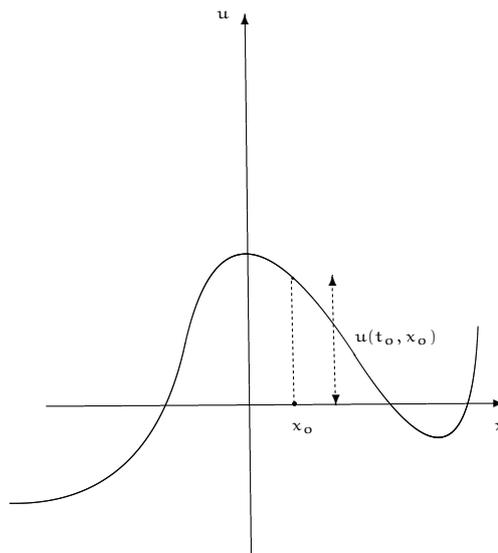
Neste caso, se

$$f \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{x_0\}; \mathbb{R}) \quad e \quad g \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}),$$

segue que a função $u = u(t, x)$, dada por (6.33), irá satisfazer a equação da onda (6.14) fora das retas características que passam pelo ponto $(0, x_0)$ (isto é, as retas cujas representações geométricas são dadas pela figura acima).

7. O problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16) descreve, para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, o deslocamento, relativamente à posição de repouso, de uma corda infinita que vibra em um plano fixado, cuja posição inicial é dada pela representação geométrica do gráfico da função \underline{f} e cuja velocidade inicial é dada pela função \underline{g} (veja a figura abaixo).

Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ fixado.



A seguir consideraremos alguns exercícios:

Exercício 6.41 *Obter uma solução clássica do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16), quando*

$$c \doteq 1, \quad f(x) \doteq \text{sen}(x) \quad \text{e} \quad g(x) \doteq 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (6.42)$$

Resolução:

Utilizando-se a expressão (6.33), obteremos

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.33)}{\doteq} \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds \\ &\stackrel{(6.42)}{=} \frac{\text{sen}(x+t) + \text{sen}(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 0 \, ds \\ &= \frac{\text{sen}(x+t) + \text{sen}(x-t)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ [\text{sen}(x) \cos(t) + \text{sen}(t) \cos(x)] + [\text{sen}(x) \underbrace{\cos(-t)}_{=-\cos(t)} + \underbrace{\text{sen}(-t)}_{=-\text{sen}(t)} \cos(x)] \} \\ &= \text{sen}(x) \cos(t), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(t, x) \doteq \text{sen}(x) \cos(t), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.43)$$

será uma solução do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16) associado à (6.42). □

Observação 6.44

1. *Em particular, a solução $u = u(t, x)$, dada por (6.43), para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ fixado, será uma senóide, cuja representação geométrica do seu gráfico terá sua amplitude aumentada de $|\cos(t_0)|$.*

Abaixo temos alguns dessas representadas geometricamente no plano xOu , para os valores

$$t = 0, \quad t = \frac{\pi}{3}, \quad t = \frac{2\pi}{3}, \quad t = \pi \quad \text{e} \quad t = \frac{4\pi}{3}.$$

2. *Notemos que quando t varia de:*

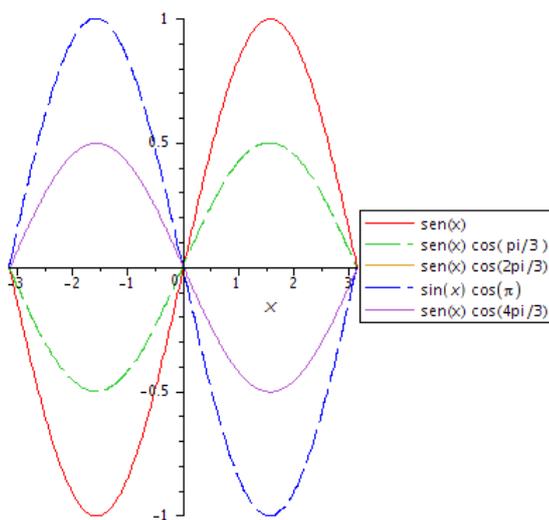
(a) 0 à $\frac{\pi}{2}$, *a amplitude da onda, decresce de 1 para 0;*

(b) $\frac{\pi}{2}$ à π , *a amplitude da onda cresce, de 0 para 1, mas a oscilação é o contrário da registrada no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$;*

(c) π à $\frac{3\pi}{2}$, *a amplitude da onda decresce, de 1 para 0;*

- (d) $\frac{3\pi}{2}$ à 2π , a amplitude da onda cresce, de 0 para 1, atingindo a posição que se encontrava quando $t = 0$.

A figura abaixo ilustra as situações descritas acima.



3. Como

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

segue que, de (5.101), que

$$u(t + 2k\pi, x) = u(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

logo o movimento da corda, em qualquer intervalo de tempo de amplitude 2π , será o mesmo que no intervalo $[0, 2\pi]$.

Temos também o seguinte exercício resolvido, que ilustra o caso em que o dado inicial f , não é uma função diferenciável em algum ponto.

Exercício 6.45 Obter uma solução clássica do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16) quando,

$$c \doteq 1 \tag{6.46}$$

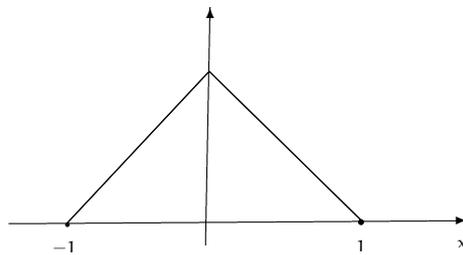
e as funções $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para cada } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \\ -2|x| + 2, & \text{para } x \in (-1, 1), \end{cases}, \quad (6.47)$$

$$g(x) \doteq 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (6.48)$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo:



Notemos que $f \notin C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, pois ela não é diferenciável em (veja a figura acima)

$$x = -1, \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = 1.$$

Utilizando-se a expressão (6.33) obteremos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.33)}{=} \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ &\stackrel{(6.46), (6.48)}{=} \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(t, x) \doteq \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.49)$$

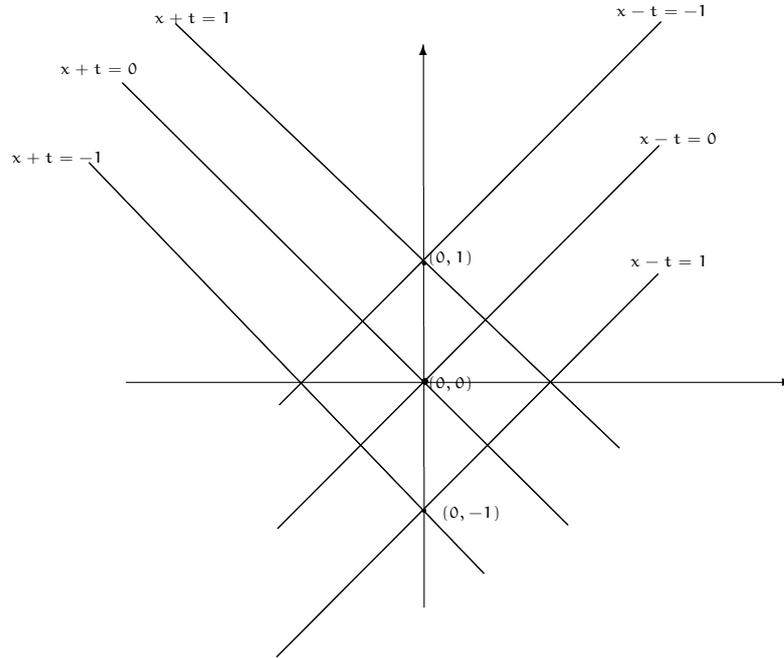
será uma solução (não clássica) do problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16), com (6.46), (6.47), (6.48).

Observemos que a função $u = u(t, x)$, dada por (6.49), será contínua em \mathbb{R}^2 , mas não será diferenciável em todo \mathbb{R}^2 , mais precisamente, não será diferenciável nas retas características que passam pelos pontos

$$(0, -1), \quad (0, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1),$$

ou seja, sobre as retas (veja a figura abaixo):

$$x \pm t = 0, \quad x \pm t = 1 \quad \text{e} \quad x \pm t = -1.$$



Considerando somente as retas características que passam pelos pontos

$$(0, -1) \quad \text{e} \quad (0, 1),$$

elas dividirão o plano tOx em nove regiões, a saber (veja a figura abaixo):

$$I \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; x+t < -1 \text{ e } x-t < -1\}, \quad (6.50)$$

$$II \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; -1 < x+t < 1 \text{ e } x-t < -1\}, \quad (6.51)$$

$$III \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; 1 < x+t \text{ e } x-t < -1\}, \quad (6.52)$$

$$IV \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; 1 < x+t \text{ e } -1 < x-t < 1\}, \quad (6.53)$$

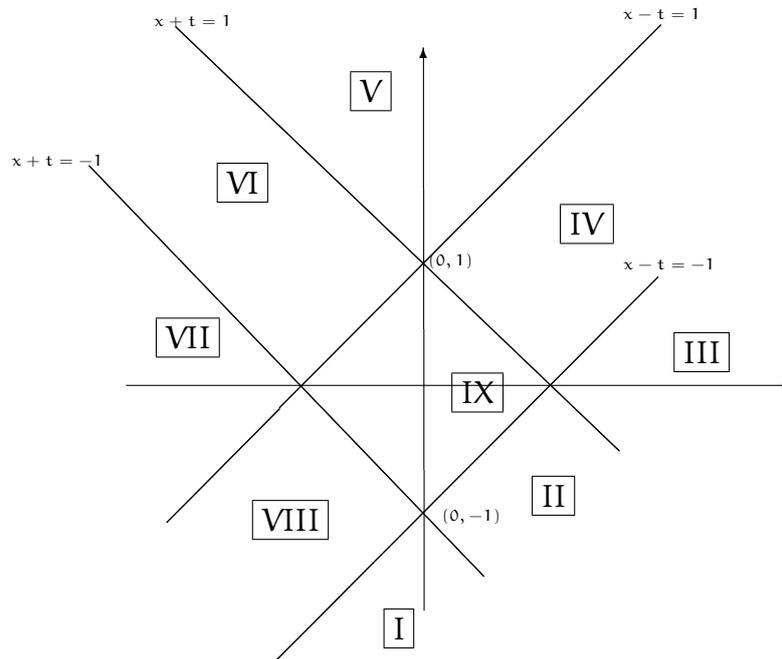
$$V \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; 1 < x+t \text{ e } 1 < x-t\}, \quad (6.54)$$

$$VI \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; -1 < x+t < 1 \text{ e } 1 < x-t\}, \quad (6.55)$$

$$VII \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; x+t < -1 \text{ e } 1 < x-t\}, \quad (6.56)$$

$$VIII \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; x+t < -1 \text{ e } -1 < x-t < 1\}, \quad (6.57)$$

$$IX \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; -1 < x+t < 1 \text{ e } -1 < x-t < 1\}. \quad (6.58)$$



Notemos que:

- para $(t, x) \in I$, de (6.50), teremos:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{x+t < -1 \text{ e } (6.47)_0} + \overbrace{f(x-t)}^{x-t < -1 \text{ e } (6.47)_0}}{2} \\
 &= 0;
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

- para $(t, x) \in II$, de (6.51), teremos:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{-1 < x+t \leq 1 \text{ e } (6.47)_{-2|x+t|+2}} + \overbrace{f(x-t)}^{x-t < -1 \text{ e } (6.47)_0}}{2} \\
 &= -|x+t| + 1;
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

- para $(t, x) \in III$, de (6.52), teremos:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{1 < x+t \text{ e } (6.47)_0} + \overbrace{f(x-t)}^{x-t < -1 \text{ e } (6.47)_0}}{2} \\
 &= 0;
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

- para $(t, x) \in IV$, de (6.53), teremos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{1 < x+t \leq 1} \cdot \overbrace{f(x-t)}^{-1 < x-t \leq 1}}{2} \\ &= -|x-t| + 1; \end{aligned} \quad (6.62)$$

- para $(t, x) \in V$, de (6.54), teremos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{1 < x+t \leq 1} + \overbrace{f(x-t)}^{1 < x-t \leq 1}}{2} \\ &= 0; \end{aligned} \quad (6.63)$$

- para $(t, x) \in VI$, de (6.55), teremos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{-1 < x+t \leq 1} + \overbrace{f(x-t)}^{1 < x-t \leq 1}}{2} \\ &= -|x-t| + 1; \end{aligned} \quad (6.64)$$

- para $(t, x) \in VII$, de (6.56), teremos:

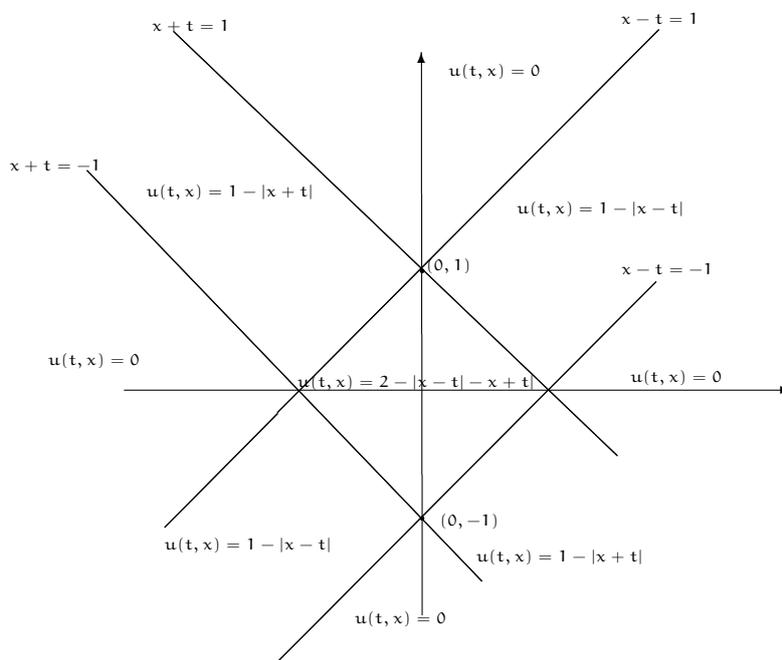
$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{x+t < 1} + \overbrace{f(x-t)}^{1 < x-t \leq 1}}{2} \\ &= 0; \end{aligned} \quad (6.65)$$

- para $(t, x) \in VIII$, de (6.57), teremos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{x+t < -1} + \overbrace{f(x-t)}^{-1 < x-t \leq 1}}{2} \\ &= -|x-t| + 1; \end{aligned} \quad (6.66)$$

- para $(t, x) \in IX$, de (6.58), teremos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(6.49)}{=} \frac{\overbrace{f(x+t)}^{-1 < x+t \leq 1} + \overbrace{f(x-t)}^{-1 < x-t \leq 1}}{2} \\ &= -|x+t| + 1 - |x-t| + 1 \\ &= 2 - |x+t| - |x-t|; \end{aligned} \quad (6.67)$$



□

Observação 6.68

1. Observemos que a função $u = u(t, x)$, cujas expressões são dadas (6.59) à (6.67), só não é diferenciável sobre as retas características

$$x \pm t = 1, \quad x \pm t = -1 \quad \text{e} \quad x \pm t = 0,$$

que são as curvas características planas que passam pelos pontos

$$(1, 0), \quad (-1, 0) \quad \text{e} \quad (0, 0),$$

onde a função $u = u(t, x)$ coincide com a função f e esta última, não é diferenciável nos pontos

$$x = 1, \quad x = -1 \quad \text{e} \quad x = 0.$$

A verificação deste será deixado como exercício para o leitor.

2. Notemos também que, no problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16), para $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, se considerarmos

$$c \doteq 1 \quad \text{e} \quad g \equiv 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R},$$

então, de (6.33), segue que

$$u(t, x) \doteq \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.69)$$

Assim, para $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\begin{aligned} u(-t, x) &\stackrel{(6.69)}{=} \frac{f[x + (-t)] + f[x - (-t)]}{2} \\ &= \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} \\ &\stackrel{(6.69)}{=} u(t, x), \end{aligned}$$

ou seja, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, a função

$$t \mapsto u(t, x_0)$$

será uma função par, independentemente da função f .

3. Notemos também que, , no problema de Cauchy (6.14), (6.15), (6.16), para $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, para

$$c \doteq 1 \quad \text{e} \quad g \equiv 0, \quad \text{em } \mathbb{R},$$

então, também de (6.33), se a função f for uma função par, para $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} u(t, -x) &\stackrel{(6.69)}{=} \frac{f[(-x) + t] + f[(-x) - t]}{2} \\ &= \frac{f[-(x-t)] + f[-(x+t)]}{2} \\ &\stackrel{f \text{ é par}}{=} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} \\ &\stackrel{(6.69)}{=} u(t, x), \end{aligned}$$

ou seja, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ fixado a função

$$x \mapsto u(t_0, x)$$

será uma função par, se a função f for uma função par.

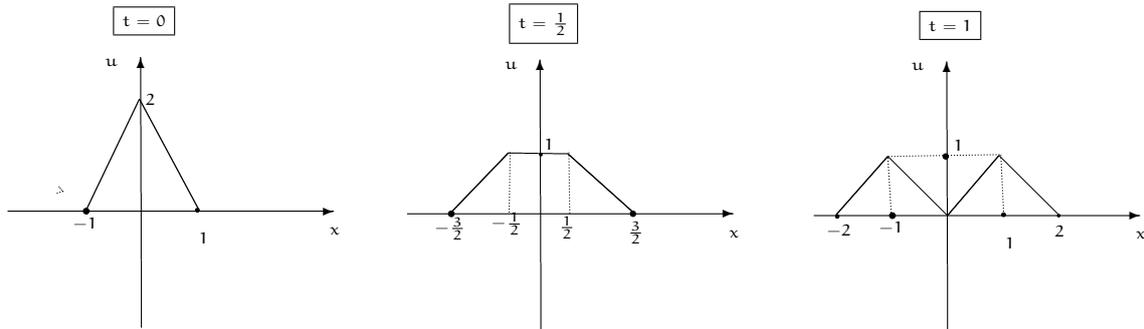
4. As figuras abaixo exibem as representações geométricas dos gráficos das funções

$$x \mapsto u(t_0, x),$$

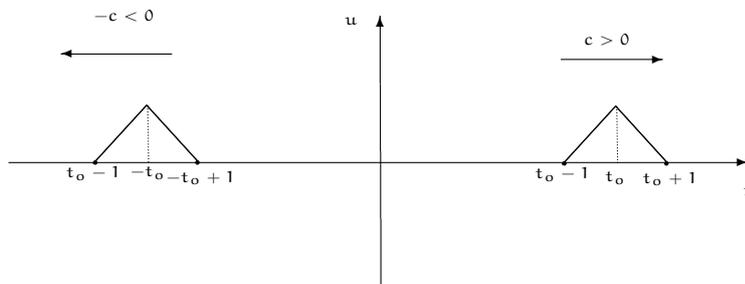
no plano xOu , para

$$t_0 = 0, \quad t_0 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad t_0 = 1,$$

para o caso tratado no Exercício (6.45):



5. Do ponto de vista geométrico, quando t varia, de 0 à 1 , a onda, cujo perfil é dada pela representação geométrica do gráfico da função f , divide-se em duas ondas, que propagam-se com velocidade c e $-c$, quando $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, respectivamente (veja a figura abaixo).



6.3 Funções pares, ímpares e periódicas

Na seção anterior utilizamos a fórmula de d'Alembert para a solução geral da equação da onda (6.14) (isto é, a expressão (6.33)) para obter uma solução do problema da corda infinita vibrante, contida num plano fixado, ou seja, o problema de Cauchy associado à equação da onda em \mathbb{R}^2 , a saber, o problema de Cauchy (6.14), (6.15) e (6.16).

Nesta seção trataremos de uma problema semelhante ao tratado na seção anterior, para o caso em que a corda é finita, mais precisamente, vamos encontrar uma solução do problema de Cauchy

$$u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (6.70)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (6.71)$$

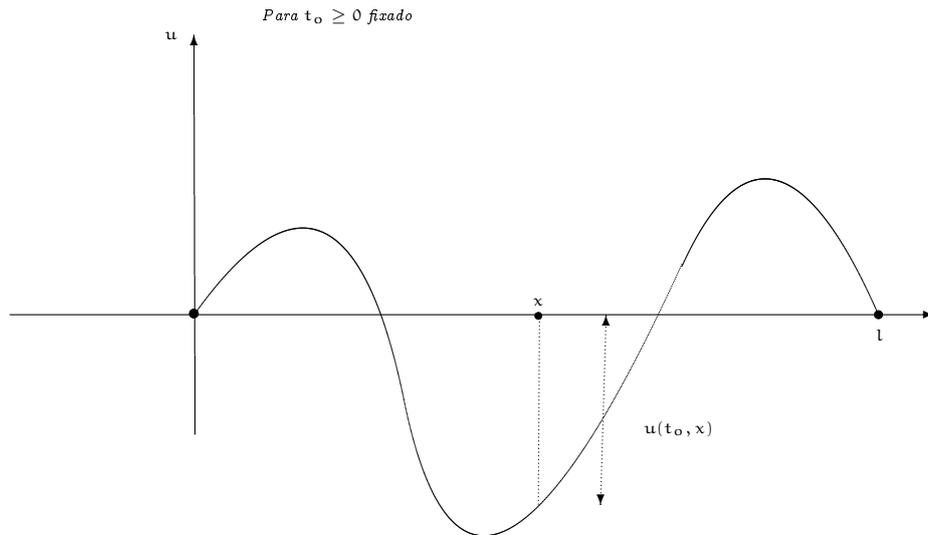
$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (6.72)$$

$$u_t(0, x) = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (6.73)$$

onde $f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada, $c, L \in (0, \infty)$ são constantes fixadas.

Observação 6.74 *Vimos anteriormente, que o problema de Cauchy acima descreve o deslocamento da posição de repouso de uma corda finita, de comprimento L , que vibra*

num plano fixado, cujas extremidades estão fixadas, cujo perfil inicial é a representação geométrica do gráfico da função f e a velocidade inicial é zero (veja a figura abaixo).



Como vimos na Observação (2.99) (mais precisamente em (2.106)), para o problema de Cauchy acima admitir solução a função f deverá satisfazer a condição de compatibilidade

$$f(0) = f(L) = 0. \quad (6.75)$$

Observação 6.76

1. Observemos que não podemos utilizar, diretamente, a fórmula de d'Alembert (isto é, (6.33))!

De fato, notemos que, de (6.33), deveremos ter

$$u(t, x) \stackrel{g(x) \stackrel{(6.73)}{=} 0}{=} \underline{\underline{\text{para } x \in [0, L]}} \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2}. \quad (6.77)$$

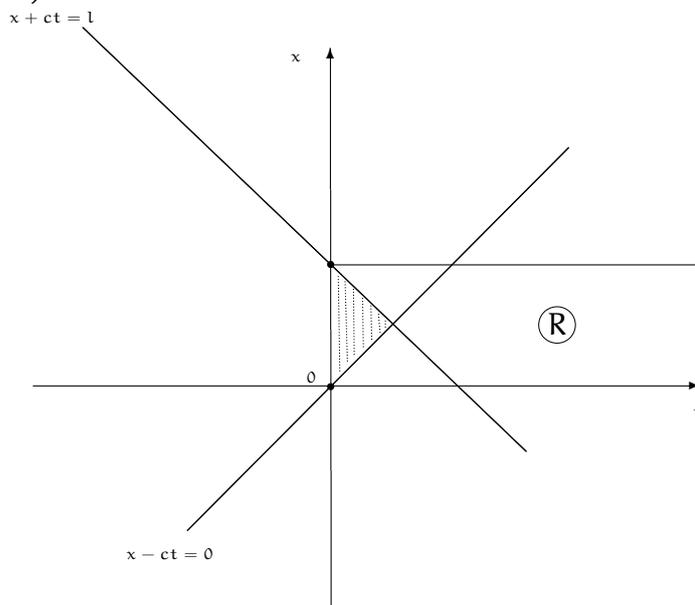
Como a função f está definida apenas no intervalo $[0, L]$, não faz sentido, por exemplo, computar (fazendo $x = L$ e $x = 0$ na expressão acima)

$$f(L + ct) \quad \text{ou} \quad f(0 - ct),$$

para $t \in (0, \infty)$, isto é, só poderíamos utilizar a expressão acima quando

$$x + ct, x - ct \in [0, L],$$

o que nos forneceria uma solução em uma região do plano relativamente pequena (veja a figura abaixo).



O que fazer para encontrar a solução nos outros pontos da região (veja a figura acima)

$$R \doteq [0, \infty) \times [0, L]?$$

2. O que faremos para resolver essa questão é estendermos, de modo conveniente, a função \underline{f} a uma função, que denotaremos por \underline{F} , que estará definida em \mathbb{R} e utilizaremos a expressão (6.77) para a função \underline{F} , em lugar de utilizarmos a função \underline{f} .

A maneira como vamos fazermos esta extensão da função \underline{f} à \mathbb{R} , mostrará que a função \underline{F} (extensão da função \underline{f} à \mathbb{R}) será única e como isto a solução que será obtida do problema de Cauchy em questão também será única (como veremos mais adiante).

Começaremos supondo que já conheçamos a extensão apropriada da função \underline{f} à \mathbb{R} , ou seja, conhecemos a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$F(x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L]. \quad (6.78)$$

Neste caso, a função $u = u(t, x)$ (consequência da fórmula de d'Alembert, isto é, (6.33)), dada por:

$$u(t, x) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (6.79)$$

será uma solução da equação da onda (6.70).

A seguir olharemos com cuidado algumas propriedades da função \underline{F} :

(i) Fazendo $x = 0$ em (6.79), obteremos:

$$u(t, 0) = \frac{F(0 + ct) + F(0 - ct)}{2}$$

como $u(t, 0) \stackrel{(6.71)}{=} 0$, teremos: $F(ct) + F(-ct) = 0$, para cada $t \in [0, \infty)$,

ou seja, $F(-ct) = -F(ct)$, para cada $t \in [0, \infty)$,

ou ainda, $F(-y) = -F(y)$, para cada $y \in \mathbb{R}$, (6.80)

mostrando que a função \underline{F} é uma função ímpar.

Notemos que, das condições de compatibilidade (6.75), sobre a função \underline{f} , teremos, em particular, que

$$f(0) = 0. \quad (6.81)$$

Isto implicará que a função \underline{F} estará bem definida no intervalo $[-L, L]$.

De fato, pois como

$$F(0) \stackrel{(6.78)}{=} f(0) \stackrel{(6.81)}{=} 0,$$

faz sentido considerar a extensão ímpar da função \underline{f} ao intervalo $[-L, L]$.

(ii) Fazendo $x = L$ em (6.79), obteremos:

$$u(t, L) = \frac{F(L + ct) + F(L - ct)}{2},$$

como $u(t, L) \stackrel{(6.71)}{=} 0$, teremos: $F(L + ct) + F(L - ct) = 0$, para cada $t \in [0, \infty)$,

ou seja, $F(L - ct) = -F(L + ct)$, para cada $t \in [0, \infty)$,

ou ainda, $F(L - y) = -F(L + y)$, para cada $y \in \mathbb{R}$. (6.82)

Com isto temos

$$\begin{aligned} F(y + 2L) &= F[L + (y + L)] \\ &\stackrel{(6.82)}{=} -F[\underbrace{L - (y + L)}_{=-y}] \\ &= -F(-y) \\ &\stackrel{(6.80)}{=} -[-F(y)] \\ &= F(y), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(y + 2L) = F(y), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}, \quad (6.83)$$

mostrando que a função \underline{F} deverá ser uma função $2L$ -periódica.

Notemos que, das condições de compatibilidade (6.75), sobre a função \underline{f} teremos, em particular, que

$$f(L) = 0. \quad (6.84)$$

Logo a função \underline{F} estará bem definida em \mathbb{R} .

De fato pois, como

$$F(L) \stackrel{(6.78)}{=} f(L) \stackrel{(6.84)}{=} 0 \quad (6.85)$$

e a função \underline{F} deverá ser uma função ímpar, segue que

$$F(-L) \stackrel{(6.80)}{=} -F(L) \stackrel{(6.85)}{=} 0.$$

Logo faz sentido considerarmos uma extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} à \mathbb{R} .

Podemos agora fazer as seguintes observações:

Observação 6.86

1. Notemos que as propriedades (6.78), (6.80) e (6.83) (ou seja, saber que a função \underline{F} deverá ser uma função ímpar e $2L$ -periódica) determinam, de modo único, a função \underline{F} .

De fato, notemos que:

- para $x \in [0, L]$, deveremos que

$$F(x) = f(x);$$

- para $x \in [-L, 0]$, como a função \underline{F} deverá ser uma função ímpar, deveremos ter

$$F(x) = -F(-x) \\ \stackrel{-x \in [0, L] \text{ e } (6.78)}{=} -f(-x);$$

- para $x \in [L, \infty)$, existirá $k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$x \in [(2k-1)L, (2k+1)L] = [2kL-L, 2kL+L], \quad (6.87)$$

$$\text{ou seja, } y \doteq x - 2kL \in [-L, L]. \quad (6.88)$$

Logo

$$\begin{aligned}
 F(x) &\stackrel{(6.88)}{=} F(y + 2kL) \\
 &\stackrel{(6.83)}{=} F(y) \\
 &\stackrel{(6.88)}{=} F(\underbrace{x - 2kL}_{\in [-L, L], \text{ por (6.88)}}) \\
 &\stackrel{(6.78)}{=} \begin{cases} -f[-(x - 2kL)], & \text{se } x - 2kL \in [-L, 0], \\ f(x - 2kL), & \text{se } x - 2kL \in [0, L] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -f(-x + 2kL), & \text{se } x - 2kL \in [-L, 0], \\ f(x - 2kL), & \text{se } x - 2kL \in [0, L] \end{cases}. \quad (6.89)
 \end{aligned}$$

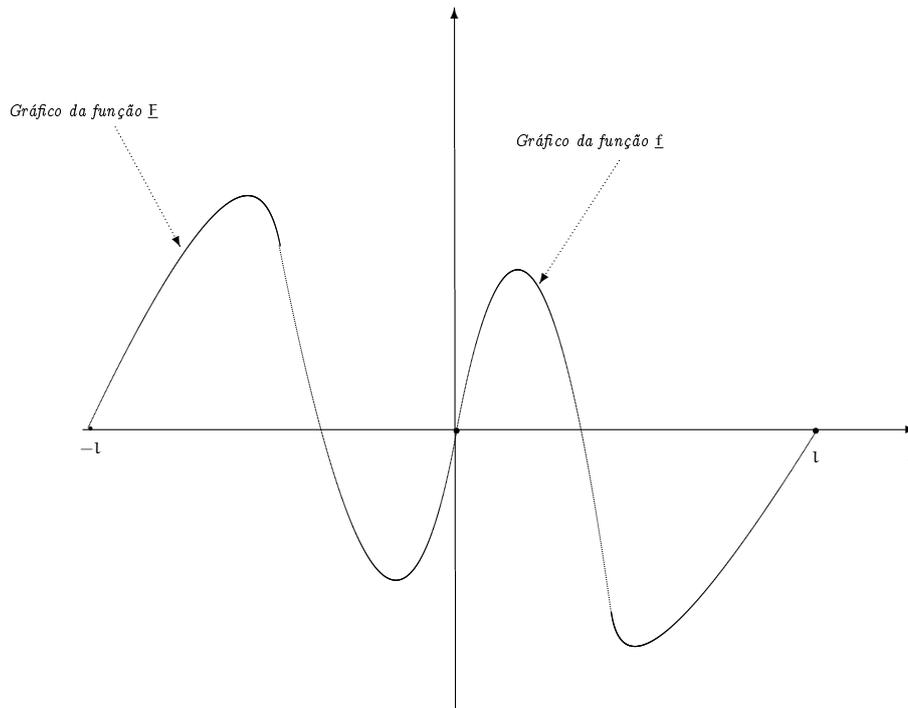
- para $x \in (-\infty, -L]$, teremos $-x \in [L, \infty)$, logo

$$F(x) \stackrel{(6.80)}{=} -F(-x),$$

e a expressão para $F(-x)$ pode ser obtida como no item acima (pois $-x \in [L, \infty)$).

Conclusão: a função F é a única extensão ímpar e $2L$ -periódica da função f , à \mathbb{R} .

2. Notemos, uma vez mais que, das condições de compatibilidade sobre a função f (isto é, (6.75)), a função F estará bem definida (veja a figura abaixo).



3. A função \underline{F} será dita a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} , à \mathbb{R} .
4. Se considerarmos a convenção que a derivada nos extremos inferior e superior de um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, sejam as derivadas laterais pela direita de $x = a$ e pela esquerda de $x = b$, respectivamente, então no caso da função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ denotaremos por

$$f'(0) \doteq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad e \quad f'(L) \doteq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(L+h) - f(L)}{h}, \quad (6.90)$$

ou seja,

$$f'(0) \doteq f'_+(0) \quad e \quad f'(L) \doteq f'_-(L). \quad (6.91)$$

5. Podemos considerar convenções semelhantes para as derivadas de ordem maior ou igual a dois de uma função, a valores reais, definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, nos pontos $x = a$ e $x = b$.

Deixaremos estas considerações como exercício para o leitor.

Agora estamos preparados para obter uma solução clássica $u = u(t, x)$ do problema de Cauchy (6.70), (6.71), (6.72) e (6.73).

Como vimos anteriormente uma candidata a solução clássica do problema de Cauchy acima será (veja (6.79)):

$$u(t, x) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (6.92)$$

onde a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (o dado inicial, que aparece em (6.72)).

Lembremos que como estamos procurando soluções clássicas do problema de Cauchy deveremos ter $F \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Uma condição necessária para que isto ocorra é que

$$f \in C^2([0, L]; \mathbb{R}). \quad (6.93)$$

Notemos que só a condição acima não implicará, necessariamente, que a função \underline{F} , que é a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} à \mathbb{R} , seja uma função que pertença à $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

A seguir veremos que a condição (6.93), com as condições de compatibilidade (6.75) e, além disso, com as condições adicionais

$$f''(0) = f''(L) = 0, \quad (6.94)$$

implicarão que $F \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e assim a função $u = u(t, x)$, dada por (6.92), será uma solução do problema de Cauchy dado.

Mostremos que, com as condições acima, teremos $F \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Para isto, afirmamos que:

1. $F \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Como a função \underline{F} é a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} , temos que a mesma será contínua no ponto

$$x_0 \in ((k-1)L, kL), \quad \text{para } k \in \mathbb{Z},$$

pois a função \underline{f} é contínua em $(0, L)$.

Os detalhes da verificação deste fato serão deixados como exercício para o leitor.

Notemos também que, como a função \underline{F} é a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} , para mostrar a continuidade da função \underline{F} no ponto

$$x = kL, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z},$$

bastará mostrar a continuidade no pontos

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = L.$$

Os detalhes da verificação deste fato serão deixados como exercício para o leitor.

Observemos que, a continuidade da função \underline{F} em $x = 0$, segue da continuidade da função \underline{f} à direita de $x = 0$ e do fato que a função \underline{F} é a extensão ímpar da função \underline{f} .

Mais precisamente, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &\stackrel{x \in (0, L), \text{ teremos: } F(x) \stackrel{(6.78)}{=} f(x)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ &\stackrel{f \text{ é cont. em } x=0}{=} f(0) \\ &\stackrel{(6.75)}{=} 0 \\ &\stackrel{(6.78)}{=} F(0), \end{aligned}$$

Para a continuidade à esquerda de $x = 0$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) &\stackrel{x \in (-L, 0), \text{ teremos: } F(x) = -F(-x) \stackrel{(6.78)}{=} -f(-x)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} [-f(-x)] \\ &\stackrel{f \text{ é cont. em } x=0}{=} -f(0) \\ &\stackrel{(6.75)}{=} 0 \\ &\stackrel{(6.75)}{=} f(0) \\ &\stackrel{(6.78)}{=} F(0). \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0),$$

mostrando que a função \underline{F} é contínua em $x = 0$.

A continuidade da função \underline{F} em $x = L$, segue da continuidade da função \underline{f} à esquerda de $x = L$ e do fato que a função \underline{F} é uma função ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} .

Mais precisamente, teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow L^-} F(x) &\stackrel{x \in (0, L), \text{ teremos: } F(x) \stackrel{(6.78)}{=} f(x)}{=} \lim_{x \rightarrow L^-} f(x) \\ &\stackrel{f \text{ é cont. em } x=L}{=} f(L) \\ &\stackrel{(6.75)}{=} 0 \\ &\stackrel{(6.78)}{=} F(L), \end{aligned}$$

Para a continuidade à direita de $x = L$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow L^+} F(x) &\stackrel{x \in (L, 2L), \text{ teremos: } F(x) \stackrel{(6.89)}{=} -f(-x+2L)}{=} - \lim_{x \rightarrow L^+} f(-x + 2L) \\ &\stackrel{y \stackrel{=}{=} 2L-x}{=} - \lim_{y \rightarrow L^-} f(y) \\ &\stackrel{f \text{ é cont. em } x=L}{=} -f(L) \\ &\stackrel{(6.75)}{=} 0 \\ &\stackrel{(6.75)}{=} f(L) \\ &\stackrel{(6.78)}{=} F(L). \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow L} F(x) = 0 = F(L),$$

mostrando que a função \underline{F} é contínua em $x = L$.

Com isto podemos concluir que $F \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

2. $F \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

De fato, procedendo como no item acima, notamos que se

$$x_0 \in ((k-1)L, kL), \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z},$$

segue, de (6.89), que a função \underline{F} será continuamente diferenciável em x_0 .

Os detalhes da verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

Logo, basta mostrar que a função \underline{F} é continuamente diferenciável em

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = L.$$

2.1 Afirmamos que a função \underline{F} é diferenciável em $x = 0$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} &\stackrel{h \in (0, L) \text{ e } (6.89)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &\stackrel{f \text{ é dif. em } x=0}{=} f'(0), \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(h) - F(0)}{h} &\stackrel{h \in (-L, 0) \text{ e } (6.89)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-f(-h) - \overbrace{f(0)}^{(6.75)_{0=-f(0)}}}{h} \\ &\stackrel{k \doteq -h}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{-[f(k) - f(0)]}{-k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f(k) - f(0)}{k} \\ &\stackrel{f \text{ é dif. em } x=0}{=} f'(0). \end{aligned}$$

Logo existe o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h}$ e igual à $f'(0)$, mostrando que a função \underline{F} é diferenciável em $x = 0$ e

$$F'(0) = f'(0). \tag{6.95}$$

2.2 Afirmamos que a função \underline{F} é diferenciável em $x = L$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(h + L) - F(L)}{h} &\stackrel{h+L \in (0, L) \text{ e } (6.89)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h + L) - f(L)}{h} \\ &\stackrel{f \text{ é dif. em } x=L}{=} f'(L), \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h + L) - F(L)}{h} &\stackrel{h+L \in (L, 2L) \text{ e } (6.89)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-f[\overbrace{(-L - h) + 2L}^{=-h+L}] - \overbrace{f(L)}^{(6.75)_{0=-f(L)}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-f(-h + L) - [-f(L)]}{h} \\ &\stackrel{k \doteq -h}{=} \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{-[f(k + L) - f(L)]}{-k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{f(k + L) - f(L)}{k} \\ &\stackrel{f \text{ é dif. em } x=L}{=} f'(L), \end{aligned}$$

logo existe o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h+L) - F(L)}{h}$ e é igual a $\underline{f}'(L)$, mostrando que a função \underline{F} é diferenciável em $x = L$ e

$$\underline{F}'(L) = f'(L). \quad (6.96)$$

Logo de (6.89) e dos itens acima, podemos concluir que a função \underline{F} é diferenciável em \mathbb{R} e, além disso, teremos:

$$\underline{F}'(x) = \begin{cases} f'(-x + 2kL), & \text{para } x - 2kL \in [-L, 0], \\ f'(x - 2kL), & \text{para } x - 2kL \in [0, L] \end{cases}. \quad (6.97)$$

A verificação deste dado será deixada como exercício para o leitor.

Lembremos que a função \underline{F} é uma função ímpar e $2L$ -periódica em \mathbb{R} , logo a função \underline{F}' será uma função par e $2L$ -periódica em \mathbb{R} .

2.3 $F' \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Como a função \underline{F}' é dada por (6.97) segue que, para

$$x_0 \neq kL, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z},$$

ela será contínua em $x = x_0$, pois a função \underline{f}' é contínua no correspondente ponto do intervalo $(0, L)$.

Os detalhes da verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

Para estudar a continuidade da função \underline{F}' nos pontos

$$x_0 = kL, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z},$$

do fato que a \underline{F}' é uma função par e $2L$ -periódica em \mathbb{R} (pois é a derivada de uma função ímpar e $2L$ -periódica), vemos que basta estudar a continuidade da mesma em

$$x_0 = 0 \quad \text{e} \quad x_0 = L.$$

Os detalhes da verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

Para mostrarmos a continuidade da mesma em $x_0 = 0$, vejamos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \underline{F}'(x) &\stackrel{x \in (0, L) \text{ teremos: } \underline{F}'(x) \stackrel{(6.78)}{=} f'(x)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \\ &\stackrel{f' \text{ é cont. em } x=0}{=} f'(0) \\ &\stackrel{(6.78)}{=} \underline{F}'(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \underline{F}'(x) &\stackrel{x \in (-L, 0) \text{ teremos: } \underline{F}'(x) \stackrel{(6.89)}{=} \text{com } k=0 f'(-x)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} [f'(-x)] \\ &\stackrel{f' \text{ é cont. em } x=0}{=} f'(0) \\ &\stackrel{(6.89) \text{ com } k=0}{=} \underline{F}'(0), \end{aligned}$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = F'(0),$$

mostrando que a função \underline{F}' é contínua em $x = 0$.

De modo semelhante, estudamos a continuidade da função \underline{F}' no ponto $x = L$, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow L^-} F'(x) &\stackrel{x \in (0, L) \text{ teremos: } F'(x) \stackrel{(6.89)}{=} \stackrel{\text{com } k=0}{=} f'(x)}{=} \lim_{x \rightarrow L^-} f'(x) \\ &\stackrel{f' \text{ é cont. em } x=L}{=} f'(L) \\ &\stackrel{(6.89) \text{ com } k=0}{=} F'(L), \\ \lim_{x \rightarrow L^+} F'(x) &\stackrel{x \in (L, 2L) \text{ teremos: } F'(x) \stackrel{(6.89)}{=} \stackrel{\text{com } k=1}{=} f'(-x+2L)}{=} \lim_{x \rightarrow L^+} [f'(-x+2L)] \\ &\stackrel{y \stackrel{=}{=} 2L-x}{=} \lim_{y \rightarrow L^-} f'(y) \\ &\stackrel{f' \text{ é cont. em } x=L}{=} f'(L) \\ &\stackrel{(6.89) \text{ com } k=0}{=} F'(L). \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow L} F'(x) = F'(L),$$

mostrando que a função \underline{F}' é contínua em $x = L$.

Com isto podemos concluir que $F \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Antes de prosseguir na demonstração que $F \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, faremos algumas observações que poderão ser úteis em outras ocasiões.

Observação 6.98 *Observemos que:*

1. para mostrar que a função \underline{F} , a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} , está definida em \mathbb{R} , precisamos utilizar o fato que a função \underline{f} , que está definida somente em $[0, L]$, satisfaz

$$f(0) = f(L) = 0. \quad (6.99)$$

Portanto, para mostrar que existe a extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R} , de uma função definida em $[0, L]$, precisamos de (6.99).

Conclusão: existe a extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R} , de uma função definida em $[0, L]$, se, e somente, se, vale (6.99).

2. para mostrar que a função \underline{F} é contínua em \mathbb{R} , precisamos utilizar o fato que a função \underline{f} é contínua em $[0, L]$ e que satisfaz (6.99).

Logo, para mostrar que a extensão ímpar e $2L$ -periódica de uma função contínua, definida em $[0, L]$, é contínua em \mathbb{R} , precisamos de (6.99).

Conclusão: a extensão ímpar e $2L$ -periódica a \mathbb{R} , de uma função definida e contínua em $[0, L]$, será contínua em \mathbb{R} se, e somente, se, vale (6.99).

3. para mostrar que a função \underline{F} é diferenciável em \mathbb{R} , utilizamos que ela é a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} que é diferenciável em $[0, L]$.

Logo, para mostrar que a extensão ímpar e $2L$ -periódica de uma função definida e diferenciável em $[0, L]$, seja diferenciável em \mathbb{R} precisamos, além da diferenciabilidade da função dada em $[0, L]$, de (6.99).

Conclusão: a extensão ímpar e $2L$ -periódica a \mathbb{R} , de uma função definida diferenciável em $[0, L]$, será diferenciável em \mathbb{R} se, e somente, se, vale (6.99).

4. sendo a função \underline{F} uma função ímpar, $2L$ -periódica em \mathbb{R} e diferenciável em \mathbb{R} , segue que a sua função derivada \underline{F}' será uma função par, $2L$ -periódica em \mathbb{R} e, além disso, será a extensão par e $2L$ -periódica a \mathbb{R} , da função \underline{f}' , que está definida em $[0, L]$.

Logo, para mostrar que a extensão par e $2L$ -periódica a \mathbb{R} , de uma função contínua definida em $[0, L]$, seja contínua em \mathbb{R} não precisamos de nenhuma restrição adicional.

Portanto, para mostrar que a função \underline{F}' é contínua em \mathbb{R} , só utilizamos o fato que ela é extensão par e $2L$ -periódica a \mathbb{R} , da função \underline{f}' , que é contínua em $[0, L]$.

Conclusão: a extensão par e $2L$ -periódica a \mathbb{R} , de uma função definida e contínua em $[0, L]$, é uma função contínua em \mathbb{R} .

5. se uma função é par e $2L$ -periódica em \mathbb{R} , então sua derivada será uma função ímpar e $2L$ -periódica em \mathbb{R} .

Notemos que, se a função \underline{F}' (a extensão par e $2L$ -periódica a \mathbb{R} , da função \underline{f}' , que está definida em $[0, L]$) é diferenciável em \mathbb{R} , segue que a função \underline{F}'' será uma função ímpar e $2L$ -periódica em \mathbb{R} .

Logo a função \underline{F}'' deverá ser a extensão ímpar e $2L$ -periódica a \mathbb{R} , da função \underline{f}'' , que está definida em $[0, L]$.

Portanto, pelos itens 1. e 2. acima, deveremos ter

$$f''(0) = f''(L) = 0, \quad (6.100)$$

para que $F \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Com isto acabamos de provar os seguintes resultados gerais:

Proposição 6.101 *Dada $f \in C([0, L]; \mathbb{R})$, tal que*

$$f(0) = f(L) = 0, \quad (6.102)$$

consideremos a função $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$F(x) \doteq \begin{cases} f(x - 2kL), & \text{para } x \in [2kL, (2k+1)L], \\ -f(-x + 2kL), & \text{para } x \in [(2k-1)L, 2kL] \end{cases}, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}. \quad (6.103)$$

Então a função \underline{F} é a extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R} , da função \underline{f} . Além disso $F \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Proposição 6.104 *Dada $g \in C([0, L]; \mathbb{R})$ consideremos a função $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:*

$$G(x) \doteq \begin{cases} g(x - 2kL), & \text{para } x \in [2kL, (2k+1)L], \\ g(-x + 2kL), & \text{para } x \in [(2k-1)L, 2kL] \end{cases}, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}. \quad (6.105)$$

Então a função \underline{G} é a extensão par e $2L$ -periódica à \mathbb{R} , da função \underline{g} . Além disso $G \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Como consequência destes resultados, temos o:

Corolário 6.106 *Sejam $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$, tal que*

$$f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0 \quad (6.107)$$

e consideremos a função $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$F(x) \doteq \begin{cases} f(x - 2kL), & \text{para } x \in [2kL, (2k+1)L], \\ -f(-x + 2kL), & \text{para } x \in [(2k-1)L, 2kL] \end{cases}, \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}. \quad (6.108)$$

Então a função \underline{F} é a extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R} , da função \underline{f} . Além disso, $F \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Uma outra propriedade muito útil de funções periódicas é dada pela:

Proposição 6.109 *Seja $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, uma função T -periódica e integrável em cada intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.*

Então, para todo $c \in \mathbb{R}$ temos que

$$\int_c^{c+T} g(x) dx = \int_0^T g(x) dx. \quad (6.110)$$

Demonstração:

Como a função g é contínua em $[a, b]$, segue que:

$$\begin{aligned} \int_c^{c+T} g(x) dx &= \int_c^0 g(x) dx + \int_0^T g(x) dx + \int_T^{c+T} g(x) dx \\ &= - \int_0^c g(x) dx + \int_0^T g(x) dx + \underbrace{\int_T^{c+T} g(x) dx}_{\doteq \boxed{\text{I}}} . \end{aligned} \quad (6.111)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} y \doteq x - T, & \text{logo: } dy = dx \\ x = T, & \text{logo: } y = 0 \\ x = c + T, & \text{logo: } y = c \end{cases} ,$$

na integral definida $\boxed{\text{I}}$, obteremos:

$$\begin{aligned} \int_T^{c+T} g(x) dx &= \int_0^c \underbrace{g(y+T)}_{\substack{g \text{ é } T\text{-periódica} \\ g(y)}} dy \\ &= \int_0^c g(y) dy . \end{aligned} \quad (6.112)$$

Substituindo (6.112) em (6.111), obteremos:

$$\begin{aligned} \int_c^{c+T} g(x) dx &= - \int_0^c g(x) dx + \int_0^T g(x) dx + \int_0^c g(y) dy \\ &= \int_0^T g(x) dx , \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Retornemos ao problema de Cauchy (6.70), (6.71), (6.72) e (6.73).

Nosso objetivo é obter um resultado de existência para este problema de Cauchy.

Para isto precisamos estabelecer a classe onde a solução deverá existir que, na situação atual, será

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}) . \quad (6.113)$$

Observemos que, nesta classe, precisamos dizer o que significará a condição (6.73), ou seja:

$$u_t(0, x) = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (6.114)$$

já que, em princípio, a função $u = u(t, x)$ não é, necessariamente, diferenciável no ponto $(0, x)$, para cada $x \in [0, L]$.

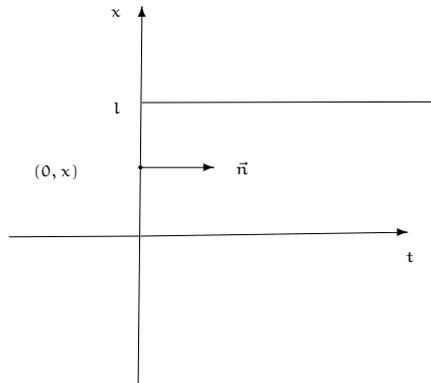
Uma possibilidade seria pensar em $u_t(0, x)$ como a derivada direcional, na direção da normal nos pontos $(0, x)$ que pertencem à fronteira de (veja a figura abaixo)

$$[0, \infty) \times [0, L],$$

ou seja, a condição (6.73), poderia ser vista como sendo:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(h, x) - u(0, x)}{h} = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L]. \quad (6.115)$$

Notemos que, para cada $h \in (0, \delta)$, temos que faz sentido calcular $u(h, x)$, para cada $x \in [0, L]$.



Assim procuraremos soluções $u = u(t, x)$ que pertençam à seguinte classe:

$$V \doteq \{u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}), \text{ e } u \text{ satisfazendo (6.115)}\}. \quad (6.116)$$

Como vimos anteriormente, se $u \in V$ é uma solução do problema de Cauchy acima, como

$$u \in C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}),$$

ela deverá ser da forma (6.79), para cada $x \in [0, L]$, onde a função \underline{F} deverá ser a extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R} , da função \underline{f} , que está definida em $[0, L]$.

Notemos que, como $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$ e satisfaz (6.107) segue (das considerações acima) que $F \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, implicando que

$$u \in C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}),$$

ou seja, a função $u = u(t, x)$, dada por (6.79), é a restrição de uma função que pertence a $C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, ao conjunto $[0, \infty) \times [0, L]$.

Temos também:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &\stackrel{(6.79)}{=} \frac{F(0 + ct) + F(0 - ct)}{2} \\ &= \frac{F(ct) + F(-ct)}{2} \\ &\stackrel{F \text{ é ímpar}}{=} 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t, L) &\stackrel{(6.79)}{=} \frac{F(L + ct) + F(L - ct)}{2} \\ &\stackrel{F \text{ é } 2L\text{-periódica}}{=} \frac{F[(L + ct) - 2L] + F(L - ct)}{2} \\ &= \frac{F(-L + ct) + F(L - ct)}{2} \\ &= \frac{F[-(L - ct)] + F(L - ct)}{2} \\ &\stackrel{F \text{ é ímpar}}{=} \frac{-F(L - ct) + F(L - ct)}{2} = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

ou seja, a função $u = u(t, x)$, dada por (6.79), satisfaz as condições de contorno (6.71).

Além disso, temos

$$\begin{aligned} u(0, x) &\stackrel{(6.79)}{=} \frac{F(x + c \cdot 0) + F(x - c \cdot 0)}{2} \\ &= \frac{F(x) + F(x)}{2} \\ &= F(x) \\ &\stackrel{(6.78)}{=} f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u_t(0, x) &\doteq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(h, x) - u(0, x)}{h} \\
&\stackrel{(6.79)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[F(x + ch) + F(x - ch)] - [F(x + c \cdot 0) + F(x - c \cdot 0)]}{2h} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x + ch) - F(x - ch) - 2F(x)}{h} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{F(x + ch) - F(x)}{h} - \frac{F(x - ch) - F(x)}{h} \right\} \\
&\stackrel{c \neq 0}{=} \frac{1}{2} c \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{F(x + ch) - F(x)}{ch} - \frac{F(x - ch) - F(x)}{ch} \right\} \\
&\stackrel{k \doteq ch, c > 0}{=} \frac{1}{2} c \lim_{k \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{F(x + k) - F(x)}{k} - \frac{F(x - k) - F(x)}{k} \right\} \\
&= \frac{1}{2} [F'(x) - F'(x)] \\
&= 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \tag{6.117}
\end{aligned}$$

ou seja, a função $u = u(t, x)$, dada por (6.79), satisfaz (6.73).

Com isto acabamos de porvar o

Teorema 6.118 *Suponhamos que $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$ e satisfaz (6.107).*

Então a função $u = u(t, x)$, dada por (6.79), é uma solução do problema de Cauchy (6.70), (6.71), (6.72) e (6.73), na classe V (dada por (6.116)), onde a função \underline{F} é a extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R} , da função \underline{f} .

Além disso $u \in C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$.

A seguir faremos uma observação relacionadas com as hipótese do Teorema acima.

Observação 6.119 *Se a função \underline{f} , ou alguma de suas derivadas até a 2.a ordem, tem uma descontinuidade em $x_0 \in [0, L]$, essa descontinuidade irá propagar-se ao longo da curva característica plana que passa pelo ponto*

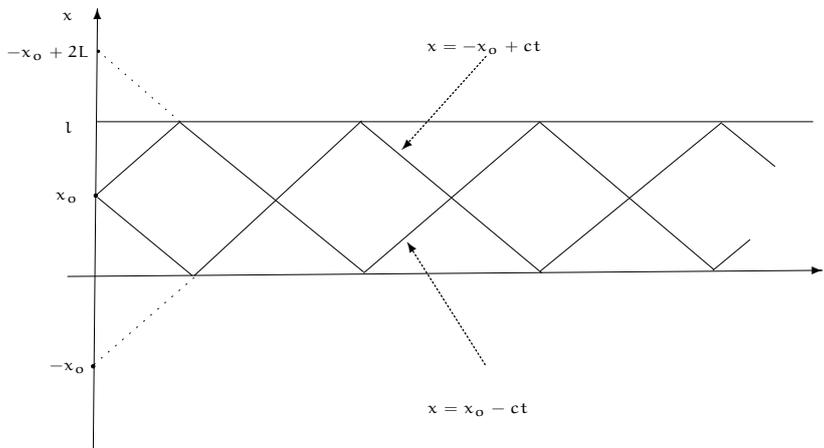
$$(0, \pm x_0 + 2kL), \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z},$$

que pertence a faixa

$$[0, \infty) \times [0, L].$$

Isto se deve ao fato que (veja o item 6. da Observação (6.40)) a função \underline{F} , a extensão ímpar e $2L$ -periódica de função \underline{f} à \mathbb{R} , possuirá descontinuidades nos pontos (veja a figura abaixo)

$$\pm x_0 + 2kL, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z}.$$



Consideremos o seguintes exemplo:

Exemplo 6.120 *Encontre uma solução do problema de Cauchy (6.70), (6.71), (6.72), (6.73), na classe \underline{V} , definida em (6.105), onde*

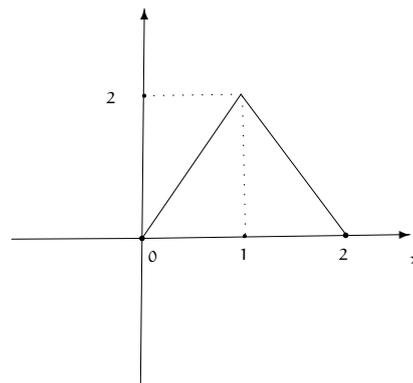
$$c \doteq 1, \quad L \doteq 2 \quad (6.121)$$

e a função $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) \doteq \begin{cases} 2x, & \text{para } x \in [0, 1], \\ 4 - 2x, & \text{para } x \in [1, 2]. \end{cases} \quad (6.122)$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo.



Notemos que $f \in C([0, 2]; \mathbb{R})$, não é diferenciável em $x_0 = 1$ e

$$f(0) = f(2) = 0. \quad (6.123)$$

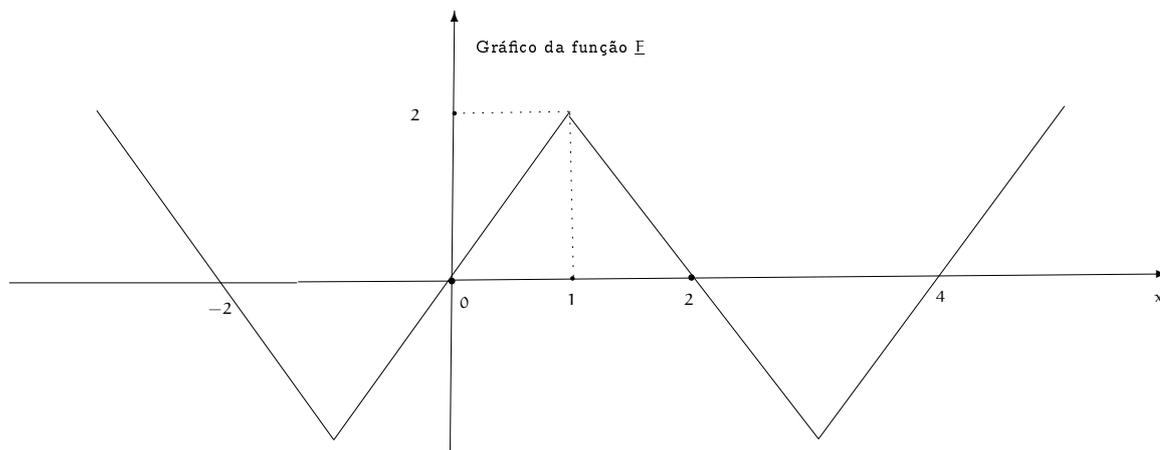
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Uma solução do problema de Cauchy, tendo-se (6.121), é dada por (6.79), ou seja:

$$u(t, x) \stackrel{(6.121)}{=} \frac{F(x+t) + F(x-t)}{2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, 2], \quad (6.124)$$

onde a função \underline{F} é a extensão ímpar de \underline{f} -periódica à \mathbb{R} , da função \underline{f} .

Notemos que a função \underline{F} , a extensão ímpar e \underline{f} -periódica, da função \underline{f} à \mathbb{R} , terá a representação geométrica do seu gráfico dada pela figura abaixo.

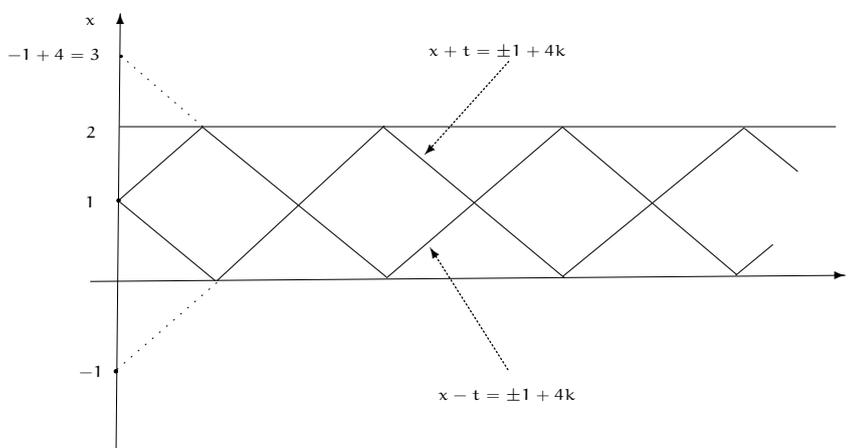


Devido a este fato e a Observação (6.119), segue que a solução dada por (6.124) não será diferenciável ao longo das retas

$$x \pm t = \pm 1 + 4k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z},$$

que são curvas características planas associadas à equação da onda (6.70), tendo-se (6.121), que interceptam a região (veja a figura abaixo)

$$[0, \infty) \times [0, 2].$$



Para finalizar a seção, temos o:

Exercício 6.125 Encontre uma solução do problema de Cauchy (6.70), (6.71), (6.72) e (6.73), na classe V , , definida em (6.105), onde

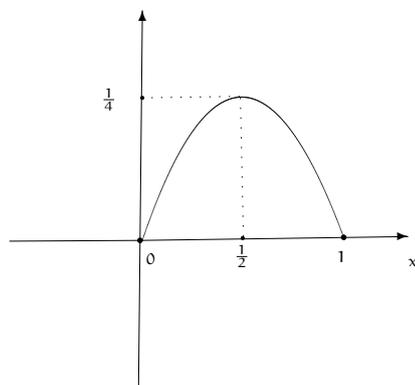
$$c \doteq 1, \quad L \doteq 1 \quad (6.126)$$

e a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) \doteq -x^2 + x, \quad \text{para cada } x \in [0, 1]. \quad (6.127)$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo.



Notemos que $f \in C^2([0, 1]; \mathbb{R})$,

$$f(0) = f(1) = 0, \quad (6.128)$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + 1, \quad \text{para } x \in [0, 1], \\ \text{logo } f''(x) &= -2, \quad \text{para cada } x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (6.129)$$

assim

$$f''(0) \stackrel{(6.129)}{=} f''(1) \stackrel{(6.129)}{=} -2 \neq 0. \quad (6.130)$$

Portanto, de (6.130), podemos concluir que a função \underline{f} , que é a extensão ímpar e $\underline{2}$ -periódica (notemos que $L = 1$), da função f à \mathbb{R} , pertencerá a $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, mas não pertencerá a $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Na verdade, a função \underline{f} **não** é duas vezes diferenciável nos pontos

$$x = \pm 1 + 2k \quad \text{e} \quad x = \pm 2k \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z}.$$

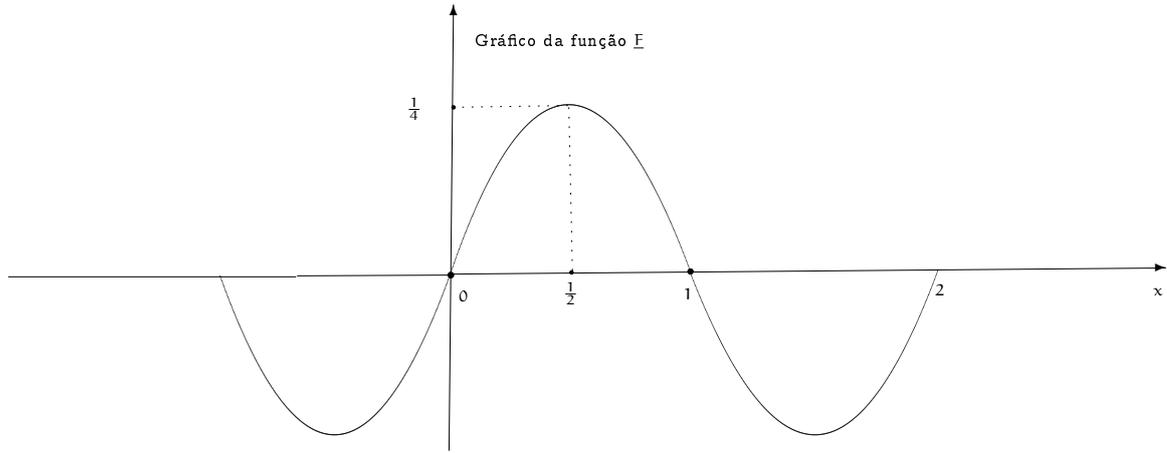
A verificação destes fatos será deixada como exercícios para o leitor.

A solução do problema de Cauchy (6.70), (6.71), (6.72) e (6.73), tendo-se (6.126), será dada por (veja (6.79) com $c = 1$ e $L = 2$):

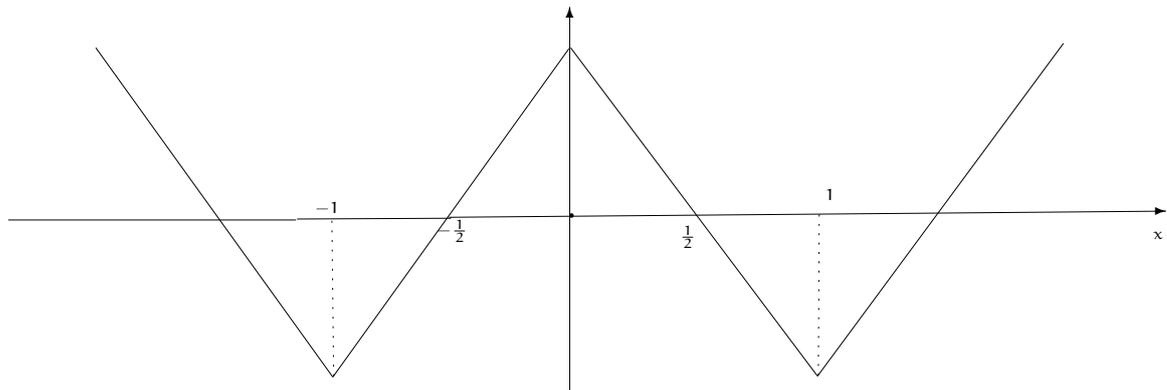
$$u(t, x) = \frac{F(x + t) + F(x - t)}{2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, 1], \quad (6.131)$$

onde a função \underline{F} é a extensão ímpar de \underline{f} -periódica, da função função \underline{f} , à \mathbb{R} .

Notemos que a função \underline{F} , a extensão ímpar de \underline{f} -periódica da função \underline{f} , à \mathbb{R} , terá a representação geométrica do seu gráfico dada pela figura abaixo.



Já a representação geométrica do gráfico da função \underline{F}' será dada pela figura abaixo.

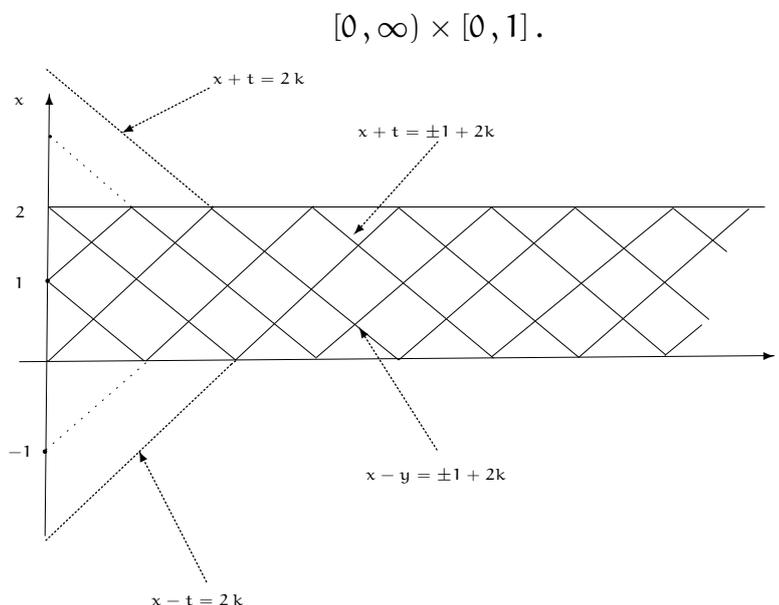


Devido a este fato e a Observação (6.119), segue que a solução do problema de Cauchy (6.70), (6.71), (6.72) e (6.73), tendo-se (6.126), dada por (6.131), não será duas vezes diferenciável ao longo das retas

$$x \pm t = \pm 1 + 2k \quad \text{e} \quad x \pm t = \pm 2k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z},$$

que são curvas características planas associadas à equação da onda (6.70), que interceptam a

região (veja a figura abaixo)



6.4 A corda finita

Nesta seção estudaremos o problema de Cauchy

$$u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (6.132)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (6.133)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (6.134)$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (6.135)$$

onde as funções $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas, $c, L \in (0, \infty)$ são constantes fixadas.

Suponhamos que $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$, $g \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$ satisfazem

$$f(0) = f(L) = f'(0) = f'(L) = g(0) = g(L) = 0. \quad (6.136)$$

Observação 6.137

1. Como vimos anteriormente, o problema de Cauchy (6.132), (6.133), (6.134), (6.135) acima, descreve o deslocamento da posição de repouso de uma corda finita, de comprimento L , que vibra num plano fixado e que cujas extremidades estão presas, que tem perfil inicial dado pela representação geométrica do gráfico da função f e cuja velocidade inicial é dada pela função g .

2. O problema acima pode ser visto como um problema misto, onde as condições de contorno são dadas por (6.133) (a corda está presa nas extremidades para todo $t \in [0, \infty)$) e as condições iniciais são dadas por (6.134) e (6.135).

Para encontrar uma função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que seja solução do problema de Cauchy acima, dividiremos o mesmo em dois, sendo o 1.o de Cauchy com

$$g \equiv 0$$

e o 2.o problema de Cauchy com

$$f \equiv 0,$$

mais precisamente, resolveremos os seguintes problemas de Cauchy:

$$v_{tt}(t, x) - c^2 v_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (6.138)$$

$$v(t, 0) = v(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (6.139)$$

$$v(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (6.140)$$

$$v_t(0, x) = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (6.141)$$

e

$$w_{tt}(t, x) - c^2 w_{xx}(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (6.142)$$

$$w(t, 0) = w(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (6.143)$$

$$w(0, x) = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (6.144)$$

$$w_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L]. \quad (6.145)$$

Observação 6.146 Observemos que se as funções $v, w : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ são soluções dos respectivos problemas de Cauchy acima pertencentes a \underline{V} , dada por (6.116), então a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$u(t, x) \doteq v(t, x) + w(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (6.147)$$

será uma solução do problema de Cauchy (6.132), (6.133), (6.134), (6.135), pertencente a \underline{V} .

De fato, como a EDP (6.132) é linear, se as funções $v = v(t, x)$ e $w = w(t, x)$ são soluções da EDP segue que a função $u = u(t, x)$ também será.

Notemos também que

$$\begin{aligned} u(t, 0) &\stackrel{(6.147)}{=} v(t, 0) + w(t, 0) \\ &\stackrel{(6.139) \text{ e } (6.143)}{=} 0 + 0 \\ &= 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \\ u(t, L) &\stackrel{(6.147)}{=} v(t, L) + w(t, L) \\ &\stackrel{(6.139) \text{ e } (6.143)}{=} 0 + 0 \\ &= 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0, x) &\stackrel{(6.147)}{=} v(0, x) + w(0, x) \\ &\stackrel{(6.140) \text{ e } (6.144)}{=} f(x) + 0 \\ &= f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \\ u_t(0, x) &\stackrel{(6.147)}{=} v_t(0, x) + w_t(0, x) \\ &\stackrel{(6.141) \text{ e } (6.145)}{=} 0 + g(x) \\ &= g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \end{aligned}$$

ou seja, a função $u = u(t, x)$, dada por (6.147), será uma solução do problema de Cauchy (6.132), (6.133), (6.134), (6.135), que pertencerá a \underline{V} .

Notemos que o problema de Cauchy (6.138), (6.139), (6.140) e (6.141) foi estudado na seção anterior.

Logo, para completar, basta encontrarmos solução, pertencente a \underline{V} , para o problema de Cauchy (6.142), (6.143), (6.144) e (6.145).

Notemos que fazendo $f \equiv 0$ na expressão (6.33), segue que uma candidata a solução do problema de Cauchy acima, será dada por:

$$w(t, x) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (6.148)$$

onde a função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será uma extensão, apropriada da função \underline{g} , que está definida em $[0, L]$, à \mathbb{R} .

Como a função $\underline{g} \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$ e satisfaz (6.136) veremos, mais adiante, que a

$$G \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

Notemos que a função \underline{G} será a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{g} , à \mathbb{R} .

Para vermos isto, observemos que, impondo a condição (6.143) à (6.148), obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(6.143)}{=} w(t, 0) \\ &\stackrel{(6.148)}{=} \frac{1}{2c} \int_{0-ct}^{0+ct} G(s) ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} G(s) ds, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (6.149)$$

isto é,

$$\int_{-ct}^{ct} G(s) ds = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (6.150)$$

o que implicará que a função G deverá ser uma função ímpar.

De fato, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b [G(x) + G(-x)] dx &= \int_a^{-a} [G(x) + G(-x)] dx + \underbrace{\int_{-a}^{-b} [G(x) + G(-x)] dx}_{\doteq \boxed{I}} \\ &\quad + \int_{-b}^b [G(x) + G(-x)] dx. \end{aligned} \quad (6.151)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis na integral definida \boxed{I} :

$$\begin{cases} y \doteq -x, \text{ logo: } dy = -dx \\ x = -a, \text{ logo: } y = a \\ x = -b, \text{ logo: } y = b \end{cases},$$

obteremos:

$$\int_{-a}^{-b} [G(x) + G(-x)] dx = \int_a^b [G(-y) + G(y)] (-dy). \quad (6.152)$$

Susbtituindo (6.152) em (6.151), obteremos:

$$\begin{aligned} \int_a^b [G(x) + G(-x)] dx &= \underbrace{\int_a^{-a} [G(x) + G(-x)] dx}_{\stackrel{(6.150)}{=} 0} - \int_a^b [G(y) + G(-y)] dy \\ &\quad + \underbrace{\int_{-b}^b [G(x) + G(-x)] dx}_{\stackrel{(6.150)}{=} 0}, \end{aligned}$$

$$\text{isto é, } 2 \int_a^b [G(x) + G(-x)] dx = 0, \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{R},$$

$$\text{ou seja, } \int_a^b [G(x) + G(-x)] dx = 0, \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{R}.$$

Logo, como a função \underline{G} é contínua em \mathbb{R} , segue que

$$G(x) + G(-x) = 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

ou ainda,

$$G(-x) = -G(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (6.153)$$

mostrando que a função \underline{G} é uma função ímpar.

De modo semelhante, teremos que

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(6.143)}{=} w(t, L) \\ &\stackrel{(6.148)}{=} \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} G(s) ds, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \\ \text{isto é, } &\int_{L-ct}^{L+ct} G(s) ds = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (6.154)$$

o que implicará, juntamente com o fato que a função \underline{G} é ímpar, e contínua em \mathbb{R} , que a função \underline{G} deverá ser uma função $2L$ -periódica.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Em analogia com o caso tratado na seção anterior, a função \underline{G} será a extensão ímpar e $2L$ -periódica, da função \underline{g} que está definida em $[0, L]$, à \mathbb{R} .

Notemos que, como $g \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$ e

$$g(0) = g(L), \quad (6.155)$$

segue, das Proposições (6.101), (6.104) e do Corolário (6.106), que $G \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, o que implicará que $w \in C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$, dada por (6.148).

Sabemos que a função $w = w(t, x)$, dada por (6.148), é uma solução da equação da onda (6.142) em $[0, \infty) \times [0, L]$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} w(t, 0) &\stackrel{(6.148)}{=} \frac{1}{2c} \int_{0-ct}^{0+ct} G(s) ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} G(s) ds \\ &\stackrel{G \text{ é ímpar}}{=} 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \\ w(t, L) &\stackrel{(6.148)}{=} \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} G(s) ds \\ &\stackrel{G \text{ é } 2L\text{-periódica e a Proposição (6.109)}}{=} \int_{-ct}^{ct} G(s) ds \\ &\stackrel{G \text{ é ímpar}}{=} 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(0, x) &\stackrel{(6.148)}{=} \frac{1}{2c} \int_{x-c \cdot 0}^{x+c \cdot 0} G(s) \, ds \\
&= \frac{1}{2c} \int_x^x G(s) \, ds = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \\
u_t(0, x) &\stackrel{(6.148)}{=} \frac{1}{2c} [G(x + c \cdot 0) c - G(x - c \cdot 0) (-c)] \\
&= \frac{1}{2} [G(x) + G(x)] \\
&\stackrel{G(x)=g(x), \text{ para } x \in [0, L]}{=} g(x),
\end{aligned}$$

para cada $x \in [0, L]$, mostrando que a função $w = w(t, x)$, dada por (6.148), é uma solução do problema de Cauchy (6.142), (6.143), (6.144) e (6.145) que pertence a \underline{V} .

Com isto acabamos de provar o:

Teorema 6.156 *Sejam $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$ e $g \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$ tais que*

$$f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0 \quad e \quad g(0) = g(L) = 0. \quad (6.157)$$

Então a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$u(t, x) \doteq \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) \, ds, \quad (6.158)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, será uma solução do problema de Cauchy (6.132), (6.133), (6.134) e (6.135) que pertence a \underline{V} , dado por (6.116), onde as funções $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são as extensões ímpares e $2L$ -periódicas, das funções \underline{f} e \underline{g} , a \mathbb{R} , respectivamente.

6.5 Exercícios

Capítulo 7

Método da Separação de Variáveis e Séries de Fourier

7.1 Introdução

Nas próximas seções estudaremos uma classe especial de séries de funções, denominadas séries de Fourier.

O objetivo é representar funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam periódicas (por exemplo, 2π -periódicas) na forma de uma série de funções que envolvem somente as funções seno e cosseno.

Mais precisamente, para o caso 2π -periódico, corresponderia a representar uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que é 2π -periódica "bem comportada" (que será explicitado no decorrer das notas) na seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

As perguntas que serão respondidas estarão relacionadas com os seguintes tópicos:

1. Se a função f puder ser representada na forma (7.1) acima, quem serão os coeficientes

$$\begin{aligned} & a_n, \quad \text{para cada } n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ & \text{e os coeficientes } b_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} ? \end{aligned} \quad (7.2)$$

2. Que propriedades a função f deve ter para pode ser representada na forma (7.1) acima?
3. Em que sentido a série de funções (7.1) converge pontualmente ou uniformemente, em algum subconjunto de \mathbb{R} ?

Na verdade estudaremos uma situação um pouco mais geral, a saber, o caso em que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é $2L$ -periódica e a representação que procuraremos, para a função f , será

da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \quad \text{para cada } x \in I \subseteq \mathbb{R}. \quad (7.3)$$

Observação 7.4 *Notemos que no caso em que*

$$L = \pi$$

temos que (7.3) tornar-se-á a expressão a (7.1) acima.

Para motivar o estudo das séries de funções do tipo (7.3), introduziremos um método, denominado método da separação de variáveis que, como consequência, nos levará a necessidade de estudarmos funções que possuam representação em série de Fourier do tipo (7.3).

7.2 Método da separação de variáveis ou método de Fourier

Para motivar os tópicos que serão desenvolvidos nas próximas seções vamos introduzir um método para encontrar solução para uma Equação Diferencial Parcial (EDP) importante nas aplicações, a saber, a Equação do Calor.

Tal método, que pode ser (e será) aplicado a outros problemas relacionados com outras EDP's, por exemplo, a Equação da Onda, a Equação de Laplace e é denominado Método da Separação de Variáveis.

Como dito acima, aplicaremos o método para encontrar (ou tentar encontrar) uma solução para o problema da distribuição de calor, em um fio finito, de comprimento $L \in (0, \infty)$, para os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo, no instante inicial, ou seja, $t = 0$, que está isolado termicamente, por exemplo, o fio está dentro de um isopor, e cujas extremidades são mantidas temperatura 0°C , ao longo de todo o processo.

Vamos imaginar que o fio é o intervalo

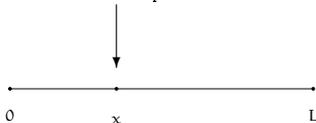
$$[0, L] \subseteq \mathbb{R}$$

e que

$$u = u(t, x),$$

nos fornece a temperatura no ponto $x \in [0, L]$ do fio, no instante $t \in [0, \infty)$.

Tempertatura no instante t no ponto x do fio é: $u(t, x)$



Matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar um função

$$u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R},$$

que venha satisfazer o seguinte problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \quad (7.5)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (7.6)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (7.7)$$

A condição (7.5) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, a temperatura no ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $f(x)$ °C.

A condição (7.6) nos diz que a temperatura nas extremidades do fio igual a 0 °C, ao longo de todo o processo, isto é, para $t \in [0, \infty)$.

A Equação Diferencial Parcial (7.5) é, como já vimos anteriormente, a Equação do Calor.

A constante

$$\alpha \in (0, \infty),$$

está relacionada com a condutibilidade térmica do fio, isto é, depende do material que o fio é feito.

No nosso caso, vamos supor que

$$\alpha = 1.$$

O caso $\alpha \in (0, \infty)$ será tratado mais adiante.

O método que desenvolveremos a seguir é simples e o próprio nome já nos diz o que faremos.

Observemos, inicialmente que, por questões de compatibilidade, deveremos ter:

$$\begin{aligned} f(0) &\stackrel{x=0 \text{ em } (7.6)}{=} u(0, 0) \\ &\stackrel{t=0 \text{ em } (7.7)}{=} 0 \\ &\stackrel{t=0 \text{ em } (7.7)}{=} u(0, L) \\ &\stackrel{x=L \text{ em } (7.6)}{=} f(L), \end{aligned}$$

ou seja, $f(0) = f(L) = 0$. (7.8)

Do ponto de vista matemático é razoável, à primeira vista, procurarmos soluções $u = u(t, x)$ na seguinte classe:

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}) \quad (7.9)$$

o que implicará, por (7.6), que

$$f(\cdot) \stackrel{(7.6)}{=} u(0, \cdot) \stackrel{(7.10)}{\in} C([0, L]; \mathbb{R}), \quad (7.10)$$

A EDP (7.5) é uma equação importante que ocorre em muitas aplicações e também é um exemplo importante das EDP's lineares de 2.a ordem, de tipo parabólico, como vimos no Exemplo (5.15), do capítulo 6.

Um dos primeiros a estudar, de modo sistemático, o problema da condução de calor foi Joseph B. Fourier (1768-1830).

Ele desenvolveu o método que trataremos a seguir, dito Método de Fourier.

O método consiste em procurar soluções do problema (7.5), (7.6), (7.7), na classe (7.9), do tipo

$$u(t, x) = \psi(t) \phi(x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (7.11)$$

isto é, soluções do tipo variáveis separadas, daí o nome do método.

Começaremos tentando soluções do tipo acima para (7.5), (7.7) e, posteriormente, utilizaremos (7.6).

De (7.9) e (7.11) segue que

$$\psi \in C([0, \infty); \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty); \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \phi \in C([0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, L); \mathbb{R}). \quad (7.12)$$

Na verdade estaremos interessados em soluções, do problema (7.5), (7.6), (7.7), na classe (7.9), não nulas, isto é,

$$u(t, x) \neq 0, \quad \text{para algum } (t, x) \in [0, \infty) \times x \in [0, L],$$

o que implicará que

$$\psi(t), \phi(x) \neq 0, \quad \text{para algum } t \in [0, \infty) \text{ e } x \in [0, L]. \quad (7.13)$$

Supondo que as funções $\psi = \psi(t)$ e $\phi = \phi(x)$ satisfaçam (7.12), para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, de (7.11), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &\stackrel{(7.11)}{=} \frac{\partial}{\partial t} [\psi(t) \phi(x)] \\ &= \psi'(t) \phi(x) \end{aligned} \quad (7.14)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &\stackrel{(7.11)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\psi(t) \phi(x)] \\ &= \psi(t) \phi''(x). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Substituindo (7.14) e (7.15) em (7.5), obteremos

$$\psi'(t) \phi(x) = \psi(t) \phi''(x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L).$$

Dividindo a igualdade acima por $\psi(t)\phi(x)$ (nos pontos onde $\psi(t)\phi(x) \neq 0$), obteremos a seguinte identidade:

$$\frac{\psi'(t)\phi(x)}{\psi(t)\phi(x)} = \frac{\psi(t)\phi''(x)}{\psi(t)\phi(x)}, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L).$$

Como $\psi(t), \phi(x) \neq 0$, teremos:

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L). \quad (7.16)$$

Notemos que o lado direito da identidade (7.16) acima, é uma função que depende de x , enquanto o lado esquerdo da mesma é uma função que depende de t .

Logo ambos deverão ser iguais a uma constante, que chamaremos de

$$-\lambda. \quad (7.17)$$

O motivo do sinal negativo será justificado mais adiante.

Portanto, de (7.16), segue que

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L),$$

que darão origem a duas EDO's, a saber:

$$\psi'(t) = -\lambda\psi(t), \quad \text{para cada } t \in (0, \infty), \quad (7.18)$$

$$\phi''(x) = -\lambda\phi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, L). \quad (7.19)$$

Impondo a condição (7.7), devermos ter:

$$\begin{aligned} \psi(t)\phi(0) &\stackrel{t=0 \text{ em (7.11)}}{=} u(t, 0) \\ &\stackrel{(7.7)}{=} 0 \\ &\stackrel{(7.7)}{=} u(t, L) \\ &\stackrel{t=L \text{ em (7.11)}}{=} \psi(t)\phi(L) \end{aligned}$$

ou seja, $\psi(t)\phi(0) = \psi(t)\phi(L), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (7.20)$

Como

$$\psi(t) \neq 0, \quad \text{para algum } t \in (0, \infty),$$

dividindo ambos os membros da identidade (7.20) por $\psi(t)$, obteremos:

$$\phi(0) = 0 = \phi(L), \quad (7.21)$$

Portanto, de (7.19), (7.21) e (7.12), segue que a função $\phi = \phi(x)$ deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:

$$\phi''(x) = -\lambda \phi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, L) \quad (7.22)$$

$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \quad (7.23)$$

$$\phi \in C([0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, L); \mathbb{R}). \quad (7.24)$$

Observação 7.25

1. Um valor $\underline{\lambda}$, para os quais o problema de valor de contorno (7.22), (7.23) admite solução não nula, na classe (7.24) será dito autovalor do problema (7.22), e as soluções não triviais da equação (7.22), na classe (7.24), serão ditas autofunções correspondentes ao autovalor $\underline{\lambda}$.
2. Como estamos procurando soluções reais, isto é,

$$u(t, x) \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L],$$

só nos interessará o caso em que

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$

O item a seguir mostrará que $\underline{\lambda}$ deverá ser um número real maior do que zero, isto é, que

$$\lambda \in (0, \infty).$$

3. Afirmamos que

$$\lambda \in (0, \infty) \quad (7.26)$$

(em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$).

De fato, suponhamos que a função $\phi = \phi(x)$ satisfaz (7.22), (7.23) e (7.24), em $[0, L]$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Afirmamos que existem os limites laterais

$$\phi''(0^+) \quad \text{e} \quad \phi''(L^-).$$

De fato pois:

$$\begin{aligned}
 \phi''(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi''(x) \\
 &\stackrel{(7.22)}{=} -\lambda \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) \\
 &\stackrel{(7.24)}{=} -\lambda \phi(0) \\
 &\stackrel{(7.23)}{=} 0
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}
 \phi''(L^-) &= \lim_{x \rightarrow L^-} \phi''(x) \\
 &\stackrel{(7.22)}{=} -\lambda \lim_{x \rightarrow L^-} \phi(x) \\
 &\stackrel{(7.24)}{=} -\lambda \phi(L) \\
 &\stackrel{(7.23)}{=} 0,
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

ou seja, de (7.27) e (7.28), segue que

$$\phi''(0^+) = 0 = \phi''(L^-). \tag{7.29}$$

Por outro lado, como $\phi \in C([0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, L); \mathbb{R})$, para $x \in (0, L)$, teremos:

$$\begin{aligned}
 -\lambda \int_0^x \phi(y) dy &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\int_a^x -\lambda \phi(y) dy \right] \\
 &\stackrel{(7.22)}{=} \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\int_a^x \phi''(y) dy \right] \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fundamental do Cálculo}}{=} \lim_{a \rightarrow 0^+} [\phi'(x) - \phi'(a)] \\
 &= \phi'(x) - \left[\lim_{a \rightarrow 0^+} \phi'(a) \right],
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned}
 -\lambda \int_x^L \phi(y) dy &= \lim_{b \rightarrow L^-} \left[\int_x^b -\lambda \phi(y) dy \right] \\
 &\stackrel{(7.22)}{=} \lim_{b \rightarrow L^-} \left[\int_x^b \phi''(y) dy \right] \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fundamental do Cálculo}}{=} \lim_{b \rightarrow L^-} [\phi'(b) - \phi'(x)] \\
 &= \left[\lim_{b \rightarrow L^-} \phi'(b) \right] - \phi'(x),
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

portanto, de (7.30) e (7.31), segue que existem os limites laterais

$$\phi'(0^+) \doteq \lim_{a \rightarrow 0^+} \phi'(a) \quad e \quad \phi'(L^-) \doteq \lim_{b \rightarrow L^-} \phi'(b). \tag{7.32}$$

Logo podemos integrar as funções $\underline{\phi}'$ e $\underline{\phi}''$, no intervalo $[0, L]$, o que permite fazermos os seguintes cálculos a seguir.

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \lambda \int_0^L |\phi(x)|^2 dx &\stackrel{|z|^2 = z\bar{z}}{=} \lambda \int_0^L \phi(x) \overline{\phi(x)} dx \\
 &= \int_0^L [\lambda \phi(x)] \overline{\phi(x)} dx \\
 &\stackrel{(7.22)}{=} - \int_0^L \phi''(x) \overline{\phi(x)} dx \\
 &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow L^-}} \left[\int_a^b \phi''(x) \overline{\phi(x)} dx \right] \\
 &\stackrel{\text{Integração por Partes}}{=} - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow L^-}} \left\{ \left[\phi'(x) \overline{\phi(x)} \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \phi'(x) \overline{\phi'(x)} dx \right\} \\
 &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow L^-}} \left[\phi'(b) \overline{\phi(b)} - \phi'(a) \overline{\phi(a)} \right] - \int_0^L |\phi'(x)|^2 dx \\
 &\stackrel{(7.32)}{=} - \left[\underbrace{\phi'(L^-) \overline{\phi(L)}}_{\stackrel{(7.23)}{=} 0} - \phi'(0^+) \underbrace{\overline{\phi(0)}}_{\stackrel{(7.23)}{=} 0} \right] - \int_0^L |\phi'(x)|^2 dx \\
 &= \int_0^L \underbrace{|\phi'(x)|^2}_{\geq 0} dx \geq 0. \tag{7.33}
 \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\int_0^L |\phi'(x)|^2 dx > 0. \tag{7.34}$$

De fato, suponhamos, por absurdo que

$$\int_0^L |\phi'(x)|^2 dx = 0.$$

Como a função $\underline{\phi}'$ é contínua em $(0, L)$ (veja (7.24)), teríamos que ter

$$\phi'(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in (0, L)$$

ou seja, a função $\underline{\phi}$ seria constante em $(0, L)$.

Mas a função $\underline{\phi}$ é contínua em $[0, L]$ (veja (7.24)) e, de (7.23), teríamos

$$\phi(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L],$$

que não nos interessa pois neste caso

$$u(t, x) = \psi(t) \phi(x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L].$$

Assim

$$\lambda \underbrace{\int_0^L |\phi(x)|^2 dx}_{\in(0, \infty)} \stackrel{(7.33)}{=} \int_0^L |\phi'(x)|^2 dx \stackrel{(7.34)}{>} 0,$$

mostrando que $\lambda > 0$ (em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$), como havíamos afirmado.

4. Observemos que se

$$\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$$

são autovalores distintos do problema (7.22)-(7.24) e as funções

$$\phi_1 = \phi(x) \quad \text{e} \quad \phi_2 = \phi_2(x)$$

são suas correspondentes autofunções, então:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx &= \int_0^L [\lambda_1 \phi_1(x)] \overline{\phi_2(x)} dx \\ &\stackrel{(7.22)}{=} \int_0^L [-\phi_1''(x)] \phi_2(x) dx \\ &\stackrel{\text{Integração por Partes}}{=} - \left\{ \left[\phi_1'(x) \phi_2(x) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx \right\} \\ &= - \left\{ \left[\phi_1'(L) \underbrace{\phi_2(L)}_{(7.23)_0} - \phi_1'(0) \underbrace{\phi_2(0)}_{(7.23)_0} \right] - \int_0^L \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx \right\} \\ &\stackrel{(7.23)}{=} \int_0^L \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx \\ &\stackrel{\text{Integração por Partes}}{=} \left[\phi_1(x) \phi_2'(x) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \phi_1(x) \phi_2''(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\underbrace{\phi_1(L)}_{(7.23)_0} \phi_2'(L) - \underbrace{\phi_1(0)}_{(7.23)_0} \phi_2'(0) \right] - \int_0^L \phi_1(x) \phi_2''(x) dx \\
&= - \int_0^L \phi_1(x) \phi_2''(x) dx \\
&\stackrel{(7.22)}{=} - \int_0^L \phi_1(x) \left[-\lambda_2 \phi_2(x) \right] dx \\
&\stackrel{\lambda_2 \in \mathbb{R}}{=} \lambda_2 \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx = -\lambda_2 \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx,$$

ou ainda ,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx = 0. \quad (7.35)$$

Como

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$

de (7.35), segue que

$$\int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx = 0,$$

ou seja, as funções

$$\phi_1 = \phi_1(x) \quad e \quad \phi_2 = \phi_2(x),$$

são ortogonais, relativamente, ao produto interno de $C([0, L]; \mathbb{C})$ definido por:

$$(f, g) = \int_0^L f(x) \overline{g(x)} dx,$$

para $f, g \in C([0, L]; \mathbb{C})$.

5. Como

$$\lambda > 0,$$

temos que a solução geral da EDO (7.22) será dada por:

$$\phi(x) = a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (7.36)$$

onde a e b são constantes.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto na disciplina de EDO).

Mas a função $\phi = \phi(x)$, deve satisfazer as condições (7.23), ou seja:

$$\begin{aligned} a &\stackrel{(7.36)}{=} \phi(0) \\ &\stackrel{(7.23)}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\text{logo, } \phi(x) \stackrel{a=0 \text{ em } (7.36)}{=} b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} x), \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} L) &\stackrel{(7.37)}{=} \phi(L) \\ &\stackrel{(7.23)}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Como

$$\phi(x) \neq 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L],$$

segue que deveremos ter

$$b \neq 0,$$

pois $a = 0$.

Assim, da identidade (7.38) acima, segue que

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} L) = 0,$$

$$\text{ou seja, } \sqrt{\lambda} L = n\pi, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (7.39)$$

e assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (7.36), (7.38) e (7.39), teremos que:

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi_n(x) &= \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{L^2}} x\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{para cada } x \in [0, L]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

6. Resolvendo a EDO (7.18), com

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

obtemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, que

$$\psi(t) = \psi_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (7.41)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto na disciplina de EDO)

Podemos resumir tudo nisso no seguinte resultado, cuja demonstração foi feita na Observação (7.25) acima:

Proposição 7.42

1. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor então a função $\phi = \phi(x)$ é autofunção, associada a λ , para o problema (7.22), (7.23) e (7.24), então

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_n \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2},\end{aligned}$$

isto é, $\lambda = \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ e

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_n(x) \\ &= \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{para cada } x \in [0, L].\end{aligned}$$

Além disso, toda solução do problema (7.22), (7.23) e (7.24), deverá ser uma combinação linear finita das funções abaixo:

$$\phi_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (7.43)$$

para cada $x \in [0, L]$ e $n \in \mathbb{N}$.

2. Toda solução da EDO (7.18), na classe

$$C([0, \infty); \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty); \mathbb{R}),$$

com

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

deverá ser uma combinação linear finita das funções abaixo:

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}t}, \quad (7.44)$$

para cada $t \in [0, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}$.

Observação 7.45

1. Obtivemos, agindo segundo a Observação (7.25), para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos soluções do problema (7.5) e (7.7), da forma:

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &\stackrel{(7.11)}{=} \psi_n(t) \phi_n(x) \\ &\stackrel{(7.43) \text{ e } (7.44)}{=} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \end{aligned} \quad (7.46)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Utilizando o princípio da superposição (infinita), tentaremos encontrar soluções do problema (7.5), (7.6), (7.7) da forma

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(t, x) \\ &\stackrel{(7.46)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n(t) \phi_n(x) \\ &\stackrel{(7.43) \text{ e } (7.44)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \end{aligned} \quad (7.47)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Observemos que se soubermos que a série de funções (7.47) acima, pode ser derivada, termo a termo, uma vez, em relação à t e duas vezes, em relação à x , em $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, então a função $u = u(t, x)$, dada por (7.47), irá satisfazer (7.5) e (7.7).

Isto ocorrerá porque, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$u_n(t, x) = \psi_n(t) \phi_n(x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L],$$

tem essa propriedade, por construção.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Para que a função $u = u(t, x)$, dada por (7.47), venha satisfazer a condição (7.6), deveremos ter:

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{(7.6)}{=} u(0, x) \\ &\stackrel{t=0 \text{ em } (7.47)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} 0}}_{=1} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \end{aligned} \quad (7.48)$$

para cada $x \in [0, L]$.

Ou seja, devemos saber expressar a função $f = f(x)$, como uma série de funções do tipo (7.48), isto é, uma série de senos.

2. Podemos aplicar as mesmas ideias acima a seguinte situação:

Vamos imaginar que o fio do problema anterior, está isolado termicamente e que suas extremidades não troquem calor com o meio ambiente.

Matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar uma função

$$u = u(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L],$$

que satisfaz as seguintes condições:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \quad (7.49)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (7.51)$$

A condição (7.49) nos diz que a temperatura no ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $f(x)^\circ \text{C}$.

A condição (7.49) nos diz que os extremos não trocam calor com o meio ambiente.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observemos, inicialmente que, por questões de compatibilidade, deveremos ter:

$$\begin{aligned} f'(0) &\stackrel{\text{d}}{\text{d}x} (7.50) \stackrel{\text{com } x=0}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) \\ &\stackrel{(7.51), \text{com } t=0}{=} 0 \\ &\stackrel{(7.51), \text{com } t=0}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(0, L) \\ &\stackrel{\text{d}}{\text{d}x} (7.50) \stackrel{\text{com } x=L}{=} f'(L), \\ \text{ou seja, } f'(0) &= f'(L) = 0. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Do ponto de vista aplicado é razoável procurarmos soluções $u = u(t, x)$ na seguinte classe

$$u \in C^1([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}), \quad (7.53)$$

o que implicará que

$$f \stackrel{(7.50)}{=} u(0, \cdot) \in C^1([0, L]; \mathbb{R}).$$

Como no caso tratado anteriormente (veja (7.11)), procuraremos soluções do problema do tipo

$$u(t, x) \doteq \psi(t) \phi(x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (7.54)$$

isto é, soluções do tipo variáveis separadas.

Começaremos tentando soluções do tipo acima para (7.49), (7.51) e posteriormente utilizaremos (7.50).

De (7.53) e (7.54) segue que

$$\psi \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty); \mathbb{R}) \quad e \quad \phi \in C^1([0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, L); \mathbb{R}). \quad (7.55)$$

Estaremos interessados em soluções não constantes, isto é,

$$u(t, x) \neq C, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$$

o que implicará que

$$\psi(t), \phi(x) \neq C, \quad \text{para algum } t \in [0, \infty) \quad e \quad x \in [0, L], \quad (7.56)$$

para qualquer $C \in \mathbb{R}$ fixado.

Supondo que as funções $\psi = \psi(t)$ e $\phi = \phi(x)$ satisfaçam (7.55), de (7.54), para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &\stackrel{(7.11)}{=} \frac{\partial}{\partial t} [\psi(t) \phi(x)] \\ &= \psi'(t) \phi(x) \end{aligned} \quad (7.57)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &\stackrel{(7.11)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\psi(t) \phi(x)] \\ &= \psi(t) \phi''(x). \end{aligned} \quad (7.58)$$

Substituindo (7.57) e (7.58) em (7.49), obteremos

$$\psi'(t) \phi(x) = \psi(t) \phi''(x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L).$$

Dividindo a identidade acima por $\psi(t) \phi(x)$, nos pontos de $[0, \infty) \times [0, L]$ onde este é diferente de zero, obteremos:

$$\frac{\psi'(t) \phi(x)}{\psi(t) \phi(x)} = \frac{\psi(t) \phi''(x)}{\psi(t) \phi(x)}, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L).$$

Como $\psi(t), \phi(x) \neq 0$, em algum ponto de $[0, \infty) \times [0, L]$, segue que

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L). \quad (7.59)$$

Como no caso tratado anteriormente (veja (7.16)), o lado direito da identidade (7.59), é uma função de x , enquanto o lado esquerdo da mesma, é uma função de t .

Logo ambos os lados da identidade (7.59) deverão ser iguais a uma constante que chamaremos de $-\lambda$.

O motivo do sinal negativo será tratado a seguir, como no caso anterior (veja (7.17)).

Portanto

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L).$$

Com isto obtemos duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), a saber:

$$\psi'(t) = -\lambda \psi(t), \quad \text{para cada } t \in (0, \infty) \quad (7.60)$$

$$\phi''(x) = -\lambda \phi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, L). \quad (7.61)$$

Impondo as condições (7.51), teremos:

$$\begin{aligned} \psi(t) \phi'(0) &\stackrel{(7.54)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \\ &\stackrel{(7.51)}{=} 0 \\ &\stackrel{(7.51)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) \\ &\stackrel{(7.54)}{=} \psi(t) \phi'(L), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (7.62)$$

Como

$$\psi(t) \neq 0,$$

dividindo ambos os membros da identidade (7.62), por $\psi(t)$, obteremos

$$\phi'(0) = 0 = \phi'(L), \quad (7.63)$$

ou seja, a função $\phi = \phi(x)$, deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:

$$\phi''(x) = -\lambda \phi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, L) \quad (7.64)$$

$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0 \quad (7.65)$$

$$\phi \in C^1([0, L]; \mathbb{R}) \cap C^1([0, L]; \mathbb{R}). \quad (7.66)$$

3. Afirmamos que

$$\lambda \in (0, \infty) \quad (7.67)$$

(em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$).

De fato, suponhamos que a função $\phi = \phi(x)$ satisfaz (7.64), (7.65), (7.66), para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Observemos que existem os limites laterais:

$$\phi''(0^+) \quad e \quad \phi''(L^-).$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} \phi''(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi''(x) \\ &\stackrel{(7.64)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} [-\lambda \phi(x)] \\ &= -\lambda \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) \\ &\stackrel{\text{\(\phi é contínua em } x=0 \text{ - veja (7.66)}\)}}{=} -\lambda \phi(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi''(L^-) &= \lim_{x \rightarrow L^-} \phi''(x) \\ &\stackrel{(7.64)}{=} \lim_{x \rightarrow L^-} [-\lambda \phi(x)] \\ &= -\lambda \lim_{x \rightarrow L^-} \phi(x) \\ &\stackrel{\text{\(\phi é contínua em } x=L \text{ - veja (7.66)}\)}}{=} -\lambda \phi(L). \end{aligned}$$

Logo podemos fazer os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^L \phi(x) \overline{\phi(x)} \, dx &= \int_0^L [\lambda \phi(x)] \overline{\phi(x)} \, dx \\ &\stackrel{(7.64)}{=} \int_0^L [-\phi''(x)] \overline{\phi(x)} \, dx \\ &= - \int_0^L \phi''(x) \overline{\phi(x)} \, dx \\ &\stackrel{\text{\(integração por partes}\)}}{=} - \left\{ \left[\phi'(x) \overline{\phi(x)} \right]_{x=0}^{x=L} - \int_a^b \phi'(x) \overline{\phi'(x)} \, dx \right\} \\ &= - \left\{ \left[\underbrace{\phi'(L)}_{(7.65)_0} \overline{\phi(L)} - \underbrace{\phi'(0)}_{(7.65)_0} \overline{\phi(0)} \right] - \int_0^L |\phi'(x)|^2 \, dx \right\} \\ &= \int_0^L |\phi'(x)|^2 \, dx \geq 0. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Afirmamos que

$$\int_0^L |\phi'(x)|^2 dx > 0. \quad (7.69)$$

De fato, suponhamos, por absurdo que

$$\int_0^L |\phi'(x)|^2 dx = 0.$$

Como $\phi \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$ segue que

$$\phi'(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, L],$$

ou seja, a função $\phi = \phi(x)$ deveria ser constante, o que contraria (7.56).

Assim

$$\lambda \int_0^L |\phi(x)|^2 dx \stackrel{(7.68)}{=} \int_0^L |\phi'(x)|^2 dx \stackrel{(7.69)}{>} 0$$

implicando que

$$\lambda > 0,$$

como afirmamos.

Em particular, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Observemos ainda que se

$$\lambda_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2$$

satisfazem o problema (7.64), (7.65), (7.66) e as funções

$$\phi_1 = \phi_1(x) \quad \text{e} \quad \phi_2 = \phi_2(x)$$

são duas correspondentes soluções do problema acima, então:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx &= \int_0^L [\lambda_1 \phi_1(x)] \overline{\phi_2(x)} dx \\ &\stackrel{(7.64)}{=} \int_0^L [-\phi_1''(x)] \overline{\phi_2(x)} dx \\ &= - \int_0^L \phi_1''(x) \overline{\phi_2(x)} dx \\ &\stackrel{\text{integração por partes}}{=} - \left\{ \left[\phi_1'(x) \overline{\phi_2(x)} \right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L \phi_1'(x) \overline{\phi_2'(x)} dx \right\} \\ &= - \left\{ \left[\underbrace{\phi_1'(L)}_{(7.65)_0} \overline{\phi_2(L)} - \underbrace{\phi_1'(0)}_{(7.65)_0} \overline{\phi_2(0)} \right] - \int_0^L \phi_1'(x) \overline{\phi_2'(x)} dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \phi_1'(x) \overline{\phi_2'(x)} dx \\
&\stackrel{\text{integração por partes}}{=} \left[\phi_1(x) \overline{\phi_2'(x)} \Big|_{x=0}^{x=L} \right] - \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2''(x)} dx \\
&= \left[\phi_1(L) \underbrace{\overline{\phi_2'(L)}}_{(7.65)_0} - \phi_1(0) \underbrace{\overline{\phi_2'(0)}}_{(7.65)_0} \right] - \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2''(x)} dx \\
&= - \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2''(x)} dx \\
&\stackrel{(7.64)}{=} - \int_0^L \phi_1(x) \overline{[-\lambda_2 \phi_2(x)]} dx \\
&\stackrel{\lambda_2 \in \mathbb{R}}{=} \lambda_2 \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx. \tag{7.70}
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx \stackrel{(7.70)}{=} \lambda_2 \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx, \\
\text{ou seja, } &(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx = 0. \tag{7.71}
\end{aligned}$$

Logo, se

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$

de (7.71), segue que

$$\int_0^L \phi_1(x) \overline{\phi_2(x)} dx = 0,$$

ou seja, as funções $\phi_1 = \phi_1(x)$ e $\phi_2 = \phi_2(x)$ são ortogonais, relativamente, ao produto interno de $C([0, L]; \mathbb{C})$ definido por:

$$(f, g) = \int_0^L f(x) \overline{g(x)} dx,$$

para $f, g \in C([0, L]; \mathbb{C})$.

5. Como

$$\lambda > 0,$$

temos que a solução geral da EDO (7.64) é dada por:

$$\phi(x) = a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \tag{7.72}$$

onde \underline{a} e \underline{b} são constantes reais.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto na disciplina de EDO)

Com isto, segue que

$$\phi'(x) \stackrel{(7.72)}{=} -a\sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + b\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad (7.73)$$

para cada $x \in [0, L]$.

Mas a função $\phi = \phi(x)$, deve satisfazer:

$$b\sqrt{\lambda} \stackrel{(7.73)}{=} \phi'(0) \stackrel{(7.65)}{=} 0,$$

como $\sqrt{\lambda} > 0$, teremos: $b = 0$

$$\phi(x) \stackrel{b=0 \text{ em } (7.72)}{=} a \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad (7.74)$$

$$\text{logo, } -a\sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) \stackrel{(7.73)}{=} \phi'(L) \stackrel{(7.65)}{=} 0. \quad (7.75)$$

Como

$$\phi(x) \neq C$$

segue que

$$a \neq 0,$$

pois $b = 0$.

Assim, de (7.75), segue que

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0,$$

ou seja, $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, para cada $n \in \mathbb{N}$

isto é,

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (7.76)$$

e assim, de (7.74) e (7.76), segue que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_n(x) \\ &= \cos\left(\sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{L^2}} x\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{para cada } x \in [0, L] \text{ e } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, resolvendo a EDO (7.60), com (7.76), obteremos

$$\psi(t) = \psi_n(t) = e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (7.78)$$

7. Obtivemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, agindo da forma acima, soluções de (7.49) e (7.51), da forma:

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &\stackrel{(7.54)}{=} \psi_n(t) \phi_n(x) \\ &\stackrel{(7.78) \text{ e } (7.77)}{=} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right), \end{aligned} \quad (7.79)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Utilizando o princípio da superposição (infinita), tentaremos encontrar soluções do problema (7.49), (7.44), (7.51), da forma:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, x) \\ &\stackrel{(7.54)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(t) \phi_n(x) \\ &\stackrel{(7.78) \text{ e } (7.77)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right), \end{aligned} \quad (7.80)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Observemos que se soubermos que a série de funções acima puder se derivada parcialmente, termo a termo, uma vez em relação t e duas vezes, em relação à x , a função $u = u(t, x)$, dada por (7.80), irá satisfazer (7.49) e (7.51).

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Finalmente, para satisfazer (7.50), deveremos ter:

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{(7.50)}{=} u(0, x) \\ &\stackrel{(7.80)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} 0} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right), \end{aligned} \quad (7.81)$$

para cada $x \in [0, L]$.

Ou seja, devemos saber expressar a função $f = f(x)$ como uma série do tipo (7.81), isto é, uma série de cossenos.

8. Uma outra situação, é o estudo da temperatura em um fio, cujo fluxo de calor nas extremidades do fio seja proporcional à temperatura nas extremidades do mesmo. Matematicamente, em uma versão simplificada, o problema acima corresponde a encontrar um afunção

$$u = u(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$$

que satisfaça:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \quad (7.82)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L] \quad (7.83)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) + u(t, 0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) + u(t, L), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (7.84)$$

Agindo como nos dois casos anteriores, ou seja, aplicando o método da separação de variáveis, podemos mostrar que, neste caso chegaremos a seguinte expressão para as soluções do problema (7.82), (7.83), (7.84):

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \left[a_n \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right], \quad (7.85)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Observemos que se soubermos que a série de funções acima puder se derivada parcialmente, termo a termo, uma vez, em relação à underlinet, e duas vezes, em relação à x, em $(0, \infty) \times (0, L)$, então a função $u = u(t, x)$, dada por (7.85), irá satisfazer (7.82) e eqrefE24.

Para satisfazer (7.83) deveremos ter:

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{(7.83)}{=} u(0, x) \\ &\stackrel{t=0 \text{ em } (7.85)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} 0} \left[a_n \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right], \end{aligned} \quad (7.86)$$

para cada $x \in [0, L]$.

Ou seja, devemos saber expressar a função $f = f(x)$ em uma série do tipo (7.86), isto é, uma série de senos e cossenos, também denominada de série de Fourier associada a função f.

Isto nos motiva a estudar as funções que podem ser representadas nesse tipo de séries de funções.

9. Podemos aplicar o método da separação de variáveis para estudar outros tipos de problemas, como por exemplo, o problema da corda de comprimento $L > 0$, vibrante num plano com as extremidades presas.

Suponhamos que a corda acima, esteja estendida sobre o eixo dos Ox e que seus extremos sejam

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = L.$$

Neste caso, a função, que denotaremos por

$$u = u(t, x),$$

que nos fornece a deflexão da corda, em relação à posição de repouso, sendo

$$f = f(x) \quad \text{e} \quad g = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L],$$

a posição inicial da corda e a velocidade inicial de vibração da corda, respectivamente, então, matematicamente, a função $u = u(t, x)$, deverá satisfazer ao seguinte problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \quad (7.87)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L] \quad (7.88)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L] \quad (7.89)$$

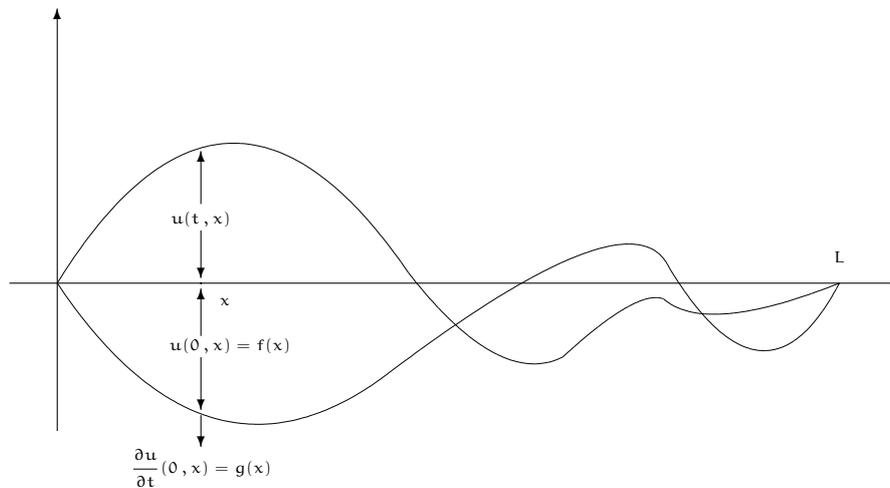
$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (7.90)$$

Notemos que, (7.88) nos diz que a posição da corda, no ponto $x \in [0, L]$, será igual a $f(x)$, e (7.89), nos diz que a velocidade inicial, no ponto $x \in [0, L]$, será igual a $g(x)$, respectivamente.

Além disso, (7.90) nos diz que as extremidades da corda estão fixas.

A constante $c > 0$ depende do material com que a corda é feita.

A figura abaixo ilustra a situação acima.



A EDP (7.87) acima, como vimos anteriormente, é a Equação da Onda.

Essa equação é um exemplo importante de EDP's do tipo hiperbólico.

10. Podemos considerar outros tipos de problemas relacionados com a corda vibrante. Eles aparecerão nas listas exercícios.
11. Outro problema importante que podemos aplicar o método da separação de variáveis é para encontrar uma função

$$u = u(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \stackrel{\text{aberto}}{\subseteq} \mathbb{R}^2,$$

que satisfaz as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \quad (7.91)$$

$$u|_{\partial\Omega} = f \quad (7.92)$$

onde $\partial\Omega$ é a fronteira do conjunto Ω , em \mathbb{R}^2 .

O problema acima, como vimos anteriormente, é o Problema de Dirichlet.

Também podemos considerar problema de encontrar uma função

$$u = u(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

que satisfaz as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega \quad (7.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u|_{\partial\Omega} = f, \quad (7.94)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota a derivada direcional na direção do vetor normal unitário exterior da fronteira de Ω , em \mathbb{R}^2 , como vimos anteriormente, é o **Problema de Newman**.

12. Esses dois últimos problemas, aparecerão nas listas de exercícios para serem tratados nos casos em que

$$\Omega = (a, b) \times (c, d),$$

ou seja, o interior de um retângulo em \mathbb{R}^2 , e no caso em que

$$\Omega \doteq \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

ou seja, o interior da circunferência de centro na origem $(0, 0)$ e tem raio igual a $R \in (0, \infty)$ fixado, em \mathbb{R}^2 , respectivamente.

Passaremos, a seguir, a estudar as funções que possuem representação na forma (7.86).

7.3 Os Coeficientes de Fourier e a transformada de Fourier

Começaremos tentando responder a 2.^a questão colocada no início do capítulo (veja (7.2)), isto é, sabendo-se que a função f pode ser representada por uma série de funções do tipo (7.3), como deverão ser os coeficientes \underline{a}_m e \underline{b}_n , para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$?

Para isto, introduziremos uma classe de funções que nos ajudará a tratar da resposta a essa pergunta.

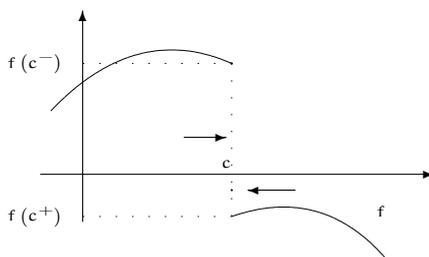
Definição 7.95 Dado $c \in \mathbb{R}$, diremos que uma função a valores reais (ou complexos), de variável real, $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), onde I é um intervalo de \mathbb{R} , tem uma **descontinuidade de 1.^a espécie em $x = c$** , se a função f não for contínua em $x = c$, mas existem, e são finitos, os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x).$$

Neste caso, denotaremos por

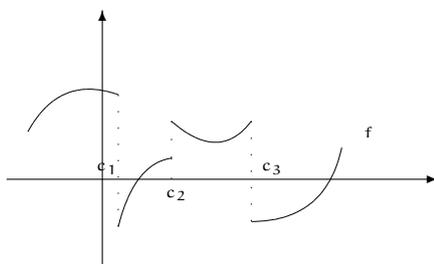
$$\begin{aligned} f(c^+) &\doteq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \\ \text{e} \quad f(c^-) &\doteq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x). \end{aligned} \tag{7.96}$$

A figura abaixo ilustra a situação acima, para o caso da função f ser a valores reais (isto é, $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$).



Na situação acima, diremos que a função f é contínua por partes em I (ou seccionalmente contínua em I), se em cada intervalo (a, b) , contido em I , a função f , tem, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade de 1.^a espécie.

A figura abaixo ilustra a situação acima, para o caso da função ser a valores reais.



O conjunto formado por todas as funções, a valores reais (respectivamente, valores complexos), contínuas por partes (ou seccionalmente contínuas) em $I \subseteq \mathbb{R}$, será indicado por

$$SC(I; \mathbb{R}) \quad (\text{respectivamente, } SC(I; \mathbb{C})). \quad (7.97)$$

Observação 7.98

1. Do ponto de vista geométrico, dizer que uma função f tem uma descontinuidade de 1.^a espécie em $x = c$ é equivalente a dizer que a representação geométrica do seu gráfico tem um salto finito, em $x = c$.
2. Do ponto de vista geométrico, dizer que uma função f é contínua por partes em I é equivalente a dizer que a representação geométrica do seu gráfico tem um número finito de saltos, em cada intervalo (a, b) contido em I .
3. Notemos também que se $f, g \in SC(I; \mathbb{R})$ (respectivamente, $SC(I; \mathbb{C})$) e $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente, \mathbb{C}) então $(f + g), (\alpha f) \in SC(I; \mathbb{R})$ (respectivamente, $SC(I; \mathbb{C})$), isto é,

$$SC(I; \mathbb{R}) \quad (\text{respectivamente, } SC(I; \mathbb{C}))$$

é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} (respectivamente, sobre \mathbb{C}), quando munido das operações usuais de adição de funções e multiplicação de número real (respectivamente, complexo) por uma função.

A seguir exibiremos alguns exemplos importantes de seccionalmente contínuas definidas em $I \doteq \mathbb{R}$.

Exercício 7.99 Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 1, & \text{para } x \in [0, \pi) \\ -1, & \text{para } x \in [-\pi, 0) \\ f(x + 2\pi) = f(x), & \text{para cada } x \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (7.100)$$

Mostre que a função f é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em \mathbb{R} .

Resolução:

Notemos que os pontos de descontinuidade da função f serão somente os pontos da forma

$$x = k\pi, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que em cada um desses pontos a função f tem um ponto de descontinuidade de 1.^a espécie pois, para cada $k \in \mathbb{Z}$, existem os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} f(x).$$

De fato, se $k \in \mathbb{Z}$ for par, isto é,

$$k = 2m \quad \text{para algum } m \in \mathbb{Z},$$

teremos que:

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (2m\pi)^+} f(x) \\ x \in (2m\pi, 2(m+1)\pi), \text{ logo, (7.100)} \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (2m\pi)^-} f(x) \\ x \in ((2m-1)\pi, 2m\pi), \text{ logo, (7.100)} \quad -1.$$

Por outro lado, se $k \in \mathbb{Z}$ for ímpar, isto é,

$$k = 2m + 1 \quad \text{para algum } m \in \mathbb{Z},$$

teremos que:

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow [(2m+1)\pi]^+} f(x) \\ x \in (2m+1\pi, 2(m+1)\pi), \text{ logo, (7.100)} \quad -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow [(2m+1)\pi]^-} f(x) \\ x \in ((2m)\pi, (2m+1)\pi), \text{ logo, (7.100)} \quad 1,$$

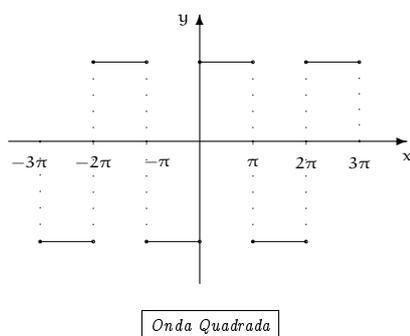
mostrando que a função f tem um ponto de descontinuidade de 1.ª espécie no ponto $x = k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Logo em qualquer intervalo limitado $[a, b]$, a função f terá, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade de 1.ª espécie, pois em cada intervalo $[a, b]$ existe, no máximo, um número finito de pontos do tipo $x = k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

□

Observação 7.101 A função f do Exemplo (7.99), será denominada onda quadrada.

A representação geométrica do gráfico da função f do Exemplo (7.99) é dada pela figura abaixo.



Outro exemplo importante é:

Exercício 7.102 Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} x, & \text{para } x \in [-\pi, \pi) \\ f(x + 2\pi) = f(x), & \text{para cada } x \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (7.103)$$

Mostre que a função f é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em \mathbb{R} .

Resolução:

Notemos que os pontos de descontinuidade da função f serão somente os pontos da forma

$$x = (2k + 1)\pi, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que em cada um desses pontos a função f tem um ponto de descontinuidade de 1.ª espécie pois, para cada $k \in \mathbb{Z}$, existem os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow [(2k+1)\pi]^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow [(2k+1)\pi]^-} f(x).$$

Como a função f é 2π -periódica basta estudarmos os pontos de descontinuidade da função no intervalo $[-\pi, \pi]$, ou seja, nos pontos

$$-\pi \text{ e } \pi.$$

Notemos que

$$\text{se } x \in (\pi, 3\pi), \text{ segue que: } f(x) \stackrel{(7.100)}{=} x - 2\pi \quad (7.104)$$

$$\text{se } x \in (-3\pi, -\pi), \text{ segue que: } f(x) \stackrel{(7.100)}{=} x + 2\pi \quad (7.105)$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &\stackrel{x \in (\pi, 3\pi), \text{ logo, (7.104)}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x - 2\pi) \\ &= -\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &\stackrel{x \in (-\pi, \pi), \text{ logo, (7.100)}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^-} x \\ &= \pi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) &\stackrel{x \in (-\pi, \pi), \text{ logo, (7.100)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\pi^+} x \\ &= -\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) &\stackrel{x \in (-3\pi, -\pi), \text{ logo, (7.105)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\pi^-} (x + 2\pi) \\ &= \pi, \end{aligned}$$

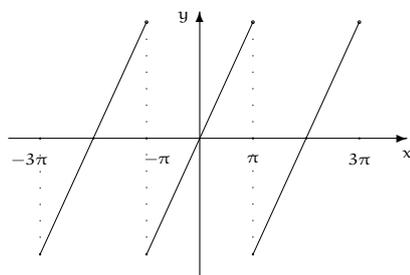
mostrando que a função f tem um ponto de descontinuidade de 1.^a espécie no ponto $x = (2k + 1)\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Logo em qualquer intervalo limitado $[a, b]$, a função f terá, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade de 1.^a espécie, pois em cada intervalo $[a, b]$ existe, no máximo, um número finito de pontos do tipo $x = (2k + 1)\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

□

Observação 7.106 A função f do Exemplo (7.102), será denominada onda dente de serra.

A representação geométrica do gráfico da função f do Exemplo (7.102) é dada pela figura abaixo.



Onda Dente de Serra

Temos também o:

Exercício 7.107 Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{para } x \in (0, \infty) \\ 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0] \end{cases}. \quad (7.108)$$

Mostre que a função f não é seccionalmente contínua (ou contínua por partes) em \mathbb{R} .

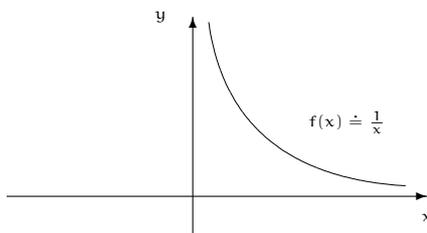
Resolução:

De fato, a função f tem um, único ponto de descontinuidade, que é o ponto $x = 0$.

Notemos que no ponto $x = 0$ a função f tem uma descontinuidade que não é de 1.ª espécie, pois não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (= +\infty).$$

A figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função f .



□

Observação 7.109

1. Notemos que, uma função seccionalmente contínua em $[a, b]$ **não** precisa, necessariamente, estar definida em todo o intervalo $[a, b]$ mas apenas em uma reunião finita, do tipo

$$\bigcup_{j=0}^N (x_j, x_{j-1}),$$

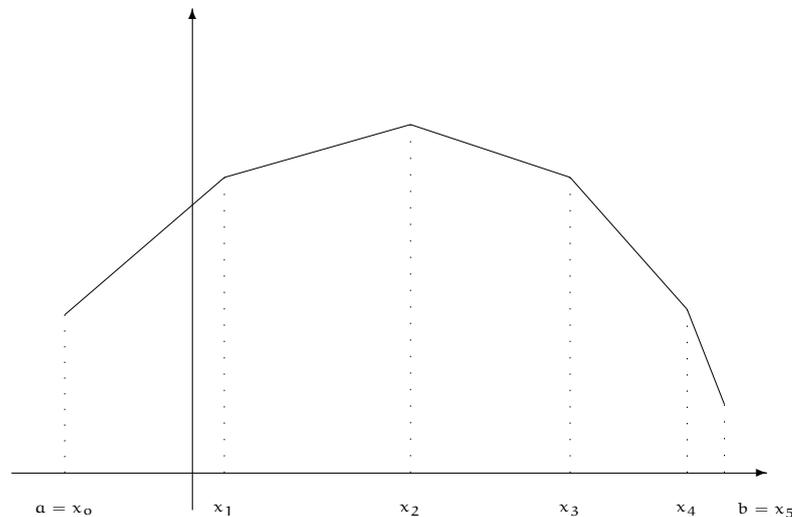
onde $x_j \in [a, b]$, para cada $j \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Além disso, para cada $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, deverá ser uma função contínua no intervalo aberto (x_j, x_{j-1}) e existirem, e serem finitos, os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_j^-} f(x).$$

Essas observações serão importantes para incluirmos as derivadas de funções (a valores reais ou complexos), cujas representações geométricas dos gráficos são formadas, por exemplo, por poligonais.

A figura abaixo ilustra a situação acima, para o caso da função considerada, ser a valores reais.



2. Observemos também que, toda função f seccionalmente contínua em $[a, b]$ é uma função limitada em $[a, b]$, isto é, existe $M \in (0, \infty)$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{para cada } x \in [a, b]. \quad (7.110)$$

De fato, como a função f é seccionalmente contínua em $[a, b]$ segue que existem, no máximo, um número finito de pontos $x_j \in [a, b]$, para $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, de

modo que a função f é contínua em $\bigcup_{j=1}^N (x_{j-1}, x_j)$ e, além disso, existem, e são finitos, os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_j^-} f(x),$$

excetuando-se, eventualmente, se $x_0 \doteq a$ e $x_N \doteq b$ que, neste caso, seriam considerados, nos extremos do intervalo $[a, b]$, os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

serem finitos.

Assim, para cada $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, a restrição da função f a cada um dos intervalos abertos (x_{j-1}, x_j) , que denotaremos por

$$F_j \doteq f|_{(x_{j-1}, x_j)},$$

pode ser estendida a uma função contínua no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, definido-se

$$F_j(x_{j-1}) \doteq \lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad F_j(x_{j+1}) \doteq \lim_{x \rightarrow x_{j+1}^-} f(x),$$

e portanto esta será uma função limitada nesse intervalo, implicando que a função f também será uma função limitada nesse intervalo.

Como temos somente N intervalos desse tipo, segue que a função f será uma função limitada em $[a, b]$.

3. Notemos também que toda função $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, \mathbb{C}) contínua em I , será uma função seccionalmente contínua em I , ou seja,

$$C(I; \mathbb{R}) \subseteq SC(I; \mathbb{R}) \quad (\text{respectivamente, } C(I; \mathbb{C}) \subseteq SC(I; \mathbb{C})).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

4. Para finalizar temos que toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, \mathbb{C}), que é seccionalmente contínua em $[a, b]$, será uma função integrável em $[a, b]$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (visto em Cálculo 1).

Definição 7.111 Dadas as funções $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, seccionalmente contínuas em $[a, b]$ (isto é, a *valores reais*), definiremos

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_a^b f(x) g(x) dx \in \mathbb{R}, \quad (7.112)$$

ou seja,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : SC([a, b]; \mathbb{R}) \times SC([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por (7.112).

Se as funções $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ são seccionalmente contínuas em $[a, b]$ (isto é, a *valores complexos*), definiremos

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \in \mathbb{C}, \quad (7.113)$$

onde, se

$$Z = A + iB \in \mathbb{C},$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, então definimos

$$\bar{Z} \doteq A - Bi, \quad (7.114)$$

dito conjugado do número complexo Z , ou seja,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : SC([a, b]; \mathbb{C}) \times SC([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C},$$

dada por (7.113).

Com isto temos as seguintes propriedades de $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

Proposição 7.115 A função $\langle \cdot, \cdot \rangle : SC([a, b]; \mathbb{R}) \times SC([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $\langle \cdot, \cdot \rangle : SC([a, b]; \mathbb{C}) \times SC([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$) tem as seguintes propriedades:

Se $f, g, h \in SC([a, b]; \mathbb{R})$ (respectivamente, $SC([a, b]; \mathbb{C})$) e $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente, \mathbb{C}), temos que:

$$1. \langle \alpha \cdot f + g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \quad (7.116)$$

$$2. \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad (\text{respectivamente, } \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}), \quad (7.117)$$

$$3. \langle f, f \rangle \geq 0. \quad (7.118)$$

Demonstração:

Faremos a demonstração para o caso $\langle \cdot, \cdot \rangle : SC([a, b]; \mathbb{R}) \times SC([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

O caso relacionado a funções a valores complexo, será deixado como exercício para o leitor.

De 1.:

Notemos que:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \cdot f + g, h \rangle &\stackrel{(7.112)}{=} \int_a^b (\alpha f + g)(x) h(x) dx \\ &= \int_a^b [\alpha f(x) + g(x)] h(x) dx \\ &\stackrel{\text{propriedades da integral definida}}{=} \alpha \int_a^b f(x) h(x) dx + \int_a^b g(x) h(x) dx \\ &\stackrel{(7.112)}{=} \alpha \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (7.116).

De 2.:

Observemos que

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &\stackrel{(7.112)}{=} \int_a^b f(x) g(x) dx \\ &\stackrel{\text{propriedades de } \mathbb{R}}{=} \int_a^b g(x) f(x) dx \\ &\stackrel{(7.112)}{=} \langle g, f \rangle, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (7.117).

De 3.:

Notemos que:

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &\stackrel{(7.112)}{=} \int_a^b f(x) f(x) dx \\ &= \int_a^b \underbrace{f^2(x)}_{\geq 0} dx \stackrel{\text{propriedades da integral definida}}{\geq} 0, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (7.118), completando a demonstração do resultado. □

Observação 7.119

1. A função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : SC([a, b]; \mathbb{R}) \times SC([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por (7.112) (respectivamente, $\langle \cdot, \cdot \rangle : SC([a, b]; \mathbb{C}) \times SC([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, dada por (7.113) é quase um produto interno no espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(SC([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ (respectivamente, $(SC([a, b]; \mathbb{C}), +, \cdot)$), onde \pm denota a operação usual de adição de funções e \cdot denota a operação multiplicação de número real (respectivamente, complexo) por uma função.

Para a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ser um produto interno no respectivo espaço vetorial, ela teria que satisfazer, além das propriedades da Proposição (7.115) (ou seja, (7.116), (7.117) e (7.118)), também deveria satisfazer a seguinte propriedade:

$$\text{se } f \in SC([a, b]; \mathbb{R}), \quad \text{então } \langle f, f \rangle = 0 \quad \text{se, e somente se, } f = 0,$$

(respectivamente, em $SC([a, b]; \mathbb{C})$).

Mas essa propriedade não vale em $SC([a, b]; \mathbb{R})$ (respectivamente, $SC([a, b]; \mathbb{C})$), como mostra o seguinte exemplo:

Considere a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{para } x = 0 \end{cases}. \quad (7.120)$$

Observemos que $f \in SC([0, 1]; \mathbb{R})$ e

$$\langle f, f \rangle \stackrel{(7.112)}{=} \int_0^1 f^2(x) dx \stackrel{\text{Cálculo I}}{=} 0,$$

mas

$$f \neq 0.$$

Mesmo assim, a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dada por (7.112) (respectivamente, (7.113)) desempenhará um papel importante na determinação dos coeficientes

$$a_m \quad \text{e} \quad b_n, \quad \text{para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N},$$

que aparecem na expansão (7.3), associada à função f , como veremos mais adiante.

2. Notemos que a função $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dada por (7.112) (respectivamente, (7.113)), satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwartz, isto é,

Dadas $f, g \in SC([a, b]; \mathbb{R})$ (respectivamente, $SC([a, b]; \mathbb{C})$), segue que

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad (7.121)$$

onde $\|\cdot\|: SC([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $\|\cdot\|: SC([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$), dada por

$$\|f\| \doteq \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad (7.122)$$

para $f \in SC([a, b]; \mathbb{R})$ (respectivamente, $f \in SC([a, b]; \mathbb{C})$) que será denominada semi-norma da função f , associada à função $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Faremos a demonstração da desigualdade acima para o caso de funções a valores reais, isto é, em $SC([a, b]; \mathbb{R})$.

O caso relacionado a funções a valores complexo, isto é, em $SC([a, b]; \mathbb{C})$, será deixado com exercício para o leitor.

Notemos que, dada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sabemos que

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{(7.118)}{\leq} \langle \lambda \cdot f + g, \lambda \cdot f + g \rangle \\
 &\stackrel{(7.116)}{=} \lambda^2 \langle f, f \rangle + \lambda \langle f, g \rangle + \lambda \underbrace{\langle g, f \rangle}_{(7.117) \text{ caso real } \langle f, g \rangle} + \langle g, g \rangle \\
 &= \lambda^2 \langle f, f \rangle + 2\lambda \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\
 &\stackrel{(7.122)}{=} \|f\|^2 \lambda^2 + 2 \langle f, g \rangle \lambda + \|g\|^2.
 \end{aligned} \tag{7.123}$$

Logo o trinômio do 2.º grau à direita deverá ser não negativo, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, para que isto aconteça é necessário e suficiente, que o discriminante, que indicaremos por Δ , do trinômio do 2.º grau à direita deverá ser não positivo, isto é

$$\Delta \leq 0,$$

ou seja,

$$0 \geq \Delta \stackrel{(7.123)}{=} 4 \langle f, g \rangle^2 - 4 \|f\|^2 \|g\|^2,$$

que dividindo por 4, implicará em

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|,$$

como queríamos demonstrar.

3. Como consequência de (7.121), temos que a função $\|\cdot\| : SC([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $\|\cdot\| : SC([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$) satisfaz a, assim denominada, desigualdade triangular, ou seja:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{7.124}$$

onde $f, g \in SC([a, b]; \mathbb{R})$ (respectivamente, $SC([a, b]; \mathbb{C})$).

De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|^2 &\stackrel{(7.122)}{=} \langle f + g, f + g \rangle \\
 &\stackrel{(7.116)}{=} \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \underbrace{\langle g, f \rangle}_{(7.117) \text{ caso real } \langle f, g \rangle} + \langle g, g \rangle \\
 &\stackrel{(7.122)}{=} \|f\|^2 + 2 \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\
 &\leq \|f\|^2 + 2 |\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \\
 &\stackrel{(7.121)}{\leq} \|f\|^2 + 2 \|f\| \|g\| + \|g\|^2 \\
 &= (\|f\| + \|g\|)^2,
 \end{aligned}$$

mostrando que

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

como queríamos demonstrar.

4. Além disso vale, o assim denominado Teorema de Pitágoras, ou seja, se $f, g \in SC([a, b]; \mathbb{R})$ (respectivamente, $SC([a, b]; \mathbb{C})$), então

$$\langle f, g \rangle = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad (7.125)$$

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad (7.126)$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &\stackrel{(7.122)}{=} \langle f + g, f + g \rangle \\ &\stackrel{(7.116)}{=} \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \underbrace{\langle g, f \rangle}_{\stackrel{(7.117) \text{ caso real}}{=} \langle f, g \rangle} + \langle g, g \rangle \\ &\stackrel{(7.122)}{=} \|f\|^2 + 2 \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \end{aligned} \quad (7.127)$$

Logo, de (7.127), segue que

$$\langle f, g \rangle = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

como queríamos demonstrar.

A seguir exibiremos algumas propriedades gerais de integrais definidas de algumas classes de funções especiais, que serão importantes no cálculo dos coeficientes

$$a_n \quad \text{e} \quad b_n, \quad \text{para} \quad m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{N}$$

na expressão (7.3).

Observação 7.128 Seja $L \in (0, \infty)$ fixado.

Observemos que:

1. Se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) é $2L$ -periódica, ou seja,

$$f(x + 2L) = f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.129)$$

e é integrável em $[-L, L]$, segue que

$$\int_0^{2L} f(x) dx = \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (7.130)$$

Em geral, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, temos:

$$\int_{x_0-L}^{x_0+L} f(x) dx = \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (7.131)$$

De fato, notemos que

$$\int_{-L}^L f(x) dx \stackrel{\text{propriedades da integral definida}}{=} \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^{2L} f(x) dx + \int_{2L}^L f(x) dx. \quad (7.132)$$

Aplcando mudança de variáveis na integral definida, obteremos:

$$\begin{aligned} \int_{2L}^L f(x) dx &= \left\langle \begin{array}{l} y = x - 2L, \text{ logo: } dy = dx \\ \text{assim } x = y + 2L \\ x = 2L, \text{ logo: } y = 0 \\ x = L, \text{ logo: } y = -L \end{array} \right\rangle = \int_0^{-L} f(y + 2L) dy \\ &\stackrel{(7.129)}{=} \int_0^{-L} f(y) dy \\ &= - \int_{-L}^0 f(y) dy. \end{aligned} \quad (7.133)$$

Substituindo (7.133) em (7.132), obteremos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^{2L} f(x) dx - \int_{-L}^0 f(x) dx \\ &= \int_0^{2L} f(x) dx, \end{aligned} \quad (7.134)$$

mostrando a validade da identidade (7.130).

A verificação da identidade (7.131) será deixada como exercício para o leitor.

2. Suponhamos que a função $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$) é uma função par, isto é,

$$f(-x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L]. \quad (7.135)$$

e integrável em $[-L, L]$.

Então teremos

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (7.136)$$

De fato, notemos que

$$\int_{-L}^L f(x) dx \stackrel{\text{propriedades da integral definida}}{=} \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx. \quad (7.137)$$

Mas, de uma mudança de variáveis na integral definida, obteremos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^0 f(x) dx &= \left\langle \begin{array}{l} y = -x, \text{ logo : } dy = -dx \\ \text{assim : } x = -y \\ x = -L, \text{ logo : } y = L \\ x = 0, \text{ logo : } y = 0 \end{array} \right\rangle = \int_L^0 f(-y) (-dy) \\ &\stackrel{(7.135)}{=} - \int_L^0 f(y) dy \\ &\stackrel{\text{propriedade da integral definida}}{=} \int_0^L f(y) dy, \end{aligned} \quad (7.138)$$

ou seja,

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_0^L f(x) dx. \quad (7.139)$$

Portanto, substituindo (7.139) em (7.137), teremos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx \\ &= 2 \int_0^L f(x) dx, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

3. Suponhamos que a função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$) seja uma função ímpar, isto é,

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L], \quad (7.140)$$

e integrável em $[-L, L]$.

Então, teremos

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0. \quad (7.141)$$

De fato, observemos que

$$\int_{-L}^L f(x) dx \stackrel{\text{propriedades da integral definida}}{=} \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx. \quad (7.142)$$

Mas, de uma mudança de variáveis na integral definida, obteremos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^0 f(x) dx &= \left\langle \begin{array}{l} y = -x, \text{ logo: } dy = -dx \\ \text{assim: } x = -y \\ x = -L, \text{ logo: } y = L \\ x = 0, \text{ logo: } y = 0 \end{array} \right\rangle = \int_L^0 f(-y) (-dy) \\ &\stackrel{(7.140)}{=} - \int_0^L f(y) dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = - \int_0^L f(x) dx. \quad (7.143)$$

Portanto, substituindo (7.143) em (7.142), teremos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= - \int_0^L f(x) dx + \int_0^L f(x) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

4. Lembremos que se $f, g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $f, g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$) são funções pares, então as funções

$$f \cdot g, \quad f + g, \quad f - g, \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}$$

(na última, onde ela estiver definida) também serão funções pares.

Por outro lado, se as função $f, g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $f, g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$) forem funções ímpares, então as funções

$$f \cdot g \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}$$

(esta última, onde estiver definida) serão funções pares e as funções

$$f + g \quad \text{e} \quad f - g$$

serão funções ímpares.

Por fim se a função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função par e a função $g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função ímpar (respectivamente, $f, g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$) então as funções

$$f \cdot g \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}$$

(esta última, onde estiver definida) serão funções ímpares.

As demonstrações destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

5. No resultado que vem a seguir, precisaremos das seguintes relações trigonométricas:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \quad (7.144)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \quad (7.145)$$

Notemos que, somando-se (7.144) com (7.145), obteremos

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2} \quad (7.146)$$

e subtraindo-se (7.144) de (7.145), teremos

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}. \quad (7.147)$$

Além disso,

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cos(a) \quad (7.148)$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cos(a) \quad (7.149)$$

Notemos que, somando-se (7.148) com (7.149), obteremos

$$\operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)}{2}. \quad (7.150)$$

A seguir definiremos duas famílias de funções que serão muito importantes no estudo das funções que podem ser expandidas em uma série de funções do tipo (7.3).

Definição 7.151 Para cada $n \in \mathbb{N}$, definiremos a função $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\phi_n(x) \doteq \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (7.152)$$

e para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definiremos a função $\psi_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\psi_m(x) \doteq \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.153)$$

Estas duas famílias de funções têm as seguintes propriedades:

Proposição 7.154

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções $\underline{\psi}_n$ e $\underline{\phi}_n$ são $\frac{2L}{n}$ -periódicas.
Em particular, todas elas serão $2L$ -periódicas;
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{\phi}_n$ é uma função ímpar;
3. Para cada $m \in \mathbb{N}$, a função $\underline{\psi}_m$ é uma função par;
4. Valem as seguintes identidades:

$$\langle \psi_k, \psi_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{para } k, m \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \text{ com } k \neq m \\ L, & \text{para } k = m \in \mathbb{N} \\ 2L, & \text{para } k = m = 0 \end{cases}; \quad (7.155)$$

$$\langle \psi_m, \phi_n \rangle = 0, \quad \text{para } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}; \quad (7.156)$$

$$\langle \phi_n, \phi_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{para } n, j \in \mathbb{N} \text{ com } n \neq j \\ L, & \text{para } n = j \in \mathbb{N} \end{cases}. \quad (7.157)$$

Demonstração:

De 1.:

Seja $n \in \mathbb{N}$ e consideremos

$$T \doteq \frac{2L}{n}. \quad (7.158)$$

Para a função $\underline{\phi}_n$ teremos:

Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \phi_n(x+T) &\stackrel{(7.152)}{=} \text{sen} \left[\frac{n\pi}{L} (x+T) \right] \\ &\stackrel{(7.158)}{=} \text{sen} \left[\frac{n\pi}{L} \left(x + \frac{2L}{n} \right) \right] \\ &= \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x + 2\pi \right) \\ &\stackrel{\text{sen é } 2\pi\text{-periódica}}{=} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \\ &\stackrel{(7.152)}{=} \phi_n(x). \end{aligned}$$

Logo o número real T , dado por (7.158), é um período para a função $\underline{\phi}_n$.

Por outro lado, notemos que se $T' \in (0, \infty)$ é um outro período para a função ϕ_n então, para cada $x \in \mathbb{R}$, deveremos ter

$$\begin{aligned} \phi_n(x + T') &= \phi_n(x), \\ \text{de (7.152), teremos} \quad \text{sen} \left[\frac{n\pi}{L}(x + T') \right] &= \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x \right), \\ \text{de (7.148), segue que} \quad \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{L}T' \right) \\ &+ \cos \left(\frac{n\pi}{L}x \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}T' \right) = \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}x \right). \end{aligned} \quad (7.159)$$

Tomando-se

$$x = \frac{L}{2n},$$

na identidade (7.159), obteremos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right)}_{=0} \cos \left(\frac{n\pi}{L}T' \right) + \underbrace{\cos \left(\frac{\pi}{2} \right)}_{=1} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L}T' \right) &= \underbrace{\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right)}_{=0}, \\ \text{isto é,} \quad \cos \left(\frac{n\pi}{L}T' \right) &= 1, \\ \text{logo,} \quad \frac{n\pi}{L}T' &= 2k\pi, \end{aligned}$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto

$$T' = k \frac{2L}{n} \stackrel{(7.158)}{=} kT,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, mostrando que T , dado por (7.158), é o período fundamental da função ϕ_n , para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para a função ψ_m :

Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} \psi_m(x + T) &\stackrel{(7.153)}{=} \cos \left[\frac{m\pi}{L}(x + T) \right] \\ &\stackrel{(7.158)}{=} \cos \left[\frac{m\pi}{L} \left(x + \frac{2L}{m} \right) \right] \\ &= \cos \left(\frac{m\pi}{L}x + 2\pi \right) \\ &\stackrel{\text{cos é } 2\pi\text{-periódica}}{=} \cos \left(\frac{m\pi}{L}x \right) \\ &\stackrel{(7.153)}{=} \psi_m(x). \end{aligned}$$

Por outro lado se $T' \in (0, \infty)$ é um outro período para a função $\underline{\psi}_m$ então, para cada $x \in \mathbb{R}$, deveremos ter

$$\begin{aligned} \psi_m(x + T') &= \psi_m(x) \quad , \\ \text{de (7.153), teremos} \quad \cos \left[\frac{m\pi}{L} (x + T') \right] &= \cos \left(\frac{m\pi}{L} x \right) \quad , \\ \text{de (7.144), segue que} \quad \cos \left(\frac{m\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{m\pi}{L} T' \right) \\ &+ \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L} T' \right) = \cos \left(\frac{m\pi}{L} x \right) \quad . \quad (7.160) \end{aligned}$$

Tomando-se

$$x = \frac{L}{m}$$

na identidade (7.160), obteremos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \cos \left(\frac{m\pi}{L} T' \right) + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{L} T' \right) &= \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \quad , \\ \text{isto é,} \quad \cos \left(\frac{m\pi}{L} T' \right) &= 1 \quad , \\ \text{logo,} \quad \frac{m\pi}{L} T' &= 2k\pi \quad , \end{aligned}$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto

$$T' = k \frac{2L}{n} \stackrel{(7.158)}{=} kT \quad ,$$

mostrando que \underline{T} , dado por (7.158), é o período fundamental da função $\underline{\psi}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \phi_n(-x) &\stackrel{(7.152)}{=} \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{L} (-x) \right] \\ &\stackrel{\text{sen é uma função ímpar}}{=} -\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \\ &\stackrel{(7.152)}{=} -\phi_n(x) \quad , \end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{\phi}_n$ é uma função ímpar, completando a demonstração do item 2. .

De 3.:

Observemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \psi_m(-x) &\stackrel{(7.153)}{=} \cos \left[\frac{m\pi}{L} (-x) \right] \\ &\stackrel{\text{cos é uma função par}}{=} \cos \left(\frac{m\pi}{L} x \right) \\ &\stackrel{(7.153)}{=} \psi_m(x), \end{aligned}$$

mostrando que a função $\underline{\psi}_m$ é uma função par, completando a demonstração do item 3. .

De 4.:

Notemos que, para $k, m \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \langle \psi_k, \psi_m \rangle &\stackrel{(7.112)}{=} \int_{-L}^L \psi_k(x) \psi_m(x) dx \\ &\stackrel{(7.153)}{=} \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{m\pi}{L} x \right) dx \\ &\stackrel{(7.146)}{=} \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{k\pi}{L} x + \frac{m\pi}{L} x \right) + \cos \left(\frac{k\pi}{L} x - \frac{m\pi}{L} x \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \left(\frac{(k+m)\pi}{L} x \right) + \cos \left(\frac{(k-m)\pi}{L} x \right) \right] dx. \quad (7.161) \end{aligned}$$

Logo, se $k \neq m$, segue que:

$$\begin{aligned} \langle \psi_k, \psi_m \rangle &\stackrel{(7.161)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \left(\frac{(k+m)\pi}{L} x \right) + \cos \left(\frac{(k-m)\pi}{L} x \right) \right] dx \\ &\stackrel{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} \frac{1}{2} \left\{ \text{sen} \left[\frac{(k+m)\pi}{L} x \right] \frac{L}{(k+m)\pi} \Big|_{-L}^L \right. \\ &\quad \left. + \text{sen} \left[\frac{(k-m)\pi}{L} x \right] \frac{L}{(k-m)\pi} \Big|_{x=-L}^{x=L} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{L}{(k+m)\pi} \{ \text{sen}[(k+m)\pi] - \text{sen}[(k+m)(-\pi)] \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{(k-m)\pi} \{ \text{sen}[(k-m)\pi] - \text{sen}[(k-m)(-\pi)] \} \right\} \\ &= 0. \quad (7.162) \end{aligned}$$

Se $k = m \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_m, \psi_m \rangle &\stackrel{(7.161)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \left(\frac{(k+m)\pi}{L} x \right) + \overbrace{\cos \left(\frac{\overbrace{(k-k)}^0 \pi}{L} x \right)}^{=1} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \left(\frac{2m\pi}{L} x \right) + 1 \right] dx \\
 &\stackrel{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} \frac{1}{2} \left[\text{sen} \left(\frac{2m\pi}{L} x \right) \frac{L}{2m\pi} + x \right] \Big|_{x=-L}^{x=L} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{L}{2m\pi} \underbrace{\text{sen}(2m\pi)}_{=0} + L - \left[\frac{L}{2m\pi} \underbrace{\text{sen}(-2m\pi)}_{=0} - L \right] \right\} \\
 &= L.
 \end{aligned}$$

Se $k = m = 0$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_0, \psi_0 \rangle &\stackrel{(7.153)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L 2 dx \\
 &= 2L,
 \end{aligned}$$

com isto completamos a demonstração de (7.155).

Por outro lado se $n, j \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_n, \phi_j \rangle &\stackrel{(7.112)}{=} \int_{-L}^L \phi_n(x) \phi_j(x) dx \\
 &\stackrel{(7.152)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \text{sen} \left(\frac{j\pi}{L} x \right) \right] dx \\
 &\stackrel{(7.147)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \left(\frac{(n-j)\pi}{L} x \right) - \cos \left(\frac{(n+j)\pi}{L} x \right) \right] dx. \tag{7.163}
 \end{aligned}$$

Se $j = n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_n, \phi_n \rangle &\stackrel{(7.163)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\underbrace{\cos \left(\frac{\overbrace{(n-n)}^0 \pi}{L} x \right)}_{=1} - \cos \left(\frac{(n+n) \pi}{L} x \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 - \cos \left(\frac{(n+n) \pi}{L} x \right) \right] \\
 &\stackrel{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} \frac{1}{2} \left[x - \cos \left(\frac{2n\pi}{L} x \right) \frac{L}{2n\pi} \right] \Big|_{x=-L}^{x=L} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left[L - \cos \left(\frac{2n\pi}{L} L \right) \frac{L}{2n\pi} \right] - \left[(-L) - \cos \left(\frac{2n\pi}{(-L)} \frac{L}{2n\pi} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left[L - \cos(2n\pi) \frac{L}{2n\pi} \right] - \left[-L - \underbrace{\cos(-2n\pi)}_{=\cos(2n\pi)} \frac{L}{2n\pi} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left[L - \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} \frac{L}{2n\pi} \right] - \left[-L - \underbrace{\cos(-2n\pi)}_{=1} \frac{L}{2n\pi} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left[L - \frac{L}{2n\pi} \right] - \left[-L - \frac{L}{2n\pi} \right] \right\} \\
 &= L,
 \end{aligned}$$

mostrando (7.157).

Por outro lado $j \neq n$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_n, \phi_j \rangle &\stackrel{(7.163)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \left(\frac{(n-j) \pi}{L} x \right) - \cos \left(\frac{(n+j) \pi}{L} x \right) \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

A verificação da última igualdade acima é semelhante ao que fizemos em (7.162) e assim, deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Além disso, se $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_n, \phi_m \rangle &\stackrel{(7.112)}{=} \int_{-L}^L \psi_n(x) \phi_m(x) dx \\
 &\stackrel{(7.153) \text{ e } (7.152)}{=} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\
 &\stackrel{(7.150)}{=} \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{m\pi}{L}x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{m\pi}{L}x\right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left\{ \operatorname{sen}\left[\frac{(n+m)\pi}{L}x\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{(n-m)\pi}{L}x\right] \right\} dx. \quad (7.164)
 \end{aligned}$$

Se $n \neq m$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_n, \phi_m \rangle &\stackrel{(7.164)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left\{ \operatorname{sen}\left[\frac{(n+m)\pi}{L}x\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{(n-m)\pi}{L}x\right] \right\} dx \\
 &\stackrel{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} \frac{1}{2} \left\{ -\cos\left[\frac{(n+m)\pi}{L}x\right] \frac{L}{(n+m)\pi} \Big|_{x=-L}^{x=L} \right. \\
 &\quad \left. - \cos\left[\frac{(n-m)\pi}{L}x\right] \frac{L}{(n-m)\pi} \Big|_{x=-L}^{x=L} \right\} \\
 &\stackrel{\text{Exercício 0}}{=} 0
 \end{aligned}$$

e, finalmente, para $n = m \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_n, \phi_n \rangle &\stackrel{(7.164)}{=} \int_{-L}^L \left\{ \operatorname{sen}\left[\frac{(n+n)\pi}{L}x\right] + \overbrace{\operatorname{sen}\left[\frac{(n-n)\pi}{L}x\right]}^{=0} \right\} dx \\
 &\stackrel{(7.164)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx \\
 &\stackrel{\text{Teorema Fundamental do Cálculo}}{=} -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \frac{L}{2n\pi} \Big|_{x=-L}^{x=L} \quad (7.165) \\
 &\stackrel{\text{Exercício 0}}{=} 0,
 \end{aligned}$$

mostrando (7.156) e completando do item 4. e do resultado.

□

Observação 7.166

1. Suponhamos que a função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser representada por uma série de funções do tipo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \quad (7.167)$$

para cada $x \in [-L, L]$, que, de (7.153) e (7.152), é o mesmo que escrever

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \psi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \psi_n(x) + b_n \phi_n(x)]. \quad (7.168)$$

Formalmente, notemos que:

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_0 \rangle &\stackrel{(7.168)}{=} \left\langle \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \psi_n + b_n \phi_n], \psi_0 \right\rangle \\ &\stackrel{\text{todo cuidado!}}{=} \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} 2L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \underbrace{\langle \psi_n, \psi_0 \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} 0} + b_n \underbrace{\langle \phi_n, \psi_0 \rangle}_{\stackrel{(7.156)}{=} 0} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} 2L \\ &= a_0 L, \end{aligned} \quad (7.169)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_0 &\stackrel{(7.169)}{=} \frac{1}{L} \langle f, \psi_0 \rangle \\ &\stackrel{(7.112)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \psi_0(x) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot dx \end{aligned} \quad (7.170)$$

De modo análogo, se $m \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_m \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \psi_n + b_n \phi_n], \psi_m \right\rangle \\ &\stackrel{\text{todo cuidado!}}{=} \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_0, \psi_m \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} \text{com } m \neq 0, 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \underbrace{\langle \psi_n, \psi_m \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} \text{com } n, m \neq 0} \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ L, & \text{se } n = m \end{cases} + b_n \underbrace{\langle \phi_n, \psi_m \rangle}_{\stackrel{(7.156)}{=} 0} \right] \\ &= a_m L, \end{aligned} \quad (7.171)$$

ou seja, para $m \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} a_m &\stackrel{(7.171)}{=} \frac{1}{L} \langle f, \psi_m \rangle \\ &\stackrel{(7.112)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \psi_m(x) dx \\ &\stackrel{(7.153)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx. \end{aligned} \quad (7.172)$$

Finalmente, para $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_k \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \psi_n + b_n \phi_n], \phi_k \right\rangle \\ &\stackrel{\text{todo cuidado!}}{=} \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_0, \phi_k \rangle}_{(7.156)_0} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \underbrace{\langle \psi_n, \phi_k \rangle}_{(7.156)_0} + b_n \underbrace{\langle \phi_n, \phi_k \rangle}_{(7.157)}] \\ &= b_k L, \end{aligned} \quad (7.173)$$

ou seja, para $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} b_k &\stackrel{(7.173)}{=} \frac{1}{L} \langle f, \phi_k \rangle \\ &\stackrel{(7.112)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \phi_k(x) dx \\ &\stackrel{(7.152)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx. \end{aligned} \quad (7.174)$$

Conclusão, de (7.169), (7.172) e (7.174), segue que os coeficientes da série de funções (7.167) (ou, equivalentemente, da série de funções (7.168)) serão dados por:

$$a_m \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx, \quad \text{para cada } m \in \{0\} \cup \mathbb{N} \quad (7.175)$$

e

$$b_k \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \quad (7.176)$$

2. A obtenção de (7.175) e (7.176) foi formal, isto é, sem o rigor matemático necessário com relação a convergência das séries de funções envolvidas.

Na verdade precisaríamos justificar o "todo cuidado!" nos cálculos acima.

3. Dada uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que seja integrável em $[-L, L]$, segue que os coeficientes (7.175) e (7.176) existem, e podemos considerar a série de funções, que denotaremos por $S[f]$:

$$S[f](x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \quad (7.177)$$

ou ainda,

$$S[f] \doteq \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \psi_n + b_n \phi_n], \quad (7.178)$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, o coeficiente \underline{a}_m será dado por (7.175) e, para cada $k \in \mathbb{N}$, o coeficiente \underline{b}_k será dado por (7.176), e assim podemos pensar em estudar a convergência da série de funções (7.177) (ou, equivalentemente, da série de funções (7.178)).

A fórmulas (7.175) e (7.176), que nos fornecem expressões para os coeficientes na série de funções (7.177) (ou, equivalementemente, da série de funções (7.178)), são denominadas fórmulas de Euler-Fourier.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 7.179 *Sejam $L > 0$ fixado e $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[-L, L]$.*

A série de funções (7.177) (ou, equivalentemente, da série de funções (7.178)), onde os coeficientes \underline{a}_m e \underline{b}_k são dados por (7.175) e (7.176), respectivamente, será denominada série de Fourier associada à função f .

Os coeficientes \underline{a}_m e \underline{b}_k , dados por (7.175) e (7.176), respectivamente, serão ditos coeficientes de Fourier associados à função f .

A seguir faremos algumas observações sobre as noções introduzidas acima.

Observação 7.180

1. Se $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$, logo será uma função integrável em $[-L, L]$.

Portanto, existem os coeficientes de Fourier associados a função f , ou seja, os coeficientes \underline{a}_m e \underline{b}_k , para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, dados por (7.175) e (7.176), respectivamente.

2. Do item 1. da Proposição (7.154), segue que cada termo da série de funções (7.177) (ou, equivalentemente, da série de funções (7.178)) será uma função $2L$ -periódica.

Logo se a série de funções (7.177) (ou, equivalentemente, da série de funções (7.178)) for convergente, ela será convergente para uma função que deverá ser $2L$ -periódica em \mathbb{R} .

Em particular, se a função $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ tem a propriedade

$$f(-L) \neq f(L), \quad (7.181)$$

não poderemos esperar que a série de Fourier associada à função \underline{f} , ou seja, a série de funções (7.177) (ou, equivalentemente, a série de funções (7.178)), venha a convergir para a função \underline{f} , em $[-L, L]$, pois a \underline{f} deveria possuir uma extensão $2L$ -periódica à \mathbb{R} , que denotaremos por $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e esta deveria satisfazer

$$\begin{aligned} f(-L) &\stackrel{F \text{ é extensão de } f}{=} F(-L) \\ &\stackrel{F \text{ é } 2L\text{-periódica}}{=} F(-L + 2L) \\ &= F(L) \\ &\stackrel{F \text{ é extensão de } f}{=} f(L), \end{aligned}$$

contrariando (7.181).

Portanto, é natural estudarmos as séries de Fourier associadas à funções que estão definidas em \mathbb{R} e que sejam $2L$ -periódicas, ou ainda, se a função $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, então deveremos ter

$$f(-L) = f(L) \quad (7.182)$$

e assim, se a série de Fourier associada à função \underline{f} , ou seja, $S[\underline{f}]$, for convergente para a função \underline{f} , em $[-L, L]$, então a série de funções $S[\underline{f}]$ irá convergir para uma função $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que a função \underline{F} será a extensão $2L$ -periódica da função \underline{f} à \mathbb{R} .

3. Observemos que se a função $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[-L, L]$ e for uma função par então, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, temos que a função

$$x \mapsto f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

também será uma função par e, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$x \mapsto f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

será uma função ímpar.

Logo, dos itens 2. e 3. da Observação (7.128), para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} a_m &\stackrel{(7.175)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)}_{\text{função par}} dx \\ &\stackrel{(7.136)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \end{aligned} \quad (7.183)$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} b_k &\stackrel{(7.176)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right)}_{\text{função ímpar}} dx \\ &\stackrel{(7.141)}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.184)$$

4. Observemos que se a função $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[-L, L]$ e for uma função ímpar então, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, a função

$$x \mapsto f(x) \cos \left(\frac{m\pi}{L} x \right)$$

será uma função ímpar e, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$x \mapsto f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right)$$

será uma função par.

Logo, dos itens 2. e 3. da Observação (7.128), para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} a_m &\stackrel{(7.175)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x) \cos \left(\frac{m\pi}{L} x \right)}_{\text{função ímpar}} dx \\ &\stackrel{(7.141)}{=} 0 \end{aligned} \quad (7.185)$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} b_k &\stackrel{(7.176)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right)}_{\text{função par}} dx \\ &\stackrel{(7.136)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx. \end{aligned} \quad (7.186)$$

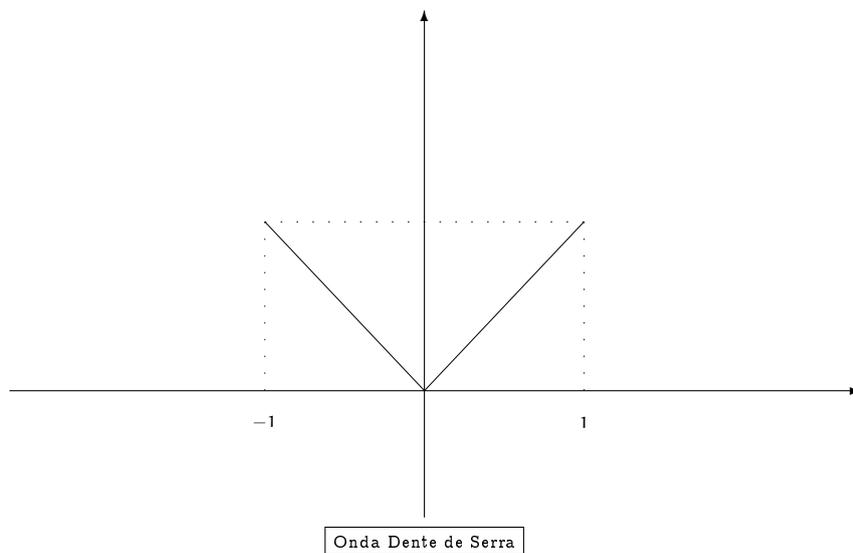
Apliquemos os conceitos desenvolvidos acima aos seguintes exemplos:

Exemplo 7.187 Encontrar a série de Fourier, que denotaremos por $\underline{S[f]}$, associada à função $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{para cada } x \in [-1, 0) \\ x, & \text{para cada } x \in [0, 1] \end{cases}. \quad (7.188)$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função \underline{f} é dada pela figura abaixo.



Notemos que, neste caso, temos que

$$L \doteq 1$$

e a função f é contínua e par em $[-1, 1]$.

Logo

$$\begin{aligned}
 a_0 &\stackrel{(7.175)}{=} \text{com } m=0 \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 f(x) \, dx \\
 &\stackrel{f \text{ é par, (7.183)}}{=} \text{com } m=0 \ 2 \int_0^1 f(x) \, dx \\
 &\stackrel{(7.188)}{=} 2 \int_0^1 x \, dx \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &\stackrel{\text{Exercício 1}}{=} 1.
 \end{aligned} \tag{7.189}$$

Por outro lado, $m \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned}
 a_m &\stackrel{(7.175)}{=} \stackrel{\text{com } m \in \mathbb{N}}{=} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\
 &\stackrel{L=1}{=} \int_{-1}^1 f(x) \cos(m\pi x) dx \\
 &\text{f e cos são pares, } \stackrel{(7.183)}{=} \text{com } m \in \mathbb{N} \quad 2 \int_0^1 f(x) \cos(m\pi x) dx \\
 &\stackrel{(7.188)}{=} 2 \int_0^1 x \cos(m\pi x) dx \\
 &\left\langle \begin{array}{l} u \doteq x, \text{ logo, } du = dx \\ dv \doteq \cos(m\pi x) dx, \text{ logo, } v = \frac{\text{sen}(m\pi x)}{m\pi} \end{array} \right\rangle \\
 &= 2 \left[x \frac{\text{sen}(m\pi x)}{m\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{\text{sen}(m\pi x)}{m\pi} dx \right] \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} 2 \left\{ \left[\frac{\overset{=0}{\text{sen}(m\pi)}}{m\pi} - \frac{\overset{=0}{\text{sen}(m\pi 0)}}{m\pi} \right] + \frac{\cos(m\pi x)}{(m\pi)^2} \Big|_{x=0}^{x=1} \right\} \\
 &= \frac{\overset{=(-1)^m}{\cos(m\pi)}}{(m\pi)^2} - \frac{\overset{=1}{\cos(m\pi 0)}}{(m\pi)^2} \\
 &= \frac{2}{m^2 \pi^2} [(-1)^m - 1] \\
 &= \begin{cases} \frac{-4}{m^2 \pi^2}, & \text{para cada } m \text{ ímpar} \\ 0, & \text{para cada } m \text{ par} \end{cases} . \tag{7.190}
 \end{aligned}$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned}
 b_k &\stackrel{(7.176)}{=} \stackrel{\text{com } k \in \mathbb{N}}{=} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \\
 &\stackrel{L=1}{=} \int_{-1}^1 f(x) \text{sen}(k\pi x) dx \\
 &\text{f é par e sen é ímpar - } \stackrel{(7.184)}{=} 0. \tag{7.191}
 \end{aligned}$$

Portanto, de (7.189), (7.190) e (7.191), segue que

$$\begin{aligned}
 S[f](x) &\stackrel{(7.177)}{=} \text{com } L=1 \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi x) + b_n \text{sen}(n\pi x)] \\
 &\stackrel{(7.189) \text{ e } (7.191)}{=} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \\
 &\stackrel{(7.190)}{=} \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)\pi x]. \tag{7.192}
 \end{aligned}$$

□

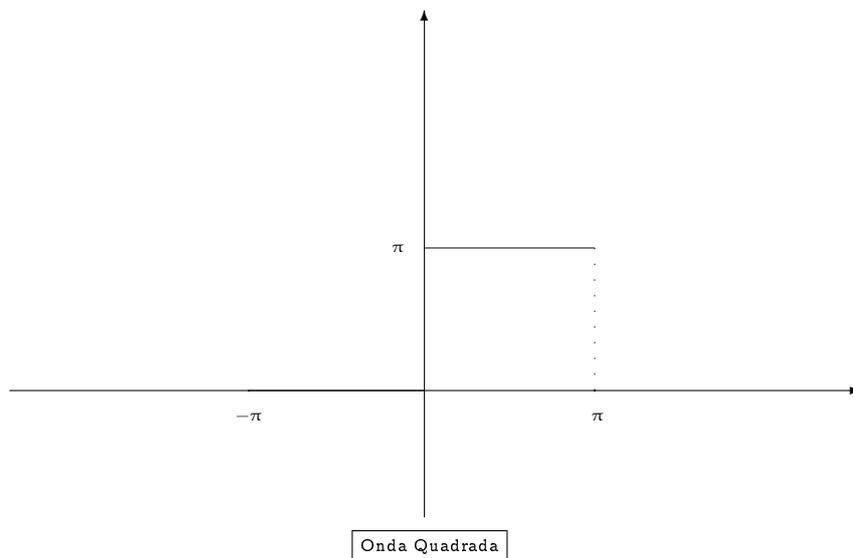
Temos também o:

Exemplo 7.193 *Encontrar a série de Fourier, que denotaremos por $S[f]$, associada à função $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para cada } x \in [-\pi, 0) \quad \text{ou} \quad x = \pi \\ \pi, & \text{para cada } x \in [0, \pi) \end{cases}. \tag{7.194}$$

Resolução:

A representação geométrica do gráfico da função f é dado pela figura abaixo.



Notemos que, neste caso

$$L = \pi$$

e a função f é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$, logo é uma função integrável em $[-\pi, \pi]$.

Assim temos que

$$\begin{aligned}
 a_0 &\stackrel{(7.175)}{=} \text{com } m=0 \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx \\
 &\stackrel{L=\pi}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \, dx \right] \\
 &\stackrel{(8.196)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \, dx \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[x \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
 &= \pi.
 \end{aligned} \tag{7.195}$$

Por outro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}
 a_m &\stackrel{(7.175)}{=} \text{com } m \in \mathbb{N} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \, dx \\
 &\stackrel{L=\pi}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos(mx) \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(mx) \, dx \right] \\
 &\stackrel{(8.196)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos(mx) \, dx \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[\frac{\text{sen}(mx)}{\pi m} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 0.
 \end{aligned} \tag{7.196}$$

Finalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 b_k &\stackrel{(7.176)}{=} \stackrel{\text{com } k \in \mathbb{N}}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx \\
 &\stackrel{L=\pi}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \operatorname{sen}(kx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx \right] \\
 &\stackrel{(8.196)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}(kx) dx \\
 &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
 &= \frac{1}{k} [-\overbrace{\cos(k\pi)}{=(-1)^k} + 1] \\
 &= \frac{1}{k} [1 - (-1)^k] \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{k}, & \text{para cada } k \text{ ímpar} \\ 0, & \text{para cada } k \text{ par} \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{7.197}$$

Portanto, de (8.197), (8.198) e (8.202), segue que:

$$\begin{aligned}
 S[f](x) &\stackrel{(7.177)}{=} \stackrel{\text{com } L=\pi}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] \\
 &\stackrel{(8.198)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \\
 &\stackrel{(8.197) \text{ e } (8.202)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] .
 \end{aligned} \tag{7.198}$$

□

Antes de prosseguirmos faremos algumas considerações que serão importantes no estudo da convergência de series de Fourier associadas à certas funções.

Observação 7.199

1. Utilizando variáveis complexas, vamos encontrar as expressões para os coeficientes de Fourier \underline{a}_m e \underline{b}_k , para $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, dados por (7.175) e (7.176), respectivamente, em uma forma diferente.

Para isto lembremos que

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (7.200)$$

onde $i^2 \doteq -1$.

Logo

$$\begin{aligned} e^{-ix} &= \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x) \\ &= \cos(x) - i \operatorname{sen}(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.201)$$

Somando-se (7.200) com (7.201), obteremos

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (7.202)$$

e subtraindo-se (7.201) de (7.200), obteremos

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.203)$$

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (7.204)$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) &= \frac{e^{i\frac{k\pi}{L}x} - e^{-i\frac{k\pi}{L}x}}{2i} \\ &= i \frac{e^{-i\frac{k\pi}{L}x} - e^{i\frac{k\pi}{L}x}}{2}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.205)$$

Com isto, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} S[f](x) &\stackrel{(7.177)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\ &\stackrel{(7.204)}{=} \stackrel{(7.205)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} + b_n i \frac{e^{-i\frac{n\pi}{L}x} - e^{i\frac{n\pi}{L}x}}{2} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - i b_n}{2} e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right]. \end{aligned} \quad (7.206)$$

Definimos a função $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\hat{f}(0) \doteq \frac{a_0}{2}, \quad (7.207)$$

$$e \quad \hat{f}(n) \doteq \frac{a_n - i b_n}{2} \quad (7.208)$$

$$\hat{f}(-n) \doteq \frac{a_n + i b_n}{2}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (7.209)$$

segue, de (7.206), (7.207), (7.208) e (8.211), que

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} + \hat{f}(-n) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} \right] \\ &= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} + \hat{f}(-n) e^{i \frac{(-n)\pi}{L} x} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) e^{i \frac{m\pi}{L} x}, \end{aligned} \quad (7.210)$$

onde a última série de funções considerada em (7.210), será encarada como uma série do tipo valor principal, isto é, para cada $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) e^{i \frac{m\pi}{L} x} \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N \hat{f}(m) e^{i \frac{m\pi}{L} x}. \quad (7.211)$$

Para cada $m \in \mathbb{Z}$, o coeficiente $\hat{f}(m)$, dado por (7.207), (7.208) e (8.211), será denominado m-ésimo coeficiente de Fourier na forma complexa, associados a função \underline{f} .

A série de funções (7.210) será denominada série de Fourier na forma complexa, associada à função \underline{f} .

2. Estudar a convergência da série de Fourier associada à função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ na forma (7.206) é equivalente a estudar a convergência da série de Fourier, na forma complexa, isto é, na forma (7.210), associada à função \underline{f} (no sentido (7.211)).
3. Observemos que teremos:

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &\stackrel{(7.207)}{=} \frac{a_0}{2} \\ &\stackrel{(7.175)}{=} \stackrel{\text{com } m=0}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \overbrace{e^{-i \frac{0\pi}{L} x}}^{=1} dx, \end{aligned} \quad (7.212)$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(n) &\stackrel{(7.208)}{=} \frac{a_n - i b_n}{2} \\
 &\stackrel{(7.175)}{=} \frac{e}{(7.176)} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] dx, \\
 &\stackrel{(7.204)}{=} \frac{e}{(7.205)} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} - i \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i} \right] dx \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx, \tag{7.213} \\
 \widehat{f}(-n) &\stackrel{(8.211)}{=} \frac{a_n + i b_n}{2} \\
 &\stackrel{(7.175)}{=} \frac{e}{(7.176)} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] dx \\
 &\stackrel{(7.204)}{=} \frac{e}{(7.205)} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2} + i \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i} \right] dx \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{i\frac{n\pi}{L}x} dx \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{(-n)\pi}{L}x} dx. \tag{7.214}
 \end{aligned}$$

Portanto, de (8.214), (7.213) e (7.214), segue que

$$\widehat{f}(m) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{m\pi}{L}x} dx, \quad \text{para cada } m \in \mathbb{Z}. \tag{7.215}$$

4. Mesmo para funções a valores reais, isto é, funções $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (que foi o caso que estávamos tratando no problema da condução de calor no fio no início do capítulo), os coeficientes de Fourier, na forma complexa, associados à função f são, em geral, números complexos e não reais, excetuando-se o caso em que os

$$b_n = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

isto é, o caso que função f é uma função par (veja o item 3. da Observação (7.180), ou ainda (7.184)).

7.4 Interpretação Geométrica dos Coeficientes de Fourier

Observemos que a maneira como obtivemos os coeficientes de Fourier associados à uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (isto é, a_m , para $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e b_k , para $k \in \mathbb{N}$, dados por (7.175) e (7.176), respectivamente) é bastante natural olharmos os mesmos do modo que faremos a seguir.

Consideremos, no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (onde $+$ é a operação de adição usual de n -uplas e \cdot é a multiplicação usual de número real por n -uplas), o produto interno usual, a saber:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad (7.216)$$

onde os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, são dados por:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (7.217)$$

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, definamos o seguinte vetor de \mathbb{R}^n :

$$\vec{e}_i \doteq (0, \dots, 0, \overset{\text{i-ésima posição}}{\downarrow} 1, 0, \dots, 0). \quad (7.218)$$

Como foi visto na disciplina de Álgebra Linear, temos que o conjunto

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

é uma base ortonormal do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, relativamente ao produto interno (7.216).

Tal base é denominada base canônica de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, ou seja, para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, teremos:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (7.219)$$

Notemos que, se $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ é dado por (7.217), teremos:

$$\begin{aligned} \vec{x} &\stackrel{(7.217)}{=} (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) \\ &= x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n \cdot (0, \dots, 0, 1) \\ &= x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \cdot \vec{e}_j. \end{aligned} \quad (7.220)$$

Com isto, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, teremos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle &\stackrel{(7.220)}{=} \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \cdot \vec{e}_j, \vec{e}_i \right\rangle \\ &\stackrel{\text{propriedades de produto interno}}{=} \sum_{j=1}^n x_j \langle \vec{e}_j, \vec{e}_i \rangle \\ &\stackrel{(7.219)}{=} x_i, \end{aligned}$$

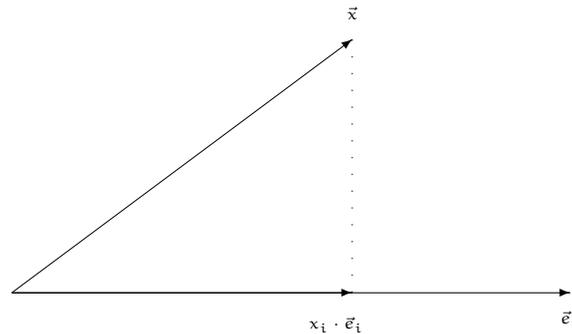
ou seja, $x_i \cdot \vec{e}_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \cdot \vec{e}_i$,

o que significa dizer que, geometricamente, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que o vetor

$$x_i \cdot \vec{e}_i$$

é a projeção ortogonal do vetor \vec{x} , na direção do vetor (unitário) \vec{e}_i .

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Apliquemos as ideias acima para o caso de séries de Fourier:

Observação 7.221

1. Notemos que

$$C([-L, L]; \mathbb{R}),$$

o conjunto formado por todas as funções contínuas, a valores reais, definidas em $[-L, L]$, é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , quando munido das operações de soma de funções, indicada por \pm , e multiplicação de número real por função, indicada por \cdot .

A verificação deste fato foi vista na disciplina de Álgebra Linear e será deixada como exercício para o leitor.

Com isto o espaço vetorial real $(C([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$, poderá ser munido do seguinte produto interno

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_{-L}^L f(x) g(x) dx, \tag{7.222}$$

onde $f, g \in C([-L, L]; \mathbb{R})$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. Do item 4. da Proposição (7.154), segue que o conjunto

$$\{\psi_m; m \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \cup \{\phi_k; k \in \mathbb{N}\} \quad (7.223)$$

é um subconjunto do espaço vetorial real $(C([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$, que é ortogonal, relativamente ao produto interno (7.222) (veja (7.155), (7.156) e (7.157)).

Notemos que o conjunto (7.223) será ortonormal, relativamente ao produto interno (7.222), se

$$L = 1,$$

excetuando-se o caso de $m = 0$ (veja (7.155), (7.156) e (7.157)).

3. Embora o conjunto (7.223) não seja uma base para o espaço vetorial real

$$C([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot,$$

no sentido algébrico, se uma função $f \in C([-L, L]; \mathbb{R})$ puder ser expandida em série de Fourier (associada à mesma), se a série convergir para a função f , em $[-L, L]$, e se a série de Fourier puder ser integrada, termo a termo, (por exemplo, se a convergência da série de Fourier for uniforme, em $[-L, L]$), então podemos justificar as contas formais (onde se vê: **todo cuidado!**) feitas na Observação (7.166), para obter as fórmulas de Euler-Fourier (7.175), (7.176).

4. Para ilustrar consideraremos o caso em que $L = 1$, ou seja, o conjunto (7.223) é um conjunto ortonormal, relativamente ao produto interno (7.222), exceto quando $m = 0$.

Neste caso, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} a_m &\stackrel{(7.175)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\ &\stackrel{(7.153)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \psi_m(x) dx \\ &\stackrel{L=1}{=} \int_{-1}^1 f(x) \psi_m(x) dx \\ &\stackrel{(7.222)}{=} \langle f, \psi_m \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &\stackrel{(7.176)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \\
&\stackrel{(7.152)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \phi_n(x) dx \\
&\stackrel{L=1}{=} \int_{-1}^1 f(x) \phi_n(x) dx \\
&\stackrel{(7.222)}{=} \langle f, \phi_n \rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, os vetores

$$a_m \cdot \psi_m \quad e \quad b_n \cdot \phi_n$$

serão as projeções ortogonais da função f , na direção dos vetores ψ_m e ϕ_n (neste caso, serão unitários), respectivamente, relativamente ao produto interno (7.222).

5. Observemos que se $L \neq 1$ então, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, trocando-se as funções

$$\psi_m \quad e \quad \phi_n$$

pelas funções

$$\Psi_m \quad e \quad \Phi_n,$$

respectivamente, dadas por:

$$\Psi_m(x) \doteq \frac{\psi_m(x)}{\|\psi_m\|} \quad e \quad \Phi_n(x) \doteq \frac{\phi_n(x)}{\|\phi_n\|}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (7.224)$$

onde, para cada $f \in C([-L, L]; \mathbb{R})$, definimos

$$\|f\| \doteq \sqrt{\langle f, f \rangle} \stackrel{(7.222)}{=} \left(\int_{-L}^L f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.225)$$

(que é uma norma no espaço vetorial real $(C([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$), então o conjunto

$$\{\Psi_m; m \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \cup \{\Phi_n; n \in \mathbb{N}\} \quad (7.226)$$

será um conjunto ortonormal, relativamente ao produto interno (7.222), e poderemos aplicar as mesmas ideias do item 4. acima, utilizando o conjunto (7.226), para concluir que, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, os vetores

$$a_m \cdot \Psi_m \quad e \quad b_n \cdot \Phi_n$$

serão as projeções ortogonais da função f , na direção dos vetores (unitários) Ψ_m e Φ_n , respectivamente, relativamente ao produto interno (7.222).

Notemos que, neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} a_m &\stackrel{(7.175)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\ &\stackrel{(7.153)}{=} \stackrel{(7.112)}{=} \frac{1}{L} \langle f, \psi_m \rangle, \\ &= \frac{1}{L} \langle f, \Psi_m \rangle, \end{aligned} \tag{7.227}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &\stackrel{(7.176)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &\stackrel{(7.152)}{=} \stackrel{(7.112)}{=} \frac{1}{L} \langle f, \phi_n \rangle, \end{aligned} \tag{7.228}$$

para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Utilizaremos algumas das ideias acima para obter algumas propriedades da séries de Fourier associada a uma $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, que é função integrável em $[-L, L]$.

Consideraremos o espaço vetorial real $(SC([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ em vez do espaço vetorial real $(C([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ para o que faremos a seguir.

O primeiro resultado interessante é dado pela:

Proposição 7.229 Para $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ consideremos a série de Fourier associada à função f , isto é, (7.177) (ou (7.178)).

Então para $M \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $N \in \mathbb{N}$ fixados, se considerarmos

$$c_m, d_n \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada } m \in \{0, 1, \dots, M\} \text{ e } n \in \{1, 2, \dots, N\} \tag{7.230}$$

teremos:

$$\left\| f - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right] \right\| \leq \left\| f - \left[\frac{c_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M c_m \psi_m + \sum_{n=1}^N d_n \phi_n \right] \right\|, \tag{7.231}$$

onde as funções ψ_m e ϕ_n são dadas por (7.153) e (7.152), respectivamente.

Além disso, a ocorrerá igualdade em (7.231) se, e somente se,

$$c_m = a_m \quad \text{e} \quad d_n = b_n, \quad \text{para cada } m \in \{0, 1, \dots, M\} \text{ e } n \in \{1, 2, \dots, N\}. \tag{7.232}$$

Demonstração:

Dados $M, N \in \mathbb{N}$ definamos o conjunto S_{MN} , como sendo o seguinte subconjunto de $SC([-L, L]; \mathbb{R})$:

$$S_{MN} \doteq \{\psi_m; m \in \{0, 1, \dots, M\}\} \cup \{\phi_n; n \in \{1, 2, \dots, N\}\}. \tag{7.233}$$

Observemos que o conjunto S_{MN} é um conjunto finito de vetores de L.I., do espaço vetorial real $(SC([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$.

De fato, pois da Proposição (7.154) (veja (7.155), (7.156) e (7.157)), segue que o conjunto S_{MN} um conjunto ortogonal, relativamente ao produto interno (7.112), e formado por vetores não nulos.

Consideremos o subespaço vetorial gerado pelo conjunto S_{MN} , do espaço vetorial real $(SC([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$, que indicaremos por $[S_{MN}]$, isto é, o conjunto formado por todas as combinações lineares de elementos do conjunto S_{MN} , do espaço vetorial real $(SC([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Mais precisamente:

$$[S_{MN}] \doteq \left\{ \frac{c_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M c_m \psi_m + \sum_{n=1}^N d_n \phi_n ; c_m, d_n \in \mathbb{R}, \right. \\ \left. \text{para cada } m \in \{0, 1, \dots, M\} \text{ e } n \in \{1, \dots, N\} \right\}. \quad (7.234)$$

Definamos a função $g : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x) \doteq f(x) - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0(x) + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m(x) + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n(x) \right], \quad (7.235)$$

para cada $x \in [-L, L]$.

Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} \langle g, \psi_0 \rangle &\stackrel{(7.235)}{=} \left\langle f - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right], \psi_0 \right\rangle \\ &\stackrel{\text{item 1. da Proposição (7.115)}}{=} \underbrace{\langle f, \psi_0 \rangle}_{(7.227) \stackrel{\text{com } m=0}{=} L a_0} - \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}_{(7.155) \stackrel{\text{com } m=0}{=} 2L} - \sum_{n=1}^N a_n \underbrace{\langle \psi_n, \psi_0 \rangle}_{(7.155)_0} \\ &\quad + \sum_{m=1}^M b_m \underbrace{\langle \phi_m, \psi_0 \rangle}_{(7.157)_0} \\ &= L a_0 - \frac{a_0}{2} 2L \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $k \in \mathbb{N}$ fixado, teremos:

$$\langle g, \psi_k \rangle = \left\langle f - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right], \psi_k \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
& \text{item 1. da Proposição (7.115)} \underbrace{\langle f, \psi_k \rangle}_{(7.227)_{L a_k}} - \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_0, \psi_k \rangle}_{(7.155)_{\text{com } k \neq 1}_0} - \sum_{m=1}^M a_m \underbrace{\langle \psi_m, \psi_k \rangle}_{(7.157)} \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq k \\ L, & \text{se } m = k \end{cases} \\
& + \sum_{n=1}^N b_n \underbrace{\langle \phi_n, \psi_k \rangle}_{(7.155)_0} \\
& = L a_k - L a_k \\
& = 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle g, \phi_k \rangle & = \left\langle f - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right], \phi_k \right\rangle \\
& \stackrel{\text{item 1. da Proposição (7.115)}}{=} \underbrace{\langle f, \phi_k \rangle}_{(7.228)_{L b_k}} - \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_0, \phi_k \rangle}_{(7.155)_{\text{com } k \neq 1}_0} - \sum_{m=1}^M a_m \underbrace{\langle \psi_m, \phi_k \rangle}_{(7.157)_0} \\
& + \sum_{n=1}^N b_n \underbrace{\langle \phi_n, \phi_k \rangle}_{(7.157)} \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k \\ L, & \text{se } n = k \end{cases} \\
& = L b_k - L b_k \\
& = 0,
\end{aligned}$$

isto é, a função g , dada por (7.235), é ortogonal a cada um dos elementos do conjunto S_{MN} .

Logo, como os elementos do conjunto S_{MN} são geradores do subespaço vetorial gerado pelo vetores do conjunto S_{MN} , segue que a função g será ortogonal a todos elementos do subespaço vetorial $[S_{NM}]$ (a ortogonalidade é relativa ao produto interno (7.112)), ou seja,

$$g \perp [S_{NM}]. \quad (7.236)$$

Definamos a função $h : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) \doteq \frac{a_0 - c_0}{2} \psi_0(x) + \sum_{m=1}^M (a_m - c_m) \psi_m(x) + \sum_{n=1}^N (b_n - d_n) \phi_n(x), \quad (7.237)$$

para cada $x \in [-L, L]$.

Notemos que a função h é uma combinação linear dos elementos do conjunto S_{MN} , ou seja,

$$h \in [S_{NM}]. \quad (7.238)$$

Logo, de (7.236) e (7.238), segue que a função g será ortogonal à função h , relativamente ao produto interno (7.112), ou seja,

$$g \perp h. \quad (7.239)$$

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras (isto é, o item 4. da Observação (7.119), ou ainda, (7.125)), segue que

$$\begin{aligned} & \left\| f - \left[\frac{c_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M c_m \psi_m + \sum_{n=1}^N d_n \phi_n \right] \right\|^2 \\ &= \left\| \underbrace{f - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right]}_{(7.235) \ g} + \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{c_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M c_m \psi_m + \sum_{n=1}^N d_n \phi_n \right] \right\|^2 \\ &= \left\| g + \underbrace{\left[\frac{a_0 - c_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M (a_m - c_m) \psi_m + \sum_{n=1}^N (b_n - d_n) \phi_n \right]}_{(7.237) \ h} \right\|^2 \\ &= \|g + h\|^2 \\ & \stackrel{g \perp h \text{ e } (7.125)}{=} \|g\|^2 + \underbrace{\|h\|^2}_{\geq 0} \stackrel{(*)}{\geq} \|g\|^2 \end{aligned} \quad (7.240)$$

$$\stackrel{(7.235)}{=} \left\| f - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right] \right\|^2,$$

isto é,

$$\left\| f - \left[\frac{c_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M c_m \psi_m + \sum_{n=1}^N d_n \phi_n \right] \right\|^2 \leq \left\| f - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right] \right\|^2$$

mostrando a desigualdade (7.231).

Observemos que se

$$c_m = a_m \quad \text{e} \quad d_n = b_n, \quad \text{para cada } m \in \{0, 1, \dots, M\} \text{ e } n \in \{1, 2, \dots, N\}$$

então vale a igualdade em (7.231).

Reciprocamente, se vale a igualdade em (7.231), de (*) em (7.240), teremos:

$$\|g\|^2 + \|h\|^2 \stackrel{\text{Pitágoras}}{=} \|g + h\|^2 \stackrel{\text{vale a igualdade em (*)}}{=} \|g\|^2,$$

ou seja,

$$\|h\|^2 = 0, \\ \text{isto é, de (7.112), deveremos ter: } \int_{-L}^L |h(x)|^2 dx = 0. \quad (7.241)$$

Como a função h é uma função contínua em $[-L, L]$ (veja (7.237)) e

$$|h(x)| \geq 0, \quad \text{para cada } x \in [-L, L] \quad \text{e vale (8.240),}$$

segue que que

$$h(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in [-L, L],$$

que, de (7.237), é equivalente a:

$$\frac{a_0 - c_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M (a_m - c_m) \psi_m + \sum_{n=1}^N (b_n - d_n) \phi_n = 0, \quad \text{em } [-L, L]. \quad (7.242)$$

Como o conjunto S_{MN} é um conjunto L.I. no espaço vetorial real $(SC([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$, segue que todos os coeficientes da combinação linear (7.242) devem ser iguais a zero, ou seja,

$$c_m = a_m \quad \text{e} \quad d_n = b_n,$$

para $m \in \{0, 1, \dots, N\}$ e $m \in \{1, 2, \dots, M\}$, completando a demonstração do resultado. \square

Observação 7.243 A Proposição (7.229) acima, nos diz que a soma parcial da série de Fourier de uma função que pertence à $SC([-L, L]; \mathbb{R})$, nos fornece a melhor aproximação possível entre todas as aproximações, por combinações lineares envolvendo senos e cossenos, relativamente à norma que provém do produto interno (7.112).

Uma outra propriedade importante das séries de Fourier associada a uma função "bem comportada", é dado pela:

Proposição 7.244 (Desigualdade de Bessel, na forma real)

Seja $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ e consideremos a série de Fourier associada à função f , isto é, (7.177) (ou (7.178)).

Então as séries numéricas

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

são convergentes e além disso, vale

$$L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) \leq \|f\|^2, \quad (7.245)$$

onde

$$\|f\| \doteq \left[\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.246)$$

é a semi-norma que provém do "quase" produto interno (7.112).

Demonstração:

Notemos que, para cada $M, N \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m + \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right] \right\|^2 \\ &\stackrel{(7.122)}{=} \left\langle f - \frac{a_0}{2} \psi_0 - \sum_{k=1}^M a_k \psi_k - \sum_{l=1}^N b_l \phi_l, f - \frac{a_0}{2} \psi_0 - \sum_{m=1}^M a_m \psi_m - \sum_{n=1}^N b_n \phi_n \right\rangle \\ &\stackrel{\text{item 1. da Proposição (7.115)}}{=} \underbrace{\langle f, f \rangle}_{\stackrel{(7.246)}{=} \|f\|^2} - \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle f, \psi_0 \rangle}_{\stackrel{(7.227)}{=} \text{com } m=0}_{L a_0} - \sum_{m=1}^M a_m \underbrace{\langle f, \psi_m \rangle}_{\stackrel{(7.227)}{=} \text{com } m \neq 0}_{L a_m} - \sum_{n=1}^N b_n \underbrace{\langle f, \phi_n \rangle}_{\stackrel{(7.228)}{=} L b_n} \\ &\quad - \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_0, f \rangle}_{\stackrel{(7.227)}{=} \text{com } m=0}_{L a_0} + \frac{a_0^2}{4} \underbrace{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} \text{com } k=m=0}_{2L} + \sum_{m=1}^M \frac{a_0}{2} a_m \underbrace{\langle \psi_0, \psi_m \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} \text{com } m \neq 0} + \sum_{n=1}^N \frac{a_0}{2} b_n \underbrace{\langle \psi_0, \phi_n \rangle}_{\stackrel{(7.156)}{=} 0} \\ &\quad - \sum_{k=1}^M a_k \underbrace{\langle \psi_k, f \rangle}_{\stackrel{(7.227)}{=} L a_k} + \sum_{k=1}^M a_k \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \psi_k, \psi_0 \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} \text{com } k \neq 0} + \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M a_k a_m \underbrace{\langle \psi_k, \psi_m \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq k \\ L, & \text{se } m = k \end{cases}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N a_k b_n \underbrace{\langle \psi_k, \phi_n \rangle}_{\stackrel{(7.156)}{=} 0} - \sum_{l=1}^N b_l \underbrace{\langle \phi_l, f \rangle}_{\stackrel{(7.228)}{=} L b_l} + \sum_{l=1}^N b_l \frac{a_0}{2} \underbrace{\langle \phi_l, \psi_0 \rangle}_{\stackrel{(7.156)}{=} 0} + \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^M b_l a_m \underbrace{\langle \phi_l, \psi_m \rangle}_{\stackrel{(7.156)}{=} 0} \\ &\quad + \sum_{l=1}^N \sum_{n=1}^N b_l b_n \underbrace{\langle \phi_l, \phi_n \rangle}_{\stackrel{(7.155)}{=} \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq l \\ L, & \text{se } n = l \end{cases}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|f\|^2 - \frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{m=1}^M a_m^2 - L \sum_{n=1}^N b_n^2 - \frac{L}{2} a_0^2 + \frac{L}{2} a_0^2 - L \sum_{k=1}^M a_k^2 + L \sum_{k=1}^M a_k^2 \\
&\quad - L \sum_{l=1}^N b_l^2 + L \sum_{l=1}^N b_l^2 \\
&= \|f\|^2 - L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^M a_m^2 + \sum_{n=1}^N b_n^2 \right), \tag{7.247}
\end{aligned}$$

isto é,

$$0 \leq \|f\|^2 - L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^M a_m^2 + \sum_{n=1}^N b_n^2 \right),$$

ou seja,

$$0 \leq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^M a_m^2 + \sum_{n=1}^N b_n^2 \leq \frac{1}{L} \|f\|^2, \tag{7.248}$$

para todo $M, N \in \mathbb{N}$ fixado.

Assim, segue de (7.248), que as sequências das somas parciais das séries numéricas

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \tag{7.249}$$

são limitadas em \mathbb{R} .

Como

$$a_m^2, b_n^2 \geq 0, \quad \text{para cada } n, m \in \mathbb{N},$$

segue que as sequências das somas parciais das séries numéricas (7.249) serão crescentes em \mathbb{R} .

Logo as sequências das somas parciais das séries numéricas (7.249) serão monótonas (crescentes) e limitadas em \mathbb{R} , de um resultado de Análise I, temos que elas serão convergentes em \mathbb{R} .

Portanto podemos passar os limites, quando

$$M, N \rightarrow \infty,$$

em (7.248), e com isto obteremos a desigualdade (7.245), completando a demonstração do resultado. □

Temos uma versão na forma complexa para ao resultado acima, a saber:

Corolário 7.250 (Desigualdade de Bessel, na forma complexo)

Suponhamos que $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ e

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}, \quad \text{para cada } x \in [-L, L], \quad (7.251)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, o número complexo $\hat{f}(n)$ é o n -ésimo coeficiente de Fourier na forma complexa, dado por (7.215).

Então a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

será convergente e vale

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2L} \|f\|^2, \quad (7.252)$$

onde

$$\|f\| \doteq \left[\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.253)$$

é a semi-norma que provém do "quase" produto interno (7.113).

Demonstração:

Segue, de (7.207), (7.208) e (8.211), que:

$$|\hat{f}(0)|^2 \stackrel{(7.207)}{=} \frac{a_0^2}{4}, \quad (7.254)$$

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)|^2 &\stackrel{(7.208)}{=} \left| \frac{a_n - i b_n}{2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (7.255)$$

e

$$\begin{aligned} |\hat{f}(-n)|^2 &\stackrel{(8.211)}{=} \left| \frac{a_n + i b_n}{2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (7.256)$$

Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)|^2 &= |\widehat{f}(0)|^2 + \sum_{n=1}^N |\widehat{f}(-n)|^2 + \sum_{n=1}^N |\widehat{f}(n)|^2 \\
 &\stackrel{(7.254),(7.255),(7.256)}{=} \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \\
 &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{n=1}^N b_n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{n=1}^N b_n^2 \right). \tag{7.257}
 \end{aligned}$$

Logo, de um critério da comparação, na versão complexa e da Proposição (7.244), segue que a série numérica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$ é convergente em \mathbb{R} .

Lembremos que o sentido da convergência da série acima será

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)|^2.$$

Além disso, passando o limite, quando

$$N \rightarrow \infty$$

em (7.257), obteremos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)|^2 \\
 &\stackrel{(7.257)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{n=1}^N b_n^2 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) \\
 &\stackrel{(7.245)}{\leq} \frac{1}{2L} \|f\|^2,
 \end{aligned}$$

completando a demonstração. □

Observação 7.258

1. Seja $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ então

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{f}(0)} &\stackrel{(7.208)}{=} \frac{\overline{a_0}}{2} \\ &\stackrel{a_0 \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_0}{2} \\ &\stackrel{(7.208)}{=} \widehat{f}(-0). \end{aligned}$$

Se $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{f}(n)} &\stackrel{(7.208)}{=} \frac{\overline{a_n - i b_n}}{2} \\ &= \frac{\overline{a_n} - i \overline{b_n}}{2} \\ &= \frac{\overline{a_n} - i \overline{b_n}}{2} \\ &\stackrel{a_n, b_n \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_n + i b_n}{2} \\ &\stackrel{(7.208)}{=} \widehat{f}(-n) \\ \overline{\widehat{f}(-n)} &\stackrel{(7.208)}{=} \frac{\overline{a_n + i b_n}}{2} \\ &= \frac{\overline{a_n} + i \overline{b_n}}{2} \\ &= \frac{\overline{a_n} + i \overline{b_n}}{2} \\ &\stackrel{a_n, b_n \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_n - i b_n}{2} \\ &\stackrel{(7.208)}{=} \widehat{f}(n) \\ &= \widehat{f}[-(-n)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{\widehat{f}(n)} = \widehat{f}(-n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \quad (7.259)$$

2. Seja $f \in SC(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ uma função $2L$ -periódica e consideremos a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) \doteq f(-x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.260)$$

Então, teremos que $h \in SC(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e também será uma função $2L$ -periódica.

Além disso, para $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned}
 \widehat{h}(n) &\stackrel{(7.215)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\stackrel{(7.260)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(-x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\left\langle \begin{array}{l} y = -x, \text{ logo: } dy = -dx \\ x = -L, \text{ logo: } y = L \\ x = L, \text{ logo: } y = -L \end{array} \right\rangle = \frac{1}{2L} \int_L^{-L} f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} (-y)} (-dy) \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{(-n)\pi}{L} y} dy \\
 &\stackrel{(7.215)}{=} \widehat{f}(-n),
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\widehat{h}(n) = \widehat{f}(-n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \quad (7.261)$$

3. As conclusões do Corolário (7.250) permanece válido se a função f é a valores complexos, isto é, se $f \in SC([-L, L]; \mathbb{C})$.

De fato, se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{C}$ é seccionalmente contínua em $[-L, L]$, então existem funções $u, v \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$, de modo que

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad \text{para cada } x \in [-L, L]. \quad (7.262)$$

Com isto, para $n \in \mathbb{Z}$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(n) &\stackrel{(7.215)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\stackrel{(7.262)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [u(x) + iv(x)] e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\stackrel{\text{propriedade da integral definida}}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx + i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L v(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\stackrel{(7.215)}{=} \widehat{u}(n) + i \widehat{v}(n).
 \end{aligned} \quad (7.263)$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned}
 |\widehat{f}(n)|^2 &= \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(n)} \\
 &\stackrel{(7.262)}{=} [\widehat{u}(n) + i \widehat{v}(n)] \overline{[\widehat{u}(n) + i \widehat{v}(n)]} \\
 &= [\widehat{u}(n) + i \widehat{v}(n)] [\overline{\widehat{u}(n)} + i \overline{\widehat{v}(n)}] \\
 &= [\widehat{u}(n) + i \widehat{v}(n)] [\overline{\widehat{u}(n)} + i \overline{\widehat{v}(n)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(7.259)}{=} [\hat{u}(n) + i\hat{v}(n)] [\overline{\hat{u}(n)} - i\overline{\hat{v}(-n)}] \\
& = \hat{u}(n)\hat{u}(-n) - i\hat{u}(n)\hat{v}(-n) + i\hat{v}(n)\hat{u}(-n) + \hat{v}(n)\hat{v}(-n) \\
& \stackrel{(7.259)}{=} \hat{u}(n)\overline{\hat{u}(n)} + i[\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \hat{u}(n)\hat{v}(-n)] + \hat{v}(n)\overline{\hat{v}(n)} \\
& = |\hat{u}(n)|^2 + i[\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \hat{u}(n)\hat{v}(-n)] + |\hat{v}(n)|^2. \tag{7.264}
\end{aligned}$$

Portanto, para $N \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \stackrel{(7.264)}{=} \sum_{n=-N}^N \left\{ |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 + i[\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \hat{u}(n)\hat{v}(-n)] \right\} \\
& \stackrel{\text{somas finitas}}{=} \sum_{n=-N}^N \left[|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 \right] + i \sum_{n=-N}^N [\hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \hat{u}(n)\hat{v}(-n)] \\
& = \sum_{n=-N}^N \left[|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 \right] + i \left(\sum_{n=-N}^N \hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \overbrace{\sum_{n=-N}^N \hat{u}(n)\hat{v}(-n)}^{(*)} \right) \\
& \stackrel{m=-n, \text{ em } (*)}{=} \sum_{n=-N}^N \left[|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 \right] + i \left[\sum_{n=-N}^N \hat{u}(-n)\hat{v}(n) - \sum_{m=-N}^N \hat{u}(-m)\hat{v}(m) \right] \\
& = \sum_{n=-N}^N \left[|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 \right]. \tag{7.265}
\end{aligned}$$

Como, $u, v \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$, do Corolário (7.250), segue que as séries numéricas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}(n)|^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{v}(n)|^2$$

serão convergentes.

Logo, deste fato e de (7.265), segue que a série numérica

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

é convergente e, além disso:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \stackrel{(7.265)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{v}(n)|^2 \right] \\
& \stackrel{(7.252) \text{ para } u \text{ e } v}{\leq} \frac{1}{2L} (\|u\|^2 + \|v\|^2) \\
& \stackrel{(7.262)}{=} \frac{1}{2L} \|f\|^2,
\end{aligned}$$

ou seja, vale uma desigualdade de Bessel para o caso da função f ser a valores complexos, isto é, se $f \in SC([-L, L]; \mathbb{C})$, temos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2L} \|f\|^2, \quad (7.266)$$

Como consequência da desigualdade de Bessel temos o:

Corolário 7.267 (Lema de Riemann-Lebesgue, na forma real) *Seja $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ e consideremos a série de Fourier associada à função f , isto é, (7.177) (ou (7.178)).*

Então:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad (7.268)$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, os números reais a_m e b_n , são dados por (7.175) e (7.176), respectivamente.

Demonstração:

Notemos que, da Proposição (7.244), segue que as séries numérica

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

são convergentes em \mathbb{R} .

Logo, do critério da divergência para séries numéricas, segue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 0,$$

o que implicará que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

completando a demonstração do resultado. □

Na forma complexa o resultado acima torna-se-á:

Corolário 7.269 (Lema de Riemann-Lebesgue, na forma complexa)

Seja $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ (respectivamente, $f \in SC([-L, L]; \mathbb{C})$) e consideremos a série de Fourier associada à função f , na forma complexa, isto é, dados por (7.251).

Então

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0, \quad (7.270)$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \hat{f}(n) = 0. \quad (7.271)$$

Demonstração:

Observemos que, do Corolário (7.250) (ou do item 3. da Observação (7.258)), temos que as séries numérica

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$$

é convergente em \mathbb{R} (respectivamente, \mathbb{C}).

Logo, como consequência do critério da divergência para séries numéricas, visto em Análise I, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \widehat{f}(n) = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 7.272

1. Definamos o conjunto

$$\mathcal{l}^2(\mathbb{R}) \doteq \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}, \quad (7.273)$$

isto é, o conjunto formado pelas sequências reais, cuja série numérica formada pelos quadrados dos seus termos, seja convergente em \mathbb{R} .

Com as operações usuais de soma de sequência numéricas, que denotaremos por \pm , e multiplicação de número real por uma sequência numérica, que denotaremos por \cdot , segue que $(\mathcal{l}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. Além disso, a função

$$\|\cdot\|_{\mathcal{l}^2(\mathbb{R})} : \mathcal{l}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\mathcal{l}^2(\mathbb{R})} \doteq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}, \quad (7.274)$$

para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{l}^2(\mathbb{R})$, será uma norma no espaço vetorial real $(\mathcal{l}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

3. Na verdade a norma definida em (7.274), provém do seguinte produto interno no espaço vetorial real $(\mathcal{l}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$:

Consideremos a função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{l}^2(\mathbb{R})} : \mathcal{l}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{l}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por:

$$\langle (\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbf{b}_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad (7.275)$$

para cada $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbf{b}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Notemos que a função acima bem definida no espaço vetorial real $(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e é realmente um produto interno no espaço vetorial real $(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

A demonstração destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Notemos que

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} &\stackrel{(7.274)}{=} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \\ &\stackrel{(7.275)}{=} \sqrt{\langle (\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}}, \end{aligned} \quad (7.276)$$

para cada $(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ou seja, a norma, definida por (7.274), provém do produto interno, definido por (7.275), no espaço vetorial real $(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

4. Na verdade podemos mostrar que o espaço vetorial real, com produto interno $(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}), +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})})$ é um espaço de Hilbert, ou seja, é completo segundo a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$.

A verificação deste fato é um pouco mais delicada e será tratada no curso de *Análise Funcional*.

5. Podemos, de modo semelhante, considerar o conjunto

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{C}) \doteq \left\{ (\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \quad (7.277)$$

isto é, o conjunto formado pelas seqüências complexas, cuja série numérica formada pelos módulos ao quadrado dos seus termos, seja convergente em \mathbb{C} .

Com as operações usuais de soma de seqüência numéricas, que denotaremos por \pm , e multiplicação de número complexo por uma seqüência numérica, que denotaremos por \cdot , segue que $(\mathcal{L}^2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

Além disso, a função

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{C})} : \mathcal{L}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\|(\mathbf{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{C})} \doteq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}, \quad (7.278)$$

para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$, será uma norma no espaço vetorial complexo $(\ell^2(\mathbb{C}), +, \cdot)$.

Na verdade a norma definida em (7.278), provém do seguinte produto interno no espaço vetorial complexo $(\ell^2(\mathbb{C}), +, \cdot)$:

Consideremos a função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2(\mathbb{C})} : \ell^2(\mathbb{C}) \times \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C},$$

dada por:

$$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\ell^2(\mathbb{C})} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \quad (7.279)$$

para cada $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$.

Notemos que a função acima bem definida no espaço vetorial complexo $(\ell^2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ e um produto interno no espaço vetorial complexo $(\ell^2(\mathbb{C}), +, \cdot)$.

Notemos ainda, que

$$\begin{aligned} \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2(\mathbb{C})} &\stackrel{(7.278)}{=} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \\ &\stackrel{(7.279)}{=} \sqrt{\langle (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\ell^2(\mathbb{C})}}, \end{aligned} \quad (7.280)$$

para cada $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$, ou seja, a norma, definida por (7.278), provém do produto interno, definido por (7.279), no espaço vetorial complexo $(\ell^2(\mathbb{C}), +, \cdot)$.

A demonstração dos fatos será deixada como exercício para o leitor.

6. Na verdade podemos mostrar que o espaço vetorial real com produto interno $(\ell^2(\mathbb{C}), +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2(\mathbb{C})})$ é um espaço de Hilbert, ou seja, é completo segundo a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{C})}$.

A verificação deste fato é um pouco mais delicada e será tratada no curso de Análise Funcional.

7. Logo, com as notações acima segue, do Corolário (7.250), que a aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} : \text{SC}([-L, L]; \mathbb{R}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{C}) \\ f &\mapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

está bem definida.

8. Observemos que se $f, g \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, teremos:

$$\begin{aligned} (\widehat{\alpha f + g})(n) &\stackrel{(7.215)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (\alpha f + g)(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [\alpha f(x) + g(x)] e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\ &\stackrel{\text{propriedades da integral definida}}{=} \alpha \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \right] + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\ &\stackrel{(7.215)}{=} \alpha \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n), \end{aligned} \tag{7.281}$$

ou seja, a aplicação

$$\widehat{} : SC([-L, L]; \mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$$

é uma transformação linear de $(SC([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ em $(\ell^2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ (onde \pm e \cdot são as respectivas operações nos respectivos espaços vetoriais).

9. Notemos também que, se $f, g \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$, então:

$$\begin{aligned} \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{\ell^2(\mathbb{C})}^2 &\stackrel{(7.281) \text{ com } \alpha=1}{=} \|\widehat{f-g}\|_{\ell^2(\mathbb{C})}^2 \\ &\stackrel{(7.278)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |(\widehat{f-g})(n)|^2 \\ &\stackrel{(7.252)}{\leq} \frac{1}{2L} \|f-g\|_{L^2([-L, L], \mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

onde

$$\|f\|_{L^2([-L, L], \mathbb{R})} \doteq \sqrt{\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx}, \tag{7.282}$$

para cada $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$.

Com isto, teremos

$$\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{\ell^2(\mathbb{C})} \leq \frac{1}{\sqrt{2L}} \|f-g\|_{L^2([-L, L], \mathbb{R})}. \tag{7.283}$$

Logo, (7.281) e (7.283), segue que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \widehat{} : SC([-L, L]; \mathbb{R}) & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

é uma transformação linear que é contínua do espaço vetorial real

$$(SC([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot),$$

no espaço vetorial complexo

$$(l_2(\mathbb{C}), +, \cdot),$$

munidos das normas (7.282) e (7.278), respectivamente.

10. Notemos que, na verdade, (7.282) **não** é uma norma no espaço vetorial real

$$(SC([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot),$$

mas sim, uma semi-norma.

A demonstração dos fatos será deixada como exercício para o leitor.

11. Se conhecermos os espaço vetorial real (respectivamente complexo) $(L^2([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ (respectivamente, $(L^2([-L, L]; \mathbb{C}), +, \cdot)$), formado pelas "funções" definidas em $[-L, L]$, cujo módulo ao quadrado é Lebesgue integrável em $[-L, L]$, munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2([-L, L]; \mathbb{R}) \times L^2([-L, L]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2([-L, L]; \mathbb{C}) \times L^2([-L, L]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$), dada por

$$\langle f, g \rangle_{L^2([-L, L]; \mathbb{R})} \doteq \int_{-L}^L f(x) g(x) dx \quad \left(\text{respectivamente, } \langle f, g \rangle_{L^2([-L, L]; \mathbb{C})} \doteq \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} dx \right)$$

para cada $f, g \in L^2([-L, L]; \mathbb{R})$ (respectivamente, $L^2([-L, L]; \mathbb{C})$) teremos que espaço vetorial real munido do produto interno (respectivamente complexo)

$$(L^2([-L, L]; \mathbb{R}), +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

(respectivamente, $(L^2([-L, L]; \mathbb{C}), +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$) teremos que este será Hilbert, ou seja, completo e, além disso, como veremos mais adiante (veja a identidade de Parseval, dada pelo Teorema (7.373)) poderemos mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \hat{\cdot} : L^2([-L, L]; \mathbb{R}) & (\text{ respectivamente, } \mathbb{C}) & \rightarrow l^2(\mathbb{C}) \\ f & & \mapsto \hat{f} \end{array}$$

será um isomorfismo e homeomorfismo.

7.5 Convergência Pontual da Série de Fourier

A seguir iniciaremos o estudo da convergência da série de Fourier associada a uma função $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$.

Nesta seção estudaremos a convergência pontual da série de Fourier e na próxima seção a convergência uniforme.

Antes porém, vale observar que dada uma função $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$, que satisfaz

$$f(-L) = f(L),$$

podemos estendê-la a uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que é $2L$ -periódica e que seja seccionalmente contínua em cada intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, da seguinte forma:

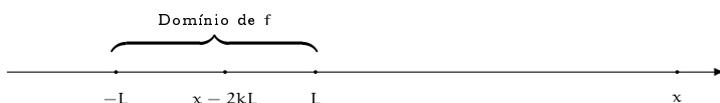
Consideremos $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = f(x - 2kL), \tag{7.284}$$

onde

$$x - 2kL \in [-L, L],$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.



Com isto temos a:

Definição 7.285 *Definamos*

$$SC_{\text{per}}(2L) \doteq \{F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; F \text{ é } 2L\text{-periódica e seccional/e contínua em qualquer } [a, b] \subseteq \mathbb{R}\}$$

e

$$C_{\text{per}}(2L) \doteq \{F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; F \text{ é } 2L\text{-periódica e contínua } \mathbb{R}\}.$$

Observação 7.286

1. *Observemos que os conjunto*

$$SC_{\text{per}}(2L) \quad \text{e} \quad C_{\text{per}}(2L)$$

tornam-se espaços vetoriais sobre \mathbb{R} , quando munido das operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por uma função.

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

2. *Se $f \in SC_{\text{per}}(2L)$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, denotaremos por*

$$f(x_0^+) \doteq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_0^-) \doteq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x). \tag{7.287}$$

3. *Podemos indentificar de maneira natural, o espaço vetorial $SC([-L, L]; \mathbb{R})$ com $SC_{\text{per}}(2L)$.*

Para isto dado $f \in SC([-L, L]; \mathbb{R})$, redefinimos, se necessário,

$$f(L) \doteq f(-L),$$

para que a função \underline{f} assuma o mesmo valor nos extremos do intervalo $[-L, L]$.

Com isto podemos considerar sua extensão $2L$ -periódica à \mathbb{R} , que pertencerá à $SC_{\text{per}}(2L)$, como vimos em (7.284).

Analogamente, se $F \in SC_{\text{per}}(2L)$, então sua restrição ao intervalo $[-L, L]$, pertencerá à $SC([-L, L]; \mathbb{R})$.

4. Se $f \in SC_{\text{per}}(2L)$, então a série de Fourier de \underline{f} estará bem definida (ou seja, os coeficientes de Fourier estarão bem definidos).

Logo,

$$S[f](x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (7.288)$$

onde

$$a_n \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad (7.289)$$

e

$$b_n \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (7.290)$$

ou

$$S[f](x) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{L}x}, \quad (7.291)$$

onde

$$\widehat{f}(n) \doteq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \quad (7.292)$$

Iniciaremos o nosso estudo da convergência pontual da série de Fourier estabelecendo o seguinte resultado:

Lema 7.293 *Seja $f \in SC_{\text{per}}(2L)$, diferenciável em $[-L, L]$, exceto em um número finito de pontos, e de modo que $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$.*

Suponhamos também que a função \underline{f} seja contínua em $x = 0$ e que

$$f(0) = 0. \quad (7.294)$$

Então a série de Fourier associada a função \underline{f} , converge para $\underline{0}$, no ponto $x = 0$, isto

é, fazendo $x = 0$ em (7.288), respectivamente (7.291), teremos:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 = f(0), \quad (7.295)$$

$$\text{respectivamente,} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = 0 = f(0). \quad (7.296)$$

Demonstração:

Demonstraremos a identidade para a forma complexa da série de Fourier, isto é, provaremos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) = 0.$$

Como consequência teremos que valerá o mesmo para a série de Fourier na forma real.

Para isto, consideremos a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1}, & \text{para } x \in [-L, 0) \cup (0, L] \\ -iL \frac{f'(0^+)}{\pi}, & \text{para } x = 0 \end{cases} \quad (7.297)$$

e de modo que

$$g(x + 2L) = g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.298)$$

Observemos que existem

$$g(0^+) \quad \text{e} \quad g(0^-).$$

De fato, pois:

$$\begin{aligned} g(0^+) &\stackrel{(7.287)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \\ &\stackrel{x \neq 0 \text{ e } (7.297)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1} \\ &\stackrel{f(0) \stackrel{(7.294)}{=} 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \frac{1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1}{x - 0}} \right]. \end{aligned} \quad (7.299)$$

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{(7.287)}{=} f'(0^+), \quad \text{que existe pois } f' \in SC_{\text{-per}}(2L) \quad (7.300)$$

$$\begin{aligned} & \text{e} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1}{x - 0}} = \frac{1}{\frac{d}{dx} \left[e^{i\frac{\pi}{L}x} \right]_{x=0}} \\ & = \frac{L}{i\pi}. \end{aligned} \quad (7.301)$$

Logo, de (7.300), (7.301) e (7.299), segue que

$$\begin{aligned} g(0^+) &= f'(0^+) \frac{L}{i\pi} \\ &= -i \frac{L}{\pi} f'(0^+) \\ &\stackrel{(7.297)}{=} g(0), \end{aligned}$$

portanto existe $g(0^+)$ e é igual a $g(0)$.

De modo semelhante, teremos:

$$\begin{aligned} g(0^-) &\stackrel{(7.287)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \\ &\stackrel{(7.298)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x + 2L) \\ &\stackrel{x+2L \in (-L, L) \text{ e } (7.297)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + 2L)}{e^{i\frac{\pi}{L}(x+2L)} - 1} \\ &\stackrel{f(x+2L)=f(x)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x} e^{i2\pi} - 1} \\ &\stackrel{e^{i2\pi}=1}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \frac{1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1}{x - 0}} \right] \\ &\stackrel{(7.300) \text{ e } (7.301)}{=} f'(0^-) \frac{L}{i\pi} \\ &= -i \frac{L}{\pi} f'(0^-), \end{aligned}$$

isto é, existe $g(0^-)$.

Observemos que $f \in SC_{\text{per}}(2L)$ e a função

$$x \rightarrow e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1$$

é contínua e $2L$ -periódica em \mathbb{R} , e só se anula em $x = 0$, no intervalo $[-L, L]$.

Afirmamos que $g \in SC_{\text{per}}(2L)$.

De fato pois, além dos pontos onde a função \underline{f} tem uma descontinuidade de 1.a espécie em $[-L, L]$ (que são, no máximo, um número de pontos do intervalo $[-L, L]$), o único "problema" da função \underline{g} no intervalo $[-L, L]$ seria $x = 0$, mas nesse ponto existem os limites laterais, como vimos acima, assim o conjunto dos pontos de descontinuidade da função \underline{g} será o conjunto dos pontos de descontinuidade de 1.a espécie da função \underline{f} , juntamente, eventualmente, com os pontos $2kL$, onde $k \in \mathbb{Z}$ (onde a função \underline{g} possui limites laterais pela direita e pela esquerda finitos nesses pontos).

Logo, do Lema de Riemman-Lebesgue, na forma complexa, (isto é, do Corolário 7.269)) segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \widehat{g}(n) = 0. \quad (7.302)$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &\stackrel{(7.292)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx \\ &\stackrel{(7.297)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) (e^{i\frac{\pi}{L}x} - 1) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx \\ &\stackrel{\text{propriedades da integral definida}}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-i\frac{(n-1)\pi}{L}x} dx - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx \\ &\stackrel{(7.292)}{=} \text{com } n-1 \text{ e } n \quad \widehat{g}(n-1) - \widehat{g}(n). \end{aligned} \quad (7.303)$$

Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) &= \widehat{f}(-N) + \widehat{f}(-N+1) + \dots + \widehat{f}(N-1) + \widehat{f}(N) \\ &\stackrel{(7.303)}{=} [\widehat{g}(-N-1) - \widehat{g}(-N)] + [\widehat{g}(-N) - \widehat{g}(-N+1)] + \dots \\ &\quad + [\widehat{g}(N-2) - \widehat{g}(N-1)] + [\widehat{g}(N-1) - \widehat{g}(N)] \\ &= \widehat{g}(-N-1) - \widehat{g}(N). \end{aligned} \quad (7.304)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \\ &\stackrel{(7.304)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} [\widehat{g}(-N-1) - \widehat{g}(N)] \stackrel{(7.302)}{=} 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = 0 \stackrel{(7.294)}{=} f(0).$$

Portanto a série de Fourier associada à função f , em $x = 0$, converge para $0 = f(0)$, como queríamos demonstrar. □

Observação 7.305

1. A demonstração do Lema (7.293) acima mostra, na verdade, que a convergência da série de Fourier, na forma complexa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$, ocorre em um sentido mais forte, a saber,

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) = 0$$

e não apenas no sentido de valor principal, isto é,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) = 0.$$

De fato, pelo que vimos da demonstração do Lema (7.293) acima (veja a identidade (7.304)) temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) &= \hat{f}(-N) + \hat{f}(-N+1) + \dots + \hat{f}(M-1) + \hat{f}(M) \\ &\stackrel{(7.303)}{=} [\hat{g}(-N-1) - \hat{g}(-N)] + [\hat{g}(-N) - \hat{g}(-N+1)] + \dots \\ &\quad + [\hat{g}(M-2) - \hat{g}(M-1)] + [\hat{g}(M-1) - \hat{g}(M)] \\ &= \hat{g}(-N-1) - \hat{g}(M) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{M \rightarrow \infty} 0, \text{ devido a (7.302)}. \end{aligned} \quad (7.306)$$

Portanto, de (7.306), segue que

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \sum_{n=-N}^M \hat{f}(n) = 0.$$

2. A soma (7.304) é dita soma telescópica.

Podemos agora tratar do resultado principal, a saber:

Teorema 7.307 *Suponhamos que $f \in SC_{\text{per}}(2L)$ é uma função diferenciável em $[-L, L]$, exceto em um número finito de pontos, com $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Então a série de Fourier associada à função \underline{f} , em \underline{x}_0 , converge, para $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$, isto é,

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x_0\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x_0\right), \quad (7.308)$$

onde,

$$a_n \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad (7.309)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (7.310)$$

ou

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x_0}, \quad (7.311)$$

onde,

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \quad (7.312)$$

Demonstração:

Consideremos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(x, y) \doteq \left(x - x_0, y - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.313)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} T\left(x_0, \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}\right) &\stackrel{(7.313)}{=} \left(x_0 - x_0, \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}\right) \\ &= (0, 0) \quad \text{e} \\ T(x, f(x)) &\stackrel{(7.313)}{=} \left(x - x_0, f(x) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}\right). \end{aligned}$$

Definamos a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) \doteq f(x + x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.314)$$

Então os pontos do gráfico da função g , são da forma:

$$\begin{aligned}
 (x, g(x)) &\stackrel{(7.314)}{=} \left(x, f(x + x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right) \\
 &\stackrel{z=x+x_0}{=} \left(z - x_0, f(z) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right) \\
 &\stackrel{(7.313)}{=} T(z, f(z)) \\
 &\stackrel{z=x+x_0}{=} T(x + x_0, f(x + x_0)),
 \end{aligned} \tag{7.315}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Observemos que

$$\begin{aligned}
 g(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \\
 &\stackrel{(7.314)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f(x + x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] \\
 &= f(x_0^+) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \\
 &= \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2},
 \end{aligned} \tag{7.316}$$

$$\begin{aligned}
 g(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \\
 &\stackrel{(7.314)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[f(x + x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] \\
 &= f(x_0^-) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \\
 &= \frac{f(x_0^-) - f(x_0^+)}{2}.
 \end{aligned} \tag{7.317}$$

Logo, de (7.316) e (7.317), segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{g(0^+) + g(0^-)}{2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2} + \frac{f(x_0^-) - f(x_0^+)}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{4} [f(x_0^+) - f(x_0^-) + f(x_0^-) - f(x_0^+)] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.318}$$

Observemos que do fato que $f, f' \in SC_{\text{per}}(2L)$ e de (7.314), segue que $g, g' \in SC_{\text{per}}(2L)$. A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

Definamos a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) \doteq \begin{cases} \frac{g(x) + g(-x)}{2}, & \text{para } x \in [-L, 0) \cup (0, L] \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}, \tag{7.319}$$

e

$$h(x + 2L) = h(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Com isto teremos que $h, h' \in SC_{\text{per}}(2L)$.

A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

Notemos também que a função h é contínua em $x = 0$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) &\stackrel{x \neq 0 \text{ e (7.319)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) + g(-x)}{2} \\ &= \frac{g(0^+) + g(0^-)}{2} \\ &\stackrel{(7.318)}{=} 0 \\ &\stackrel{(7.319)}{=} h(0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &\stackrel{x \neq 0 \text{ e (7.319)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) + g(-x)}{2} \\ &= \frac{g(0^-) + g(0^+)}{2} \\ &\stackrel{(7.318)}{=} 0 \\ &\stackrel{(7.319)}{=} h(0). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= 0 \\ &\stackrel{(7.319)}{=} h(0), \end{aligned}$$

mostrando a continuidade da função h em $x = 0$.

Aplicando o Lema (7.293) para a função h (notemos que a função h satisfaz todas as hipóteses do Lema, verifique!), teremos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) \\ &= 0 = h(0). \end{aligned} \tag{7.320}$$

Mas, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\hat{h}(n) \stackrel{(7.281) \text{ e } (7.261)}{=} \frac{\hat{g}(n) + \hat{g}(-n)}{2}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{7.321}$$

Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$, fixado, teremos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-N}^N \widehat{h}(n) &\stackrel{(7.321)}{=} \sum_{n=-N}^N \frac{\widehat{g}(n) + \widehat{g}(-n)}{2} \\
 &= \sum_{n=-N}^N \frac{\widehat{g}(n)}{2} + \sum_{n=-N}^N \frac{\widehat{g}(-n)}{2} \\
 &\left\langle \text{temos que: } \sum_{n=-N}^N \widehat{g}(-n) = \sum_{n=-N}^N \widehat{g}(n) \right\rangle \\
 &= \sum_{n=-N}^N \widehat{g}(n). \tag{7.322}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(n) &\stackrel{(7.312)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\stackrel{(7.314)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[f(x + x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right] e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\stackrel{\text{propriedades da integral definida}}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x + x_0) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &= \left\langle \begin{array}{l} y = x + x_0, \text{ logo: } dy = dx \\ \text{na 1.a integral fazendo: } x = -L, \text{ logo: } y = -L + x_0 \\ x = L, \text{ logo: } y = L + x_0 \end{array} \right\rangle = \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L+x_0}^{L+x_0} f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} (y-x_0)} dy - \frac{1}{2L} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \int_{-L}^L e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\stackrel{y \rightarrow f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} (y-x_0)} \text{ é } 2L\text{-per, e (7.131)}}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} e^{i \frac{n\pi}{L} x_0} dy \\
 &\quad - \frac{1}{2L} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \int_{-L}^L e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &= e^{i \frac{n\pi}{L} x_0} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} dy \right] - \frac{1}{2L} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \int_{-L}^L e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\
 &\stackrel{(7.312)}{=} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x_0} - \frac{1}{2L} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \int_{-L}^L e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx. \tag{7.323}
 \end{aligned}$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}$ fixado, temos que:

$$\int_{-L}^L e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx = \begin{cases} 2L, & \text{para } n = 0 \\ \frac{e^{-i \frac{n\pi}{L} x}}{-i \frac{n\pi}{L}} \Big|_{x=-L}^{x=L} = \frac{L}{-i n \pi} \underbrace{[e^{-i n \pi} - e^{+i n \pi}]}_{=0} = 0, & \text{para } n \neq 0 \end{cases}. \tag{7.324}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$, de (7.323) e (7.324), segue que

$$\widehat{g}(n) = \begin{cases} \widehat{f}(0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, & \text{para } n = 0 \\ \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x_0}, & \text{para } n \neq 0 \end{cases}. \quad (7.325)$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x_0} - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} &= \sum_{n=-N, N \neq 0}^N \underbrace{\widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x_0}}_{\substack{(7.325) \\ \equiv \text{com } n \neq 0 \\ \widehat{g}(n)}}} + \underbrace{\widehat{f}(0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}}_{\substack{(7.325) \\ \equiv \text{com } n \neq 0 \\ \widehat{g}(0)}}} \\ &\stackrel{(7.325)}{=} \sum_{n=-N}^N \widehat{g}(n) \\ &\stackrel{(7.322)}{=} \sum_{n=-N}^N \widehat{h}(n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad \text{por (7.320),} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x_0} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 7.326

1. A demonstração do Teorema (7.307) acima é devido a P.R.Chernoff (1980).
2. O Teorema (7.307) acima, nos diz que nas hipótese do Teorema (7.307), a série de Fourier associada a função \underline{f} , converge para a média do valor do salto da função \underline{f} , em cada ponto \underline{x}_0 .
3. Se além de satisfazer as hipóteses do Teorema (7.307) acima, a função \underline{f} for contínua em \underline{x}_0 , então teremos que

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0).$$

Logo, de (7.308), respectivamente, (7.311), segue que

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x_0\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x_0\right), \quad (7.327)$$

ou

$$f(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x_0}. \quad (7.328)$$

onde,

$$a_m \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx, \quad \text{para cada } m \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad (7.329)$$

$$b_k \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right) dx, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}, \quad (7.330)$$

ou

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x_0}, \quad (7.331)$$

onde,

$$\widehat{f}(n) \doteq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \quad (7.332)$$

4. Em particular, se $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é uma função $2L$ -periódica então, do Teorema (7.307) acima, a série de Fourier associada à função f converge, pontualmente, para a função f , em \mathbb{R} , isto é, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (7.333)$$

ou

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}, \quad (7.334)$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{Z}$, os coeficientes a_m , b_k e $\widehat{f}(n)$, são dados por (7.329), (7.330) e (7.332), respectivamente.

Aplicaremos, a seguir, as ideias e resultados acima a dois exemplos os quais já foram calculados os coeficientes de Fourier anteriormente.

Exemplo 7.335 Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{para } x \in [-1, 0) \\ x, & \text{para } x \in [0, 1) \end{cases}, \quad (7.336)$$

satisfazendo

$$f(x+2) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.337)$$

Estude a convergência da série de Fourier associada à função f .

Resolução:

Neste caso, temos

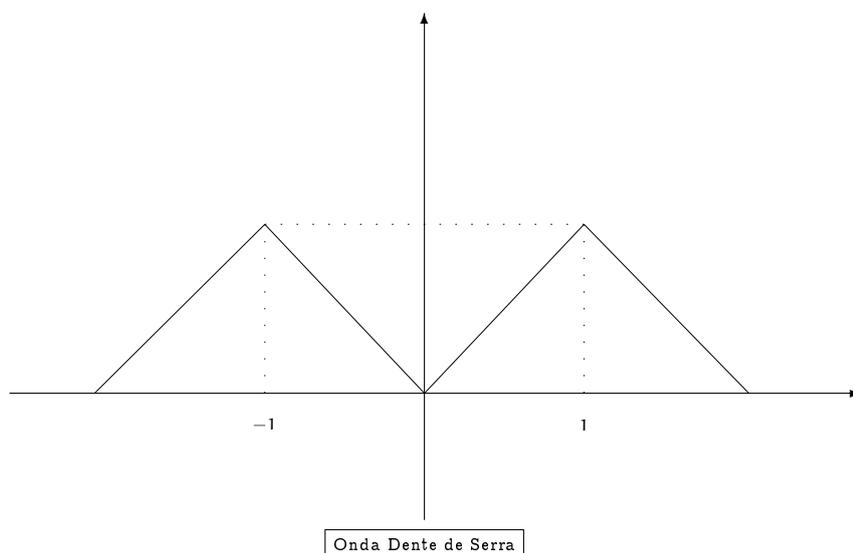
$$L = 1$$

e

$$f(x) = |x|, \quad \text{para cada } x \in [-1, 1]$$

e satisfaz (7.337).

A representação geométrica do gráfico da função f , é dada pela figura abaixo.



Vimos, no Exemplo (7.187), para cada $n \in \mathbb{N}$, vimos que

$$\begin{aligned} b_n &\stackrel{(7.191)}{=} 0, \\ a_0 &\stackrel{(7.190)}{=} \frac{1}{2}, \\ a_{2n} &\stackrel{(7.190)}{=} 0, \\ a_{2n+1} &\stackrel{(7.190)}{=} \frac{-4}{(2n+1)^2 \pi^2}, \end{aligned}$$

ou seja, a série de Fourier associada à função f será dada por:

$$S[f](x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi x]. \quad (7.338)$$

Observemos que $f \in C_{\text{per}}(2)$ e a função f' é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, pois, de (7.336), temos que

$$f'(x) = -1, \quad \text{para cada } x \in (-1, 0) \quad \text{e} \quad f'(x) = 1, \quad \text{para cada } x \in (0, 1).$$

Logo, do Teorema (7.307) e do item 2. da Observação (7.326), segue que a série de Fourier associada à função f (isto é, (7.338)) converge para a função f , pontualmente em \mathbb{R} , isto é,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi x], \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.339)$$

□

Observação 7.340 *Em particular, segue que*

$$\begin{aligned} & 0 \stackrel{(7.336)}{=} f(0) \\ & \stackrel{(7.339)}{=} \underset{\text{com } x=0}{=} \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \underbrace{\cos[(2n+1)\pi \cdot 0]}_{=1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \\ & = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \\ \text{isto é, } & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Exemplo 7.341 *Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para cada } x \in [\pi, 0) \text{ ou } x = \pi \\ \pi, & \text{para cada } x \in [0, \pi) \end{cases}, \quad (7.342)$$

satisfazendo

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (7.343)$$

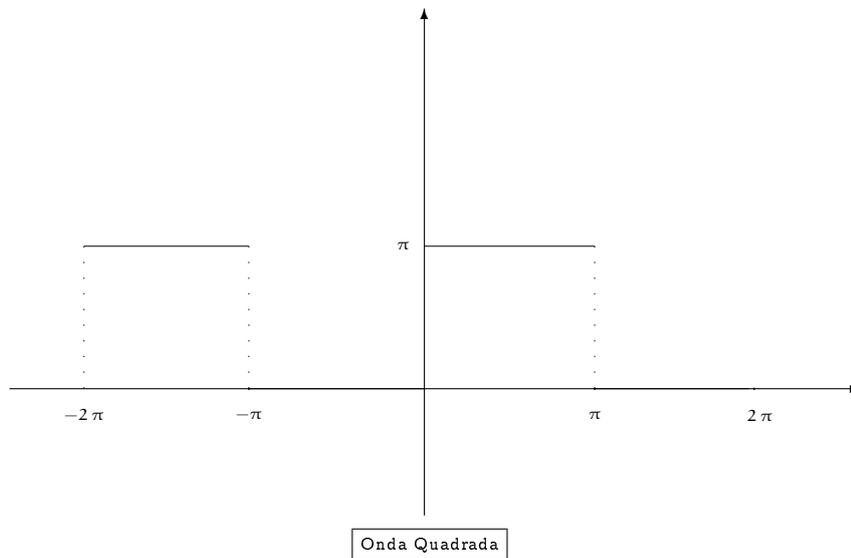
Estude a convergência da série de Fourier associada a função f .

Resolução:

Neste caso, temos que

$$L = \pi.$$

A representação geométrica do gráfico da função f , é dada pela figura abaixo.



Vimos, no Exemplo (7.193), que a série de Fourier associada à função \underline{f} é dada por:

$$S[f](x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \operatorname{sen}[(2n+1)x]. \quad (7.344)$$

Observemos que $f \in SC_{\text{per}}(2\pi)$ e a função \underline{f}' é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

De fato, pois

$$f'(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

Logo, do Teorema (7.307) e do item 3. da Observação (7.326), segue que a série de Fourier associada à função \underline{f} , converge para função \underline{f} , pontualmente em \mathbb{R} , exceto nos pontos da forma

$$x = k\pi, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z},$$

pois a função \underline{f} não é contínua, somente, neste pontos de \mathbb{R} , ou seja,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \operatorname{sen}[(2n+1)x], \quad (7.345)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Notemos que, do Teorema (7.307), em $x = 0$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\stackrel{(7.342)}{=} \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \\ &\stackrel{(7.308) \text{ e } (7.344)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \underbrace{\operatorname{sen}[(2n+1) \cdot 0]}_{=0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Notemos que, do Teorema (7.307), em $x = \pi$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\stackrel{(7.342)}{=} \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} \\ &\stackrel{(7.308) \text{ e } (7.344)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \underbrace{\text{sen}[(2n+1)\pi]}_{=0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Notemos que, do Teorema (7.307), em $x = -\pi$ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\stackrel{(7.342)}{=} \frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} \\ &\stackrel{(7.308) \text{ e } (7.344)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \underbrace{\text{sen}[(2n+1)(-\pi)]}_{=0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Como a função f é contínua em $x = \frac{\pi}{2}$, pelo do Teorema (7.307) e do item 3. da Observação (7.326), temos que a série de Fourier associada à função f será convergente para $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, isto é,

$$\begin{aligned} \pi &\stackrel{(7.342)}{=} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\stackrel{(7.308) \text{ e } (7.344)}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \underbrace{\text{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}_{=(-1)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} (-1)^n \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

□

7.6 Convergência Uniforme da Série de Fourier

O objetivo desta seção é apresentar um resultado que garanta a convergência uniforme da série de Fourier associada a uma função periódica "bem comportada".

Para a demonstração desse resultado precisaremos de alguns outros, entre eles da:

Proposição 7.346 *Consideremos $f \in SC_{\text{per}}(2L)$ que seja uma função diferenciável em $[-L, L]$, exceto em um número finito de pontos, e de modo que $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$.*

Então os coeficientes de Fourier, na forma complexa, da função f e da função f' , se relacionam da seguinte forma:

$$\widehat{f'}(n) = \frac{in\pi}{L} \widehat{f}(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}, \quad (7.347)$$

ou seja, se

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} \quad (7.348)$$

então

$$S[f'](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in\pi}{L} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}. \quad (7.349)$$

Em relação aos coeficientes de Fourier, na forma real, associados à função f , teremos que:

$$\begin{aligned} a_0' &= 0, \\ a_n' &= \frac{n\pi}{L} b_n, \end{aligned} \quad (7.350)$$

$$b_n' = -\frac{n\pi}{L} a_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (7.351)$$

onde

$$\begin{aligned} S[f] &= \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + b_n \phi_n \\ S[f'] &= \frac{a_0'}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \psi_n + b_n' \phi_n, \end{aligned}$$

com, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, as funções $\underline{\psi}_m$ e $\underline{\phi}_n$, dadas por (7.153) e (7.152), respectivamente.

Demonstração:

Observemos que se a identidade (7.347) ocorrer, então as identidades em (7.350), também ocorrerão.

De fato, pois:

$$\begin{aligned}
 a_0' &\stackrel{(7.207)}{=} 2\widehat{f}'(0) \\
 &\stackrel{(7.347) \text{ com } n=0}{=} 2(0 \cdot \widehat{f}(0)) \\
 &= 0, \\
 \frac{a_n' - i b_n'}{2} &\stackrel{(7.208)}{=} \widehat{f}'(n) \\
 &\stackrel{(7.347)}{=} \frac{i n \pi}{L} \widehat{f}(n) \\
 &\stackrel{(7.208)}{=} \frac{i n \pi}{L} \left(\frac{a_n - i b_n}{2} \right) \\
 &= \frac{\frac{n \pi}{L} b_n + i \frac{n \pi}{L} a_n}{2}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_n' = \frac{n \pi}{L} b_n \quad \text{e} \quad b_n' = -\frac{n \pi}{L} a_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

isto é, vale as identidades em (7.350).

Mostremos que a identidade (7.347) ocorre.

Para isto notemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, teremos, por integração por partes para a integral definida, que:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}'(n) &\stackrel{(7.332)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f'(x) e^{-i \frac{n \pi}{L} x} dx \\
 &\left\langle \begin{array}{l} u \doteq e^{-i \frac{n \pi}{L} x}, \text{ logo: } du = -i \frac{n \pi}{L} e^{-i \frac{n \pi}{L} x} dx \\ dv \doteq f'(x) dx, \text{ logo: } v = f(x) \end{array} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2L} \left[\underbrace{f(x) e^{-i \frac{n \pi}{L} x} \Big|_{x=-L}^{x=L}}_{f(\cdot) \text{ e } e^{-i \frac{n \pi}{L} \cdot} \text{ são } 2L\text{-periódicas}_0} - \int_{-L}^L f(x) \left(-i \frac{n \pi}{L} e^{-i \frac{n \pi}{L} x} \right) dx \right] \\
 &= i \frac{n \pi}{L} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n \pi}{L} x} dx \right] \\
 &\stackrel{(7.332)}{=} i \frac{n \pi}{L} \widehat{f}(n),
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 7.352

1. Observemos que a identidade (7.347), nos diz que quanto mais derivadas a função \underline{f} tiver, mais rápido a sequência dos coeficientes complexos de Fourier decai a zero, quando $|n|$, tende a $+\infty$.

Para ver isto, observemos que se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função $2L$ -periódica que é duas vezes diferenciável, exceto em um número finito de pontos do intervalo $[-L, L]$, e $f'' \in SC_{\text{per}}(2L)$ então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, teremos:

$$\begin{aligned} \widehat{f''}(n) &= \widehat{(f')'}(n) \\ &\stackrel{(7.347)}{=} \frac{in\pi}{L} \widehat{f'}(n) \\ &\stackrel{(7.347)}{=} \left(\frac{in\pi}{L}\right)^2 \widehat{f}(n), \end{aligned} \quad (7.353)$$

e, em termos dos coeficientes na forma real da função \underline{f} , teremos:

$$\begin{aligned} a_0'' &\stackrel{(7.207)}{=} 2\widehat{f''}(0) \\ &\stackrel{(7.353)}{=} \underset{\text{com } n=0}{=} 2(0 \cdot \widehat{f}(0)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\begin{aligned} a_n'' &\stackrel{(7.350)}{=} \frac{n\pi}{L} b_n' \\ &\stackrel{(7.350)}{=} \frac{n\pi}{L} \left(-\frac{n\pi}{L} a_n\right) \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n, \end{aligned} \quad (7.354)$$

$$\begin{aligned} b_n'' &\stackrel{(7.351)}{=} -\frac{n\pi}{L} a_n' \\ &\stackrel{(7.351)}{=} -\frac{n\pi}{L} \left(\frac{n\pi}{L} b_n\right) \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2} b_n, \end{aligned} \quad (7.355)$$

2. Se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função $2L$ -periódica que é três vezes diferenciável, exceto em um número finito de pontos do intervalo $[-L, L]$, e $f''' \in SC_{\text{per}}(2L)$ então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, teremos:

$$\begin{aligned} \widehat{f'''}(n) &= \widehat{(f'')'}(n) \\ &\stackrel{(7.353)}{=} \left(\frac{in\pi}{L}\right)^2 \widehat{f'}(n) \\ &\stackrel{(7.347)}{=} \left(\frac{in\pi}{L}\right)^3 \widehat{f}(n), \end{aligned} \quad (7.356)$$

e, em termos dos coeficientes na forma real da função \underline{f} , teremos:

$$\begin{aligned} a_0''' &\stackrel{(7.207)}{=} 2 \widehat{f'''}(0) \\ &\stackrel{(7.356)}{=} \underset{\text{com } n=0}{=} 2 \left(0 \cdot \widehat{f}(0) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n''' &\stackrel{(7.350)}{=} \frac{n\pi}{L} b_n'' \\ &\stackrel{(7.355)}{=} \frac{n\pi}{L} \left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} b_n \right) \\ &= -\frac{n^3\pi^3}{L^3} b_n, \end{aligned} \tag{7.357}$$

$$\begin{aligned} b_n''' &\stackrel{(7.351)}{=} -\frac{n\pi}{L} a_n'' \\ &\stackrel{(7.354)}{=} -\frac{n\pi}{L} \left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n \right) \\ &= \frac{n^3\pi^3}{L^3} a_n. \end{aligned} \tag{7.358}$$

3. Em geral, para $k \in \mathbb{N}$ fixado, se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função $2L$ -periódica e \underline{k} -vezes diferenciável e $f^{(k)} \in \text{SC}_{\text{per}}(2L)$, podemos mostrar, por indução, que que

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = \left(\frac{in\pi}{L} \right)^k \widehat{f}(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{7.359}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Temos uma situação semelhante para os coeficientes reais de Fourier.

Deixaremos a elaboração destas relações como exercício para o leitor.

4. Observemos que se $f, f' \in C_{\text{per}}(2L)$ e $\underline{f''}$ existe, exceto em um número finito de pontos de $[-L, L]$, e satisfaz $f'' \in \text{SC}_{\text{per}}(2L)$ então, podemos afirmar que a série de Fourier associada à função \underline{f} , converge uniformemente para a função \underline{f} , em \mathbb{R} .

De fato, do Lema de Riemann-Lebesgue (isto é, do Corolário (7.267)) aplicado à função $\underline{f''}$, segue que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f''}(n) = 0.$$

Logo, de um resultado de Análise I, segue que a sequência numérica $(\widehat{f}''(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ será limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que

$$|\widehat{f}''(n)| \leq M, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \quad (7.360)$$

Mas, para cada $n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, temos que:

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}| &= |\widehat{f}(n)| \underbrace{|e^{i \frac{n\pi}{L} x}|}_{=1} \\ &\stackrel{(7.353)}{=} \left| \left(\frac{L}{i n \pi} \right)^2 \widehat{f}''(n) \right| \\ &= \frac{L^2}{\pi^2 n^2} |\widehat{f}''(n)| \\ &\stackrel{(7.360)}{\leq} \frac{M L^2}{\pi^2} \frac{1}{n^2}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.361)$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (visto na disciplina de Análise I)) segue, de (7.361) e do Teste M. de Weierstrass (visto na disciplina de Análise II), que a série de funções

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}$$

(a série de Fourier, na forma complexa, associada à função \underline{f}) será uniformemente convergente, em \mathbb{R} , para alguma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Notemos que, do Teorema (7.327), segue que a série de Fourier associada à função \underline{f} converge pontualmente para a função \underline{f} , em \mathbb{R} , pois a função \underline{f} é contínua em \mathbb{R} .

Portanto, das propriedades acima, segue que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}, \quad (7.362)$$

para $x \in \mathbb{R}$, onde a convergência da série de funções (7.362), será a uniforme em \mathbb{R} , isto é,

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x), \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R}. \quad (7.363)$$

Na verdade temos um resultado um pouco mais geral, a saber:

Teorema 7.364 Consideremos $f \in C_{\text{per}}(2L)$ que seja uma função diferenciável em $[-L, L]$, exceto em um número finito de pontos deste intervalo, e satisfazendo $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$.

Então a série de Fourier associada à função f , converge uniformemente para a função f , em \mathbb{R} , isto é,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] \right\} = f(x), \text{ uniforme em } \mathbb{R}, \quad (7.365)$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$a_m \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{m\pi}{L} x \right) dx, \quad e \quad b_k \doteq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx, \quad (7.366)$$

ou

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} = f(x), \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R}, \quad (7.367)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$\widehat{f}(n) \doteq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx. \quad (7.368)$$

Demonstração:

Faremos a demonstração de (7.367).

A demonstração de (7.365) é consequência da demonstração de (7.367), e os detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

Notemos que, para cada $N \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |\widehat{f}(n)| &= |\widehat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\widehat{f}(n)| \\ &\stackrel{(7.347)}{=} |\widehat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} \left| \frac{L}{i n \pi} \widehat{f}'(n) \right| \\ &\stackrel{|i|=1}{=} |\widehat{f}(0)| + \frac{L}{\pi} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|} |\widehat{f}'(n)| \\ &\stackrel{(7.121)}{\leq} |\widehat{f}(0)| + \frac{L}{\pi} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} |\widehat{f}'(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| + \frac{L}{\pi} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}'(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f' \in \text{SC}_{\text{per}}(2L) \text{ e Corolário (7.250) - veja (7.252)} \leq \left| \widehat{f}(0) \right| + \frac{L}{\pi} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2L}} \|f'\| \\
& \leq \left| \widehat{f}(0) \right| + \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2}\pi} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f'\| \\
& = \left| \widehat{f}(0) \right| + \frac{\sqrt{L}}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|f'\|. \tag{7.369}
\end{aligned}$$

Como $f' \in \text{SC}_{\text{per}}(2L)$ segue

$$\|f'\| = \left(\int_{-L}^L f'(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{7.370}$$

Logo, de (7.369) e (7.370) segue que a sequência das somas parciais

$$\left(\sum_{n=-N}^N \left| \widehat{f}(n) \right| \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

é limitada em \mathbb{R} .

Como ela também é monótona, de um resultado de Análise II, segue que será convergente em \mathbb{R} , ou seja, existe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(n) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left| \widehat{f}(n) \right|.$$

Como a série numérica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}(n) \right|$ é convergente em \mathbb{R} segue, do Teste M.de Weierstrass (visto em Análise II), que a série de funções

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}$$

(a série de Fourier, na forma complexa, associada à função \underline{f}) será uniformemente convergente em \mathbb{R} , para uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Notemos que, do Teorema (7.307), temos que a série de Fourier associada à função \underline{f} , converge para a função \underline{f} , pontualmente em \mathbb{R} , pois a função \underline{f} é contínua em \mathbb{R} .

Portanto, das conclusões acima, segue que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}, \tag{7.371}$$

para $x \in \mathbb{R}$, onde a convergência da série de funções (7.371), será a uniforme em \mathbb{R} , isto é,

$$\sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x), \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R},$$

completando a demonstração. □

Observação 7.372 Na demonstração do Teorema 7.364 mostramos que se $f \in C_{\text{per}}(2L)$ é uma função diferenciável em $[-L, L]$, exceto em um número finito de pontos deste intervalo, e satisfazendo $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$, então a série numérica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|$ é convergente em \mathbb{R} .

Em particular, da relação (7.208), segue que as séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

também serão convergentes em \mathbb{R} .

De fato, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &\stackrel{(7.208)}{=} \left| \frac{a_n - i b_n}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} |a_n - i b_n| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \begin{cases} \sqrt{a_n^2} \\ \sqrt{b_n^2} \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} |a_n| \\ |b_n| \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo, das desigualdades acima, obteremos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)| \\ &\leq 2, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty \end{aligned}$$

e, de modo semelhante, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty,$$

completando a demonstração da afirmação.

Nas condições do Teorema (7.364), podemos mostrar que a desigualdade de Bessel, isto é, (7.252) é, na verdade, uma igualdade, mais precisamente, temos o:

Teorema 7.373 *Consideremos $f, g \in C_{\text{per}}(2L)$ duas funções que são diferenciáveis em $[-L, L]$, exceto em um número finito de pontos deste intervalo, satisfazendo $f', g' \in SC_{\text{per}}(2L)$.*

Então

$$\frac{1}{2L} \langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}. \quad (7.374)$$

Em particular,

$$\frac{1}{2L} \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2, \quad (7.375)$$

que é conhecida como a Identidade de Parseval.

Demonstração:

Notemos que, do Teorema (7.364), segue que as séries de Fourier associadas às funções \underline{f} e \underline{g} , convergem uniformemente para a função \underline{f} e \underline{g} , em \mathbb{R} , respectivamente.

Em particular, teremos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} \quad (7.376)$$

e

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x}, \quad (7.377)$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Logo, de um resultado de Análise II, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \langle f, g \rangle &\stackrel{(7.113)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} dx \\ &\stackrel{(7.376)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} \right] \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{convergência uniforme de (7.376) e o Análise II} \quad \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-L}^L \widehat{f}(n) e^{i \frac{n\pi}{L} x} \overline{g(x)} dx \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i \frac{n\pi}{L} x} \overline{g(x)} dx \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \overline{g(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x}} dx \right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \right] \\
&\stackrel{(7.368)}{=} \text{com } f \doteq g \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \widehat{g}(n),
\end{aligned}$$

completando a demonstração da validade da identidade (7.374).

Para obtermos a identidade (7.375), basta considerarmos $g \doteq f$ em (7.374) e obteremos a mesma, completando a demonstração do resultado. □

Observação 7.378

1. O Teorema (7.373) pode ser generalizado para situações mais gerais, como por exemplo, se $f, g \in SC_{\text{per}}(2L)$, ou até $f \in L^2([-L, L]; \mathbb{R})$, o conjunto formado pelas funções definidas em $[-L, L]$, a valores reais (ou complexos) que tenham quadrado Lebesgue-integrável em $[-L, L]$.
2. Em termos dos coeficientes de Fourier, na forma real, associados a uma função f que satisfaça as hipótese do Teorema (7.373), as relações (7.374) e (7.375), tornar-se-ão:

$$\frac{1}{L} \langle f, g \rangle = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) \quad (7.379)$$

$$e \quad \frac{1}{L} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (7.380)$$

onde

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + b_n \phi_n$$

$$e \quad S[g] = \frac{A_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n + B_n \phi_n,$$

onde, para cada $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, as funções $\underline{\psi}_m$ e $\underline{\phi}_k$, são dadas por (7.153) e (7.152), respectivamente.

Para mostrar isso basta notar que, para:

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad \widehat{f}(0) \overline{\widehat{g}(0)} &\stackrel{(7.207)}{=} \frac{a_0}{2} \frac{\overline{A_0}}{2} \\ &\stackrel{A_0 \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_0 A_0}{4}; \end{aligned} \quad (7.381)$$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} : \quad \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} &\stackrel{(7.208)}{=} \frac{a_n - i b_n}{2} \frac{\overline{A_n - i B_n}}{2} \\ &\stackrel{A_n, B_n \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_n - i b_n}{2} \frac{A_n + i B_n}{2} \\ &= \frac{1}{4} [a_n A_n + b_n B_n + i (a_n B_n - b_n A_n)]; \end{aligned} \quad (7.382)$$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} : \quad \widehat{f}(-n) \overline{\widehat{g}(-n)} &\stackrel{(8.211)}{=} \frac{a_n + i b_n}{2} \frac{\overline{A_n + i B_n}}{2} \\ &\stackrel{A_n, B_n \in \mathbb{R}}{=} \frac{a_n + i b_n}{2} \frac{A_n - i B_n}{2} \\ &= \frac{1}{4} [a_n A_n + b_n B_n + i (-a_n B_n + b_n A_n)]. \end{aligned} \quad (7.383)$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \langle f, g \rangle &\stackrel{(7.374)}{=} 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\widehat{f}(0) \overline{\widehat{g}(0)} + \sum_{n=1}^N \widehat{f}(-n) \overline{\widehat{g}(-n)} + \sum_{n=1}^N \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} \right] \\ &\stackrel{(7.381), (7.382) \text{ e } (7.383)}{=} 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_0 A_0}{4} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{4} [a_n A_n + b_n B_n + i (-a_n B_n + b_n A_n)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \frac{1}{4} [a_n A_n + b_n B_n + i (a_n B_n - b_n A_n)] \right\} \\ &= \frac{a_0 A_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (a_n A_n + b_n B_n) \\ &= \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

3. No caso real, a identidade de Parseval, tornar-se-á:

$$\frac{1}{L} \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (7.384)$$

4. A identidade de Parseval pode ser muito útil, tanto na forma complexa, isto é, (7.375), como na forma real, o seja, (7.384), para, por exemplo, encontrarmos a soma de certas séries numéricas que sabemos serem convergentes, como veremos em alguns exemplos a seguir.

Apliquemos as ideias acima aos seguintes exemplos:

Exemplo 7.385 Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por e

$$f(x) \doteq \begin{cases} -x, & \text{para cada } x \in [-1, 0) \\ x, & \text{para cada } x \in [0, 1) \end{cases}, \quad (7.386)$$

satisfazendo

$$f(x+2) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Estudar a convergência da série de Fourier associada à função f .

Resolução:

Vimos no Exemplo (7.335), que

$$f(x) \stackrel{(7.338)}{=} \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\pi x], \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

onde a convergência da série de funções acima é pontual em \mathbb{R} .

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, vimos que

$$\begin{aligned} b_n &\stackrel{(7.191)}{=} 0, \\ a_0 &\stackrel{(7.189)}{=} 1, \\ a_{2n} &\stackrel{(7.190)}{=} 0, \\ a_{2n+1} &\stackrel{(7.190)}{=} \frac{-4}{(2n+1)^2 \pi^2}. \end{aligned} \quad (7.387)$$

Como $f \in C_{\text{per}}(2\pi)$ e $f' \in SC_{\text{per}}(2\pi)$ segue, do Teorema (7.364), que a convergência da série de Fourier associada à função f , será uniforme em \mathbb{R} .

Logo, da identidade de Parseval, para o caso real, (isto é, do item 2. da Observação (7.378)), segue que (com $L = 1$):

$$\begin{aligned}
 \frac{1^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-4}{(2n+1)^2 \pi^2} \right]^2 &\stackrel{(7.387)}{=} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\
 &\stackrel{(7.380)}{=} \|f\|^2 \\
 &= \int_{-1}^1 f(x)^2 dx \\
 &\stackrel{f \text{ é função par}}{=} 2 \int_{-1}^1 f(x)^2 dx \\
 &\stackrel{(7.386)}{=} 2 \int_0^1 x^2 dx \\
 &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{2}{3},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

□

Exemplo 7.388 Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) \doteq \sin(10x) + 5 \cos(5x) - 2 \sin(20x) - 4 \cos(11x), \quad (7.389)$$

para cada $x \in [-\pi, \pi)$, e satisfazendo

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Estudar a série de Fourier associada à função f .

Resolução:

Observemos que, neste caso,

$$L = \pi.$$

Notemos que cada funções que são as parcelas da função f tem 2π como um de seus períodos.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto segue que

$$f(x) = \operatorname{sen}(10x) + 5 \cos(5x) - 2 \operatorname{sen}(20x) - 4 \cos(11x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Logo teremos $f \in C_{\text{per}}^{\infty}(2\pi)$ e, do Teorema (7.364), segue que a série de Fourier associada à função f irá convergir uniformemente para a função f em \mathbb{R} , isto é,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(10x) + 5 \cos(5x) - 2 \operatorname{sen}(20x) - 4 \cos(11x) &\stackrel{(7.389)}{=} f(x) \\ &\stackrel{(7.365)}{=} \underset{\text{com } L=\pi}{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx), \end{aligned} \quad (7.390)$$

para $x \in \mathbb{R}$, onde a convergência da série de funções acima é uniformemente em \mathbb{R} .

Comparando, na identidade (7.390), o lado direito como o lado esquerdo, observamos que:

$$b_n = 0 \quad \text{para } n \neq 10, 20,$$

$$b_{10} = 1, \quad b_{20} = -2,$$

$$a_n = 0, \quad \text{para } n \neq 5, 11,$$

$$a_5 = 5, \quad \text{para } a_{11} = -4,$$

isto é, $S[f](x) = \operatorname{sen}(10x) + 5 \cos(5x) - 2 \operatorname{sen}(20x) - 4 \cos(11x)$, , para cada $x \in \mathbb{R}$,

ou seja, é a expresssão da função f é a expansão da função f em série de Fourier, em $[-\pi, \pi]$. \square

Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 7.391 *Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) \doteq x, \quad \text{para cada } x \in [-\pi, \pi), \quad (7.392)$$

satisfazendo

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

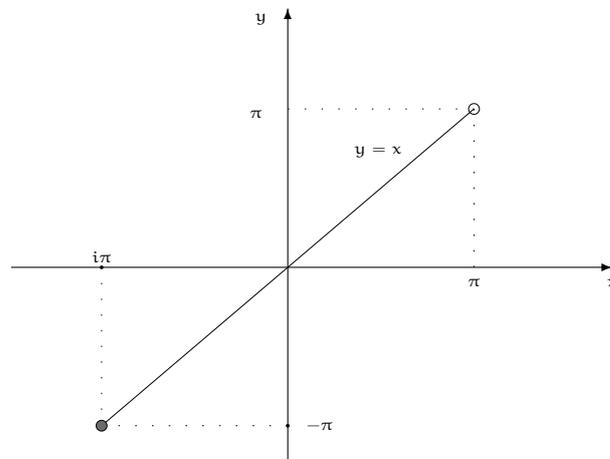
Estude a série de Fourier associada à função f .

Resolução:

Notemos que, neste caso,

$$L = \pi.$$

A representação geométrica do gráfico da função f , no período fundamental, é dado pela figura abaixo.



Notemos que $f \in SC_{\text{per}}(2\pi)$ e a função \underline{f}' é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Observemos que

$$f'(x) = 1, \quad \text{para cada } x \in (-\pi, \pi).$$

Logo, teremos que $f' \in SC_{\text{per}}(2\pi)$ e assim, do Teorema (7.307), segue que a série de Fourier associada à função \underline{f} , converge pontualmente, para

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Notemos que a função \underline{f} é uma função ímpar em $(-\pi, \pi)$.

Logo, do item 4. da Observação (7.180) (veja (7.185)), segue que

$$a_n = 0, \quad \text{para cada } n \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \quad (7.393)$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} b_n &\stackrel{(7.176)}{=} \text{com } L=\pi \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx \\ &\stackrel{f \text{ é função ímpar}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) \, dx \\ &\left\langle \begin{array}{l} u = x, \text{ logo } du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(nx), \text{ logo } v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array} \right\rangle \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n} \, dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[-\pi \frac{\overbrace{\cos(n\pi)}^{=(-1)^n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}}}{n} + \frac{\overbrace{\text{sen}(n x)}{=0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}}}{n^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.
\end{aligned} \tag{7.394}$$

Portanto, substituindo (7.394) em (7.393), obteremos:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n} \text{sen}(n x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que se

$$x_0 \neq k\pi, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z},$$

então a função f será contínua em x_0 .

Logo, nesses pontos, a série de Fourier associada à função f , no ponto x_0 , convergirá para a $f(x_0)$, isto é

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n} \text{sen}(n x_0).$$

□

7.7 Notas Históricas

A seguir vamos fornecer um breve relato do desenvolvimento da teoria associada às séries de Fourier.

1. d'Alembert (1747) e Euler (1748) encontraram solução geral para a equação da onda em \mathbb{R}^2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \tag{7.395}$$

dada por:

$$u(t, x) \doteq F(x+t) + G(x-t), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \tag{7.396}$$

onde $F, G \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

2. D. Bernoulli (1753) afirmou que a equação da onda (7.395), deveria ter solução da forma (caso $L \doteq \pi$):

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(n x) \cos(n t), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]. \tag{7.397}$$

3. Lagrange (1759) afirmou que a equação da onda em $[0, 1]$ (caso $L \doteq 1$), com dado inicial dado pela função f , e velocidade inicial dada pela função g , deveria ser dada por:

$$u(t, x) = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{sen}(n \pi y) \text{sen}(n \pi x) \cos(n \pi t) \right] f(y) dy \\ + 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \text{sen}(n \pi y) \text{sen}(n \pi x) \text{sen}(n \pi t) \right] g(y) dy, \quad (7.398)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, 1]$.

Ovservação:

Se fizermos $t = 0$ em (7.398) e trocarmos a integral com a série de funções (precisaríamos garantir que podemos fazer isso), obteremos:

$$f(x) = u(0, x) \stackrel{t=0 \text{ em (7.398)}}{=} 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{sen}(n \pi y) \text{sen}(n \pi x) \overbrace{\cos(n \pi 0)}^{=1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \right] f(y) dy \\ + 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \text{sen}(n \pi y) \text{sen}(n \pi x) \underbrace{\text{sen}(n \pi 0)}_{=0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \right] g(y) dy \\ = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{sen}(n \pi y) \text{sen}(n \pi x) \right] f(y) dy \\ \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\int_0^1 \text{sen}(n \pi y) f(y) dy}_{\text{n-ésimo coeficiente de Fourier}} \right] \text{sen}(n \pi x),$$

para cada $x \in [0, 1]$.

4. Fourier (1811) obteve os coeficientes de Fourier associados à algumas funções e escreveu as séries de senos e cossenos de várias funções.

Segundo consta, ele dizia que qualquer função periódica poderia ser expressa por uma tal série.

Mais tarde foi mostrado que isso, em geral, **não** é verdade !

5. Dirichlet (1829 e 1837) foi um dos primeiros a reconhecer que nem toda função periódica poderia ser representada por uma série de Fourier.

Produziu os primeiros critérios de convergência das séries de Fourier.

6. Riemann (século XIX) propôs encontrar condições necessárias e suficientes para que uma função pudesse ser representada por uma série de Fourier.

Como estas questões estavam ligadas a integração de funções, neste instante, começa o desenvolvimento mais profundo da teoria de integração de Riemann.

7. de Bois e Reymond (1876) construíram uma função contínua, cuja série de Fourier divergia em um ponto.

Mais tarde, construíram uma outra para o qual a série de Fourier divergia num conjunto denso de \mathbb{R} .

Féjér (1909) exibiu exemplos, relacionados o problema acima, mais simples.

8. Dini (1880) obteve critérios para a convergência da série de Fourier, conhecido como teste ou critério de Dini.

9. Jordan (1881) demonstrou outro critério de convergência da série de Fourier, denominado teste ou critério de Jordan.

Observação: Todos estes trabalhos, e muitos outros, conduziram a uma melhor compreensão das funções descontínuas e propiciaram os trabalhos de Harnack, Hankel, Borel e Lebesgue, culminando com a introdução de um novo conceito de integração, a saber, a integral de Lebesgue.

Assim começa a teoria moderna das séries de Fourier.

10. Riesz e Fischer (1907) mostraram a convergência da série de Fourier na norma $\|\cdot\|_2$, para funções, cujo módulo, ao quadrado, são Lebesgue-integráveis em $[0, L]$.

11. Carleson (1966) mostrou que para uma função, cujo módulo ao quadrado é Lebesgue-integrável em $[0, L]$, a série de Fourier associada à mesma converge, exceto num conjunto de medida de Lebesgue zero, para a própria função.

7.8 Exercícios

Capítulo 8

Aplicação de Série de Fourier às EDP's

Faremos uso da teoria das séries de Fourier desenvolvida no capítulo anterior, para resolver alguns problemas aplicados relacionados com algumas EDP's importantes.

Na verdade trataremos de alguns problemas físicos que envolvem EDP's (Equações Diferenciais Parciais).

8.1 O Problema da Condução do Calor em um Fio

O objetivo é encontrar a temperatura em cada ponto de um fio finito, cujo comprimento é igual

$$L \in (0, \infty),$$

os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo no instante inicial $t = 0$, sendo o que o fio está isolado termicamente (imagine que o fio está dentro de um isopor) e cujas extremidades são mantidas a 0°C , ao longo de todo o processo.

Se imaginarmos que o fio é o intervalo

$$[0, L] \subseteq \mathbb{R}$$

e que $u = u(t, x)$, nos fornece a temperatura no ponto x do fio, no instante t , para cada $x \in [0, L]$ e $t \in [0, \infty)$, então, matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar uma função

$$u = u(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L],$$

que satisfaz:

Matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar um função

$$u = u(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L],$$

que venha satisfazer o seguinte problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \quad (8.1)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (8.2)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (8.3)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}). \quad (8.4)$$

A condição (8.1) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, a temperatura no ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $f(x)$ °C.

A condição (8.2) nos diz que a temperatura nos extremos do fio igual a 0 °C, ao longo de todo o processo, isto é, para $t \in [0, \infty)$.

A Equação Diferencial Parcial (8.1) é denominada **Equação do Calor**.

A constante $\alpha \in (0, \infty)$ está relacionada com a condutibilidade térmica do fio, isto é, depende do material que o fio é feito.

No nosso caso, vamos supor que

$$\alpha = 1,$$

para facilitarmos as contas que iremos tratar.

Aplicando o método da separação de variáveis desenvolvido no início do Capítulo anterior (veja (7.11)) obtemos que a função $u = u(t, x)$, deverá ter a seguinte forma (veja (7.47)):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \quad (8.5)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Fazendo $t = 0$ em (8.5) e utilizando (8.2), obteremos:

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{(8.2)}{=} u(0, x) \\ &\stackrel{(8.5) \text{ com } t=0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \end{aligned} \quad (8.6)$$

para cada $x \in [0, L]$, isto é, precisamos saber expandir a função f (o dado inicial) em uma série de Fourier (em senos), em $[0, L]$.

Observemos que o lado direito de (8.6) (ou seja, a série de Fourier), caso seja convergente, definirá uma função ímpar e $2L$ -periódica.

Logo, precisamos estender a função f , de modo ímpar e $2L$ -periódicamente, a \mathbb{R} .

Notemos que para estender, de modo ímpar, a função f ao intervalo $[-L, L]$, basta considerarmos a função, que denotaremos por, $F : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$F(x) \doteq \begin{cases} f(x), & \text{para cada } x \in [0, L] \\ -f(-x), & \text{para cada } x \in [-L, 0] \end{cases}. \quad (8.7)$$

Notemos que (condições de compatibilidade):

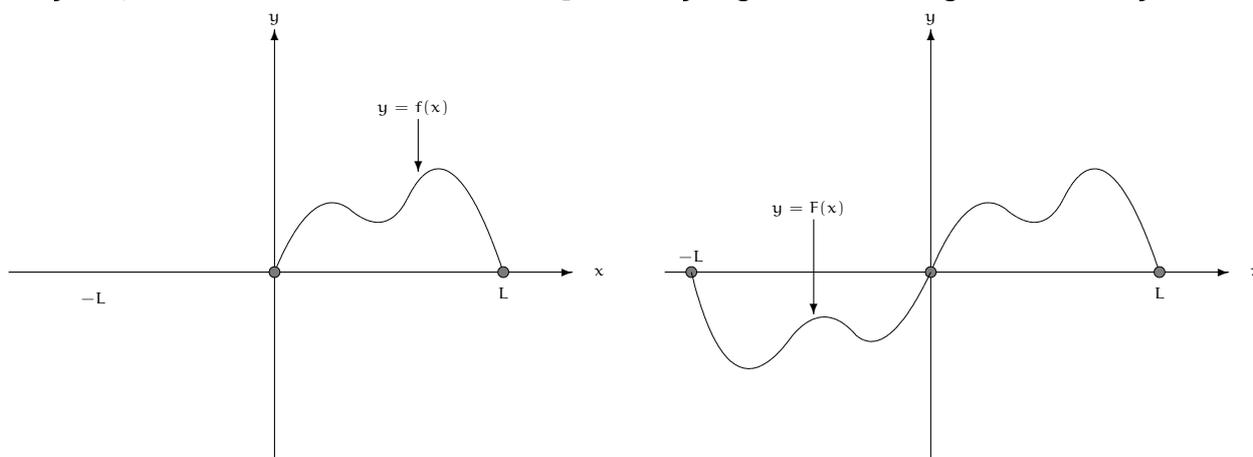
$$\begin{aligned} f(0) &\stackrel{x=0 \text{ em (8.2)}}{=} u(0, 0) \\ &\stackrel{t=0 \text{ em (8.3)}}{=} 0 \\ &\stackrel{t=0 \text{ em (8.3)}}{=} u(0, L) \\ &\stackrel{x=L \text{ em (8.2)}}{=} f(L), \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(0) = f(L) = 0. \quad (8.8)$$

Logo como a função f é contínua em $[0, L]$ e satisfaz (8.8), temos que a extensão ímpar da mesma ao intervalo $[-L, L]$, isto é, a função F , dada por (8.7), será uma função contínua em $[-L, L]$.

À esquerda, na figura abaixo, temos ilustrado a representação geométrica do gráfico da função f , e à direita temos ilustrado a representação geométrica do gráfico da função F .



Notemos que

$$\begin{aligned} F(-L) &\stackrel{(8.7)}{=} -f[-(-L)] \\ &= -f(L) \\ &\stackrel{(8.7)}{=} F(L). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} F(-L) &= F(L) \\ &\stackrel{(8.7)}{=} f(L) \\ &\stackrel{(8.8)}{=} 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(-L) = F(L) = 0. \quad (8.9)$$

Portanto, de (8.9), podemos considerar uma extensão (na verdade, será única) $2L$ -periódica da função \underline{f} à \mathbb{R} , que indicaremos também por \underline{F} , ou seja, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, será dada por

$$F(x) = F(x + 2kL), \quad (8.10)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ é escolhido de modo que

$$x + 2kL \in [-L, L]. \quad (8.11)$$

Como $f \in C([0, L]; \mathbb{R})$ e satisfaz (8.8), então teremos que sua extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R} , isto é, a função \underline{F} , definida por (8.7) e (8.10), satisfaz $F \in C_{\text{per}}(2L; \mathbb{R})$ e será uma função ímpar.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo a série de Fourier associada à função \underline{F} (e portanto da função \underline{f}) terá a seguinte forma:

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (8.12)$$

onde

$$a_m = 0, \quad \text{para cada } m \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

pois a função \underline{F} é uma função ímpar (veja o item 4. da Observação (7.180), ou ainda, (7.185) e, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} b_n &\stackrel{(7.176)}{=} \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{e^{F(x)}}_{\text{é ímpar}} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{é ímpar}} dx \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{será par}} \\ &\stackrel{\text{item 4. da Observação (7.180), ou ainda, (7.186)}}{=} \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &\stackrel{(8.7)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_m = 0, \quad \text{para cada } m \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad (8.13)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \quad (8.14)$$

Logo, substituindo (8.13) em (8.12), segue que a série de Fourier, associada à função \underline{f} , terá a seguinte forma:

$$S[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad (8.15)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que o coeficiente b_n será dado por (8.14).

Portanto, voltando a (8.5), segue que, uma candidata a solução do problema (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), será dada por:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad (8.16)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$b_n \doteq \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx. \quad (8.17)$$

Para completar precisamos mostrar que a função $u = u(t, x)$, dada por (8.16), é realmente solução do problema (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), isto é:

- i. a série de funções (8.16) converge, para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$;
- ii. a série de funções (8.16) pode ser derivada, termo a termo, duas vezes em relação à \underline{x} e uma vez, relação à \underline{t} , em $(0, \infty) \times (0, L)$;
- iii. a função $u = u(t, x)$, dada por (8.16), satisfaz (8.1), (8.2), (8.3) e (8.4).

Na verdade mostraremos que

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$$

e que a série de funções (8.16), pode ser derivada, termo a termo, quantas vezes precisarmos, tanto em relação à \underline{t} , quanto em relação à \underline{x} , em

$$(0, \infty) \times [0, L],$$

se $f \in C([0, L]; \mathbb{R})$ satisfaz (8.8), é diferenciável em $[0, L]$, exceto em um número finito de pontos de $[0, L]$, de modo que $f' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$.

Notemos que, neste caso, a extensão ímpar e $2L$ -periódica da função \underline{f} , à \mathbb{R} , isto é, função \underline{F} , dada por (8.7) e (8.10), irá satisfazer as seguintes condições: $F \in C_{\text{per}}(2L)$ é diferenciável em \mathbb{R} , exceto um número finito de pontos de $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, e $F' \in SC_{\text{per}}(2L)$.

Mais especificamente, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 8.18 *Suponhamos que $f \in C([0, L]; \mathbb{R})$, satisfaz (8.8), é diferenciável em $[0, L]$, exceto um número finito de pontos de $[0, L]$, e $f' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$.*

Então a série de funções (8.16), converge uniformemente em $[0, \infty) \times [0, L]$, para uma função \underline{u} , de modo que

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}), \quad (8.19)$$

e é solução de (8.1), (8.2), (8.3) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, o coeficiente \underline{b}_n , será dado por (8.17)), ou seja,

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right),$$

ou ainda,

$$u(t, x) \doteq \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^L f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} y \right) dy \right] e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \quad (8.20)$$

Demonstração:

Mostremos, primeiramente que a série de funções (8.16) (ou (8.20)) converge uniformemente em $[0, \infty) \times [0, L]$.

Para isto, observemos que, do Teorema (7.364), segue que a série de Fourier associada à função \underline{f} (na verdade, à sua extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R}), converge uniformemente para a função \underline{f} , isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R},$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, o coeficiente \underline{b}_n é dados por (8.17).

Logo, fazendo $t = 0$ em (8.16), segue que a série de funções (8.16) (ou (8.20)) converge uniformemente para a função \underline{f} em \mathbb{R} , em particular,

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L],$$

ou seja, a função \underline{u} , dada por (8.16) (ou (8.20)), satisfaz (8.2).

Notemos também que, do Lema de Riemann-Lebesgue (isto é, do Corolário (7.267)) segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Em particular, de Análise I, segue que a sequência numérica $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será limitada, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|b_n| \leq M, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (8.21)$$

Mostremos agora que a série de funções (8.16) (ou (8.20)), converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L].$$

De fato, notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, teremos:

$$\begin{aligned} \left| b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right| &\leq |b_n| \underbrace{\left| e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \right|}_{\leq 1, \text{ pois } t \geq 0} \underbrace{\left| \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right|}_{\leq 1} \\ &\leq |b_n|. \end{aligned}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ é convergente em \mathbb{R} (veja a Observação (7.372)) segue, do teste M.de Weierstrass de Análise II, segue que a série de funções (8.16) (ou (8.20)), converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L].$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$(t, x) \mapsto b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right)$$

é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$.

Logo, de Análise II, segue que

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}), \quad (8.22)$$

Afirmamos que

$$u \in C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$$

e que a série de funções (8.16) (ou (8.20)), pode ser derivada parcialmente (a qualquer ordem), em relação à t ou, em relação à x , termo a termo, em

$$(0, \infty) \times [0, L].$$

Para isto, para $t_0 \in (0, \infty)$ fixado, e para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a função $u_n : [t_0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u_n(t, x) \doteq b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \quad (8.23)$$

para cada $(t, x) \in [t_0, \infty) \times [0, L]$.

Com isto temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$u_n \in C^\infty([t_0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}).$$

Observemos também que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) &\stackrel{(9.28)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left[b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\
 &= b_n \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \\
 &= -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \tag{8.24}
 \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [t_0, \infty) \times [0, L]$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, e $(t, x) \in [t_0, \infty) \times [0, L]$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) \right| &\stackrel{(8.24)}{=} \left| -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right| \\
 &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \underbrace{|b_n|}_{\stackrel{(8.21)}{\leq} M} \underbrace{e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}}_{\leq e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}, \text{ para todo } t \in [t_0, \infty)} \underbrace{\left| \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right|}_{\leq 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}} \\
 &\leq M \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0} = s_n, \tag{8.25}
 \end{aligned}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$s_n \doteq M \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}. \tag{8.26}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{d_n} &\stackrel{(8.26)}{=} \stackrel{(9.27)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}}{\frac{1}{n^2}} \\
 &= M \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2}}{e^{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
 &= \frac{M \pi^2}{L^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{e^{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
 &= \frac{M \pi^2}{L^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{L'Hôpital, caso } \infty}{=} \frac{M \pi^2}{L^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} [x^4]}{\frac{d}{dx} \left[e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0} \right]} \\
&= \frac{M \pi^2}{L^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{\frac{2x\pi^2}{L^2} t_0 e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
&= \frac{3M}{2t_0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
& \stackrel{\text{L'Hôpital, caso } \infty}{=} \frac{3M}{2t_0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} [x^2]}{\frac{d}{dx} \left[e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0} \right]} \\
&= \frac{3M}{2t_0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\frac{2x\pi^2}{L^2} t_0 e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
&= \frac{3ML^2}{2\pi^2 t_0^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
& \stackrel{\text{Exercício}}{=} 0.
\end{aligned}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente segue, do critério da razão por limites, para séries numéricas cujos termos são não negativos, visto em Análise I, que série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n \stackrel{(8.26)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} M \frac{n^2 \pi^2}{L^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0} \quad (8.27)$$

é convergente em \mathbb{R} .

Logo, de (8.25), (8.27) e do teste M.de Weierstrass visto em Análise II, segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) \stackrel{(8.24)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \text{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right)$$

converge uniformemente em

$$[t_0, \infty) \times [0, L].$$

Como a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \text{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right)$$

converge em cada ponto de $[0, \infty) \times [0, L]$ segue, de um resultado de Análise II, que a série de funções (8.16) (ou (8.20)), pode ser derivada parcialmente, em relação à t , termo a termo, em $[t_0, \infty) \times [0, L]$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &\stackrel{(8.16)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \\ &= -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \end{aligned} \quad (8.28)$$

para cada $(t, x) \in [t_0, \infty) \times [0, L]$.

Em particular, notemos que, (8.28), implicará que a função $\frac{\partial u}{\partial t}$ é contínua em $[t_0, \infty) \times [0, L]$, para cada $t_0 \in (0, \infty)$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (8.29)$$

De modo semelhante, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado e $(t, x) \in [t_0, \infty) \times [0, L]$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) &\stackrel{(9.28)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left[b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= b_n \left(\frac{n \pi}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \\ &= \frac{n \pi}{L} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \left(\frac{n \pi}{L} x \right), \end{aligned} \quad (8.30)$$

assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) \right| &\stackrel{(8.30)}{=} \left| -\frac{n \pi}{L} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right| \\ &= \frac{n \pi}{L} \underbrace{|b_n|}_{\stackrel{(8.21)}{\leq} M} \underbrace{e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}}_{\leq e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \underbrace{\left| \cos \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right|}_{\leq 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}} \\ &\leq \frac{M \pi n}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0} = r_n, \end{aligned} \quad (8.31)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$r_n \doteq \frac{M \pi n}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}. \quad (8.32)$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{d_n} &\stackrel{(8.32) \text{ e } (9.27)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M \pi n}{L} \frac{e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}}{\frac{1}{n^2}} \\
 &= \frac{M \pi}{L} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{e^{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
 &= \frac{M \pi}{L} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
 &\stackrel{\text{L'Hôpital, caso } \frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{M \pi}{L} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} [x^3]}{\frac{d}{dx} \left[e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0} \right]} \\
 &= \frac{M \pi}{L} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{\frac{2x \pi^2}{L^2} t_0 e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
 &= \frac{3ML}{2\pi t_0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
 &\stackrel{\text{L'Hôpital, caso } \frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{3ML}{2\pi t_0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} [x]}{\frac{d}{dx} \left[e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0} \right]} \\
 &= \frac{3ML}{2\pi t_0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x \frac{\pi^2}{L^2} t_0 e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
 &= \frac{3ML^3}{4\pi^3 t_0^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x e^{\frac{x^2 \pi^2}{L^2} t_0}} \\
 &\stackrel{\text{Exercício}}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente segue, do critério da razão por limites, para séries numéricas cujos termos são não negativos, segue que série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \frac{n\pi}{L} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t_0}$$

é convergente em \mathbb{R} .

Logo, do teste M.de Weierstrass, de Análise II, segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) \stackrel{(8.30)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

converge uniformemente em

$$[t_0, \infty) \times [0, L].$$

Como a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

converge em $[0, \infty) \times [0, L]$ segue, de um resultado de Análise II, que a série de funções (8.16) (ou (8.20)), pode ser derivada parcial, em relação a x , termo a termo, em $[t_0, \infty) \times [0, L]$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &\stackrel{(8.16)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \pi}{L} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right), \end{aligned} \quad (8.33)$$

para cada $(t, x) \in (t_0, \infty) \times [0, L]$.

Em particular, notemos que, (8.33), implicará que a função $\frac{\partial u}{\partial x}$ é contínua em $[t_0, \infty) \times [0, L]$, para cada $t_0 \in (0, \infty)$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \in C((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (8.34)$$

Logo, de (8.120), (8.29) e (8.34), segue que

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^1((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \quad (8.35)$$

e que a série de funções (8.16) (ou (8.20)), pode ser derivada parcialmente, em relação à t ou, em relação à x , termo a termo, em

$$(0, \infty) \times [0, L].$$

De modo análogo mostra-se que

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$$

e que a série de funções (8.16) (ou (8.20)), pode ser derivada parcialmente, em relação à t ou, em relação à x , a qualquer ordem, termo a termo, em

$$(0, \infty) \times [0, L],$$

isto é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+m} u}{\partial t^k \chi^m}(t, x) &\stackrel{(8.16)}{=} \frac{\partial^{k+m} u}{\partial t^k \chi^m} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial t^k \chi^m} \left[b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right], \end{aligned}$$

para $(t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$ e $k, m \in \mathbb{N}$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Finalmente, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &\stackrel{(8.16)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x^2} \left[b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \left(\frac{n \pi}{L} \right) \cos \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 \left[-\operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right). \end{aligned} \tag{8.36}$$

Utilizando-se (8.28) e (8.36), obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &\stackrel{(8.28) \text{ e } (8.36)}{=} -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \\ &\quad - \left[-\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi}{L} x \right) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$, isto é, a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por (8.16) (ou (8.20)), satisfaz a EDP (8.1), em $(0, \infty) \times [0, L]$.

Além disso, para cada $t \in [0, \infty)$, temos:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &\stackrel{(8.16)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} 0\right)}_{=0} \\ &= 0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} L\right)}_{=0} \\ &\stackrel{(8.16)}{=} \text{com } x=L \quad u(t, L), \end{aligned}$$

isto é, a função $u = u(t, x)$, dada por (8.16) (ou (8.20)), satisfaz a condição (8.3).

Conclusão: A função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L] \quad (8.37)$$

é uma solução do problema (8.1), (8.2), (8.3) e, além disso,

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}),$$

onde os coeficientes

$$b_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

são os coeficientes de Fourier da expansão ímpar e $2L$ -periódica da função f à \mathbb{R} , ou seja,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx. \quad (8.38)$$

□

Observação 8.39

1. *Pode-se mostrar que a solução, dada por (8.37), é a única solução do problema na classe (8.4).*
2. *De modo semelhante podemos tratar do problema de encontrar a temperatura em cada ponto de um fio finito, de comprimento*

$$L \in (0, \infty),$$

os quais conhecemos a temperatura em cada ponto do mesmo, no instante inicial, isto é, quando $t = 0$, supondo que as extremidades do mesmo não trocam calor com o meio ambiente, ao longo de todo o processo.

Se imaginarmos que o fio é o intervalo $[0, L] \subseteq \mathbb{R}$ e que a função $u = u(t, x)$ nos fornece a temperatura no ponto x do fio, no instante $t \in (0, \infty)$ então, matematicamente, o problema acima corresponde a encontrar uma função $u = u(t, x)$, para $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, que satisfaça:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (8.40)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (8.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (8.42)$$

$$u \in C^1([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}). \quad (8.43)$$

A condição (8.41) nos diz que a temperatura no ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $f(x)^\circ \text{C}$.

A condição (8.42) nos diz que os extremos não trocam calor com o meio ambiente.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

No nosso caso, vamos supor que

$$\alpha = 1,$$

para facilitarmos as contas.

Aplicando o método da separação de variáveis (como fizemos no item 2. da Observação (7.45) - veja (7.80)), podemos mostrar que uma candidata a solução do problema acima é a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u(t, x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \quad (8.44)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, onde

$$a_n, \quad \text{para cada } n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

são os coeficientes da extensão par, $2L$ -periódica da função f à \mathbb{R} .

Neste caso, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, teremos (veja o item 2 da Observação (7.180), ou ainda, (7.183)):

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx. \quad (8.45)$$

Com isto podemos provar o seguinte resultado, cuja demonstração é análoga ao caso tratado acima e será deixada como exercício para o leitor.

Teorema 8.46 *Suponhamos que $f \in C([0, L]; \mathbb{R})$ é uma função diferenciável, exceto um número finito de pontos $[0, L]$, e além disso $f' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$.*

Então a série de funções (8.44) converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L]$$

para uma função

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$$

que é solução de (8.40), (8.41), (8.42), onde os coeficientes

$$a_n, \quad \text{para cada } n \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

são dados por (8.45).

Observação 8.47 *Pode-se mostrar que, como no caso anterior, que a solução (8.44) é única.*

A seguir aplicaremos as ideias acima a um exemplo onde a temperatura inicial no fio, f , é dada.

Exemplo 8.48 *Determine uma solução $u = u(t, x)$ do problema:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi), \quad (8.49)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, \pi], \quad (8.50)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (8.51)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, \pi); \mathbb{R}), \quad (8.52)$$

onde $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

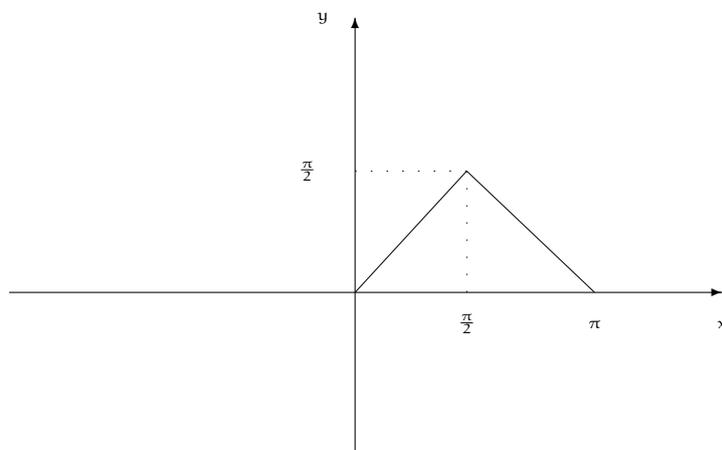
$$f(x) \doteq \begin{cases} x, & \text{para cada } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & \text{para cada } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}. \quad (8.53)$$

Resolução:

Neste caso temos que

$$L \doteq \pi.$$

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo.



Consideremos a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, como sendo a extensão ímpar, 2π -periódica da função f à \mathbb{R} .

Como

$$f(0) = f(\pi) = 0,$$

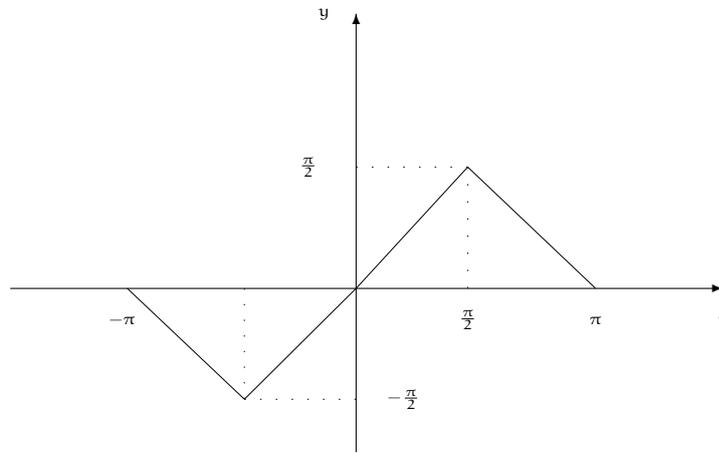
das observações feitas anteriormente (veja (8.7) e o que segue a esta) segue que a função \underline{F} será contínua \mathbb{R} .

Observemos que a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, será dada por:

$$F(x) = \begin{cases} -x - \pi, & \text{para cada } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ -x, & \text{para cada } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \\ x, & \text{para cada } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & \text{para cada } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases} \quad (8.54)$$

e satisfazendo $F(x + 2\pi) = F(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

A representação geométrica do gráfico da função \underline{F} , no período fundamental $[\pi, \pi]$, é dada pela figura abaixo.



Como vimos anteriormente (veja (8.37)), uma candidata a solução a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \\
 &\stackrel{L=\pi}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{\pi^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{\pi} x\right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(n x), \tag{8.55}
 \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned}
 b_n &\stackrel{(8.17)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx \\
 &\stackrel{L=\pi}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{\pi} x\right) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(n x) dx \\
 &= 0 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \operatorname{sen}(n x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(n x) dx \right] \\
 &\stackrel{(8.53)}{=} \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(n x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen}(n x) dx \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(n x) dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(n x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \operatorname{sen}(n x) dx \right]. \tag{8.56}
 \end{aligned}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen}(n x) dx &\stackrel{\text{integração por partes}}{=} \left\langle \begin{array}{l} u = x, \text{ logo: } du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(n x) dx, \text{ logo: } v = -\frac{\cos(n x)}{n} \end{array} \right\rangle \\ &= -x \frac{\cos(n x)}{n} - \int -\frac{\cos(n x)}{n} dx \\ &= -x \frac{\cos(n x)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(n x)}{n^2}. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Logo, do Teorema fundamental do Cálculo, segue que:

$$\begin{aligned} b_n &\stackrel{(8.56)}{=} \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(n x) dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(n x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \operatorname{sen}(n x) dx \right] \\ &\stackrel{(8.57)}{=} \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos(n x)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(n x)}{n^2} \right] \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \left[-\pi \frac{\cos(n x)}{n} \right] \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \right. \\ &\quad \left. + \left[-x \frac{\cos(n x)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(n x)}{n^2} \right] \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n} + \frac{\operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n^2} - \left[-0 \frac{\cos(n 0)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(n 0)}{n^2} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. - \pi \left[\frac{\cos(n \pi)}{n} - \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[-\pi \frac{\cos(n \pi)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(n \pi)}{n^2} - \left[-\frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n} + \frac{\operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n^2} \right] \right] \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ -\pi \left[\frac{\cos(n \pi)}{n} - \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n} \right] - \pi \frac{\cos(n \pi)}{n} \right\} \\ &= \frac{2}{n} \left\{ -2(-1)^n + \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Observemos que:

$$\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{para cada } n \text{ par} \\ 0, & \text{para cada } n \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (8.59)$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (8.58) e (8.59), segue que

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{1}{n} [-2 - (-1)^n] \\ b_{2n+1} &= \frac{4}{n}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Com isto, segue que uma candidata a solução do problema (8.49), (8.50), (8.51) e (8.52), será:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(n x) \quad (8.61)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, onde os coeficientes b_n são dados por (8.60).

Observemos que $f \in C([0, \pi]; \mathbb{R})$ é uma função diferenciável, exceto um número finito de pontos de $[0, L]$ e que $f' \in SC([0, \pi]; \mathbb{R})$, pois

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{para cada } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -1, & \text{para cada } x \in \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}$$

e

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

Logo, do Teorema (8.18)), segue que a função $u = u(t, x)$, dada por (8.61), será a (única) solução do problema (8.49), (8.50), (8.51) e (8.52). □

Temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 8.62 *Determine uma função $u : [0, \infty) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ que seja solução do problema:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, \pi), \quad (8.63)$$

$$u(0, x) = x, \quad \text{para cada } x \in [0, \pi], \quad (8.64)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (8.65)$$

$$u \in C^1([0, \infty) \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, \pi); \mathbb{R}). \quad (8.66)$$

Resolução:

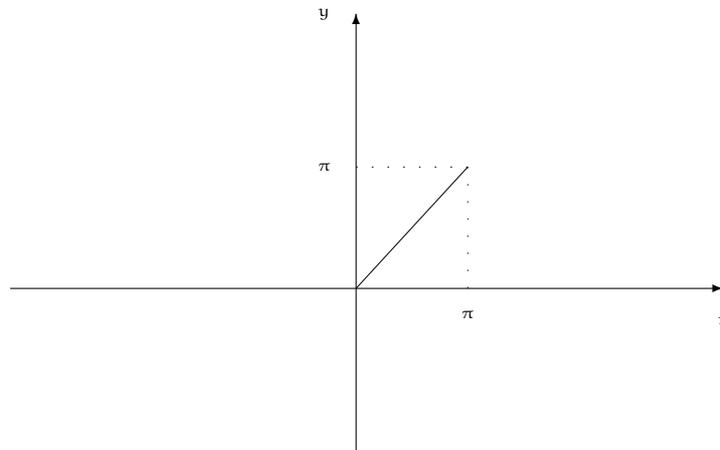
Neste caso, temos que

$$L \doteq \pi.$$

Notemos que o dado inicial (veja (9.64)), será a função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq x, \quad \text{para cada } x \in [0, \pi]. \quad (8.67)$$

A representação geométrica do gráfico da função f é dada pela figura abaixo.



Consideremos a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a extensão par, 2π -periódica da função f à \mathbb{R} .

Logo, das observações feitas anteriormente (veja (8.7) e o que segue a esta) segue que a função F será contínua \mathbb{R} .

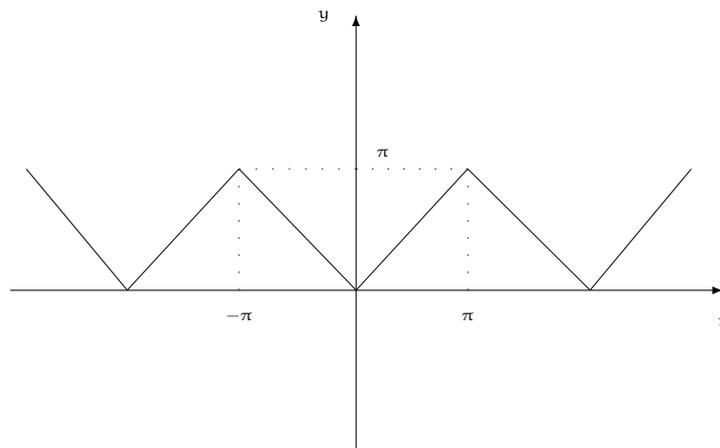
Observemos que a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, será dada por:

$$F(x) = |x|, \quad \text{para cada } x \in [-\pi, \pi], \quad (8.68)$$

satisfazendo

$$F(x + 2\pi) = F(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

A representação geométrica do gráfico da função F , no período fundamental $[-\pi, \pi]$, é dada pela figura abaixo.



Como vimos anteriormente (veja (8.44)), uma candidata a solução a função $u : [0, \infty) \times$

$[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \\
 &\stackrel{L=\pi}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{\pi^2} t} \cos\left(\frac{n \pi}{\pi} x\right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(n x), \tag{8.69}
 \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$, onde, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, a_n é o n -ésimo coeficiente da extensão par, 2π -periódica da função f à \mathbb{R} , ou seja, da função \bar{f} .

Logo para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 a_n &\stackrel{(8.45)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx \\
 &\stackrel{L=\pi}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n \pi}{\pi} x\right) dx \\
 &\stackrel{(8.67)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(n x) dx. \tag{8.70}
 \end{aligned}$$

Notemos que, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \int x \cos(n x) dx &\stackrel{\text{integração por partes}}{=} \left\langle \begin{array}{l} u = x, \text{ logo: } du = dx \\ dv = \cos(n x) dx, \text{ logo: } v = \frac{\text{sen}(n x)}{n} \end{array} \right\rangle \\
 &= x \frac{\text{sen}(n x)}{n} - \int \frac{\text{sen}(n x)}{n} dx \\
 &= x \frac{\text{sen}(n x)}{n} + \frac{\cos(n x)}{n^2}. \tag{8.71}
 \end{aligned}$$

Logo, de (8.70), (8.71) e do Teorema Fundamental do Cálculo, teremos:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) \, dx \\
 &\stackrel{(8.71)}{=} \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right] \Big|_{x=0}^{x=\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ \pi \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}^{=0 \text{ para todo } n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}}{n} + \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \left[0 \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(n0)}^{=0 \text{ para todo } n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}}{n} + \frac{\overbrace{\cos(n0)}^{=1 \text{ para todo } n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}}{n^2} \right] \right\} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\overbrace{\cos(n\pi)}^{=(-1)^n}}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right] \\
 &= \frac{2 [(-1)^n - 1]}{n^2 \pi}.
 \end{aligned} \tag{8.72}$$

Substituindo (8.72) em (8.69), obteremos

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \left[\begin{array}{l} 0, \text{ para } n \text{ par} \text{ e } -2, \text{ para } n \text{ ímpar} \\ \overbrace{(-1)^n - 1} \end{array} \right]}{n^2 \pi} e^{-n^2 t} \cos(nx) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4}{(2m+1)^2 \pi} e^{-(2m+1)^2 t} \cos[(2m+1)x],
 \end{aligned} \tag{8.73}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$.

Observemos que $f \in C([0, \pi]; \mathbb{R})$ é uma função diferenciável em $(0, \pi)$, pois

$$f'(x) = 1, \quad \text{para cada } x \in (0, \pi),$$

logo $f' \in SC([0, \pi]; \mathbb{R})$.

Logo, do Teorema (8.18)), segue que a função $u : [0, \infty) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por (8.73) é a (única) solução do nosso problema (9.62), (9.64), (8.65) e (8.66).

Na verdade

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}),$$

como afirma (9.18).

□

8.2 O Problema da Corda Vibrante

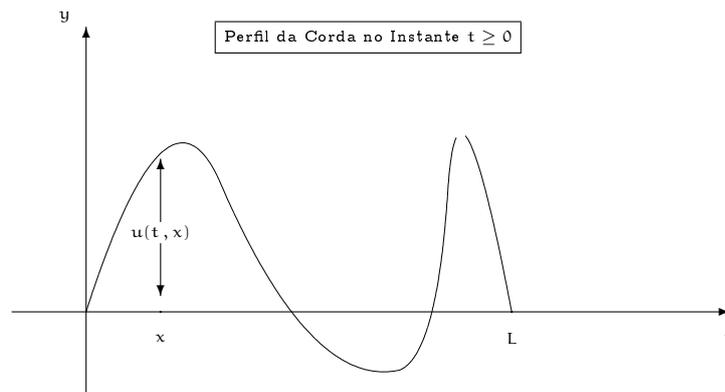
Consideraremos dois problemas associados às vibrações de uma corda finita num plano, a saber:

8.2.0.1 Corda Vibrante com as Extremidades Fixas

Trataremos a seguir do problema de encontrar a posição, em cada instante, de cada ponto de uma corda de comprimento L , que vibra num plano, cujas extremidades da mesma estão presas.

Denotemos a amplitude da vibração em cada instante, $t \in [0, \infty)$, em cada ponto, $x \in [0, L]$, da corda por $u = u(t, x)$.

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Então, um modelo matemático que está associado a esse problema será o de encontrar uma função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L], \quad (8.74)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (8.75)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (8.76)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (8.77)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}), \quad (8.78)$$

onde a constante c^2 , é uma constante que está relacionada com a tensão e a densidade da corda.

A condição (8.75) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, o deslocamento do ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $f(x)$.

A condição (8.76) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, a velocidade do deslocamento do ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $g(x)$.

A condição (8.77) nos diz que as extremidades do fio igual estão presas, ao longo de todo o processo, isto é, para $t \in [0, \infty)$.

A Equação Diferencial Parcial (8.74)) é denominada Equação da Onda.

Esta equação é um exemplo importante de uma classe de EDP's do tipo hiperbólica.

Para simplificarmos as contas, consideraremos o caso em que

$$c = 1.$$

O caso geral será deixado como exercício para o leitor.

Aplicaremos o método da separação de variáveis ao problema (8.74)), (8.75)), (8.76)), (8.77)) e (8.78), isto é, tentaremos soluções de (8.74)), (8.75)), (8.76)) e (8.77)) e (8.78), do tipo

$$u(t, x) = \psi(t) \phi(x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (8.79)$$

onde $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

Notemos que, supondo que as funções ψ e ϕ são duas vezes diferenciáveis em $(0, \infty)$ e $(0, L)$, respectivamente, então, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &\stackrel{(8.79)}{=} \frac{\partial}{\partial t} [\psi(t) \phi(x)] \\ &= \psi'(t) \phi(x), \end{aligned} \quad (8.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right] \\ &\stackrel{(8.80)}{=} \frac{\partial}{\partial t} [\psi'(t) \phi(x)] \\ &= \psi''(t) \phi(x), \end{aligned} \quad (8.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &\stackrel{(8.79)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [\psi(t) \phi(x)] \\ &= \psi(t) \phi'(x), \end{aligned} \quad (8.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] \\ &\stackrel{(8.82)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [\psi(t) \phi'(x)] \\ &= \psi(t) \phi''(x), \end{aligned} \quad (8.83)$$

Substituindo (8.81) e (8.83) em (8.74)), obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\ &\stackrel{(8.81) \text{ e } (8.83)}{=} \psi''(t) \phi(x) - \psi(t) \phi''(x), \end{aligned} \quad (8.84)$$

para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$.

Supondo que

$$u \neq 0,$$

ou seja, a solução trivial não nos interessará, deveremos ter

$$\psi(t), \phi(x) \neq 0,$$

para algum $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$.

Logo, dividindo (8.84), por

$$\psi(t) \phi(x),$$

obteremos:

$$\frac{\psi''(t) \phi(x) - \psi(t) \phi''(x)}{\psi(t) \phi(x)} = 0$$

$$\text{ou seja, } \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} - \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = 0,$$

$$\text{ou ainda, } \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}.$$

Portanto, deveremos ter:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$$

para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, ou seja, teremos:

$$\psi''(t) = -\lambda \psi(t), \quad \text{para cada } t \in (0, \infty), \quad (8.85)$$

$$\phi''(x) = -\lambda \phi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, L). \quad (8.86)$$

Notemos que, para cada $t \in [0, \infty)$, de (8.77)), segue:

$$\begin{aligned} \psi(t) \phi(0) &\stackrel{(8.79)}{=} u(t, 0) \\ &\stackrel{(8.76)}{=} 0 \\ &\stackrel{(8.76)}{=} u(t, L) \\ &\stackrel{(8.79)}{=} \psi(t) \phi(L), \end{aligned} \quad (8.87)$$

Como $\psi(t) \neq 0$, para algum $t \in [0, \infty)$ (pois caso contrário, teríamos $u(t, x) = 0$, para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$), dividindo ambos os membros da identidade (8.87), por $\psi(t)$, obteremos

$$\phi(0) = 0 = \phi(L). \quad (8.88)$$

Portanto, de (8.86) e (8.88), segue que a função $\underline{\phi}$, deverá satisfazer o seguinte problema (dito problema de valor de contorno):

$$\phi''(x) = -\lambda \phi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, L) \quad (8.89)$$

$$\phi(0) = \phi(L) = 0, \quad (8.90)$$

$$\phi \in C([0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, L); \mathbb{R}), \quad (8.91)$$

que já foi tratado anteriormente (veja (7.22)), (7.23)) e (7.24))).

Vimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda = \lambda_n \doteq \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

e que

$$\phi(x) = \phi_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad (8.92)$$

para cada $x \in [0, L]$.

Temos também que, a solução geral da EDO (8.85) (com $\lambda = \lambda_n \doteq \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$). será dada por:

$$\psi_n(t) = A \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) + B \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \quad (8.93)$$

para cada $t \in [0, \infty)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor (veja (7.36), com $x = t$ e $\underline{\lambda}$ como acima).

Assim, do método da separação de variáveis, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (8.93) e (8.92), temos que a função $u_n : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u_n(t, x) \doteq \psi_n(t) \phi_n(x),$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$ será da forma:

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &= \psi_n(t) \phi_n(x) \\ &\stackrel{(8.93) \text{ e } (8.92)}{=} \left[b_n^f \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) + B_n^g \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \right] \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \\ &= b_n^f \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + B_n^g \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \end{aligned} \quad (8.94)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, será um solução de (8.74) e (8.77)).

Logo, formalmente, temos que a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \phi_n(x) \\ &\stackrel{(8.94)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + B_n^g \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right], \end{aligned} \quad (8.95)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, será uma candidata a solução para o problema (8.74), (8.75), (8.76), (8.77) e (8.78).

Para que a função \underline{u} , dada por (8.95), seja solução do problema, ela deverá satisfazer a condição (8.75), ou seja:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(0, x) \\ &\stackrel{t=0 \text{ em (8.95)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^f \overbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L} 0\right)}{=1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n^g \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} 0\right)}{=0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^f \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \end{aligned} \quad (8.96)$$

para cada $x \in [0, L]$, isto é, a função \underline{f} (ou melhor, sua extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R}) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso, uma série em senos), ou seja:

$$b_n^f \stackrel{(7.186)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (8.97)$$

Por outro lado, para a função \underline{u} , dada por (8.95), satisfazer (8.76) (supondo que possamos derivar parcialmente, a série de funções, termo a termo, em relação a t), deveremos ter:

$$\begin{aligned} g(x) &\stackrel{(8.76)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) \\ &\stackrel{(8.95)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right] \right\} \Big|_{t=0} \\ &\stackrel{\text{cuidado!}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right] \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-b_n^f \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n^g \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-b_n^f \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} 0\right)}{=0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + B_n^g \overbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L} 0\right)}{=1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \frac{n\pi}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n^g \frac{n\pi}{L} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \end{aligned} \quad (8.98)$$

para cada $x \in [0, L]$, isto é, a função \underline{g} (ou melhor, sua extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R}) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso, uma série em senos), ou seja, para

cada $n \in \mathbb{N}$, deveremos ter:

$$\begin{aligned} B_n^g \frac{n\pi}{L} &= b_n^g \\ &\stackrel{(7.186)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \end{aligned} \quad (8.99)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} B_n^g &= \frac{2L}{L n \pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \\ &= \frac{2}{n \pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \end{aligned} \quad (8.100)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$

Portanto uma candidata $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, a solução do problema dado inicialmente, será:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + B_n^g \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] \quad (8.101)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) + B_n^g \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right\}, \quad (8.102)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que os coeficientes \underline{b}_n^f e \underline{B}_n^g , são dados por:

$$b_n^f \doteq \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx. \quad (8.103)$$

$$B_n^g \stackrel{(8.99)}{\doteq} \frac{L}{n \pi} b_n^g \quad (8.104)$$

$$\stackrel{(7.186)}{=} \frac{2}{n \pi} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad (8.105)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, \underline{b}_n denota o seguinte n -ésimo coeficiente de Fourier associado à função g , ou seja,

$$b_n^g \doteq \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx. \quad (8.106)$$

Com isto podemos enunciar e demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 8.107 *Suponhamos que $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$ é tal que a função f'' seja diferenciável, exceto em um número finito de pontos de $[0, L]$, com $f''' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$ e*

$g \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$ é tal que a função g' seja diferenciável, exceto em um número finito de pontos de $[0, L]$, com $g'' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$

$$f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0. \quad (8.108)$$

Então a série de funções (8.102), converge uniformemente em $[0, \infty) \times [0, L]$ para uma função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, que é solução de (8.74), (8.75), (8.76), (8.77) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes \underline{b}_n^f e \underline{B}_n^g , são dados por (8.103) e (8.105), respectivamente.

Demonstração:

Mostremos, primeiramente que a série de funções (8.102) converge uniformemente em $[0, \infty) \times [0, L]$.

Para isto, como $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$, do Teorema (7.364), segue que a série de Fourier associada à função \underline{f} (na verdade, à sua extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R}), converge uniformemente para a função \underline{f} , isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{uniformemente em } \mathbb{R}, \quad (8.109)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, o coeficiente \underline{b}_n^f é dado por (8.103).

Observação 8.110 Observemos que, a função \underline{f} tendo uma extensão ímpar e $2L$ -periódica à \mathbb{R} e sua extensão tiver derivada, então esta será uma função par e $2L$ -periódica, e se extensão da função \underline{f} , for duas vezes derivável, sua derivada segunda será uma função ímpar, daí porque precisamos das condições:

$$f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0.$$

Logo, fazendo $t = 0$ na série de funções (8.102), teremos:

$$\begin{aligned} u(0, x) &\stackrel{(8.102)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\overbrace{b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}0\right)}^{=1} + \overbrace{B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}0\right)}^{=0} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^f \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &\stackrel{(8.109)}{=} f(x), \end{aligned} \quad (8.111)$$

para cada $x \in [0, L]$, ou seja, a série de funções (8.102), em $t = 0$, converge uniformemente para a função \underline{f} em \mathbb{R} , em particular,

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L],$$

ou seja, a função \underline{u} , dada por (8.102), satisfaz (8.75).

Afirmamos que a série de funções (8.102), converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L].$$

Para isso, observemos que para

$$(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L] \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N},$$

teremos:

$$\begin{aligned} \left| \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| &\leq \left| b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right| \\ &\quad \times \left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \\ &\leq \left[\underbrace{|b_n^f|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}_{\leq 1} + \underbrace{|B_n^g|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}_{\leq 1} \right] \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right|}_{\leq 1} \\ &\leq |b_n^f| + |B_n^g|. \end{aligned} \tag{8.112}$$

Como $f''' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$ e $g'' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$ dos itens 3. e 2. da Observação (7.352), aplicados a função \underline{f} e \underline{g} , respectivamente, segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} |a_n^{f'''}| &\stackrel{(7.357)}{\leq} \left| -\frac{n^3 \pi^3}{L^3} b_n^f \right| \\ &= \frac{n^3 \pi^3}{L^3} |b_n^f|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |b_n^f| &\leq \frac{L^3}{n^3 \pi^3} |a_n^{f'''}| \\ |b_n^{g''}| &\stackrel{(7.355)}{\leq} \frac{1}{n} \left| -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n^g \right| \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} |b_n^g|, \end{aligned} \tag{8.113}$$

ou seja,

$$|b_n^g| \leq \frac{L^2}{n^2 \pi^2} |b_n^{g''}|, \tag{8.114}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0, L]$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n^f \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^{f'} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n^{f'} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \\ f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^{f''} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n^{f''} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \\ f'''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^{f'''} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n^{f'''} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^g \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \\ g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^{g'} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n^{g'} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \\ g''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^{g''} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n^{g''} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \end{aligned}$$

Além disso, como $f''', g'' \in \text{SC}([0, L]; \mathbb{R})$, do Lema de Riemann-Lebesgue (isto é, do Corolário (7.267)), segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{f'''} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{g''} = 0,$$

em particular, as sequências numérica $(a_n^{f'''})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n^{g''})_{n \in \mathbb{N}}$ serão limitadas, ou seja, existe $M, K \in (0, \infty)$ de modo que

$$|a_n^{f'''}| \leq M, \quad (8.115)$$

$$|b_n^{g''}| \leq K, \quad (8.116)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, de (8.113), (8.115) e (8.114) e (8.116), segue que

$$\begin{aligned} |b_n^f| &\stackrel{(8.113)}{\leq} \frac{L^3}{n^3 \pi^3} |a_n^{f''''}| \\ &\stackrel{(8.115)}{\leq} \frac{L^3}{n^3 \pi^3} M, \end{aligned} \quad (8.117)$$

$$\begin{aligned} |B_n^g| &\stackrel{(8.104)}{=} \left| \frac{1}{n} b_n^g \right| \\ &= \frac{1}{n} |b_n^g| \\ &\stackrel{(8.114)}{\leq} \frac{1}{n} \left(\frac{L^2}{n^2 \pi^2} |b_n^{g'''}| \right) \\ &\stackrel{(8.116)}{\leq} \frac{L^2}{n^3 \pi^3} K, \end{aligned} \quad (8.118)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, como consequência de (8.117), (8.118) e (8.112), segue que:

$$\begin{aligned} \left| \left[b_n^f \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) + B_n^g \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right| &\stackrel{(8.112)}{\leq} |b_n^f| + |B_n^g| \\ &\stackrel{(8.117), (8.118)}{\leq} \frac{L^3}{n^3 \pi^3} M + \frac{L^2}{n^3 \pi^2} K \\ &= \underbrace{\left(\frac{L^3 M}{\pi^3} + \frac{L^2 K}{\pi^2} \right)}_{\text{constante}} \frac{1}{n^3}, \end{aligned} \quad (8.119)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente em \mathbb{R} , segue do teste M.de Weierstrass (de Análise II), segue que a série de funções (8.102), converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L].$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$(t, x) \mapsto \left[b_n^f \cos \left(\frac{n\pi}{L} t \right) + B_n^g \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} t \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right),$$

é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$.

Como a convergência da série de funções (8.102) é uniforme em $[0, \infty) \times [0, L]$, de um resultado de Análise II, segue que

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (8.120)$$

Afirmamos que

$$u \in C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$$

e que a série de funções (8.102) pode ser derivada parcialmente, em relação à t ou, em relação à x , termo a termo, até a 2.a ordem, em

$$[0, \infty) \times [0, L].$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a função $u_n : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u_n(t, x) \doteq \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (8.121)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Com isto temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$u_n \in C^\infty([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}).$$

Observemos também que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) &\stackrel{(8.121)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &= \left[-b_n^f \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} + B_n^g \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned} \quad (8.122)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, teremos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) \right| &\stackrel{(8.122)}{=} \left| \left[-b_n^f \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} + B_n^g \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \\ &\leq \frac{n\pi}{L} \left[|b_n^f| \underbrace{\left| \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}_{\leq 1} + |B_n^g| \underbrace{\left| \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}_{\leq 1} \right] \underbrace{\left| \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right|}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{n\pi}{L} [|b_n^f| + |B_n^g|] \\ &\stackrel{(8.117), (8.118)}{\leq} \frac{n\pi}{L} \left[\frac{M L^3}{n^3 \pi^3} + \frac{K L^3}{n^3 \pi^3} \right] \\ &= \frac{(M+K)L^2}{\pi^2} \frac{1}{n^2}. \end{aligned} \quad (8.123)$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente em \mathbb{R} , segue do teste M.de Weierstrass (de Análise II), que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) \stackrel{(8.122)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-b_n^f \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} + B_n^g \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$$

converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L]. \quad (8.124)$$

Como a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$$

converge em cada ponto de $[0, \infty) \times [0, L]$ segue, de um resultado de Análise II, que a série de funções (8.102), pode ser derivada parcialmente, em relação à t , termo a termo, em $[0, \infty) \times [0, L]$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &\stackrel{(8.102)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &\stackrel{\text{Análise II}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-b_n^f \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} + B_n^g \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \end{aligned} \quad (8.125)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$(t, x) \mapsto \left[-b_n^f \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} + B_n^g \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$, e a convergência da série de funções (8.125) é uniforme em $[0, \infty) \times [0, L]$ (veja (8.124)), de um resultado de Análise II, segue que a função $\frac{\partial u}{\partial t}$ é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (8.126)$$

Observemos também que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) &\stackrel{(8.121)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &= \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{n\pi}{L} \end{aligned} \quad (8.127)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, e $(t, x) \in [t_0, \infty) \times [0, L]$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) \right| &\stackrel{(8.127)}{=} \left| \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{n\pi}{L} \right| \\
 &\leq \frac{n\pi}{L} \left[|b_n^f| \underbrace{\left| \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}_{\leq 1} + |B_n^g| \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}_{\leq 1} \right] \underbrace{\left| \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right|}_{\leq 1} \\
 &\leq \frac{n\pi}{L} [|b_n^f| + |B_n^g|] \\
 &\stackrel{(8.117), (8.118)}{\leq} \frac{n\pi}{L} \left[\frac{ML^3}{n^3\pi^3} + \frac{KL^3}{n^3\pi^3} \right] \\
 &= \frac{(M+K)L^2}{\pi^2} \frac{1}{n^2}. \tag{8.128}
 \end{aligned}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente em \mathbb{R} , segue do teste M.de Weierstrass (de Análise II), segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) \stackrel{(8.122)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{n\pi}{L} \right\}$$

converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L]. \tag{8.129}$$

Como a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$$

converge em cada ponto de $[0, \infty) \times [0, L]$ segue, de um resultado de Análise II, que a série de funções (8.102), pode ser derivada parcialmente, em relação à x , termo a termo, em $[0, \infty) \times [0, L]$, ou seja:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &\stackrel{(8.102)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\
 &\stackrel{\text{Teor. de Análise II}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{n\pi}{L} \right\} \tag{8.130}
 \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$(t, x) \mapsto \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{n\pi}{L}$$

é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$, e a convergência da série de funções (8.171) é uniforme em $[0, \infty) \times [0, L]$ (veja (8.129)), de um resultado de Análise II, segue que a função $\frac{\partial u}{\partial x}$ é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (8.131)$$

Portanto de (8.120), (8.126) e (8.131) segue que

$$u \in C^1([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (8.132)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(t, x) &\stackrel{(8.121)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-b_n^f \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} + B_n^g \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \left[-b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned} \quad (8.133)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, e $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, teremos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(t, x) \right| &\stackrel{(8.145)}{=} \left| \left[-b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \\ &\leq \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[|b_n^f| \overbrace{\left| \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}^{\leq 1} + |B_n^g| \overbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}^{\leq 1} \right] \overbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right|}^{\leq 1} \\ &\leq \frac{n^2 \pi^2}{L^2} [|b_n^f| + |B_n^g|] \\ &\stackrel{(8.113), (8.114)}{\leq} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[\frac{L^3}{n^3 \pi^3} |a_n^{f''''}| + \frac{L^2}{n^2 \pi^2} |b_n^{g''}| \right] \\ &= \frac{L}{\pi} [|a_n^{f''''}| + |b_n^{g''}|] \frac{1}{n} \doteq D_n. \end{aligned} \quad (8.134)$$

Afirmamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ é convergente em \mathbb{R} .

*

Para mostrarmos isto, lembremos que $f''' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$ logo da desigualdade Bessel, para o caso real (veja a Proposição (7.244)), segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{f'''}|^2 \leq \|f'''\|^2 < \infty. \quad (8.135)$$

Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$ segue, da desigualdade de Cauchy-Schwartz, que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} |a_n^{f'''}| \right) &\leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N |a_n^{f'''}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{convergente}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{f'''}|^2}_{\text{convergente, por (8.135)}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (8.136)$$

Logo a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{\pi} \left[\frac{1}{n} |a_n^{f'''}| \right]$ é convergente em \mathbb{R} .

De modo semelhante, utilizando o fato que $g'' \in C([0, L]; \mathbb{R})$ (na verdade a Proposição (7.244)), mostra-se que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |b_n^{g''}|$ é convergente em \mathbb{R} .

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Portanto a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ é convergente em \mathbb{R} e assim, de (8.134) e do teste M. de Weierstrass, de Análise II, segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(t, x) \stackrel{(8.145)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} - B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$$

converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L]. \quad (8.137)$$

Como a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{n\pi}{L} \right\}$$

converge em cada ponto de $[0, \infty) \times [0, L]$ segue, de Análise II, que a série de funções (8.102), pode ser derivada parcialmente à segunda ordem, em relação à t , termo a termo, em $[0, \infty) \times$

$[0, L]$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(t, x) &\stackrel{(8.102)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &\stackrel{\text{Análise II}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} - B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \quad (8.138) \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$(t, x) \mapsto \left[-b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} - B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$, e a convergência da série de funções (8.137) é uniforme em $[0, \infty) \times [0, L]$ (veja (8.124)), de um resultado de Análise II, segue que a função $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$, ou seja,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (8.139)$$

Observemos também que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_n}{\partial x^2}(t, x) &\stackrel{(8.121)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n\pi}{L} \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{n\pi}{L} \\ &= \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \left[-\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad (8.140) \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, e $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, teremos:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(t, x) \right| &\stackrel{(8.140)}{=} \left| \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right| \\
 &\leq \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[|b_n^f| \overbrace{\left| \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}^{\leq 1} + |B_n^g| \overbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right|}^{\leq 1} \right] \overbrace{\left| -\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right|}^{\leq 1} \\
 &\leq \frac{n^2 \pi^2}{L^2} [|b_n^f| + |B_n^g|] \\
 &\stackrel{(8.113), (8.114)}{\leq} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[\frac{L^3}{n^3 \pi^3} |a_n^{f''''}| + \frac{L^2}{n^2 \pi^2} |b_n^{g''}| \right] \\
 &= \frac{L}{\pi} [|a_n^{f''''}| + |b_n^{g''}|] \frac{1}{n} \doteq D_n. \tag{8.141}
 \end{aligned}$$

Como vimos em * (logo depois de (8.134)) a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ é convergente em \mathbb{R} .

Portanto a série numérica é $\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ é convergente em \mathbb{R} e assim, de (8.141) e do teste M. de Weierstrass visto em Análise II, segue que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(t, x) \stackrel{(8.145)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right\}$$

converge uniformemente em

$$[0, \infty) \times [0, L]. \tag{8.142}$$

Como a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{n\pi}{L} \right\}$$

converge em cada ponto de $[0, \infty) \times [0, L]$ segue, de um resultado de Análise II, que a série de funções (8.102), pode ser derivada parcialmente de segunda ordem, em relação à x , termo a termo, em $[0, \infty) \times [0, L]$, ou seja:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &\stackrel{(8.102)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\
 &\stackrel{\text{Teor. de Análise II}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right\} \tag{8.143}
 \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$(t, x) \mapsto \left[-b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} - B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$, e a convergência da série de funções (8.143) em $[0, \infty) \times [0, L]$ é uniforme em $[0, \infty) \times [0, L]$ (veja (8.124)), de um resultado de Análise II, segue que a função $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ é contínua em $[0, \infty) \times [0, L]$, ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (8.144)$$

Portanto de (8.120), (8.126), (8.131), (8.139) e (8.144) segue que

$$u \in C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}), \quad (8.145)$$

e a série de funções (7.120) pode ser derivada parcialmente até a 2.ª ordem, em relação a t e em relação a x em $[0, \infty) \times [0, L]$.

Para finalizar, observemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\ & \stackrel{(8.138), (8.143)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[-b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} - B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\} \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[b_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right] \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right\} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (8.146)$$

para $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Temos também, por (8.111)

$$u(0, x) = f(x),$$

para cada $t \in [0, \infty)$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &\stackrel{(8.125)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-b_n^f \overbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot 0\right)}{=0} \frac{n\pi}{L} + B_n^g \overbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot 0\right)}{=1} \frac{n\pi}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{b_n^f \frac{n\pi}{L}}_{\stackrel{(8.104)}{=} B_n^g} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right] \\ &\stackrel{(8.98)}{=} g(x), \end{aligned}$$

para cada $x \in [0, L]$.

Conclusão, a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por (8.102), é uma solução do problema (8.74), (8.75), (8.76), (8.77) e (8.78). □

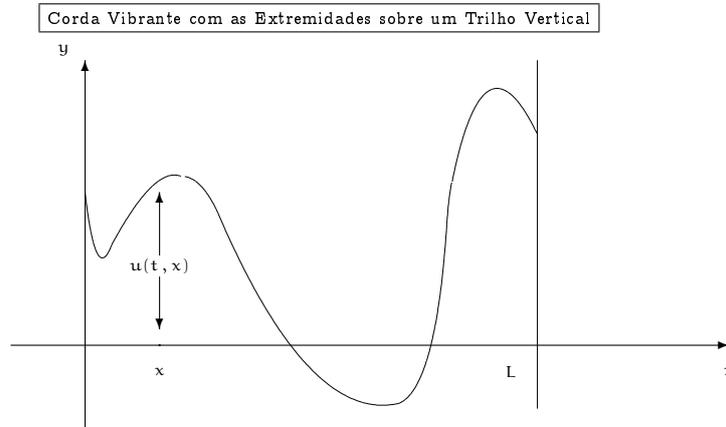
Observação 8.147

1. Pode-se mostrar que a solução, dada por (8.102), acima é única na classe (8.77).
2. Nas hipóteses do Teorema (8.107) (sobre as funções \underline{f} e \underline{g}) pedimos mais que nas hipóteses do Teorema (6.156).

8.2.0.2 Corda Vibrante com as Extremidades num Trilho Vertical

Podemos tratar, de modo semelhante, o problema de encontrar a posição, em cada instante, de uma corda de comprimento L , que vibra num plano, cujas extremidades estão variando em um trilho vertical.

A figura abaixo ilustra a situação descrita acima.



Se denotarmos a amplitude da vibração em cada instante $t \in [0, \infty)$, em cada ponto $x \in [0, L]$ da corda pela função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ (veja a figura acima), então um modelo matemático que está associado a esse problema é que a função u que satisfaça as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada } [0, \infty) \times [0, L], \quad (8.148)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (8.149)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (8.150)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (8.151)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, \pi); \mathbb{R}), \quad (8.152)$$

onde c^2 é uma constante que está relacionada com a tensão e a densidade da corda.

A condição (8.149) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, o deslocamento do ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $f(x)$.

A condição (8.150) nos diz que, no instante inicial, isto é, $t = 0$, a velocidade do deslocamento do ponto $x \in [0, L]$ do fio é igual a $g(x)$.

A condição (8.151) nos diz que as extremidades do fio estão variando em um trilho vertical, ao longo de todo o processo, isto é, para $t \in [0, \infty)$.

Trataremos, como anteriormente, o caso em que

$$c = 1.$$

O caso geral será deixado como exercício pra o leitor.

Aplicaremos o método da separação de variáveis ao problema (8.148), (8.149), (8.150), (8.151) e (8.152), isto é, tentaremos soluções de (8.148), (8.149), (8.150) e (8.151) e (8.152), do tipo

$$u(t, x) = \psi(t) \phi(x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (8.153)$$

onde $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

Notemos que, supondo que as funções ψ e ϕ são duas vezes diferenciáveis em $(0, \infty)$ e $(0, L)$, respectivamente, então, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &\stackrel{(8.153)}{=} \frac{\partial}{\partial t} [\psi(t) \phi(x)] \\ &= \psi'(t) \phi(x), \end{aligned} \tag{8.154}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right] \\ &\stackrel{(8.154)}{=} \frac{\partial}{\partial t} [\psi'(t) \phi(x)] \\ &= \psi''(t) \phi(x), \end{aligned} \tag{8.155}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &\stackrel{(8.153)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [\psi(t) \phi(x)] \\ &= \psi(t) \phi'(x), \end{aligned} \tag{8.156}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right] \\ &\stackrel{(8.156)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [\psi(t) \phi'(x)] \\ &= \psi(t) \phi''(x), \end{aligned} \tag{8.157}$$

Substituindo (8.155) e (8.157) em (8.148), obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \\ &\stackrel{(8.155)}{=} \stackrel{(8.157)}{=} \psi''(t) \phi(x) - \psi(t) \phi''(x), \end{aligned} \tag{8.158}$$

para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$.

Supondo que

$$u \neq 0,$$

ou seja, a solução trivial não nos interessará, deveremos ter

$$\psi(t), \phi(x) \neq 0,$$

para algum $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$.

Logo, dividindo (8.158), por

$$\psi(t) \phi(x),$$

obteremos:

$$\frac{\psi''(t)\phi(x) - \psi(t)\phi''(x)}{\psi(t)\phi(x)} = 0$$

ou seja,

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} - \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}.$$

Portanto, deveremos ter:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\lambda = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$$

para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, ou seja, teremos:

$$\psi''(t) = -\lambda\psi(t), \quad \text{para cada } t \in (0, \infty), \quad (8.159)$$

$$\phi''(x) = -\lambda\phi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, L). \quad (8.160)$$

Notemos que, para cada $t \in [0, \infty)$, de (8.155), segue:

$$\begin{aligned} \psi(t)\phi'(0) &\stackrel{(8.156)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \\ &\stackrel{(8.151)}{=} 0 \\ &\stackrel{(8.151)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) \\ &\stackrel{(8.156)}{=} \psi(t)\phi'(L). \end{aligned} \quad (8.161)$$

Como $\psi(t) \neq 0$, para algum $t \in [0, \infty)$, (pois caso contrário, teríamos $u(t, x) = 0$, para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$), dividindo ambos os membros da identidade (8.161), por $\psi(t)$, obteremos

$$\phi'(0) = 0 = \phi'(L),$$

ou seja, $\phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, deverá satisfazer o seguinte problema de valor de contorno:

$$\phi''(x) = -\lambda\phi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, L) \quad (8.162)$$

$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0, \quad (8.163)$$

$$\phi \in C([0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, L); \mathbb{R}). \quad (8.164)$$

cuja solução será, para cada $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, dada por (teremos $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$):

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_n(x) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{para cada } x \in [0, L]. \end{aligned} \quad (8.165)$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Como no caso anterior (veja (8.93)), a solução geral da EDO (8.159) será :

$$\psi_n(t) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \quad (8.166)$$

para cada $t \in [0, \infty)$.

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a função $u_n : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u_n(t, x) \doteq \psi_n(t)\phi_n(x) \stackrel{(8.165) \text{ e } (8.166)}{=} a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + A_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (8.167)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, será uma solução de (8.148) e (8.151).

Logo, formalmente, a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} u(t, x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \phi_n(x) \\ &\stackrel{(8.165) \text{ e } (8.166)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right. \\ &\quad \left. + A_n^g \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \end{aligned} \quad (8.168)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, será a candidata a solução para o problema dado inicialmente.

Suponhamos que a série de funções em (8.168) seja convergente, ou seja, que a função u , dada por (8.168), esteja bem definida.

Para que a função u , dada por (8.168), seja solução do problema dado inicialmente, ela deverá satisfazer (8.149), ou seja:

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{(8.149)}{=} u(0, x) \\ &\stackrel{t=0 \text{ em } (8.168)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^f \overbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{L}0\right)}{=1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + A_n^g \overbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L}0\right)}{=0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \end{aligned}$$

isto é, a função f (ou melhor, sua extensão par e $2L$ -periódica à \mathbb{R}) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso, uma série em cossenos), ou seja:

$$a_n^f \stackrel{(7.183)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (8.169)$$

Por outro lado, para que a função \underline{u} , dada por (8.168), satisfaça a condição (8.150), deveremos ter (derivando parcialmente a série de funções, termo a termo, em relação à \underline{t}):

$$\begin{aligned}
 g(x) &\stackrel{(8.150)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) \\
 &\stackrel{(8.168)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + A_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \right\} \Big|_{t=0} \\
 &\stackrel{\text{cuidado!}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + A_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \right\} \Big|_{t=0} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n^f \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}0\right)}{=0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + A_n^g \overbrace{\left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}0\right) \frac{n\pi}{L} \right]}{=1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^g \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{para cada } x \in [0, L],
 \end{aligned}$$

isto é, a função \underline{g} (ou melhor, sua extensão par e $2L$ -periódica à \mathbb{R}) deverá possuir uma expansão em série de Fourier (no caso, uma série em cossenos), ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, deveremos ter:

$$A_n^g \frac{n\pi}{L} \stackrel{(7.183)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 A_n^g &= \frac{2L}{Ln\pi} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
 &= \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx
 \end{aligned} \tag{8.170}$$

$$= \frac{1}{n} a_n^g, \tag{8.171}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, a_n^g denota um dos n -ésimos coeficientes de Fourier associada à função \underline{g} (ou melhor, sua extensão par e $2L$ -periódica à \mathbb{R}).

Portanto, uma candidata a solução do problema será a função \underline{u} , dada por:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + A_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \tag{8.172}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes \underline{a}_n^f e \underline{A}_n^g serão dados por (8.169) e (8.170), respectivamente.

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração será deixada como exercício para o leitor:

Teorema 8.173 *Suponhamos que $f \in C^2([0, L]; \mathbb{R})$ é tal que a função f'' seja diferenciável, exceto em um número finito de pontos de $[0, L]$, com $f''' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$ e $g \in C^1([0, L]; \mathbb{R})$ é tal que a função g' seja diferenciável, exceto em um número finito de pontos de $[0, L]$, com $g'' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$, satisfaçam:*

$$f'(0) = f'(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0. \quad (8.174)$$

Então a série de funções (8.172) converge uniformemente em $[0, \infty) \times [0, L]$, para uma função $u \in C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$ que é solução de (8.148), (8.149), (8.150), (8.151) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes \underline{a}_n^f e \underline{A}_n^g serão dados por (8.169) e (8.170), respectivamente.

Observação 8.175 *Pode-se mostrar que a solução, dada por (8.172), é única na classe $C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$.*

Para ilustrar, temos o seguinte exercício resolvido:

Exercício 8.176 *Determine uma função $u : [0, \infty) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, que seja solução do problema:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times [0, \pi], \quad (8.177)$$

$$u(0, x) = x, \quad \text{para cada } x \in [0, \pi], \quad (8.178)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(6x), \quad \text{para cada } x \in [0, \pi], \quad (8.179)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (8.180)$$

$$u \in C^1([0, \infty) \times [0, \pi]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (0, \pi); \mathbb{R}), \quad (8.181)$$

Resolução:

Observemos que

$$L = \pi.$$

Neste caso, temos que as funções $f, g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ serão dadas por

$$f(x) \doteq x, \quad (8.182)$$

$$x \in [0, \pi]. \quad (8.183)$$

Como no Exemplo (8.62), considerando a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a extensão par 2π -periódica da função f à \mathbb{R} , teremos que a função \underline{F} será contínua em \mathbb{R} , mas não será diferenciável nos pontos

$$x = k\pi, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z}.$$

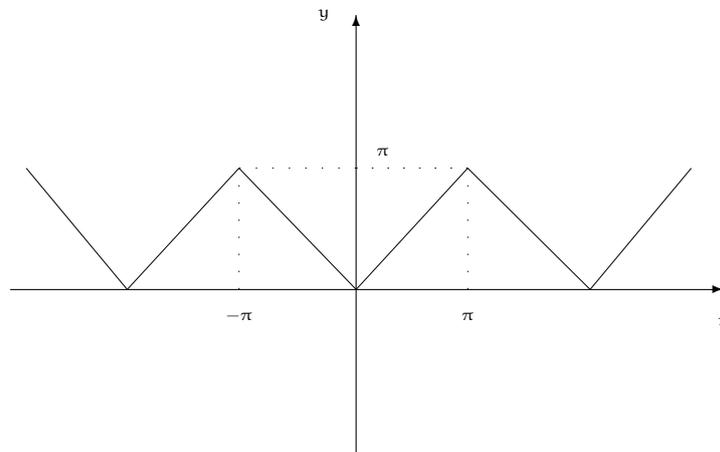
Como vimos em (8.68), a função \underline{F} , será dada por:

$$F(x) \doteq |x|, \quad \text{para cada } x \in [-\pi, \pi], \quad (8.184)$$

satisfazendo

$$F(x + 2\pi) = F(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$

A representação geométrica do gráfico da função \underline{F} é dada pela figura abaixo.



Observemos que a extensão par, 2π -periódica da função \underline{g} à \mathbb{R} , será a função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$G(x) \doteq \cos(3x) - \cos(5x) + \cos(6x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (8.185)$$

Notemos que é a mesma expressão que define a função \underline{g} .

Uma candidata a solução do problema acima, será dada por (8.172), ou seja:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{(8.172)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + A_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\ &\stackrel{L=\pi}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^f \cos\left(\frac{n\pi}{\pi}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) + A_n^g \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\pi}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^f \cos(nt) \cos(nx) + A_n^g \operatorname{sen}(nt) \cos(nx) \right] \end{aligned} \quad (8.186)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes \underline{a}_n^f e \underline{A}_n^g , são dados

por (8.169) e (8.170), respectivamente, ou seja:

$$\begin{aligned}
 a_n^f &\stackrel{(8.169)}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
 &\stackrel{L=\pi}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx \\
 &\stackrel{(8.72)}{=} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}
 \end{aligned} \tag{8.187}$$

$$\begin{aligned}
 A_n^g &\stackrel{(8.170)}{=} \frac{L}{n\pi} a_n^g \\
 &\stackrel{L=\pi \text{ e } (8.185)}{=} \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 1, & \text{para cada } n = 3 \\ \frac{1}{5} \cdot (-1), & \text{para cada } n = 5 \\ \frac{1}{6} \cdot 1, & \text{para cada } n = 6 \\ 0, & \text{para cada } n \neq 3, 5, 6 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{para cada } n = 3 \\ -\frac{1}{5}, & \text{para cada } n = 5 \\ \frac{1}{6}, & \text{para cada } n = 6 \\ 0, & \text{para cada } n \neq 3, 5, 6 \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{8.188}$$

pois a extensão ímpar, 2π -periódica da função \underline{g} já está representada por sua série de Fourier, com $L = \pi$.

Portanto, a candidata a solução do problema será dada por:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &\stackrel{(8.186)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^f \cos(nt) \cos(nx) + A_n^g \sin(nt) \cos(nx)] \\
 &\stackrel{(8.187) \text{ e } (8.188)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi} \cos(nt) \cos(nx) \\
 &\quad + \frac{1}{3} \sin(3t) \cos(3x) - \frac{1}{5} \sin(5t) \cos(5x) + \frac{1}{6} \sin(6t) \cos(6x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2 \pi} \cos[(2n+1)nt] \cos[(2n+1)nx] \\
&\quad + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3t) \cos(3x) - \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5t) \cos(5x) + \frac{1}{6} \operatorname{sen}(6t) \cos(6x), \quad (8.189)
\end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$

□

Observação 8.190 *Pode-se mostrar que a função \underline{u} , dada por (8.189), satisfaz nosso problema, exceto sobre os segmentos de retas:*

$$x + t = 0 \quad e \quad x - t = \pi.$$

*Ao longo desses segmentos de retas a função \underline{u} , dada por (8.189), **não** será diferenciável.*

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

*Vale observar que **não** podemos aplicar o Teorema (8.173), pois a função \underline{f} não satisfaz as hipótese (ela não é duas vezes continuamente diferenciável em $[0, \pi]$).*

8.3 A Equação de Laplace

O último problema que trataremos estará associado a Equação de Laplace.

Trataremos de dois problemas relacionados a Equação de Laplace, a saber: o problema de Dirichlet em um retângulo e em um círculo.

8.3.0.3 O Problema de Dirichlet num Retângulo

Esse problema consiste em encontrar uma função $u = u(x, y)$, para cada $(x, y) \in \bar{\Omega} \doteq [a, A] \times [b, B]$, que satisfaz

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \doteq (a, A) \times (b, B), \quad (8.191)$$

$$u(A, y) = f_1(y), \quad \text{para cada } y \in [b, B], \quad (8.192)$$

$$u(a, y) = f_2(y), \quad \text{para cada } y \in [b, B], \quad (8.193)$$

$$u(x, b) = f_3(x), \quad \text{para cada } x \in [a, A] \quad (8.194)$$

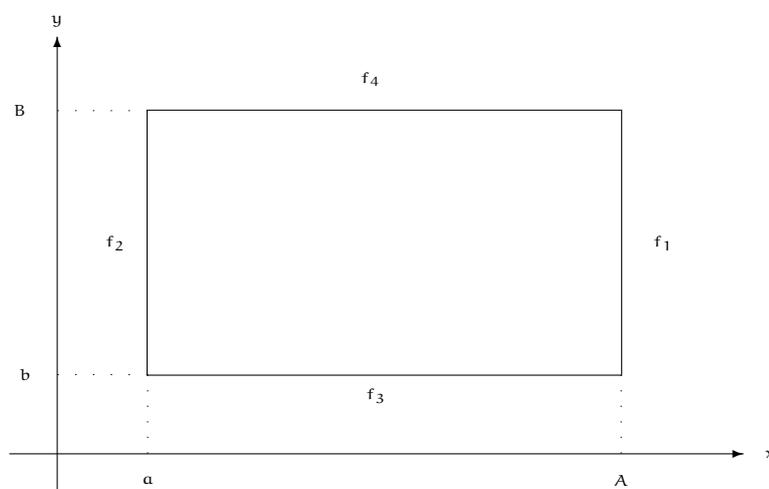
$$u(x, B) = f_4(x), \quad \text{para cada } x \in [a, A], \quad (8.195)$$

$$u \in C([a, A] \times [b, B]; \mathbb{R}) \cap C^2((a, A) \times (b, B); \mathbb{R}). \quad (8.196)$$

A região que estaremos trabalhando é o retângulo

$$\Omega \doteq (a, A) \times (b, B), \quad (8.197)$$

contida no plano \underline{xOy} (veja a figura abaixo).



Consideraremos o caso em que

$$a = b \doteq 0. \tag{8.198}$$

O caso geral será deixado como exercício para o leitor (basta fazermos translações apropriadas).

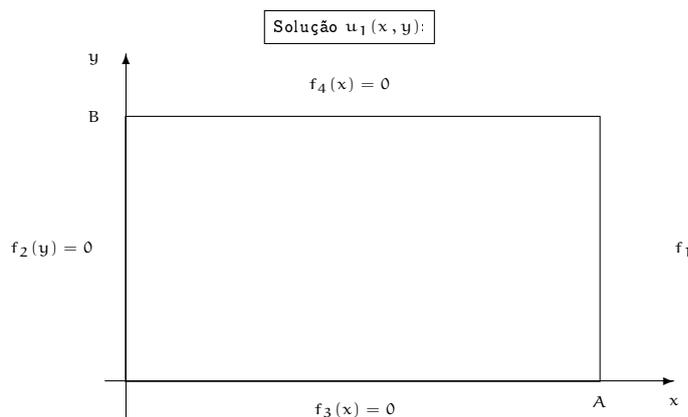
Além disso, trataremos de encontrar uma função $u_1 = u_1(x, y)$ que seja solução do problema de Cauchy (8.191), (8.192), (8.193), (8.194), (8.195) na classe (8.196), para o caso que:

$$f_3(x) = f_4(x) \doteq 0, \quad \text{para cada } x \in [0, A] \tag{8.199}$$

e

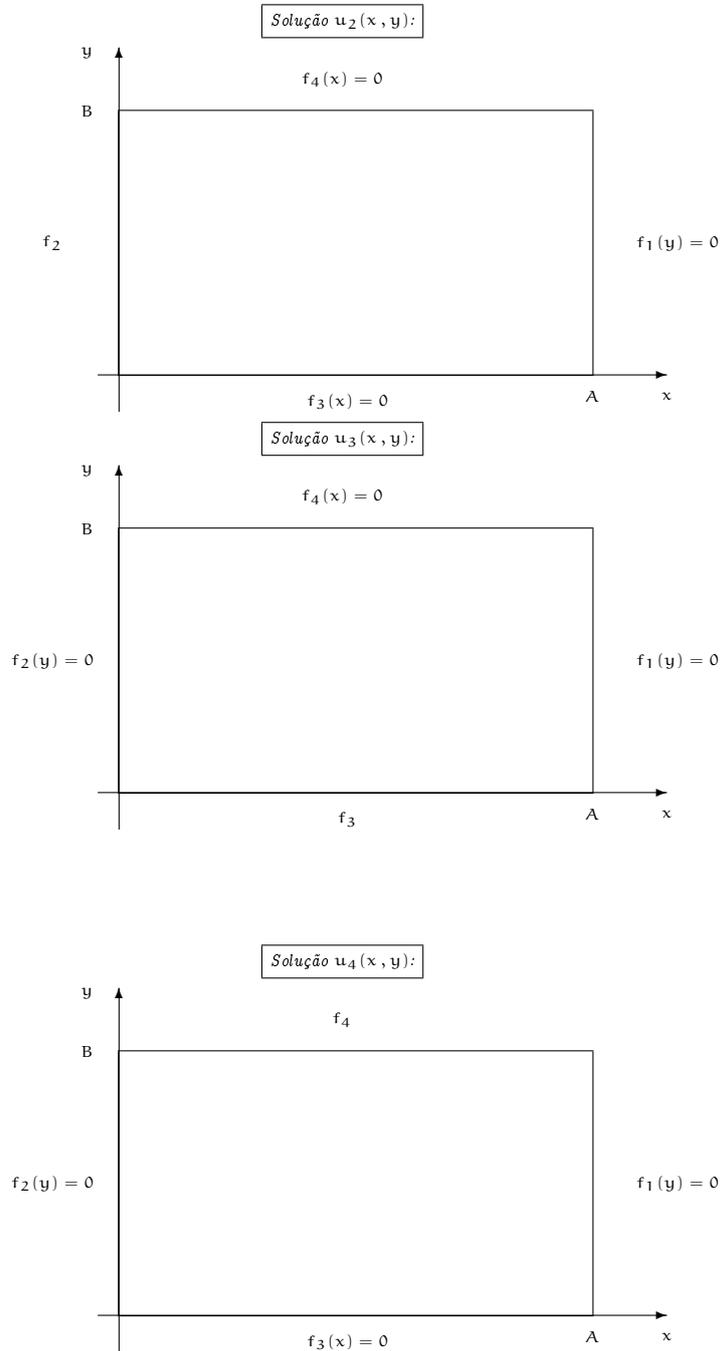
$$f_2(x) \doteq 0, \quad \text{para cada } y \in [0, B], \tag{8.200}$$

que corresponde, geometricamente, a seguinte situação:



Observação 8.201 *Se soubermos resolver o problema de Cauchy (8.191), (8.192), (8.193), (8.194), (8.195) na classe (8.196), com dado de fronteira satisfazendo (8.198) e (8.202), poderemos obter a solução do problema que iniciamos (com $a = b = 0$) somando-se*

cada uma das soluções de cada um dos problemas de Cauchy (8.191), (8.192), (8.193), (8.194), (8.195) na classe (8.196), cujos dados de fronteira são de cada um dos tipos abaixo:



ou seja, obteremos uma solução para o problema Cauchy (8.191), (8.192), (8.193), (8.194), (8.195) na classe (8.196), da seguinte forma:

$$u(x, y) \doteq u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y), \quad (8.202)$$

onde $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$ e, para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, a função $u_j = u_j(x, y)$ é a correspondente solução de cada um dos problemas de Cauchy (8.191), (8.192), (8.193), (8.194), (8.195) na classe (8.196), com condições de fronteira da correspondente situação acima.

Assim basta, essencialmente, tratar do problema de encontrar uma função $u = u(x, y)$, definida em $[0, A] \times [0, B]$, que satisfaz o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, \quad \text{para } (x, y) \in (0, A) \times (0, B), \\ u(0, y) &= 0, \quad \text{para cada } y \in [0, B], \\ u(A, y) &= f(y), \quad \text{para cada } y \in [0, B], \\ u(x, 0) &= 0, \quad \text{para cada } x \in [0, A], \\ u(x, B) &= 0, \quad \text{para cada } x \in [0, A], \\ u &\in C([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, A) \times (0, B); \mathbb{R}), \end{aligned}$$

isto é,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in (0, A) \times (0, B), \quad (8.203)$$

$$u(0, y) = 0, \quad \text{para cada } y \in [0, B], \quad (8.204)$$

$$u(A, y) = f(y), \quad \text{para cada } y \in [0, B], \quad (8.205)$$

$$u(x, 0) = u(x, B) = 0, \quad \text{para cada } x \in [0, A], \quad (8.206)$$

$$u \in C([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, A) \times (0, B); \mathbb{R}). \quad (8.207)$$

Observemos que, de (8.204) (com $y = 0$ e $y = B$) e (8.206) (com $x = 0$ e $x = A$), segue que a função f deverá satisfazer a seguintes condições de compatibilidade:

$$\begin{aligned} f(0) &\stackrel{(8.205) \text{ com } y=0}{=} u(A, 0) \\ &\stackrel{(8.206) \text{ com } x=A}{=} 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(B) &\stackrel{(8.205) \text{ com } y=B}{=} u(A, B) \\ &\stackrel{(8.206) \text{ com } x=A}{=} 0, \end{aligned}$$

ou seja, deveremos ter

$$f(A) = f(B) = 0. \quad (8.208)$$

Tentaremos soluções de (8.203), (8.204) e (8.205) do tipo variáveis separadas (isto é, utilizando o Método da Separação de Variáveis), ou seja tentaremos encontrar soluções do tipo:

$$u(x, y) \doteq \psi(x) \phi(y), \quad \text{para cada } (x, y) \in [0, A] \times [0, B]. \quad (8.209)$$

Vale observar que estamos procurando soluções não nulas, isto é,

$$u(x, y) \neq 0,$$

logo deveremos ter

$$\psi(x), \phi(y) \neq 0, \quad \text{para algum } (x, y) \in [0, A] \times [0, B]. \quad (8.210)$$

Notemos que, supondo que as funções ψ e ϕ são duas vezes diferenciáveis em $(0, A)$ e $(0, B)$, respectivamente, então, para cada $(x, y) \in (0, A) \times (0, B)$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &\stackrel{(8.210)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [\psi(x) \phi(y)] \\ &= \psi'(x) \phi(y), \end{aligned} \quad (8.211)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.211)}{=} \frac{\partial}{\partial x} [\psi'(x) \phi(y)] \\ &= \psi''(x) \phi(y), \end{aligned} \quad (8.212)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &\stackrel{(8.210)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [\psi(x) \phi(y)] \\ &= \psi(x) \phi'(y), \end{aligned} \quad (8.213)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right] \\ &\stackrel{(8.213)}{=} \frac{\partial}{\partial y} [\psi(x) \phi'(y)] \\ &= \psi(x) \phi''(y), \end{aligned} \quad (8.214)$$

Substituindo (8.212) e (8.214) na EDP (8.203) obtemos, para cada $(x, y) \in (0, A) \times (0, B)$, que :

$$\begin{aligned} &\psi''(x) \phi(y) + \psi(x) \phi''(y) = 0, \\ \text{ou seja,} &\quad \psi''(x) \phi(y) = -\psi(x) \phi''(y) \\ \text{de (8.211), segue que:} &\quad \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\frac{\phi''(y)}{\phi(y)} = \text{constante} \doteq \lambda. \end{aligned}$$

ou seja, teremos as seguintes duas EDO's:

$$\phi''(y) = -\lambda \phi(y), \quad \text{para cada } y \in (0, B), \quad (8.215)$$

$$\psi''(x) = \lambda \psi(x), \quad \text{para cada } x \in (0, A). \quad (8.216)$$

Notemos que:

$$0 \stackrel{(8.204)}{=} u(0, y)$$

$$\stackrel{(8.209)}{=} \psi(0) \phi(y),$$

$$\text{de (8.210), segue que: } \psi(0) = 0 \quad (8.217)$$

$$0 \stackrel{(8.206)}{=} u(x, 0)$$

$$\stackrel{(8.209)}{=} \psi(x) \phi(0),$$

$$\text{de (8.210), segue que: } \phi(0) = 0, \quad (8.218)$$

$$0 \stackrel{(8.206)}{=} u(x, B)$$

$$\stackrel{(8.209)}{=} \psi(x) \phi(B),$$

$$\text{de (8.210), segue que: } \phi(B) = 0. \quad (8.219)$$

Logo, de (8.215), (8.216), (8.217), (8.218), (8.219), obteremos os seguintes problemas associados às respectivas EDO's:

$$\phi''(y) = -\lambda \phi(y), \quad \text{para } y \in (0, B), \quad (8.220)$$

$$\phi(0) = \phi(B) = 0, \quad (8.221)$$

$$\phi \in C([0, B]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, B); \mathbb{R}) \quad (8.222)$$

e

$$\psi''(x) = \lambda \psi(x), \quad \text{para } x \in (0, A) \quad (8.223)$$

$$\psi(0) = 0, \quad (8.224)$$

$$\psi \in C([0, A]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, A); \mathbb{R}). \quad (8.225)$$

O problema de contorno (8.220), (8.221), (8.222) já foi tratado anteriormente (ver (7.22), (7.23), (7.24)) e a solução, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\lambda = \lambda_n \doteq \frac{n^2 \pi^2}{B^2}, \quad (8.226)$$

$$\phi(y) = \phi_n(y) \doteq \text{sen} \left(\frac{n \pi y}{B} \right), \quad \text{para cada } y \in [0, B] \quad (8.227)$$

e, devido a (8.226), o problema (8.223), (8.224), (8.225) tornar-se-á:

$$\psi''(x) = \frac{n^2 \pi^2}{B^2} \psi(x), \quad \text{para } y \in (0, A), \quad (8.228)$$

$$\psi(0) = 0, \quad (8.229)$$

$$\psi \in C([0, A]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, A); \mathbb{R}). \quad (8.230)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a solução geral da EDO (8.228) acima, será dada por (visto na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias):

$$\psi_n(x) = C e^{\frac{n\pi}{B}x} + D e^{-\frac{n\pi}{B}x}, \quad \text{para cada } x \in (0, A). \quad (8.231)$$

Mas

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(8.229)}{=} \psi(0) \\ &\stackrel{(8.231)}{=} C + D, \\ \text{assim, segue que, } & D = -C. \end{aligned} \quad (8.232)$$

Substituindo (8.232) em (8.231), obteremos:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= C e^{\frac{n\pi}{B}x} - C e^{-\frac{n\pi}{B}x} \\ &= 2C \sinh\left(\frac{n\pi}{B}x\right), \quad \text{para cada } x \in [0, A], \end{aligned}$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar como solução do problema (8.228), (8.229), (8.230), a função $\psi_n : [0, A] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\psi_n(x) \doteq \sinh\left(\frac{n\pi}{B}x\right), \quad \text{para cada } x \in [0, A]. \quad (8.233)$$

Logo, de (8.209), (8.227) e (8.233), segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &\stackrel{(8.209)}{=} \psi_n(x) \phi_n(y) \\ &\stackrel{(8.227), (8.233)}{=} \sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right), \end{aligned} \quad (8.234)$$

para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Tomaremos, formalmente, uma solução do problema (8.203), (8.204), (8.205), (8.206), (8.207), da forma:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) \\ &\stackrel{(8.209)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \phi_n(y) \\ &\stackrel{(8.234)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{B}\right), \end{aligned} \quad (8.235)$$

para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Impondo a condição (8.205), deveremos ter

$$f(y) \stackrel{(8.205)}{=} u(A, y) \stackrel{(8.235)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)}_{\text{deverá ser o } n\text{-ésimo coeficiente de Fourier associado à } \underline{f}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right)$$

para cada $y \in [0, B]$, ou seja, a extensão, que indicaremos por \underline{f} , ímpar e $2B$ -periódica da função f , deverá possuir uma representação em série de Fourier (no caso uma série de Fourier em senos), ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, deveremos ter:

$$A_n \sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right) = B_n \stackrel{(7.176)}{=} \frac{2}{B} \int_0^B f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{B}\right) dx, \quad (8.236)$$

ou ainda,

$$A_n = \frac{B_n}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)}. \quad (8.237)$$

Portanto, substituindo (8.236) em (8.235), obteremos uma candidata a solução do problema (8.203), (8.204), (8.205), (8.206), (8.207), a saber:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right), \quad (8.238)$$

para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração será exibida a seguir:

Teorema 8.239 *Suponhamos que $f \in C([0, B]; \mathbb{R})$, é diferenciável, exceto em um conjunto finito de pontos de $[0, B]$, com $f' \in SC([0, B]; \mathbb{R})$ e*

$$f(0) = f(B) = 0. \quad (8.240)$$

Então a série de funções (8.238) converge uniformemente, em $[0, A] \times [0, B]$, para uma função

$$u \in C([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}) \cap C^\infty([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R})$$

que será uma solução do problema (8.203), (8.204), (8.205) e (8.206), onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes \underline{B}_n , serão dados por (8.236).

Antes de iniciarmos a demonstração do resultado acima, faremos algumas observações.

Observação 8.241

1. Como a função seno-hiperbólico é estritamente crescente em \mathbb{R} (a representação geométrica do seu gráfico parece com a representação geométrica do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) \doteq x^3$, para $x \in \mathbb{R}$), segue que

$$0 \leq \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \leq 1, \quad (8.242)$$

para cada $x \in [0, A]$ e para cada $n \in \mathbb{N}$.

2. Como vimos anteriormente (veja a Observação (7.372)), pelas hipótese do Teorema (8.239) acima, como $f \in C([0, B]; \mathbb{R})$ e $f' \in SC([0, B]; \mathbb{R})$, segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \infty, \quad (8.243)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, o número real B_n é dado por (8.236).

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$, teremos:

$$\begin{aligned} \left| B_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \right| &= |B_n| \underbrace{\left| \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \right|}_{\substack{(8.243) \\ \leq 1}} \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \right|}_{\leq 1} \\ &\leq |B_n|, \end{aligned} \quad (8.244)$$

Logo, de (8.244), de (8.243) e do Teste M. de Weierstrass, segue que a série em (8.238) converge uniformemente em $[0, A] \times [0, B]$.

Em particular, da convergência uniforme e do fato que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$(x, y) \mapsto B_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right)$$

é contínua em $[0, A] \times [0, B]$, segue que

$$u \in C([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}) \quad (8.245)$$

3. A convergência uniforme da série das derivadas parciais de 2.ª ordem, em relação a x e em relação a y , termo a termo, da série de funções (8.238) em $[0, A] \times [0, B]$ é muito mais delicada.

Para isto precisaríamos, em princípio, de muitas derivadas da função f .

4. Para tentar evitar isto escreveremos a série de funções (8.238) de um modo diferente, a saber:

$$u(x, y) \stackrel{(8.238)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right)$$

$$\stackrel{(8.236)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{B} \int_0^B f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) dt \right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \quad (8.246)$$

$$\stackrel{\text{Cuidado!}}{=} \int_0^B f(t) \left[\frac{2}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \right] dt \quad (8.247)$$

$$= \int_0^B f(t) K(x, y, t) dt, \quad (8.248)$$

onde a função $K : [0, A] \times [0, B] \times [0, B] \rightarrow \mathbb{R}$, é dada por:

$$K(x, y, t) \doteq \frac{2}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right), \quad (8.249)$$

para cada $(x, y, t) \in [0, A] \times [0, B] \times [0, B]$, se a série de funções envolvida em (8.249), for convergente $[0, A] \times [0, B] \times [0, B]$.

5. Notemos que podemos considerar a função K definida, por exemplo, em

$$[0, A] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

se a série de funções envolvida em (8.249), for convergente $[0, A] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

6. A demonstração do Teorema (8.239) utilizará a função candidata a solução, ou seja, da função $u = u(x, y)$, na forma da expressão (8.248) acima, em vez da expressão (8.238), como veremos.

Temos as seguintes propriedades da função K :

Lema 8.250 *Afirmamos que $K \in C^\infty([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.*

Além disso,

$$K_{xx}(x, y, t) + K_{yy}(x, y, t) = 0, \quad (8.251)$$

para cada $(x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2$.

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a função $K_n : [0, A] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$K_n(x, y, t) \doteq \frac{2}{B} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right), \quad (8.252)$$

para cada $(x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2$.

Deste modo teremos

$$K(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, y, t), \quad \text{para cada } (x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2, \quad (8.253)$$

se a série de funções envolvida acima for convergente em $[0, A] \times \mathbb{R}^2$.

Notemos que, do método da separação de variáveis aplicado ao problema dado inicialmente (veja (8.234)), segue que, para cada $(x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2$ e $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{\partial^2 K_n}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 K_n}{\partial y^2}(x, y, t) = 0. \quad (8.254)$$

Observemos também que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$K_n \in C^\infty([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

Mostremos que, para cada

$$\varepsilon \in (0, A)$$

fixado, a série de funções (8.249) (ou (8.253)) converge uniformemente em

$$[0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2.$$

De fato, para $x \in [0, A - \varepsilon]$, teremos que

$$0 \leq \frac{\pi x}{B} < \frac{\pi A}{B}$$

e assim, segue que

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{\sinh\left(n \frac{\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(n \frac{\pi A}{B}\right)} \\
 &\stackrel{\text{definição de sinh}}{=} \frac{e^{n \frac{\pi x}{B}} - e^{-n \frac{\pi x}{B}}}{e^{n \frac{\pi A}{B}} - e^{-n \frac{\pi A}{B}}} \\
 &= \frac{e^{n \frac{\pi x}{B}}}{e^{n \frac{\pi A}{B}}} \frac{1 - e^{-2n \frac{\pi x}{B}}}{1 - e^{-2n \frac{\pi A}{B}}} \\
 &= e^{-n\left(\frac{\pi A}{B} - \frac{\pi x}{B}\right)} \underbrace{\left[\frac{1 - e^{-2n \frac{\pi x}{B}}}{1 - e^{-2n \frac{\pi A}{B}}} \right]}_{\substack{(*) \\ < 1, \text{ pois } x \in [0, A - \varepsilon] \subseteq [0, A]}} \\
 &< e^{-n\left(\frac{\pi A}{B} - \frac{\pi x}{B}\right)} \\
 &= e^{-\frac{n\pi}{B}(A-x)}. \tag{8.255}
 \end{aligned}$$

Demonstração de (*): se $x \in [0, A - \varepsilon] \subseteq [0, A]$, teremos

$$\begin{aligned}
 e^{2n \frac{\pi x}{B}} &\stackrel{\text{sinh é estritamente crescente}}{<} e^{2n \frac{\pi A}{B}}, \\
 \text{logo, } e^{-2n \frac{\pi x}{B}} &> e^{-2n \frac{\pi A}{B}} \\
 \text{assim, } -e^{-2n \frac{\pi x}{B}} &< -e^{-2n \frac{\pi A}{B}} \\
 \text{logo, } 1 - e^{-2n \frac{\pi x}{B}} &< 1 - e^{-2n \frac{\pi A}{B}}, \\
 \text{portanto, } \frac{1 - e^{-2n \frac{\pi x}{B}}}{1 - e^{-2n \frac{\pi A}{B}}} &< 1,
 \end{aligned}$$

obtendo-se (*).

Logo, para cada $x \in [0, A - \varepsilon]$, teremos:

$$\begin{aligned}
 |K_n(x, y, t)| &\stackrel{(8.252)}{=} \left| \frac{2}{B} \frac{\sinh\left(\frac{n \pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n \pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi t}{B}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{B}\right) \right| \\
 &= \frac{2}{B} \frac{\sinh\left(\frac{n \pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n \pi A}{B}\right)} \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi t}{B}\right) \right|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{B}\right) \right|}_{\leq 1} \\
 &\stackrel{(8.255)}{\leq} \frac{2}{B} e^{-\frac{n\pi}{B}(A-x)} \\
 &\stackrel{\text{se } x \in [0, A - \varepsilon], \text{ então } \varepsilon < A - x}{<} e^{-\frac{n\pi \varepsilon}{B}}. \tag{8.256}
 \end{aligned}$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi\varepsilon}{B}}$ é convergente (para cada $\varepsilon \in (0, A)$ fixado, verifique!), de (8.256) e do Teste M. de Weierstrass, segue que a série de funções (8.249) converge uniformemente em

$$[0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2.$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $K_n \in C([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ segue, da convergência uniforme da série de funções (visto em Análise II), que

$$K \in C([0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

para cada $\varepsilon \in (0, A)$, ou seja,

$$K \in C([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

Analisemos a convergência série de funções formada pelas derivadas parciais, em relação à x , termo a termos, da série (8.249), ou seja, da série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial K_n}{\partial x}(x, y, t), \quad \text{para } (x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2. \quad (8.257)$$

Notemos que, para $(x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_n}{\partial x}(x, y, t) &\stackrel{(8.252)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{B} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \right] \\ &= \frac{2}{B} \frac{n\pi}{B} \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \\ &= \frac{2\pi}{B^2} n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right). \end{aligned} \quad (8.258)$$

Observemos que, para cada $x \in [0, A]$, teremos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \right| &\stackrel{\text{definição de cosh e sinh}}{=} \left| \frac{e^{n\frac{\pi x}{B}} + e^{-n\frac{\pi x}{B}}}{e^{n\frac{\pi A}{B}} - e^{-n\frac{\pi A}{B}}} \right| \\ &= \frac{e^{n\frac{\pi x}{B}}}{e^{n\frac{\pi A}{B}}} \frac{1 + e^{-n\frac{2\pi x}{B}}}{\left| 1 - e^{-n\frac{2\pi A}{B}} \right|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-n\left(\frac{\pi A}{B} - \frac{\pi x}{B}\right)} \frac{\overbrace{1 + e^{-2n\frac{\pi x}{B}}}^{\leq 2}}{\underbrace{1 - e^{-2n\frac{\pi A}{B}}}_{\substack{(**) \\ \geq |1 - e^{-2\frac{\pi A}{B}}|}}} \\
&< \frac{2}{\left|1 - e^{-2\frac{\pi A}{B}}\right|} e^{-\frac{n\pi}{B}(A-x)}. \tag{8.259}
\end{aligned}$$

Demonstração de (**):

$$\begin{aligned}
&e^{2n\frac{\pi A}{B}} \geq e^{2\frac{\pi A}{B}}, \\
\text{logo,} \quad &e^{-2n\frac{\pi A}{B}} \leq e^{-2\frac{\pi A}{B}}, \\
\text{assim,} \quad &-e^{-2n\frac{\pi A}{B}} \geq -e^{-2\frac{\pi A}{B}}, \\
\text{ou seja,} \quad &1 - e^{-2n\frac{\pi A}{B}} \geq 1 - e^{-2\frac{\pi A}{B}} \geq 0, \\
\text{portanto,} \quad &\left|1 - e^{-2n\frac{\pi A}{B}}\right| \geq \left|1 - e^{-2\frac{\pi A}{B}}\right|, \tag{8.260}
\end{aligned}$$

obtendo-se (**).

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, A)$ e $(x, y, t) \in [0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2$, teremos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x} K_n(x, y, t) \right| &\stackrel{(8.258)}{=} \left| \frac{2\pi}{B^2} n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \right| \\
&= \frac{2\pi}{B^2} n \left| \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \right| \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \right|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \right|}_{\leq 1} \\
&\leq \frac{2\pi}{B^2} n \left| \frac{\cosh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \right| \\
&\stackrel{(8.259)}{<} \frac{2}{\left|1 - e^{-2\frac{\pi A}{B}}\right|} e^{-\frac{n\pi}{B}(A-x)} \\
&< \frac{2\pi}{B^2} \frac{2}{\left|1 - e^{-2\frac{\pi A}{B}}\right|} n e^{-\frac{n\pi}{B}(A-x)}
\end{aligned}$$

$$\text{se } x \in [0, A - \varepsilon], \text{ então } \varepsilon < A - x \text{ e como em (8.256)} \quad \frac{4\pi}{B^2 \left| 1 - e^{-2\frac{\pi A}{B}} \right|} n e^{-\frac{n\pi}{B}\varepsilon}. \quad (8.261)$$

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n\pi}{B}\varepsilon}$ é convergente (para cada $\varepsilon \in (0, A)$ fixado, verifique!), de (8.261) e do Teste M. de Weierstrass, segue que a série de funções (8.257) converge uniformemente em $[0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\frac{\partial K_n}{\partial x} \in C([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ segue, da convergência uniforme da série de funções considerada (visto em Análise II), que

$$\frac{\partial K}{\partial x} \in C([0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

para cada $\varepsilon \in (0, A)$, ou seja,

$$\frac{\partial K}{\partial x} \in C([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

e a série de funções (8.249), pode ser derivada parcialmente, em relação a \underline{x} , termo a termo, em $[0, A] \times \mathbb{R}^2$.

Podemos aplicar um argumento semelhante para mostrar que

$$\frac{\partial K}{\partial y}, \frac{\partial K}{\partial t} \in C([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

e que a série de funções (8.249), pode ser derivada parcialmente, em relação a \underline{y} e em relação a \underline{t} , termo a termo, em $[0, A] \times \mathbb{R}^2$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Na verdade, para cada $\varepsilon \in (0, A)$, se $(x, y, t) \in [0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2$ e $k, m, l \in \mathbb{Z}^+$, pode-se mostrar que:

$$\left| \frac{\partial^{k+m+l} K_n}{\partial x^k \partial y^m \partial t^l}(x, y, t) \right| \leq C n^{k+m+l} e^{-\frac{n\pi}{B}\varepsilon}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (8.262)$$

Esta desigualdade implicará, via o Teste M. de Weierstrass (e a convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k+m+l} e^{-\frac{n\pi}{B}\varepsilon}$), aplicado ao conjunto

$$[0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2,$$

para cada $\varepsilon \in (0, A)$, que

$$\frac{\partial^{k+m+l} K}{\partial x^k \partial y^m \partial t^l} \in C([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

ou seja,

$$K \in C^\infty([0, A) \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}),$$

e a série de funções (8.249) pode ser derivada parcialmente, em relação a x , y e t , termo a termo, a qualquer ordem em

$$[0, A) \times \mathbb{R}^2.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Logo, deste fato, de (8.253) e de (8.254), segue que

$$K_{xx}(x, y, t) + K_{yy}(x, y, t) = 0,$$

para cada $(x, y, t) \in [0, A) \times \mathbb{R}^2$, completando a demonstração. □

Temos também o:

Lema 8.263 *Consideremos $f \in C([0, B]; \mathbb{R})$, uma função diferenciável, exceto em um conjunto finito de pontos de $[0, B]$, de modo que $f' \in SC([0, B]; \mathbb{R})$ e*

$$f(0) = f(B) = 0. \quad (8.264)$$

Então a série de funções (8.238) converge uniformemente em $[0, A] \times [0, B]$ e, além disso, teremos:

$$u(x, y) = \int_0^B f(t) K(x, y, t) dt, \quad (8.265)$$

para cada $(x, y) \in [0, A) \times [0, B]$.

Demonstração:

Consideremos a função $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a extensão ímpar e $2B$ -periódica da função f à \mathbb{R} .

Então, das hipóteses sobre a função f segue que

$$F \in C_{\text{per}}(2B) \quad \text{e} \quad F' \in SC_{\text{per}}(2B). \quad (8.266)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, indicaremos os coeficientes (reais) de Fourier, associados à função F por A_n e B_n .

Notemos que

$$A_n = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

pois a função F é ímpar, ou seja, para cada $y \in [0, B]$, teremos:

$$\begin{aligned} f(y) &= F(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right). \end{aligned} \quad (8.267)$$

Notemos que, do item 2. da Observação (8.241) segue que a série de funções (8.238) converge uniformemente em $[0, A] \times [0, B]$, ou seja, a função $u : [0, A] \times [0, B] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{B} \int_0^B f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{B} \right) dt \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi x}{B} \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi A}{B} \right)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{B} \right),$$

para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$, está bem definida e, além disso, da convergência uniforme em $[0, A] \times [0, B]$, segue que

$$u \in C([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}).$$

Passemos agora a demonstração da identidade (8.265).

Para isto notemos que, para cada $x_0 \in [0, A)$ fixado, considerando-se

$$\varepsilon \in (0, A - x_0),$$

pela demonstração do Lema (8.250), temos que a série de funções em (8.246), convergirá uniformemente em

$$[0, A - \varepsilon] \times \mathbb{R}^2. \quad (8.268)$$

Logo, a convergência uniforme da série de funções (8.246), no conjunto (8.268), juntamente com um resultado de Análise II, podemos trocar a integral definida em relação à t , de $t = 0$ à $t = B$, na fórmula (8.246), pela série de funções (8.247), ou seja, para cada $(x, y) \in [0, A) \times [0, B]$ fixado, e assim teremos:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\stackrel{(8.246)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{B} \int_0^B f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{B} \right) dt \right] \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi x_0}{B} \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi A}{B} \right)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{B} \right) \\ &\stackrel{\text{conv. uniforme de (8.247)}}{=} \int_0^B f(t) \left[\frac{2}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{B} \right) \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi x_0}{B} \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi A}{B} \right)} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{B} \right) \right] dt \\ &\stackrel{(8.249)}{=} \int_0^B f(t) K(x, y, t) dt, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

A seguir mostraremos que podemos derivar parcialmente, duas vezes, em relação à x e em relação à y , sob o sinal da integral (8.265), em $[0, A) \times [0, B]$.

Na verdade temos um resultado geral que garante, sob certas condições, que podemos derivar sob o sinal de integração, mais precisamente, temos a:

Proposição 8.269 *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $G \in C([a, b] \times I; \mathbb{R})$ tal que $\frac{\partial G}{\partial t} \in C([a, b] \times I; \mathbb{R})$, onde $G = G(s, t)$.*

Considere a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) \doteq \int_a^b G(s, t) ds, \quad \text{para cada } s \in I. \quad (8.270)$$

Então $g \in C^1(I; \mathbb{R})$ e, além disso, temos

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(s, t) ds, \quad \text{para cada } y \in I. \quad (8.271)$$

Demonstração:

Deixaremos a demonstração deste resultado como exercício para o leitor. □

Como vimos na demonstração do Lema (8.263), a função $u = u(x, y)$, dada por (8.238) ou por (8.265), satisfaz:

$$u \in C([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}).$$

Pelo Lema (8.250), temos que

$$K \in C^\infty([0, A] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

e

$$K_{xx}(x, y, t) + K_{yy}(x, y, t) = 0, \quad \text{para } (x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2. \quad (8.272)$$

Aplicando a Proposição (8.269) à função $u = u(x, y)$, dada por (8.265), e indução sobre a ordem da derivação parcial em relação à \underline{x} e em relação à \underline{y} , teremos que

$$u \in C^\infty([0, A] \times [0, B]; \mathbb{R}).$$

Além disso, para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$, teremos:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^B f(t) K(x, y, t) dt \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\int_0^B f(t) K(x, y, t) dt \right] \\ &\stackrel{\text{Prop. (8.269) 2 vezes em } x \text{ e 2 vezes em } y}{=} \int_0^B f(t) \left[\underbrace{K_{xx}(x, y, t) + K_{yy}(x, y, t)}_{(8.272)_0} \right] dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

Além disso, de (8.252), segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $(x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2$, temos que

$$K_n(x, 0, t) \stackrel{(8.252)}{=} \underset{\text{com } y=0}{=} \frac{2}{B} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \cdot 0}{B}\right)}^{=0}$$

$$= 0,$$

$$K_n(x, B, t) \stackrel{(8.252)}{=} \underset{\text{com } y=B}{=} \frac{2}{B} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi B}{B}\right)}{=\operatorname{sen}(n\pi)=0}$$

$$= 0,$$

$$K_n(0, y, t) \stackrel{(8.252)}{=} \underset{\text{com } x=0}{=} \frac{2}{B} \frac{\overbrace{\sinh\left(\frac{n\pi \cdot 0}{B}\right)}^{=0}}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{B}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right)$$

$$= 0,$$

ou seja,

$$K(x, 0, t) = K(x, B, t) = K(0, y, t) = 0, \quad (8.273)$$

para cada $(x, y, t) \in [0, A] \times \mathbb{R}^2$.

Portanto, para cada $(x, y) \in [0, A] \times [0, B]$, de (8.273) e (8.265), segue que

$$u(x, 0) \stackrel{(8.265)}{=} \int_0^B f(t) \overbrace{K(x, 0, t)}^{(8.273)_0} dt$$

$$= 0,$$

$$u(x, B) \stackrel{(8.265)}{=} \int_0^B f(t) \overbrace{K(x, B, t)}^{(8.273)_0} dt$$

$$= 0,$$

$$u(0, y) \stackrel{(8.265)}{=} \int_0^B f(t) \overbrace{K(x, y, 0)}^{(8.273)_0} dt$$

$$= 0,$$

ou seja, a função $u = u(x, y)$, dada por (8.265), satisfaz as condições de contorno (8.204) e (8.206).

Para finalizar, como a série de Fourier associada a função \underline{f} (ou seja, a função \underline{F} que é a sua extensão ímpar e $2B$ -periódica), converge uniformemente para a função \underline{f} , em $[0, A]$, segue que, para cada $y \in [0, B]$, teremos:

$$\begin{aligned} u(A, y) &\stackrel{(8.238)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi A}{B}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) \\ &\stackrel{(8.267)}{=} f(y), \end{aligned}$$

mostrando que a função $u = u(x, y)$, dada por (8.238) ou (8.265), é uma solução do problema (8.203), (8.204), (8.205), (8.206), (8.207) dado inicialmente e assim completamos a demonstração do Teorema (8.239). □

Observação 8.274 *O problema que resolvemos acima é um caso particular do problema de Dirichlet*

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \quad (8.275)$$

$$u|_{\partial\Omega} = f, \quad (8.276)$$

$$u \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}), \quad (8.277)$$

onde $f \in C(\partial\Omega; \mathbb{R})$, para o caso que

$$\Omega \doteq (0, A) \times (0, B),$$

ou, mais geralmente,

$$\Omega \doteq (a, A) \times (b, B).$$

8.3.0.4 O Problema de Dirichlet num Círculo

Esse problema consiste em encontrar uma função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaça o seguinte problema:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \quad (8.278)$$

$$u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega), \quad (8.279)$$

$$u \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}), \quad (8.280)$$

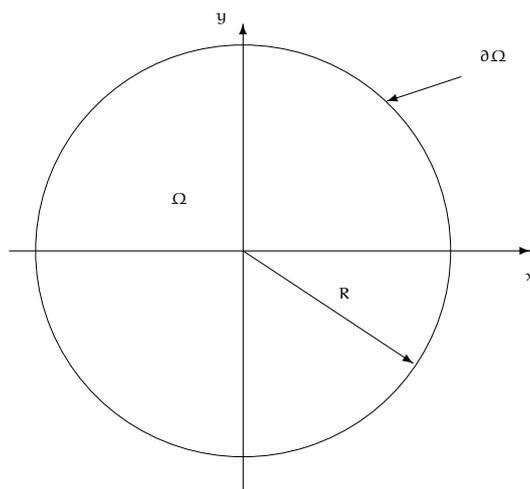
onde

$$\Omega \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < R^2\},$$

para $R \in (0, \infty)$ fixado, isto é, o interior de uma circunferência de centro no ponto $(0, 0)$ e raio R e

$$\partial\Omega \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = R^2\},$$

ou seja, a fronteira de Ω , isto é, a circunferência de centro no ponto $(0, 0)$ e raio R (veja a figura abaixo).



Vamos considerar o caso que

$$R = 1.$$

O caso geral, isto é, $R \neq 1$, pode ser resolvido de modo semelhante.

Para tanto, basta considerar uma mudança de variáveis, do tipo homotetia, conveniente.

Os detalhes deste caso serão deixados como exercício para o leitor.

Observação 8.281 Não podemos aplicar o método da separação de variáveis ao problema (8.278), (8.279), (8.280) acima pois a região $\overline{\Omega}$ não é um retângulo, cujos os lados são paralelos aos eixos coordenados.

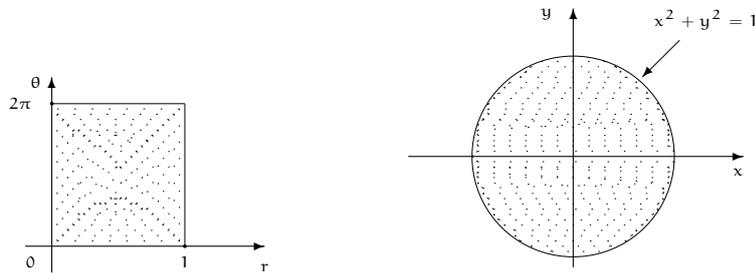
Devido a este fato precisaremos transformar o problema acima, por meio de uma mudança de variáveis, em problema equivalente, que esteja definido em um retângulo, cujos os lados são paralelos aos eixos coordenados, para os quais possamos tentar aplicar o método da separação de variáveis.

Notemos que, neste caso podemos descrever a região $\overline{\Omega}$ (ou seja, o círculo unitário centrado na origem) em coordenadas polares, considerando a seguinte transformação:

$$x = x(r, \theta) \doteq r \cos(\theta), \quad (8.282)$$

$$y = y(r, \theta) \doteq r \sin(\theta), \quad (8.283)$$

para $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi)$.



Neste caso, teremos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (8.284)$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ = \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \end{cases}. \quad (8.285)$$

Faremos a mudança de variáveis (8.282), (8.283) na equação Laplace (8.278).

Para tanto, consideremos a função $v : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v(r, \theta) \doteq u[x(r, \theta), y(r, \theta)], \quad (8.286)$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, ou ainda,

$$u(x, y) \doteq v[r(x, y), \theta(x, y)], \quad (8.287)$$

para cada $(x, y) \in \overline{\Omega}$.

Logo, para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, da regra da cadeia para funções a valores reais, de duas variáveis reais, segue que: que:

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &\stackrel{(8.286)}{=} u_x[x(r, \theta), y(r, \theta)] \underbrace{x_r(r, \theta)}_{\stackrel{(8.282)}{=} \cos(\theta)}} + u_y[x(r, \theta), y(r, \theta)] \underbrace{y_r(r, \theta)}_{\stackrel{(8.283)}{=} \operatorname{sen}(\theta)}} \\ &= \cos(\theta) u_x[x(r, \theta), y(r, \theta)] + \operatorname{sen}(\theta) u_y[x(r, \theta), y(r, \theta)] \\ &\stackrel{\text{abreviadamente}}{=} \cos(\theta) u_x + \operatorname{sen}(\theta) u_y, \end{aligned} \quad (8.288)$$

$$\begin{aligned} v_\theta(r, \theta) &= u_x[x(r, \theta), y(r, \theta)] \underbrace{x_\theta(r, \theta)}_{\stackrel{(8.282)}{=} -r \operatorname{sen}(\theta)}} + u_y[x(r, \theta), y(r, \theta)] \underbrace{y_\theta(r, \theta)}_{\stackrel{(8.283)}{=} r \cos(\theta)}} \\ &= -r \operatorname{sen}(\theta) u_x[x(r, \theta), y(r, \theta)] + r \cos(\theta) u_y[x(r, \theta), y(r, \theta)] \\ &\stackrel{\text{abreviadamente}}{=} -r \operatorname{sen}(\theta) u_x + r \cos(\theta) u_y, \end{aligned} \quad (8.289)$$

$$\begin{aligned}
v_{rr}(r, \theta) &\stackrel{(8.288)}{=} \frac{\partial}{\partial r} \{ \cos(\theta) u_x [x(r, \theta), y(r, \theta)] + \operatorname{sen}(\theta) u_y [x(r, \theta), y(r, \theta)] \} \\
&\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} \cos(\theta) \left[\underbrace{u_{xx}}_{(8.282) \cos(\theta) x_r} + \underbrace{u_{xy}}_{(8.283) \operatorname{sen}(\theta) y_r} \right] \\
&\quad + \operatorname{sen}(\theta) \left[\underbrace{u_{yx}}_{(8.282) \cos(\theta) x_r} + \underbrace{u_{yy}}_{(8.283) \operatorname{sen}(\theta) y_r} \right] \\
&= \cos(\theta) [u_{xx} \cos(\theta) + u_{xy} \operatorname{sen}(\theta)] + \operatorname{sen}(\theta) [u_{yx} \cos(\theta) + u_{yy} \operatorname{sen}(\theta)] \\
&\stackrel{\text{Teor. Schwarz } u_{yx}=u_{xy}}{=} \cos^2(\theta) u_{xx} + 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) u_{xy} + \operatorname{sen}^2(\theta) u_{yy}, \quad (8.290)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\theta\theta}(r, \theta) &\stackrel{(8.289)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ -r \operatorname{sen}(\theta) u_x [x(r, \theta), y(r, \theta)] + r \cos(\theta) u_y [x(r, \theta), y(r, \theta)] \} \\
&\stackrel{\text{regra da cadeia}}{=} r \left\{ - \left[\cos(\theta) u_x + \operatorname{sen}(\theta) \left(\underbrace{u_{xx}}_{(8.282) -r \operatorname{sen}(\theta) x_\theta} + \underbrace{u_{xy}}_{(8.283) r \cos(\theta) y_\theta} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[-\operatorname{sen}(\theta) u_y + \cos(\theta) \left(\underbrace{u_{yx}}_{(8.282) -r \operatorname{sen}(\theta) x_\theta} + \underbrace{u_{yy}}_{(8.283) r \cos(\theta) y_\theta} \right) \right] \right\} \\
&= r \{ -[\cos(\theta) u_x + \operatorname{sen}(\theta) [-r \operatorname{sen}(\theta) u_{xx} + r \cos(\theta) u_{xy}]] \\
&\quad + [-\operatorname{sen}(\theta) u_y + \cos(\theta) [-r \operatorname{sen}(\theta) u_{yx} + r \cos(\theta) u_{yy}]] \} \\
&= -r \cos(\theta) u_x - r \operatorname{sen}(\theta) u_{yy} + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) u_{xx} - r^2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) u_{xy} \\
&\quad - r^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) u_{yx} + r^2 \cos^2(\theta) u_{yy} \\
&= -r \cos(\theta) u_x - r \operatorname{sen}(\theta) u_y + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) u_{xx} \\
&\quad - 2 r^2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) u_{xy} + r^2 \cos^2(\theta) u_{yy}. \quad (8.291)
\end{aligned}$$

Portanto a função $u = u(x, y)$ é solução da equação de Laplace (8.278) em $\underline{\Omega}$ se, e somente se, a função $v = v(r, \theta)$, dada por (8.286), satisfaz a seguinte EDP, em $\Omega' \doteq (0, 1) \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} &\stackrel{(8.290), (8.288), (8.291)}{=} [\cos^2(\theta) u_{xx} + 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) u_{xy} + \operatorname{sen}^2(\theta) u_{yy}] \\
&\quad + \frac{1}{r} [\cos(\theta) u_x + \operatorname{sen}(\theta) u_y] \\
&\quad + \frac{1}{r^2} [-r \cos(\theta) u_x - r \operatorname{sen}(\theta) u_y + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) u_{xx} \\
&\quad - 2 r^2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) u_{xy} + r^2 \cos^2(\theta) u_{yy}] \\
&= u_{xx} + u_{yy} \stackrel{(8.278)}{=} 0
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$r^2 v_{rr}(r, \theta) + r v_r(r, \theta) + v_{\theta\theta}(r, \theta) = 0, \quad \text{para } (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}. \quad (8.292)$$

Definindo-se a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(\theta) \doteq f[\cos(\theta), \sin(\theta)], \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R}, \quad (8.293)$$

segue que, a condição (8.279), tornar-se-á:

$$\begin{aligned} v(1, \theta) &\stackrel{(8.286)}{=} u[x(1, \theta), y(1, \theta)] \\ &\stackrel{(8.282) \text{ e } (8.283)}{=} u[\cos(\theta), \sin(\theta)] \\ &\stackrel{[\cos(\theta), \sin(\theta)] \in \partial\Omega \text{ e } (8.279)}{=} f[\cos(\theta), \sin(\theta)] \\ &\stackrel{(8.293)}{=} g(\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (8.294)$$

Observemos também que:

$$\begin{aligned} v(r, \theta + 2\pi) &\stackrel{(8.286)}{=} u[x(r, \theta + 2\pi), y(r, \theta + 2\pi)] \\ &\stackrel{(8.282) \text{ e } (8.283)}{=} u[(r \cos(\theta + 2\pi), r \sin(\theta + 2\pi))] \\ &= u[(r \cos(\theta), r \sin(\theta))] \\ &\stackrel{(8.282) \text{ e } (8.283)}{=} u[x(r, \theta), y(r, \theta)] \\ &\stackrel{(8.286)}{=} v(r, \theta), \quad \text{para cada } (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8.295)$$

ou seja, para cada $r \in [0, 1]$ a função

$$\theta \mapsto v(r, \theta)$$

deverá ser 2π -periódica.

Portanto, de (8.292), (8.295), (8.294), segue que a função $v = v(r, \theta)$ deverá ser solução do seguinte problema:

$$r^2 v_{rr}(r, \theta) + r v_r(r, \theta) + v_{\theta\theta}(r, \theta) = 0, \quad \text{para } (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \quad (8.296)$$

$$v(r, \theta + 2\pi) = v(r, \theta), \quad \text{para cada } (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \quad (8.297)$$

$$v(1, \theta) = g(\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R}, \quad (8.298)$$

$$v \in C([0, 1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap C^2([0, 1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad (8.299)$$

onde (veja (8.293) e (8.279))

$$g \in C_{\text{per}}(2\pi). \quad (8.300)$$

Tentaremos solução não triviais do problema acima, isto é,

$$v(r, \theta) \neq 0, \quad \text{para cada } (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}. \quad (8.301)$$

Aplicaremos o método da separação de variáveis para obter uma candidata $v(r, \theta)$ a solução envolvendo, inicialmente, (8.296), (8.297) e (8.299), ou seja, uma solução do tipo

$$v(r, \theta) \doteq \phi(r) \psi(\theta), \quad \text{para cada } (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}. \quad (8.302)$$

Notemos que, de (8.301), deveremos ter

$$\phi(r), \psi(\theta) \neq 0, \quad (8.303)$$

para algum $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Notemos que, supondo que as funções ψ e ϕ são duas vezes diferenciáveis em $[0, 1]$ e \mathbb{R} , respectivamente, então, para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) &\stackrel{(8.302)}{=} \frac{\partial}{\partial r} [\psi(r) \phi(\theta)] \\ &= \psi'(r) \phi(\theta), \end{aligned} \quad (8.304)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) \right] \\ &\stackrel{(8.304)}{=} \frac{\partial}{\partial r} [\psi'(r) \phi(\theta)] \\ &= \psi''(r) \phi(\theta), \end{aligned} \quad (8.305)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) &\stackrel{(8.302)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta} [\psi(r) \phi(\theta)] \\ &= \psi(r) \phi'(\theta), \end{aligned} \quad (8.306)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) \right] \\ &\stackrel{(8.306)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta} [\psi(r) \phi'(\theta)] \\ &= \psi(r) \phi''(\theta), \end{aligned} \quad (8.307)$$

Sustituindo (8.305), (8.302) e (8.307) em (8.296) obteremos, para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 v_{rr}(r, \theta) + r v_r(r, \theta) + v_{\theta\theta}(r, \theta) \\ &\stackrel{(8.305), (8.302), (8.307)}{=} r^2 \phi''(r) \psi(\theta) + r \phi'(r) \psi(\theta) + \phi(r) \psi''(\theta). \end{aligned}$$

Dividindo a identidade acima por $\phi(r)\psi(\theta) \neq 0$, obteremos:

$$\frac{r^2 \phi''(r)\psi(\theta) + r\phi'(r)\psi(\theta) + \phi(r)\psi''(\theta)}{\phi(r)\psi(\theta)} = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{r^2 \phi''(r) + r\phi'(r)}{\phi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \text{constante} = \lambda,$$

isto é, teremos que resolver os seguintes problemas:

$$\psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0, \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}, \quad (8.308)$$

$$\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R}, \quad (8.309)$$

$$\psi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad (8.310)$$

e

$$r^2 \phi''(r) + r\phi'(r) - \lambda\phi(r) = 0, \quad \text{para } r \in [0, 1], \quad (8.311)$$

$$\phi \in C([0, 1]; \mathbb{R}) \cap C^2([0, 1]; \mathbb{R}). \quad (8.312)$$

Observemos que se a função

$$\psi = \psi(\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R},$$

for solução (eventualmente complexa) de (8.308) então, utilizando integração por partes para a integral definida, obteremos:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^{2\pi} |\psi(t)|^2 dt &= \lambda \int_0^{2\pi} \psi(t) \overline{\psi(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \lambda \psi(t) \overline{\psi(t)} dt \\ &\stackrel{(8.308)}{=} \int_0^{2\pi} -\psi''(t) \overline{\psi(t)} dt \\ &\left\langle \begin{array}{l} u = \overline{\psi(t)}, \text{ logo: } du = \overline{\psi'(t)} dt \\ dv = -\psi''(t), \text{ logo: } v = -\psi'(t) \end{array} \right\rangle \\ &= \left[-\psi'(t) \overline{\psi(t)} \right] \Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} [-\psi'(t)] \overline{\psi'(t)} dt \\ &= - \left[\underbrace{\psi'(2\pi) \overline{\psi(2\pi)} - \psi'(0) \overline{\psi(0)}}_{\psi, \psi' \text{ são } 2\pi\text{-periódica}_0} \right] + \int_0^{2\pi} \psi'(t) \overline{\psi'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \psi'(t) \overline{\psi'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt \geq 0. \end{aligned} \quad (8.313)$$

Com isto, segue que $\lambda \in \mathbb{R}$, ou ainda,

$$\lambda \geq 0. \quad (8.314)$$

Notemos que, se

$$\lambda = 0,$$

então, da identidade (8.313) acima, temos que

$$0 = \int_0^{2\pi} |\psi'(t)|^2 dt,$$

e como a função ψ' é contínua em \mathbb{R} (veja (8.310)), segue que

$$\psi'(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\psi(\theta) = \text{constante}, \quad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}. \quad (8.315)$$

Por outro lado, se

$$\lambda > 0,$$

então a solução geral da EDO (8.308) será dada por

$$\psi(\theta) = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R}. \quad (8.316)$$

Mas, de (8.309), segue que devemos ter:

$$\begin{aligned} & A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta) \stackrel{(8.316)}{=} \psi(\theta) \\ & \stackrel{(8.309)}{=} \psi(\theta + 2\pi) \\ & \stackrel{(8.316)}{=} A_\lambda \cos[\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)] + B_\lambda \sin[\sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi)] \\ & = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\theta + \sqrt{\lambda}2\pi) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\theta + \sqrt{\lambda}2\pi) \\ & = A_\lambda [\cos(\sqrt{\lambda}\theta) \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - \sin(\sqrt{\lambda}\theta) \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)] \\ & \quad + B_\lambda [\sin(\sqrt{\lambda}\theta) \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + \cos(\sqrt{\lambda}\theta) \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)] \\ & = [A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)] \cos(\sqrt{\lambda}\theta) \\ & \quad + [B_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - A_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}2\pi)] \sin(\sqrt{\lambda}\theta). \end{aligned} \quad (8.317)$$

Notemos que, fazendo:

$$\theta = 0, \quad \text{em (8.317), obteremos: } A_\lambda = A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) + B_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}2\pi), \quad (8.318)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \text{em (8.317), obteremos: } B_\lambda = B_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}2\pi) - A_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}2\pi). \quad (8.319)$$

Multiplicando-se (8.318) por A_λ , (8.319) por B_λ e somando-se os resultados obtidos, teremos:

$$\underbrace{A_\lambda^2 \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) + A_\lambda B_\lambda \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} 2\pi)}_{=} + \underbrace{B_\lambda^2 \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) - B_\lambda A_\lambda \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} 2\pi)}_{=} = A_\lambda^2 + B_\lambda^2,$$

$$= (A_\lambda^2 + B_\lambda^2) \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi)$$

ou seja

$$\cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 1,$$

$$\text{ou ainda, } \sqrt{\lambda} 2\pi = 2k\pi, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N},$$

$$\text{equivalentemente, } \sqrt{\lambda} = k, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\lambda = k^2, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \quad (8.320)$$

Logo, substituindo (8.320) em (8.316), obteremos:

$$\psi(\theta) \stackrel{(8.316)}{=} A_\lambda \cos(\sqrt{\lambda} \theta) + B_\lambda \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} \theta)$$

$$\stackrel{(8.320)}{=} A_k \cos(k\theta) + B_k \operatorname{sen}(k\theta)$$

ou seja,

$$\psi_k(\theta) \doteq A_k \cos(k\theta) + B_k \operatorname{sen}(k\theta), \quad \text{para } \theta \in \mathbb{R}, \quad (8.321)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Observemos que o caso $k = 0$ dará origem a solução constante que já foi tratada no caso $\lambda = 0$ (veja (8.315)).

Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, substituindo-se (8.320) na EDO (8.311), teremos:

$$0 \stackrel{(8.311)}{=} r^2 \phi''(r) + r \phi'(r) - \lambda \phi(r)$$

$$\stackrel{(8.320)}{=} r^2 \phi''(r) + r \phi'(r) - k^2 \phi(r), \quad \text{para cada } r \in [0, 1),$$

ou seja,

$$r^2 \phi''(r) + r \phi'(r) - k^2 \phi(r) = 0, \quad \text{para cada } r \in [0, 1), \quad (8.322)$$

que é a conhecida equação de Euler de 2.^a ordem.

Para resolvê-la, procuraremos soluções da forma

$$\phi(r) \doteq r^\alpha, \quad (8.323)$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Supondo que a função $\underline{\phi}$ é duas vezes diferenciável em $[0, 1)$ (veja (8.312)), para cada $r \in [0, 1)$, teremos:

$$\begin{aligned}\phi'(r) &\stackrel{(8.323)}{=} \frac{d}{dr} [r^\alpha] \\ &= \alpha r^{\alpha-1},\end{aligned}\tag{8.324}$$

$$\begin{aligned}\phi''(r) &= \frac{d}{dr} [\phi'(r)] \\ &\stackrel{(8.324)}{=} \frac{d}{dr} [\alpha r^{\alpha-1}] \\ &= \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2}.\end{aligned}\tag{8.325}$$

Para cada $r \in [0, 1)$, substituindo (8.323), (8.324), (8.325) na equação de Euler (8.322), obtemos:

$$\begin{aligned}0 &\stackrel{(8.322)}{=} r^2 \phi''(r) + r \phi'(r) - k^2 \phi(r) \\ &\stackrel{(8.323), (8.324), (8.325)}{=} r^2 [\alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2}] + r [\alpha r^{\alpha-1}] - k^2 r^\alpha \\ &= [\alpha(\alpha-1) + \alpha - k^2] r^\alpha \\ &= [\alpha^2 - k^2] r^\alpha, \quad \text{para } r \in [0, 1),\end{aligned}$$

assim, se $r \in (0, 1)$, segue que: $[\alpha^2 - k^2] = 0$,

ou seja, $\alpha = \pm k$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, uma solução da equação de Euler (8.322), será a função $\phi_k : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\phi_k(r) \doteq C_k r^k + D_k r^{-k}, \quad \text{para cada } r \in [0, 1).\tag{8.326}$$

Como estamos procurando funções que satisfaçam (8.312), as soluções da equação de Euler (8.322) deverão ser funções contínuas definidas em $[0, 1]$, em particular, deverão ser contínuas em

$$r = 0,$$

deveremos ter

$$D_k = 0, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.\tag{8.327}$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, de (8.326) e (8.327), as soluções da equação de Euler (8.322) que nos interessarão, serão dadas por:

$$\phi_k(r) \doteq C_k r^k, \quad \text{para cada } r \in [0, 1).\tag{8.328}$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, definiremos a função $v_k : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v_k(r, \theta) \doteq \phi_k(r) \psi_k(\theta) \\ \stackrel{(8.321)}{=} \stackrel{(8.328)}{=} r^k [A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta)], \quad (8.329)$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Logo tentaremos uma solução (formal) de (8.296), (8.297), (8.298), (8.299) da forma:

$$v(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r, \theta) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(r) \psi_k(\theta) \\ \stackrel{(8.329)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} r^k [A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta)], \quad (8.330)$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\cos(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}, \quad (8.331)$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$.

Para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, substituindo (8.331) e (8.330), obteremos:

$$v(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k [A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta)] \\ = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left[A_k \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} + B_k \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} \right] \\ = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left[\frac{A_k - iB_k}{2} e^{ik\theta} + \frac{A_k + iB_k}{2} e^{-ik\theta} \right] \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k - iB_k}{2} e^{ik\theta} r^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k + iB_k}{2} e^{i(-k)\theta} r^k \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta} r^{|n|}. \quad (8.332)$$

onde, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos:

$$C_0 \doteq \frac{A_0}{2} \\ C_n \doteq \frac{A_n - iB_n}{2} \\ C_{-n} \doteq \frac{A_n + iB_n}{2}.$$

Impondo a condição inicial, isto é, (8.298), obteremos:

$$g(\theta) \stackrel{(8.298)}{=} v(1, \theta) \\ \stackrel{(8.332)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\theta}, \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R}.$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{Z}$, o número real C_k deverá ser o k -ésimo coeficiente de Fourier (na forma complexa), associado à função g , ou seja,

$$C_k = \widehat{g}(k) \\ \stackrel{(7.215)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{Z}. \quad (8.333)$$

Sustituindo (8.333) em (8.332) podemos obter, formalmente, uma candidata a solução para o problema (8.296), (8.297), (8.298), (8.299), a saber,

$$v(r, \theta) \stackrel{(8.332)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\theta} r^{|k|} \\ \stackrel{(8.333)}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt \right] e^{ik\theta} r^{|k|}, \quad (8.334)$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Pode-se mostrar que a série de funções (8.334) acima, converge uniformemente, em $[0, 1] \times \mathbb{R}$, que pode ser derivada parcialmente, termo a termo, duas vezes em relação a r e em relação a θ , em $[0, 1] \times \mathbb{R}$, e satisfaz (8.296), (8.297), (8.298), (8.299).

A verificação desses fatos será feita na demonstração do Teorema (8.335), a seguir.

Com isto a função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$u(x, y) \doteq v(r(x, y), \theta(x, y)),$$

onde $r = r(x, y)$ e $\theta = \theta(x, y)$, são dadas por (8.284) e (8.285), respectivamente, será uma solução de (8.278), (8.279) e (8.280), com

$$\Omega \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\},$$

como afirma o:

Teorema 8.335 *Sejam*

$$\Omega \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\} \quad (8.336)$$

e $f \in C(\partial\Omega; \mathbb{R})$.

Se a função

$$v = v(r, \theta), \quad \text{para cada } (r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$$

é dada por (8.334) então a função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$u(x, y) \doteq \begin{cases} v[r(x, y), \theta(x, y)], & \text{para } (x, y) \in \Omega, \\ f(x, y), & \text{para } (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.337)$$

será uma solução de (8.278), (8.279), (8.280), onde $r = r(x, y)$ e $\theta = \theta(x, y)$, são dadas por (8.284) e (8.285), respectivamente.

Para a demonstração do resultado acima precisaremos de alguns resultados que serão apresentados a seguir.

Notemos que, de (8.334), temos:

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt \right] e^{ik\theta} r^{|k|} \\ &\stackrel{\text{Cuidado!}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikt} e^{ik\theta} r^{|k|} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(\theta-t)} r^{|k|} \right) dt, \end{aligned} \quad (8.338)$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Para cada $r \in [0, 1)$, definamos a função $P_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$$P_r(t) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} r^{|k|}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}, \quad (8.339)$$

que será denominado **núcleo de Poisson** (no disco unitário).

Substituindo (8.339) em (8.338), obteremos:

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt, \quad (8.340)$$

para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$.

Notemos que, para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} P_r(t) &\stackrel{(8.339)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} r^{|k|} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikt} r^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{ikt} r^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikt} r^k + \sum_{k=1}^{\infty} e^{i(-k)t} r^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{it})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{-it})^k. \end{aligned} \quad (8.341)$$

Para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$ fixado, cada uma das duas series numéricas em (8.341), são séries geométricas de razões (complexas)

$$r e^{it} \quad \text{e} \quad r e^{-it},$$

respectivamente.

Notemos também que

$$\begin{aligned} |r e^{it}| &= |r e^{-it}| \\ &= r < 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teste M. de Weierstras, as duas séries de funções em (8.341), serão uniformemente convergentes em $[0, 1) \times \mathbb{R}$ e suas somas (por serem séries geométricas), para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, serão dadas por:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikt} &= \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{it})^k \\ &\stackrel{\text{soma da série geométrica de razão } r e^{it}}{=} \frac{r e^{it}}{1 - r e^{it}}, \end{aligned} \quad (8.342)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} &= \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{-it})^k \\ &\stackrel{\text{soma da série geométrica de razão } r e^{-it}}{=} \frac{r e^{-it}}{1 - r e^{-it}}. \end{aligned} \quad (8.343)$$

Logo, para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, substituindo (8.342) e (8.343) em (8.341), obteremos:

$$\begin{aligned} P_r(t) &\stackrel{(8.341)}{=} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{it})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{-it})^k \\ &\stackrel{(8.342), (8.343)}{=} 1 + \frac{r e^{it}}{1 - r e^{it}} + \frac{r e^{-it}}{1 - r e^{-it}}. \end{aligned} \quad (8.344)$$

Notemos também que, para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{r e^{-it}}{1 - r e^{-it}} &\stackrel{e^{-it} = \cos(t) - i \operatorname{sen}(t)}{=} \frac{r \cos(t) - r i \operatorname{sen}(t)}{1 - r \cos(t) + r i \operatorname{sen}(t)} \\ &= \frac{r \cos(t) - i r \operatorname{sen}(t)}{[1 - r \cos(t)] + i r \operatorname{sen}(t)} \frac{[1 - r \cos(t)] - i r \operatorname{sen}(t)}{[1 - r \cos(t)] - i r \operatorname{sen}(t)} \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{r \cos(t) - i r \operatorname{sen}(t) - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \end{aligned} \quad (8.345)$$

$$\begin{aligned}
\frac{r e^{it}}{1 - r e^{it}} &\stackrel{e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)}{=} \frac{r \cos(t) + r i \operatorname{sen}(t)}{1 - r \cos(t) - r i \operatorname{sen}(t)} \\
&= \frac{r \cos(t) + i r \operatorname{sen}(t)}{[1 - r \cos(t)] - i r \operatorname{sen}(t)} \frac{[1 - r \cos(t)] + i r \operatorname{sen}(t)}{[1 - r \cos(t)] + i r \operatorname{sen}(t)} \\
&\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{r \cos(t) + i r \operatorname{sen}(t) - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2}. \tag{8.346}
\end{aligned}$$

Logo, para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, substituindo-se (8.345) (8.346) em (8.344), segue que:

$$\begin{aligned}
P_r(t) &\stackrel{(8.344)}{=} 1 + \frac{r e^{it}}{1 - r e^{it}} + \frac{r e^{-it}}{1 - r e^{-it}} \\
&\stackrel{(8.345) \text{ e } (8.346)}{=} 1 + \frac{r \cos(t) - i r \operatorname{sen}(t) - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} + \frac{r \cos(t) + i r \operatorname{sen}(t) - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \\
&\stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2}. \tag{8.347}
\end{aligned}$$

Observação 8.348 Definimos convergência uniforme apenas para sequências e séries de funções.

Para o que virá a seguir, precisaremos introduzir a:

Definição 8.349 Na situação acima, diremos que

$$v(r, \cdot) \rightarrow g$$

uniformemente em \mathbb{R} , quando $r \rightarrow 1^-$, se dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, de modo que,

$$\text{se } r \in (1 - \delta, 1), \text{ implicar em: } |v(r, \theta) - g(\theta)| < \varepsilon,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Para demonstrarmos o Teorema (8.335) precisaremos de algumas propriedades da função

$$P_r(t) \text{ e da função } v = v(r, \theta),$$

dadas por (8.347) e (8.340), respectivamente, que serão fornecidas pelos lemas abaixo.

Lema 8.350 Consideremos a função $P : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$P(r, t) \doteq P_r(t), \text{ para cada } (r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}, \tag{8.351}$$

onde $P_r(t)$ é dada por (8.347).

Então, para cada $r \in [0, 1)$ fixado, temos que a função $P_r = P(r, \cdot)$ é par e 2π -periódica.

Temos também que

$$P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$$

e satisfaz a seguinte EDP:

$$r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r, t) + r \frac{\partial P}{\partial r}(r, t) + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(r, t) = 0, \quad (8.352)$$

para $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$.

Na verdade, temos

$$P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R}; (0, \infty)). \quad (8.353)$$

Demonstração:

Observemos que, para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} P(r, t) &\stackrel{(8.351)}{=} P_r(t) \\ &\stackrel{(8.347)}{=} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2}, \end{aligned} \quad (8.354)$$

donde podemos concluir que a função

$$P_r = P(r, \cdot) \quad \text{é uma função par e } 2\pi\text{-periódica.} \quad (8.355)$$

Além disso, para cada $r \in [0, 1)$, teremos:

$$\begin{aligned} |1 - 2r \cos(t) + r^2| &= |(1 + r^2) - 2r \cos(t)| \\ &\stackrel{|a+b| \geq |a| - |b|}{\geq} 1 + r^2 - 2r \underbrace{|\cos(t)|}_{\leq 1} \\ &\geq 1 + r^2 - 2r \\ &= (1 - r^2) > 0. \end{aligned} \quad (8.356)$$

Logo, de (8.356) e (8.354), podemos concluir que

$$P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R}; (0, \infty)).$$

Assim podemos mostrar que (8.352) ocorre em $[0, 1) \times \mathbb{R}$.

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor, completando a demonstração do lema. □

Podemos agora demonstrar o:

Lema 8.357 A função $v = v(r, \theta)$, dada por (8.340), satisfaz

$$v \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$$

e

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + r \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0, \quad (8.358)$$

para $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$.

Demonstração:

Do Lema (8.350) temos que

$$P \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R}; (0, \infty)).$$

Da continuidade da função g e da Proposição (8.269) (verifique as hipóteses da mesma), podemos derivar parcialmente, sob o sinal de integração na expressão (8.340), em relação a r ou em relação a θ , a qualquer ordem, e assim teremos que

$$v \in C^\infty([0, 1) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

Além disso, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} & r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, \theta) + r \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r, \theta) \stackrel{(8.340)}{=} r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt \right] \\ & \quad + r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt \right] \\ & \quad + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt \right] \\ & \stackrel{\text{Proposição (8.269)}}{=} \left[\frac{1}{2\pi} r^2 \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{\partial^2 P_r}{\partial r^2}(\theta - t) dt \right] \\ & \quad + \left[\frac{1}{2\pi} r \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{\partial P_r}{\partial r}(\theta - t) dt \right] \\ & \quad + \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{\partial^2 P_r}{\partial \theta^2}(\theta - t) dt \right] \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \left(\underbrace{r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r, \theta - t) + r \frac{\partial P}{\partial r}(r, \theta - t) + \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}(r, \theta - t)}_{\stackrel{(8.352)}{=} 0} \right) dt \\ & = 0, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

A seguir mostraremos que

$$v(r, \cdot) \rightarrow g,$$

uniformemente em \mathbb{R} , quando $r \rightarrow 1^-$.

Antes precisaremos do:

Lema 8.359 Para cada $(r, \theta, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}^2$, teremos:

$$P(r, \theta - t) = \frac{1 - r^2}{|r e^{i\theta} - e^{it}|^2} \quad (8.360)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Temos também (como vimos anteriormente) que

$$P(r, t) > 0, \quad \text{para cada } (r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}. \quad (8.361)$$

Além disso, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt \\ &= 1. \end{aligned} \quad (8.362)$$

Demonstração:

Notemos que, para cada $(r, \theta, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}^2$, segue que:

$$\begin{aligned} |r e^{i\theta} - e^{it}|^2 &= (r e^{i\theta} - e^{it}) \overline{(r e^{i\theta} - e^{it})} \\ &= (r e^{i\theta} - e^{it}) \left(\underbrace{r}_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ \bar{r}}} \underbrace{e^{i\theta}}_{=e^{-i\theta}} - \underbrace{e^{it}}_{=e^{-it}} \right) \\ &= (r e^{i\theta} - e^{it}) (r e^{-i\theta} - e^{-it}) \\ &= r^2 \underbrace{e^{i(\theta-\theta)}}_{=e^{i \cdot 0}=1} \underbrace{e^{-i\theta}}_{=e^{-i\theta}} - r \underbrace{e^{i(\theta-t)}}_{=e^{i(\theta-t)}} \underbrace{e^{-it}}_{=e^{-it}} - r \underbrace{e^{it}}_{=e^{-i(\theta-t)}} \underbrace{e^{-i\theta}}_{=e^{-i\theta}} + \underbrace{e^{-it} e^{-it}}_{=e^{i(t-t)}=e^{i \cdot 0}=1} \\ &= r^2 - r \left[\underbrace{e^{i(\theta-t)}}_{=\cos(\theta-t)+i \operatorname{sen}(\theta-t)} + \underbrace{e^{-i(\theta-t)}}_{=\cos(\theta-t)-i \operatorname{sen}(\theta-t)} \right] + 1 \\ &= r^2 - r [\cos(\theta - t) + i \operatorname{sen}(\theta - t) + \cos(\theta - t) - i \operatorname{sen}(\theta - t)] + 1 \\ &= 1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2. \end{aligned} \quad (8.363)$$

Logo, para cada $(r, \theta, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} P(r, \theta - t) &\stackrel{(8.347)}{=} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} \\ &\stackrel{(8.363)}{=} \frac{1 - r^2}{|r e^{i\theta} - e^{it}|^2}, \end{aligned}$$

mostrando a identidade (8.360).

Observação 8.364 Notemos que, para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, de (8.360), segue que

$$P(r, t) > 0,$$

ou seja, vale (8.361), que é uma prova alternativa a feita no Lema (8.350).

Observemos também que, para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 P(r, t) &\stackrel{(8.339)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} r^{|k|} \\
 &\stackrel{\in \mathbb{R}, \text{ por (8.361)}}{=} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{ikt}}_{\cos(kt) + i \operatorname{sen}(kt)} r^{|k|} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(kt) r^{|k|} + i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(kt) r^{|k|} \right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(kt) r^{|k|} \\
 &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \cos(kt) r^{|k|}}_{\stackrel{\text{I}}{=}} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kt) r^{|k|} \\
 &\stackrel{n \stackrel{\text{I}}{=} -k \text{ em I}}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \cos(-nt) r^{|-n|}}_{\stackrel{\text{I}}{=}} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kt) r^{|k|} \\
 &\stackrel{\text{cosseno é uma função par}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nt) r^{|n|} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kt) r^{|k|} \\
 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kt) r^k. \tag{8.365}
 \end{aligned}$$

Observemos que, para cada $(r, t) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, teremos

$$|\cos(kt) r^k| \leq r^k. \tag{8.366}$$

Notemos que a série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ é convergente em \mathbb{R} , pois $r \in [0, 1)$.

Logo, de (8.365), (8.366) e do Teste M de Weierstrass (generalizado), segue que a série de funções (8.365) será uniformemente convergente em $[0, R] \times \mathbb{R}$, para cada $R \in [0, 1)$ fixado.

Assim, para $r \in [0, R]$, podemos integrar a série de funções (8.365), termo a termo e além disso, como a função $P(r, \cdot)$ é 2π -periódica (veja (8.355)), obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - t) dt & \left\langle \begin{array}{l} s \doteq \theta - t, \text{ logo : } ds = -dt \\ t = -\pi, \text{ logo : } s = \theta + \pi \\ t = \pi, \text{ logo : } s = \theta - \pi \end{array} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi} P(r, s) (-ds) \\ & \stackrel{P(r, \cdot) \text{ é } 2\pi\text{-periódica e o item 1. da Observação (7.128)}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, s) ds \\ & \stackrel{(8.365)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(ks) r^k \right) ds \\ & \stackrel{\text{Conv. uniforme da série de funções (8.365)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos(ks) r^k) ds \right) \\ & = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ks) ds. \end{aligned} \tag{8.367}$$

Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ks) ds & = \frac{1}{k} \text{sen}(ks) \Big|_{s=-\pi}^{s=\pi} \\ & = 0. \end{aligned} \tag{8.368}$$

Logo, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, substituindo (8.368) e (8.367), obteremos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - t) dt = 1,$$

ou seja, a identidade (8.362), completando a demonstração do resultado. □

Por fim, temos o:

Lema 8.369 *Na situação acima temos que ,*

$$v(r, \cdot) \rightarrow g, \quad \text{quando } r \rightarrow 1^-,$$

uniformemente em \mathbb{R} .

Demonstração:

Deveremos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\eta > 0$, de modo que

$$\text{se } r \in (1 - \eta, 1), \text{ teremos: } |v(r, \theta) - g(\theta)| < \varepsilon, \tag{8.370}$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Notemos que, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned} v(r, \theta) - g(\theta) &\stackrel{(8.340)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt - g(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt - g(\theta) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) dt}_{\stackrel{(8.340)}{=} 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g(t) - g(\theta)] P_r(\theta - t) dt. \end{aligned} \quad (8.371)$$

Logo, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} |v(r, \theta) - g(\theta)| &\stackrel{(8.371)}{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g(t) - g(\theta)] P_r(\theta - t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - g(\theta)| \underbrace{|P_r(\theta - t)|}_{\stackrel{(8.361)}{=} P_r(\theta - t) > 0} dt \\ &\quad \left\langle \begin{array}{l} s \doteq \theta - t, \text{ logo: } ds = -dt \\ t = -\pi, \text{ logo: } s = \theta + \pi \\ t = \pi, \text{ logo: } s = \theta - \pi \end{array} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta + \pi}^{\theta - \pi} |g(\theta - s) - g(\theta)| P_r(s) (-ds) \\ &\stackrel{P_r(\cdot) \text{ é } 2\pi\text{-per. e o item 1. da Obs. (7.128)}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta - s) - g(\theta)| P_r(s) ds. \end{aligned} \quad (8.372)$$

Como a função g é contínua em $[-\pi, \pi]$ e 2π -periódica (veja (8.300)), segue que ela será uma função uniformemente contínua em \mathbb{R} .

Logo, podemos encontrar $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que, se

$$\begin{aligned} \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \text{ satisfazem, } |\theta - \theta'| < \delta, \\ \text{segue que: } |g(\theta) - g(\theta')| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (8.373)$$

Além disso, a função g é limitada em \mathbb{R} , ou seja, podemos encontrar $M > 0$, de modo que

$$|g(\theta)| \leq M, \quad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}. \quad (8.374)$$

Com isto, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 |v(r, \theta) - g(\theta)| &\stackrel{(8.372)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta - s) - g(s)| P_r(s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |g(\theta - s) - g(s)| P_r(s) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |g(\theta - s) - g(s)| P_r(s) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |g(\theta - s) - g(s)| P_r(s) ds. \tag{8.375}
 \end{aligned}$$

Mas, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{-\delta} \underbrace{|g(\theta - s) - g(s)|}_{\stackrel{(8.374)}{\leq} 2M} P_r(s) ds &\leq 2M \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(s) ds \\
 &\left\langle \begin{array}{l} t \doteq -s, \text{ logo: } dt = -ds \\ s = -\pi, \text{ logo: } t = \pi \\ s = -\delta, \text{ logo: } t = \delta \end{array} \right\rangle 2M \int_{\pi}^{\delta} P_r(-t) (-dt) \\
 P_r \text{ é função par (veja (8.355))} &\stackrel{=}{=} 2M \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt, \tag{8.376}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|g(\theta - s) - g(s)|}_{\substack{s \in (-\delta, \delta) \text{ e } (8.373) \\ \leq \frac{\varepsilon}{2}}} P_r(s) ds &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(s) ds \\
 &\stackrel{(8.361)}{=} \underbrace{P_r(s) > 0}_{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds}_{\stackrel{(8.362)}{=} 2\pi} = \pi \varepsilon, \tag{8.377}
 \end{aligned}$$

$$\int_{\delta}^{\pi} \underbrace{|g(\theta - s) - g(s)|}_{\stackrel{(8.374)}{\leq} 2M} P_r(s) ds \leq 2M \int_{\delta}^{\pi} P_r(s) ds. \tag{8.378}$$

Logo, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, substituindo-se (8.376), (8.377) e (8.378) em (8.375), obteremos

$$|v(r, \theta) - g(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(s) ds. \tag{8.379}$$

Notemos que, para

$$\begin{aligned} s &\in (\delta, \pi], \\ \text{segue que: } \cos(s) &\leq \cos(\delta), \\ \text{ou seja, } 1 - 2r \cos(s) + r^2 &\geq 1 - 2r \cos(\delta) + r^2 > 0. \end{aligned} \quad (8.380)$$

Logo, para $s \in (\delta, \pi]$, teremos:

$$\begin{aligned} P_r(s) &\stackrel{(8.354)}{=} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(s) + r^2} \\ &\stackrel{(8.380)}{\leq} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta) + r^2} \\ &\stackrel{(8.354)}{=} P_r(\delta). \end{aligned} \quad (8.381)$$

Portanto, para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned} |v(r, \theta) - g(\theta)| &\stackrel{(8.378)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(s) \, ds \\ &\stackrel{(8.381)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(\delta) \, ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} (\pi - \delta) P_r(\delta). \end{aligned} \quad (8.382)$$

Por fim, quando $r \rightarrow 1^-$, segue que:

$$P_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{\underbrace{1 - 2r \cos(\delta) + r^2}_{r \rightarrow 1^- \rightarrow 2 - 2 \cos(\delta) \neq 0, \text{ pois } \delta > 0}} \rightarrow 0.$$

Notemos que $\delta > 0$, não depende de θ (veja (8.373)).

Logo, existirá $\eta > 0$, de modo que

$$\begin{aligned} r &\in (1 - \eta, 1), \\ \text{teremos: } P_r(\delta) &< \frac{\pi}{4M(\pi - \delta)} \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.383)$$

Portanto, para

$$\begin{aligned} r &\in (1 - \eta, 1), \\ \text{segue que: } |v(r, \theta) - g(\theta)| &\stackrel{(8.382)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} (\pi - \delta) P_r(\delta) \\ &\stackrel{(8.383)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi} \frac{\pi}{4M(\pi - \delta)} \varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, mostrando (8.370) e completando a demonstração do resultado. □

Podemos agora fazer a demonstração do Teorema (8.335).

Basta para isto notar que, pelos Lemas (8.357), (8.359) e o fato que, para cada $r \in [0, 1]$, a função $P(r, \cdot)$ é 2π -periódica, teremos que a função v dada por (8.341) será solução do nosso problema, se definirmos

$$v(1, \theta) \doteq g(\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R}.$$

Observação 8.384

1. Do Teorema (8.335) e do Lema (8.357), segue que

$$u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}).$$

Na verdade pode-se mostrar que

$$u \in C^\omega(\Omega; \mathbb{R}),$$

mais precisamente, a função u é a parte real de uma função

$$F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

que é holomorfa em $\underline{\Omega}$, ou seja, sua série de Taylor, em cada ponto $P_0 \in \Omega$, na forma complexa, é convergente para a função F , em alguma vizinhança do ponto P_0 contida em $\underline{\Omega}$, onde $\underline{\Omega}$ é o interior do círculo unitário centrado na origem.

8.4 Exercícios

Capítulo 9

Convolução, núcleo de Dirichlet, núcleo de Féjer, núcleo de Poisson

Neste capítulo trataremos da operação de convolução para funções periódicas e suas aplicações no estudo da convergência uniforme da série de Fourier associada a uma função periódica "bem comportada".

9.1 Convolução

Antes de introduzir o conceito de convolução para funções periódicas daremos o

Definição 9.1 *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo.*

*Diremos que a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é **uniformemente contínua em I** se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, de modo que*

$$\text{para } |x - y| < \delta, \text{ com } x, y \in I, \text{ tenhamos } |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (9.2)$$

Observação 9.3 *Vale observarmos que se a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em I , então ela será contínua em I .*

*A recíproca deste fato é falsa, ou seja, existem funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ que são contínuas em I mas **não** são uniformemente contínuas em I .*

Como exemplo, temos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq x^2, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

*A função f é contínua em \mathbb{R} , mas **não** é uniformemente contínua em \mathbb{R} . A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.*

Temos o seguinte resultado:

Proposição 9.4 *Se a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então ela será uniformemente contínua em $[a, b]$.*

Demonstração:

A demonstração foi vista em Análise I. □

Observação 9.5

1. Além da função f ser contínua, a propriedade que o domínio da função f deve satisfazer, para valer a conclusão da Proposição (9.4) acima, é que ele deve ser um subconjunto compacto de \mathbb{R} .

Tal conceito é estudado em Análise I.

2. Vimos anteriormente que o conjunto $C_{\text{per}}(2L)$ pode ser identificado, de modo natural, com o conjunto

$$\{f \in C([-L, L]; \mathbb{R}); f(-L) = f(L)\}.$$

Como consequência da Proposição (9.4) acima, temos o:

Corolário 9.6 *Se $f \in C_{\text{per}}(2L)$, então a função f será uniformemente contínua em \mathbb{R} .*

Podemos agora introduzir a

Definição 9.7 *Sejam $f, g \in SC_{\text{per}}(2L)$.*

*Definimos a convolução da função f com a função g , indicada por $f * g$, como sendo a função $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$(f * g)(x) \doteq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) g(x - y) dy. \quad (9.8)$$

Observação 9.9 *Como $f, g \in C_{\text{per}}(2L)$ segue que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, a função*

$$y \mapsto f(y) g(x_0 - y)$$

será uma função contínua por partes em \mathbb{R} , na verdade esta função pertencerá a $SC_{\text{per}}(2L)$ (isto é, também será $2L$ -periódica).

*Logo existirá a integral da mesma no intervalo $[-L, L]$, mostrando que $(f * g)(x)$ está bem definida, para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Com isto temos a:

Proposição 9.10 *Sejam $f, g, h \in SC_{\text{per}}(2L)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então*

1. $f * g \in C_{\text{per}}(2L)$;
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$;
3. $f * g = g * f$;
4. $(f + g) * h = f * h + g * h$;
5. $(\alpha \cdot f) * g = \alpha \cdot (f * g)$.

Demonstração:

De 1.:

Observemos que, de (9.8), segue que a função $\underline{f * g}$ é $2L$ -periódica.

De fato, pois, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} (f * g)(x + 2L) &\stackrel{(9.8)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) \underbrace{g[(x + 2L) - y]}_{=g[(x-y)+2L] \stackrel{g \text{ é } 2L\text{-per.}}{=} g(x-y)} dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) g(x - y) dy \\ &\stackrel{(9.8)}{=} (f * g)(x). \end{aligned} \tag{9.11}$$

Mostremos agora que a função $\underline{f * g}$ é uma função contínua em \mathbb{R} , ou seja, é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$.

Para isto notemos que, como as funções \underline{f} e \underline{g} são seccionalmente contínuas e $2L$ -periódicas, segue que elas deverão ser limitadas em \mathbb{R} , ou seja, existem $M, N \geq 0$, tais que

$$|f(y)| \leq M \quad \text{e} \quad |g(y)| \leq N, \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}. \tag{9.12}$$

Consideremos uma partição \mathcal{P} , do intervalo $[-L, L]$, isto é,

$$\mathcal{P} \doteq \{y_0 \doteq -L, \dots, y_j, \dots, y_n \doteq L\}, \tag{9.13}$$

de modo que, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, as funções

$$\begin{aligned} y &\mapsto f(y), \\ y &\mapsto g(x_0 - y), \quad \text{para cada } y \in (y_{j-1}, y_j) \end{aligned} \tag{9.14}$$

sejam funções contínuas em

$$(y_{j-1}, y_j)$$

e existam os seus respectivos limites laterais,

$$\text{quando } y \rightarrow y_{j-1}^+ \quad \text{e quando } y \rightarrow y_j^- .$$

A existência de tal partição do intervalo $[-L, L]$, decorre do fato que as funções f e g são contínuas por partes em qualquer intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\eta > 0$, de modo que

$$\eta < \frac{y_j - y_{j-1}}{2}, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (9.15)$$

$$\eta < \frac{L}{4nMN} \varepsilon. \quad (9.16)$$

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, consideremos o intervalo

$$I_j \doteq [x_0 - y_j, x_0 - y_{j-1}] \quad (9.17)$$

e a função $g_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}$. dada por

$$g_j(x) \doteq \begin{cases} g(x), & \text{para cada } x \in (x_0 - y_j, x_0 - y_{j-1}), \\ \lim_{y \rightarrow (x_0 - y_j)^+} g(y), & \text{para } x = x_0 - y_j, \\ \lim_{y \rightarrow (x_0 - y_{j-1})^-} g(y), & \text{para } x = x_0 - y_{j-1} \end{cases}. \quad (9.18)$$

Com isto, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, da definição da função g_j (ou seja, (9.18)) segue que

$$g_j \in C(I_j; \mathbb{R}).$$

Logo, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pela Proposição (9.4), segue que a função g_j será uniformemente contínua em I_j .

Logo, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, podemos encontrar $\delta_j > 0$, de modo que

$$\begin{aligned} & \text{se } y, z \in I_j, \quad \text{satisfaz } |y - z| < \delta_j, \\ \text{teremos: } & |g_j(y) - g_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2M}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Seja

$$\delta \doteq \min\{\eta, \delta_j; j \in \{1, 2, \dots, n\}\}. \quad (9.20)$$

Assim, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, de (9.15), segue que

$$y_{j-1} + 2\eta < y_j,$$

$$\text{ou seja, } y_{j-1} + \eta < y_j - \eta.$$

$$\text{Além disso, para } y \in [y_{j-1} + \eta, y_j - \eta] \quad \text{e } |h| < \delta, \quad (9.21)$$

$$\text{isto é, } -y_{j-1} - \eta \stackrel{(1)}{>} -y \stackrel{(2)}{>} \eta - y_j \quad \text{e } \delta \stackrel{(3)}{>} h \stackrel{(4)}{>} -\delta, \quad (9.22)$$

teremos:

(i) Afirmamos que

$$x_o + h - y \in I_j. \tag{9.23}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} x_o + \underbrace{h}_{(4) \text{ em (9.22)} > -\delta} - y &> x_o - \delta \underbrace{-y}_{(2) \text{ em (9.22)} > -y_j} \\ &> x_o \underbrace{-\delta + \eta - y_j}_{(9.20) \geq 0} \\ &\geq x_o - y_j, \end{aligned} \tag{9.24}$$

$$\begin{aligned} x_o + \underbrace{h}_{(3) \text{ em (9.22)} < \delta} - y &< x_o + \delta \underbrace{-y}_{(1) \text{ em (9.22)} < -\eta - y_{i-1}} \\ &< x_o + \underbrace{\delta - \eta - y_{j-1}}_{(9.20) \leq 0} \\ &\leq x_o - y_{j-1}. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Logo (9.24) e (9.25) implicarão que

$$x_o - y_j \stackrel{(9.24)}{\leq} x_o + h - y \stackrel{(9.25)}{\leq} x_o - y_{j-1},$$

que, de (9.17), é o mesmo que: $x_o + h - y \in I_j$.

(ii) Temos que

$$x_o - y \in I_j. \tag{9.26}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} x_o - y &\stackrel{(2) \text{ em (9.22)}}{>} x_o + \underbrace{\eta}_{>0} - y_j \\ &> x_o - y_j, \end{aligned} \tag{9.27}$$

$$\begin{aligned} x_o - y &\stackrel{(1) \text{ em (9.22)}}{<} x_o \underbrace{-\eta}_{<0} - y_{j-1} \\ &\leq x_o - y_{j-1}. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Logo (9.27) e (9.28), implicarão que

$$x_o - y_j \stackrel{(9.27)}{\leq} x_o - y \stackrel{(9.28)}{\leq} x_o - y_{j-1},$$

que, de (9.17), é o mesmo que: $x_o - y \in I_j$.

(iii) Temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |(x_0 + h - y) - (x_0 - y)| &= |h| \\ &\stackrel{(9.21)}{<} \delta \\ &\stackrel{(9.20)}{\leq} \delta_j. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Logo se $|h| < \delta$, segue que:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_0) - (f * g)(x_0 + h)| &\stackrel{(9.8)}{=} \left| \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) g(x_0 - y) dy - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) g(x_0 + h - y) dy \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) [g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(y) [g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)]| dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \underbrace{|f(y)|}_{\stackrel{(9.12)}{\leq} M} |g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)| dy \\ &\leq \frac{M}{2L} \int_{-L}^L |g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)| dy \\ &\stackrel{(9.13)}{\leq} \frac{M}{2L} \underbrace{\sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} |g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)| dy}_{\doteq A_j}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Notemos que, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, teremos:

$$\begin{aligned} A_j &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} |g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)| dy \\ &= \int_{y_{j-1}}^{y_{j-1} + \eta} \underbrace{|g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)|}_{\leq |g(x_0 - y)| + |g(x_0 + h - y)| \stackrel{(9.12)}{\leq} N + N} dy + \int_{y_{j-1} + \eta}^{y_j - \eta} \left| \underbrace{g(x_0 - y)}_{\stackrel{(ii) \bullet (9.18)}{=} g_j(x_0 - y)}} - \underbrace{g(x_0 + h - y)}_{\stackrel{(i) \bullet (9.18)}{=} g_j(x_0 + h - y)}} \right| dy \\ &\quad + \int_{y_j - \eta}^{y_j} \underbrace{|g(x_0 - y) - g(x_0 + h - y)|}_{\leq |g(x_0 - y)| + |g(x_0 + h - y)| \stackrel{(9.12)}{\leq} N + N} dy \\ &\leq 2N \int_{y_{j-1}}^{y_{j-1} + \eta} dy + \int_{y_{j-1} + \eta}^{y_j - \eta} |g_j(x_0 - y) - g_j(x_0 + h - y)| dy + 2N \int_{y_j - \eta}^{y_j} dy \\ &\leq 2N (y_{j-1} + \eta - y_{j-1}) + \int_{y_{j-1} + \eta}^{y_j - \eta} \underbrace{|g_j(x_0 - y) - g_j(x_0 + h - y)|}_{\stackrel{(9.29) \bullet (9.19)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2M}} dy + 2N (y_j - y_j + \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 4N\eta + \frac{\varepsilon}{2M} \int_{y_{j-1}+\eta}^{y_j-\eta} dy = 4N\eta + \frac{\varepsilon}{2M} \underbrace{(y_j - \eta - y_{j-1} - \eta)}_{=y_j - y_{j-1} - 2\eta < y_j - y_{j-1}} \\ &\leq 4N\eta + \frac{\varepsilon}{2M} (y_j - y_{j-1}). \end{aligned} \tag{9.31}$$

Substituindo (9.31) em (9.30) obteremos

$$\begin{aligned} |(f * g)(x_0) - (f * g)(x_0 + h)| &\leq \frac{M}{2L} \sum_{j=1}^n \left[4N\eta + \frac{\varepsilon}{2M} (y_j - y_{j-1}) \right] \\ &= \frac{2MN}{L} \underbrace{\eta}_{\stackrel{(9.16)}{\leq \frac{L}{4MN}\varepsilon}} \underbrace{\sum_{j=1}^n 1}_{=n} + \frac{\varepsilon}{4L} \underbrace{\sum_{j=1}^n (y_j - y_{j-1})}_{=2L} \\ &\leq \frac{2MNn}{L} \frac{L}{4nMN} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4L} 2L \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que a função $f * g$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$.

Portanto

$$f * g \in C_{\text{per}}(2L),$$

completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](x) &\stackrel{(9.8)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (f * g)(y) h(x - y) dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) g(y - z) dz \right] h(x - y) dy \\ &\stackrel{\text{Teor. Fubini em } SC_{\text{per}}(2L)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(y - z) h(x - y) dz \right] dy \\ &\left\langle \begin{array}{l} t \doteq y - z, \text{ logo: } dt = dy, \\ y = -L, \text{ logo: } t = -L - z, \\ y = L, \text{ logo: } t = L - z \end{array} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) \left[\frac{1}{2L} \underbrace{\int_{-L-z}^{L-z} g(t) h(x - t - z) dt}_{\substack{g, h \text{ são } 2L\text{-per. e o item 1. da Obs. (7.128)} \\ \int_{-L}^L g(t) h(x - t - z) dt}} \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) \left[\underbrace{\frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(t) h(x-t-z) dt}_{\stackrel{(9.8)}{=} (g*h)(x-y)} \right] dy \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) (g * h)(x-y) dy \\
&\stackrel{(9.8)}{=} [f * (g * h)](x),
\end{aligned}$$

completando a demonstração de o item 2. .

De 3.:

Notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &\stackrel{(9.8)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) g(x-y) dy \\
&\left\langle \begin{array}{l} z \doteq x-y, \text{ logo: } dz = -dy, \\ y = -L, \text{ logo: } t = x+L, \\ y = L, \text{ logo: } t = x-L \end{array} \right\rangle \frac{1}{2L} \int_{x+L}^{x-L} f(x-z) g(z) (-dz) \\
&= \frac{1}{2L} \underbrace{\int_{x-L}^{x+L} f(x-z) g(z) dz}_{\substack{g, h \text{ são } 2L\text{-per. e o item 1. da Obs. (7.128)} \\ \stackrel{(9.8)}{=} \int_{-L}^L g(z) f(x-z) dz}} \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(z) f(x-z) dz \\
&\stackrel{(9.8)}{=} (g * f)](x),
\end{aligned}$$

completando a demonstração do item 3. .

De 4.:

Observemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
[(f+g) * h](x) &\stackrel{(9.8)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (f+g)(y) h(x-y) dy \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L [f(y) h(x-y) + g(y) h(x-y)] dy \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) h(x-y) dy + \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(y) h(x-y) dy \\
&\stackrel{(9.8)}{=} [f * h + g * h](x),
\end{aligned}$$

completando a demonstração do item 4. .

De 5.:

Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} [(\alpha \cdot f) g](x) &\stackrel{(9.8)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (\alpha \cdot f)(y) g(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \alpha f(y) g(x-y) dy \\ &= \alpha \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) g(x-y) dy \right] \\ &\stackrel{(9.8)}{=} \alpha \cdot (f * g)(x), \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 5. e do resultado. □

Outra propriedade importante da convolução é dada pela:

Proposição 9.32 *Sejam $f, g \in SC_{\text{per}}(2L)$. Então*

$$\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \quad (9.33)$$

Resolução:

Notemos que, da Proposição (9.10) acima, segue que

$$(f * g) \in C_{\text{per}}(2L).$$

Logo podemos calcular os coeficientes de Fourier (complexos) associados à função $f * g$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &\stackrel{(7.215)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (f * g)(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\ &\stackrel{(9.8)}{=} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) g(x-y) dy \right] e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \\ &\stackrel{\text{Teor. Fubini em } SC_{\text{per}}(2L)}{=} \frac{1}{(2L)^2} \int_{-L}^L \left[\int_{-L}^L f(y) g(x-y) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx \right] dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x-y) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} e^{i \frac{n\pi}{L} y} dx \right] dy \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x-y) e^{-i \frac{n\pi}{L} (x-y)} dx \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \begin{array}{l} z \doteq x - y, \text{ logo: } dz = dx, \\ x = -L, \text{ logo: } z = -L - y, \\ x = L, \text{ logo: } z = L - y \end{array} \right\rangle \\
& = \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} \right] \left[\frac{1}{2L} \int_{-L-y}^{L-y} \underbrace{g(z) e^{-i \frac{n\pi}{L} z}}_{\substack{2L\text{-per. e o item 1. da Obs. (7.128)}}} dz \right] dy \\
& = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(z) e^{-i \frac{n\pi}{L} z} dz \right] dy \\
& = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} dy \underbrace{\hat{g}(n)}_{\substack{(7.215) \\ \hat{g}(n)}} \\
& = \hat{f}(n) \hat{g}(n), \tag{9.34}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 9.35

1. A Proposição (9.10) nos diz que a transformação

$$* : \text{SC}_{\text{per}}(2L) \times \text{SC}_{\text{per}}(2L) \rightarrow \text{C}_{\text{per}}(2L)$$

é bilinear e simétrica.

2. A Proposição (9.32) acima, nos diz que a transformada de Fourier " $\hat{\cdot}$ ", leva a convolução de duas funções periódicas seccionalmente contínuas, no produto das respectivas transformadas de Fourier de cada uma das funções envolvidas.

9.2 Núcleo de Dirichlet

Temos as seguintes observações:

Observação 9.36

1. Com a operação de convolução entre duas funções de $SC_{\text{per}}(2L)$, definida em (9.8), podemos escrever os Teoremas sobre a convergência da série de Fourier, estudados nas seções 7.5 e 7.6, de um modo diferente, como veremos adiante.

Antes de fazer isto, para simplificar, observamos que a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} [-L, L] &\rightarrow [-\pi, \pi] \\ x &\mapsto y \doteq \frac{\pi x}{L}, \end{aligned}$$

leva, isometricamente (e bijectivamente), o intervalo, $[-L, L]$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Desta forma podemos considerar, sem perda de generalidade,

$$L = \pi,$$

nas séries de Fourier a seguir.

Em particular, a série de Fourier de uma função $f \in SC_{\text{per}}(2\pi)$, na forma complexa, tornar-se-á:

$$\begin{aligned} S[f](x) &\doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}, \end{aligned} \quad (9.37)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\hat{f}(n) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (9.38)$$

2. Seja $f \in SC_{\text{per}}(2\pi)$.

Para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, denotemos por

$$S[f; N](x)$$

a N -ésima soma parcial da série de Fourier, associada à função f , na forma complexa, isto é

$$S[f; N](x) \doteq \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}. \quad (9.39)$$

Notemos que, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, teremos que

$$\begin{aligned}
 S[f; N](x) &= \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{-inx} \\
 &\stackrel{(9.38)}{=} \sum_{n=-N}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{iny} dy \right] e^{-inx} \\
 &\stackrel{\text{propriedade da integral definida}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right] dy, \quad (9.40)
 \end{aligned}$$

para cada $x \in [-\pi, \pi]$.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 9.41 Para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, definamos a função $D_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$D_N(x) \doteq \sum_{n=-N}^N e^{inx}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (9.42)$$

que será denominada núcleo de Dirichlet de ordem N .

Observação 9.43

1. Deste modo, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, de (9.40) e (9.42), segue que a identidade (9.39), tornar-se-á:

$$S[f; N](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (9.44)$$

ou seja,

$$S[f; N](x) = (f * D_N)(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (9.45)$$

2. Afirmamos que, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, a função $D_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é,

$$D_N(x) \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (9.46)$$

ou ainda, o núcleo de Dirichlet de ordem N é uma função a valores reais.

De fato, pois, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned}
 D_N(x) &\stackrel{(9.42)}{=} \sum_{n=-N}^N e^{inx} \\
 &= \sum_{n=-N}^{-1} e^{inx} + \overbrace{e^{i \cdot 0 \cdot x}}^{=e^0=1} + \sum_{n=1}^N e^{inx} \\
 &= \sum_{k=1}^N e^{-ikx} + 1 + \sum_{n=1}^N e^{inx} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^N \left[\underbrace{e^{-inx} + e^{inx}}_{=[\cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)] + [\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)] = 2 \cos(nx)} \right] \\
 &= 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx) \in \mathbb{R}, \tag{9.47}
 \end{aligned}$$

mostrando, em particular, que (9.46) ocorre.

3. Com isto o Teorema da convergência pontual da série de Fourier (isto é, o Teorema (7.307)) pode ser escrito na seguinte forma:

Seja $f \in SC_{\text{per}}(2\pi)$ uma função diferenciável em $(-\pi, \pi)$, exceto em um número finito de pontos em $(-\pi, \pi)$, de modo que $f' \in SC_{\text{per}}(2\pi)$.

Então, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, teremos:

$$(f * D_N)(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty. \tag{9.48}$$

4. De modo semelhante, o Teorema da convergência uniforme da série de Fourier (isto é, o Teorema (7.364)) pode ser escrito na seguinte forma:

Seja $f \in C_{\text{per}}(2\pi)$ uma função diferenciável em $(-\pi, \pi)$, exceto em um número finito de pontos em $(-\pi, \pi)$, de modo que $f' \in SC_{\text{per}}(2\pi)$.

Então, para cada $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$(f * D_N)(x) \longrightarrow f(x), \quad \text{quando } N \rightarrow \infty, \tag{9.49}$$

uniformemente em \mathbb{R} .

9.3 Convergência da série de Fourier no sentido de Cèsaro e o núcleo de Fejér

A seguir trataremos de outros modos de convergência da série de Fourier associada a uma função periódica.

Como foi mencionado anteriormente, existem funções contínuas 2π -periódicas, cuja série de Fourier diverge em um conjunto enumerável contido em $[-\pi, \pi]$.

No entanto podemos introduzir outros modos de estudar a convergência para uma série de funções de modo que uma série de funções que não era convergente em um "certo modo", poderá ser convergente, relativamente a um "outro modo".

Um desses modos é dado pela seguinte:

Definição 9.50 *Dada a série de Fourier associada a uma função $f \in SC_{\text{per}}(2L)$, diremos que esta é convergente (ou somável) no sentido de Cèsaro em $x_0 \in \mathbb{R}$, se para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, considerando-se a função $\sigma_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por*

$$\sigma_N[f; N](x) \doteq \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S[f; j](x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (9.51)$$

onde, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos que a função $S[f; j](x)$ é dada por (9.39) (ou (9.44), ou ainda (9.45)), existir o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma[f; N](x_0). \quad (9.52)$$

Observação 9.53

1. Notemos que, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma[f; N](x)$$

nada mais é que a média aritmética das somas parciais

$$S[f; 0](x), \quad S[f; 1](x), \quad \dots, \quad S[f; N](x).$$

2. Observemos também que, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$ e $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned} \sigma[f; N](x) &\stackrel{(9.51)}{=} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S[f; j](x) \\ &= \frac{1}{N+1} \{S[f; 0](x) + S[f; 1](x) + \dots + S[f; N](x)\} \\ &\stackrel{(9.45)}{=} \frac{1}{N+1} \{(f * D_0)(x) + (f * D_1)(x) + \dots + (f * D_N)(x)\} \\ &\stackrel{\text{itens 4. e 5. da Proposição (9.10)}}{=} \left(f * \left[\frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N D_j \right] \right) (x) \\ &= (f * K_N)(x), \end{aligned} \quad (9.54)$$

onde a função $K_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por:

$$K_N(x) \doteq \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N D_j(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (9.55)$$

que será denominado núcleo de Féjer de ordem N .

3. Notemos que o núcleo de Féjer de ordem N , é a média aritmética dos núcleos de Dirichlet.

4. Afirmamos que, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, teremos:

$$K_N(x) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{inx}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \quad (9.56)$$

A demonstração desta identidade será feita por indução sobre $N \in \mathbb{Z}^+$.

Notemos que

- A identidade (9.55) é verdadeira para $N = 0$ pois, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} K_0(x) &\stackrel{(9.56)}{\equiv} \frac{1}{0+1} \sum_{j=0}^0 D_j(x) \\ &= D_0(x) \\ &= \sum_{n=-0}^0 e^{inx} \\ &= 1, \end{aligned}$$

e

$$\sum_{n=-0}^0 \left(1 - \frac{|n|}{0+1}\right) e^{inx} = 1,$$

ou seja,

$$K_0(x) = 1 = \sum_{n=-0}^0 \left(1 - \frac{|n|}{0+1}\right) e^{inx},$$

mostrando que a identidade (9.56) vale para $N = 0$.

- Suponhamos que a identidade (9.56) seja verdadeira para

$$N = M - 1,$$

isto é,

$$\begin{aligned} K_{M-1}(x) &\stackrel{(9.56)}{=} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} \left(1 - \frac{|n|}{(M-1)+1}\right) e^{inx} \\ &= \sum_{n=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|n|}{M}\right) e^{inx}, \end{aligned} \quad (9.57)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Mostremos que a identidade (9.56) vale para

$$N = M.$$

Para isto, notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} K_M(x) &\stackrel{(9.55)}{=} \frac{1}{M+1} \sum_{j=0}^M D_j(x) \\ &= \frac{1}{M+1} \left[\sum_{j=0}^{M-1} D_j(x) + D_M(x) \right] \\ &= \frac{1}{M+1} \left[M \left(\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} D_j(x) \right) + D_M(x) \right] \\ &= \frac{1}{M+1} [M K_{M-1}(x) + D_M(x)] \\ &\stackrel{(9.57)}{=} \frac{1}{M+1} \left[M \sum_{n=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|n|}{M}\right) e^{inx} + \underbrace{\sum_{n=-M}^M e^{inx}} \right] \\ &= \frac{1}{M+1} \left[\sum_{n=-M+1}^{M-1} \underbrace{M \left(1 - \frac{|n|}{M}\right)}_{=M-|n|} e^{inx} + e^{-iMx} + \underbrace{\sum_{n=-M+1}^{M-1} e^{inx} + e^{iMx}} \right] \\ &= \frac{1}{M+1} \left[\sum_{n=-M+1}^{M-1} (M+1-|n|) e^{inx} + e^{-iMx} + e^{iMx} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{M+1} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} (M+1-|n|) e^{inx} + \frac{1}{M+1} e^{-iMx} + \frac{1}{M+1} e^{iMx} \\
&= \frac{1}{M+1} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} (M+1-|n|) e^{inx} + \left(1 - \frac{|-M|}{M+1}\right) e^{i(-M)x} + \left(1 - \frac{|M|}{M+1}\right) e^{iMx} \\
&= \frac{1}{M+1} \sum_{n=-M}^M (M+1-|n|) e^{inx} \\
&= \sum_{n=-M}^M \left(1 - \frac{|n|}{M+1}\right) e^{inx},
\end{aligned}$$

completando a prova da validade da identidade (9.56).

5. Como no caso do núcleo de Dirichlet, para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, temos que a função $K_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (9.55) (ou (9.56)), ou seja,

$$K_N(x) \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (9.58)$$

ou ainda, o núcleo de Féjer de ordem N é uma função a valores reais.

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração será omitida:

Teorema 9.59 *Seja $f \in C_{\text{per}}(2\pi)$.*

Então sua série de Fourier é uniformemente convergente, no sentido de Cèsaro, para a função f em \mathbb{R} , isto é,

$$\sigma_N[f; N] \rightarrow f, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty, \quad (9.60)$$

uniformemente em \mathbb{R} .

Vamos introduzir a:

Definição 9.61 Um polinômio trigonométrico é uma combinação linear finita, com coeficientes complexos, das funções

$$\Phi_n(x) \doteq e^{inx}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R} \quad \text{e } n \in \mathbb{Z}. \quad (9.62)$$

Observação 9.63 Com a nomenclatura acima, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
 \sigma[f; N](x) &\stackrel{(9.54)}{=} (f * K_N)(x) \\
 &\stackrel{(9.55)}{=} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N (f * D_j)(x) \\
 &\stackrel{(9.45)}{=} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S[f; j](x) \\
 &\stackrel{(9.39)}{=} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N \left[\sum_{n=-j}^j \widehat{f}(n) e^{inx} \right] \\
 &= \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N \sum_{n=-j}^j \widehat{f}(n) \Phi_n(x), \tag{9.64}
 \end{aligned}$$

ou seja, a função $\sigma[f; N]$ é um polinômio trigonométrico.

Portanto, nesta configuração, o Teorema (9.59) implicará no famoso Teorema de aproximação de Weierstrass, a saber:

Corolário 9.65 Toda função contínua e 2π -periódica pode ser aproximada, uniformemente, por um polinômio trigonométrico.

9.4 Convergência no sentido de Abel e núcleo de Poisson

Nesta seção trataremos um "outro modo" de convergência da série de Fourier, associada a uma função periódica "bem comportada".

Como vimos na seção anterior, existem "outros modos" de estudar a convergência da série de Fourier, associada a uma função periódica "bem comportada".

"Outro modo" de estudar a convergência da série de Fourier, associada a uma função periódica é dado pela:

Definição 9.66 Seja $f \in SC_{\text{per}}(2\pi)$.

Diremos que a série de Fourier, associada a uma função f , é convergente (ou somável) no sentido de Abel para cada $r \in [0, 1)$, a função $P_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$P[f; r](x) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{inx}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \tag{9.67}$$

estiver bem definida, ou seja, a série de funções (9.67) for convergente, para cada $r \in [0, 1)$, onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\widehat{f}(n) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{9.68}$$

Observação 9.69

1. Notemos que, para cada $r \in [0, 1)$ fixado, (9.67) nos fornece a média geométrica da série de Fourier, associada a uma função f .
2. Notemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned}
 P[f; r](x) &\stackrel{(9.67)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{inx} \\
 &\stackrel{(9.68)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right] r^{|n|} e^{inx} \\
 &\stackrel{\text{Cuidado!}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-y)} \right] dy \\
 &= (f * P_r)(x), \tag{9.70}
 \end{aligned}$$

onde, para cada $r \in [0, 1)$, a função $P_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$P_r(x) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \tag{9.71}$$

que será denominado núcleo de Poisson de ordem r , que foi estudado no Capítulo anterior (veja (8.339) o que se segue).

3. Na resolução da equação de Laplace no disco unitário obtivemos (veja (8.334)), para cada $(r, \theta) \in [0, 1) \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 v(r, \theta) &\stackrel{(8.334)}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt \right] e^{ik\theta} r^{|k|} \\
 &\stackrel{\text{Cuidado!}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sum_{k=0}^{\infty} [e^{-ik(\theta-t)} |r|^k] dt \\
 &\stackrel{(9.71)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) P_r(\theta - t) dt \\
 &= (g * P_r)(\theta), \tag{9.72}
 \end{aligned}$$

e

$$v(1, \theta) \doteq g(\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R}.$$

9.5 Exercícios

Capítulo 10

As identidades de Green e a equação de Laplace

Neste capítulo iniciaremos o estudo da unicidade do problema da unicidade de soluções do problema de Dirichlet

$$\Delta u = f, \quad \text{em } \Omega, \quad (10.1)$$

$$u = g, \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (10.2)$$

$$u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}), \quad (10.3)$$

onde $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto "bem comportado" de \mathbb{R}^n e

$$g \in C^2(\partial\Omega; \mathbb{R}). \quad (10.4)$$

Os resultados que apresentaremos a seguir valem em \mathbb{R}^n .

Porém, restringiremos os enunciados e demonstrações para o caso

$$n = 2.$$

10.1 O Teorema de Green e da divergência

Começaremos lembrando alguns conceitos importantes estudados anteriormente no curso de Espaços Métricos, a saber:

Definição 10.5 *Seja \underline{S} um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n .*

1. *Diremos que $A \subseteq S$ é um subconjunto aberto em \underline{S} , se existir um subconjunto \underline{A}_1 , que seja um subconjunto aberto em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, de modo que*

$$A = A_1 \cap S,$$

onde $d_{\mathbb{R}^n}$ é a métrica induzida pela norma usual, que será indicada por $\|\cdot\|$, do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, como \pm e \cdot as operações usuais de adição de n -uplas e multiplicação de número real por uma n -upla, respectivamente.

2. Diremos que $F \subseteq S$ é um subconjunto fechado em S , se existir um conjunto F_1 , que seja subconjunto fechado em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, tal que

$$A = F_1 \cap S.$$

3. Diremos que o conjunto S é um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, se o conjunto S não puder estar contido na reunião disjunta de dois subconjuntos abertos de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ e não vazios.

Pode-se mostrar que o conjunto S é um subconjunto conexo em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ se, e somente se, se $A \subseteq S$ é um subconjunto aberto e fechado em S , implicar, necessariamente, que

$$A = S \quad \text{ou} \quad A = \emptyset.$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

4. Diremos que o conjunto S é um subconjunto limitado em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, se existir $R > 0$, de modo que

$$S \subseteq B(\vec{O}; R),$$

onde

$$B(\vec{O}; R) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < R\},$$

e $\|\cdot\|$ denota a norma usual do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Definição 10.6 Seja D um subconjunto, não vazio, de \mathbb{R}^n .

1. Diremos que o conjunto D é um domínio em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, se o conjunto D é um subconjunto aberto e conexo em $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$.
2. Diremos que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ é um conjunto simplesmente conexo $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, se ele não possui "buracos", ou seja, qualquer curva fechada que está contida em D , delimita um região que também está contida em D .

A definição precisa deste conceito envolve conceitos mais delicados as quais não serão tratados neste contexto (a saber, a noção de curva contrátil, homotopia e outras).

Para o que segue, Ω um subconjunto aberto, não vazio, de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, $m \in \{2, 3, \dots\}$ e $k \in \mathbb{Z}^+$.

Definição 10.7 Diremos que a função $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ é uma função harmônica em Ω , se

$$\Delta u(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in \Omega, \quad (10.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Seja

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

a base canônica do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, ou seja, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que

$$\vec{e}_j \doteq (0, \dots, \underbrace{1}_{j\text{-ésima posição}}, 0, \dots, 0).$$

Definição 10.10

1. Diremos que uma função $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um campo vetorial real em Ω .

Neste caso, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe uma função $F_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que

$$\begin{aligned} \vec{F}(x) &= (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x)) \\ &= F_1(x) \cdot \vec{e}_1 + F_2(x) \cdot \vec{e}_2 + \cdots + F_m(x) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para cada } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, a função

$$F_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (10.12)$$

será dita j-ésima componente do campo vetorial \vec{F} .

2. Diremos que um campo vetorial $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ pertence à classe $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$, ou seja,

$$\vec{F} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m), \quad (10.13)$$

se cada uma de suas funções componentes pertencem a $C^k(\Omega; \mathbb{R})$, ou seja, se

$$F_j \in C^k(\Omega; \mathbb{R}), \quad (10.14)$$

para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definição 10.15 Consideremos $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$.

Definimos o campo gradiente associado a função f , indicado por ∇f , como sendo o campo vetorial $\nabla f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &\doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \vec{e}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot \vec{e}_n, \quad \text{para cada } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Também denotaremos, eventualmente, o campo gradiente associado a uma função f por $\text{grad}(f)$.

Definição 10.17 Diremos que um campo vetorial $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ provém de um potencial em Ω , se existir uma função $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ tal que

$$\nabla f(x) = \vec{F}(x), \quad \text{para cada } x \in \Omega, \quad (10.18)$$

isto é, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, deveremos ter

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = F_j(x), \quad \text{para cada } x \in \Omega, \quad (10.19)$$

onde o campo vetorial \vec{F} é dado por (10.11).

Definição 10.20 Consideremos um campo vetorial $\vec{F} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Definimos a divergência do campo vetorial \vec{F} , em Ω , indicado por $\nabla \bullet \vec{F}$, como sendo a função $\nabla \bullet \vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\nabla \bullet \vec{F}(x) \doteq \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x), \quad \text{para cada } x \in \Omega, \quad (10.21)$$

onde o campo vetorial \vec{F} é dado por (10.11).

Também denotaremos o divergente de um campo vetorial \vec{F} por $\text{div}(\vec{F})$.

Observação 10.22

1. Notemos que se $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ então, para cada $x \in \Omega$, teremos:

$$\begin{aligned} \text{div}[\text{grad}(f)](x) &= \nabla \bullet [\nabla f](x) \\ &\stackrel{(10.18)}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right](x) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) \\ &\stackrel{(10.9)}{=} \Delta f(x). \end{aligned} \quad (10.23)$$

Por isto utilizaremos, eventualmente, a seguinte notação:

$$\nabla^2 = \Delta. \quad (10.24)$$

2. Em várias situações que se apresentarão à frente, será conveniente estendermos as definições acima para subconjuntos fechados de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$.

Por exemplo, diremos que $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ se, e somente se, $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ e existem funções

$$g_1, \dots, g_n \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$$

tais que, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que:

$$g_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad \text{para cada } x \in \Omega. \quad (10.25)$$

3. Podemos estender alguns dos conceitos acima para funções (ou campo vetoriais) a valores complexos.

Deixaremos a elaboração dos mesmos como exercício para o leitor.

Definição 10.26 Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva parametrizada e $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$.

1. Definimos o traço da curva parametrizada $\underline{\gamma}$, como sendo o conjunto imagem $\gamma([a, b]) \subseteq \Omega$, isto é,

$$\gamma([a, b]) \doteq \{\gamma(t); t \in [a, b]\}. \quad (10.27)$$

2. Diremos que a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ pertence à classe $C^k([a, b]; \Omega)$, ou seja,

$$\gamma \in C^k([a, b]; \Omega).$$

se para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a j -ésima função componente da função $\underline{\gamma}$ pertencer à classe $C^k([a, b]; \Omega)$, ou seja,

$$\gamma_j \in C^k([a, b]; \mathbb{R}).$$

3. Diremos que a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é suave, em $\underline{\Omega}$ se, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\gamma \in C^m([a, b]; \Omega),$$

ou seja,

$$\gamma \in C^\infty([a, b]; \Omega). \quad (10.28)$$

4. Diremos que a curva parametrizada suave $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é regular, em Ω , se o vetor tangente à curva parametrizada $\underline{\gamma}$ não se anular nunca, ou seja,

$$\gamma'(t) \neq \vec{0}, \quad \text{para cada } t \in [a, b]. \quad (10.29)$$

5. Diremos que a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é fechada em Ω , se

$$\gamma(a) = \gamma(b). \quad (10.30)$$

6. Diremos que a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é simples, em Ω , se para $t, s \in [a, b]$ tal que $t \neq s$, teremos:

$$\gamma(t) \neq \gamma(s). \quad (10.31)$$

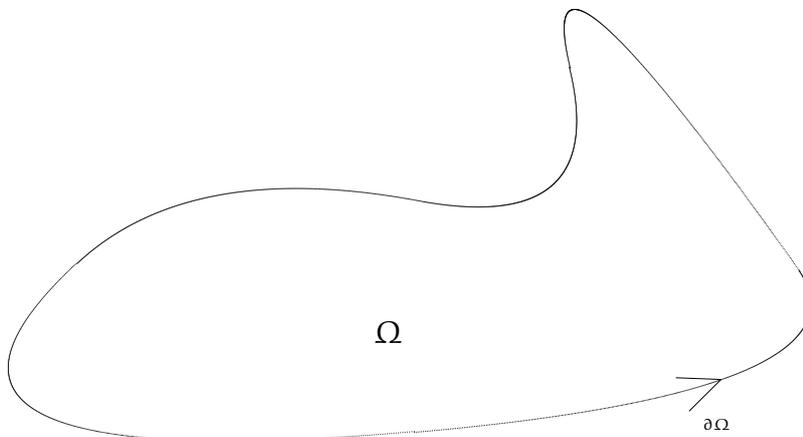
7. Diremos que a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é fechada e simples, em Ω se para $t, s \in (a, b)$, tal que $t \neq s$, tenhamos

$$\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \text{e} \quad \gamma(a) = \gamma(b). \quad (10.32)$$

Definição 10.33 Seja Ω um domínio limitado de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$, de modo que sua fronteira, denotada por $\partial\Omega$, é o traço da curva parametrizada suave, fechada e simples, em Ω (veja a figura abaixo), ou seja, existe $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ curva parametrizada suave, fechada e simples, em Ω tal que

$$\gamma([a, b]) = \partial\Omega.$$

Diremos que $\partial\Omega$ está orientada positivamente pela curva parametrizada $\underline{\gamma}$, se ao percorrer o traço da curva $\underline{\gamma}$, o domínio Ω fica à "esquerda" da mesma (veja figura abaixo).



Observação 10.34

1. O conceito de orientação da fronteira, definido acima, pode ser melhor estabelecido.

Deixaremos a elaboração deste como exercício para o leitor.

2. Podemos estender todas definições acima para curvas parametrizadas suaves por partes, em $\underline{\Omega}$, ou seja, para curvas parametrizadas $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, de modo que exista uma partição do intervalo $[a, b]$, de modo que a restrição da função $\underline{\gamma}$ a cada um dos sub-intervalos abertos definidos pela partição, seja uma curva parametrizada suave.

Podemos agora introduzir a:

Definição 10.35 *Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva parametrizada contínua e diferenciável em $[a, b]$, exceto em um número finito de pontos de $[a, b]$, e $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo em $\underline{\Omega}$.*

Definimos a integral de linha do campo vetorial \vec{F} , ao longo da curva parametrizada $\underline{\gamma}$, indicada por $\int_{\gamma} \vec{F} \bullet d\vec{r}$, como sendo:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \bullet d\vec{r} \doteq \int_a^b \vec{F}[\gamma(t)] \bullet \gamma'(t) dt. \quad (10.36)$$

Observação 10.37 *Na situação da Definição (10.35) acima, se as componentes do campo vetorial \vec{F} são as funções $F_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, então denotemos a integral de linha (10.36) acima por:*

$$\int_{\gamma} (F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n). \quad (10.38)$$

Com as definições e notações a acima, podemos enunciar o seguinte resultado importante, cuja demonstração foi vista na disciplina de Cálculo II e, portanto, será omitida:

Teorema 10.39 (de Green) *Sejam $\underline{\Omega}$ uma domínio limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ e $P, Q \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.*

Suponhamos que:

1. a fronteira do conjunto $\underline{\Omega}$, ou seja, $\partial\underline{\Omega}$, é o traço de uma curva parametrizada fechada, simples, regular por partes, que indicaremos por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, que está orientada positivamente, relativamente à $\underline{\Omega}$;
2. existem e são limitadas as derivadas parciais $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ em $\underline{\Omega}$;

3. existem as integrais duplas

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy \quad e \quad \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \, dx \, dy.$$

Então existe a integral de linha $\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy$ e além disso

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] \, dx \, dy = \int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy. \quad (10.40)$$

Faremos algumas considerações relacionadas com o resultado acima na:

Observação 10.41

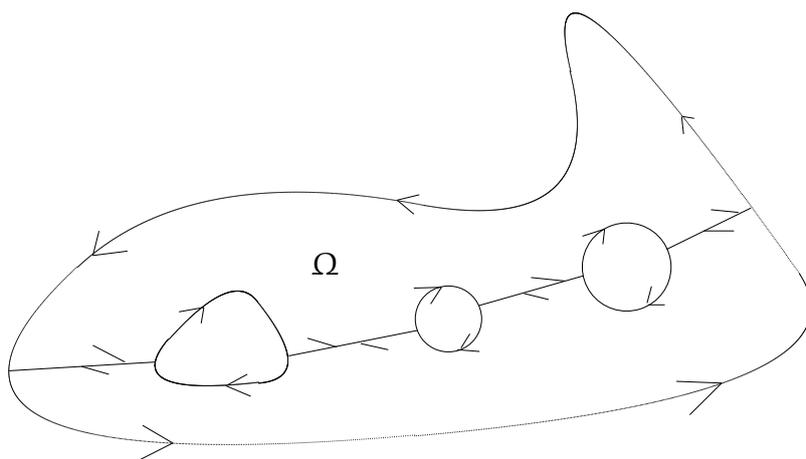
1. Notemos que o campo vetorial que utilizamos no lado direito da identidade (11.101) acima é $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por:

$$\vec{F}(x, y) \doteq P(x, y) \cdot \vec{e}_1 + Q(x, y) \cdot \vec{e}_2, \quad \text{para cada } (x, y) \in \Omega, \quad (10.42)$$

onde

$$\vec{e}_1 \doteq (1, 0) \quad e \quad \vec{e}_2 \doteq (0, 1).$$

2. No caso em que o conjunto $\underline{\Omega}$, na hipótese do Teorema de Green (isto é, o Teorema (10.39)), tem um número finito de "buracos" podemos, em algumas situações, reduzi-lo ao Teorema (10.39) acima, usando curvas auxiliares como, por exemplo, na figura abaixo, como visto na disciplina de Cálculo II.



Neste caso a integral dupla sobre $\underline{\Omega}$ poderá ser decomposta em um número finito de integrais duplas sobre domínios sem "buracos", cujas fronteiras de cada um desses subconjuntos, das partes da decomposição, são orientadas de modo conveniente

(isto é, positivamente) de modo a obter a mesma conclusão que o Teorema de Green (isto é, o Teorema (10.39)).

Conclusão: vale o Teorema de Green (isto é, o Teorema (10.39)) para um domínio limitado $\underline{\Omega}$ de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, que possua um número finito de "buracos" e de modo que, cada parte da fronteira de $\underline{\Omega}$, satisfaça a condição 1. do Teorema de Green (isto é, o Teorema (10.39)).

3. O Teorema de Green (isto é, o Teorema (10.39)) permanece válido para funções a valores complexos, isto é, se as funções $P, Q : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ são tais que

$$P \doteq P_1 + iP_2 \quad e \quad Q \doteq Q_1 + iQ_2, \quad \text{em } \overline{\Omega} \quad (10.43)$$

e cada um dos pares de funções $P_1, Q_1 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_2, Q_2 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, a valores reais, satisfazem as condições 2. e 3. do Teorema de Green (isto é, do Teorema (10.39)) então:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy, \quad (10.44)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) \right] dx dy + i \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{\partial Q_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P_2}{\partial y}(x, y) \right] dx dy \right\} \\ &= \int_{\gamma} P_1 dx + Q_1 dy + i \left(\int_{\gamma} P_2 dx + Q_2 dy \right). \end{aligned} \quad (10.45)$$

4. Suponhamos que o conjunto $\underline{\Omega}$ e a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, dada por:

$$\gamma(t) \doteq (x(t), y(t)), \quad \text{para cada } t \in [a, b], \quad (10.46)$$

satisfaçam as condições do Teorema de Green (isto é, do Teorema (10.39)).

Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, como um subconjunto de \mathbb{R}^3 .

Isto pode ser feito, por exemplo, olhando o conjunto $\underline{\Omega}$ como estando contido no plano xOy , isto é,

$$\Omega \doteq \{(x, y, 0); (x, y) \in \Omega\}.$$

De maneira semelhante como fizemos com o conjunto $\underline{\Omega}$, podemos considerar a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, em \mathbb{R}^3 , ou seja, $\underline{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Omega$ será dada por:

$$\underline{\gamma}(t) \doteq (x(t), y(t), 0), \quad \text{para cada } t \in [a, b]. \quad (10.47)$$

Notemos que a função $\underline{\gamma}$ tem todas as propriedades da função γ , em particular, de (10.47), segue que

$$\underline{\gamma}'(t) \doteq (x'(t), y'(t), 0), \quad \text{para cada } t \in [a, b]. \quad (10.48)$$

Com isto podemos definir a função vetorial $\vec{n} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\vec{n}(t) \doteq \frac{\gamma'(t) \times \vec{k}}{\|\gamma'(t) \times \vec{k}\|}, \quad \text{para cada } t \in [a, b], \quad (10.49)$$

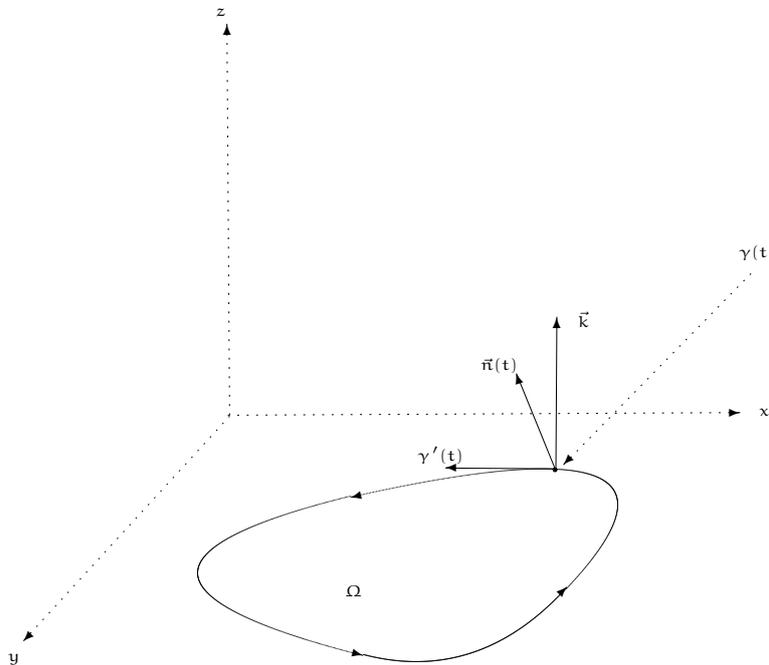
onde \times denota o produto vetorial usual de \mathbb{R}^3 e

$$\vec{k} \doteq (0, 0, 1) = \vec{e}_3. \quad (10.50)$$

Notemos que, da definição do produto vetorial, segue que, para cada $t \in [a, b]$, o vetor $\vec{n}(t)$ será um vetor unitário e ortogonal aos vetores

$$\vec{k} \quad \text{e} \quad \gamma'(t).$$

Como a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ está orientada positivamente (relativamente a Ω) segue (pela regra da mão direita) que, para cada $t \in [a, b]$, o vetor $\vec{n} = \vec{n}(t)$, será um vetor normal unitário ao plano que contém o traço da curva $\underline{\gamma}$ (ou seja, o plano xOy) e "aponta" para o exterior da curva $\underline{\gamma}$, isto é, de Ω (veja a figura abaixo).



Com isto, para cada $t \in [a, b]$, teremos:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) \times \vec{k} &\stackrel{(10.48)}{=} \stackrel{(10.50)}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= y'(t) \cdot \vec{i} - x'(t) \cdot \vec{j}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Logo, para cada $t \in [a, b]$, teremos:

$$\begin{aligned} \vec{n}(t) &\stackrel{(10.49)}{=} \frac{\gamma'(t) \times \vec{k}}{\|\gamma'(t) \times \vec{k}\|} \\ &\stackrel{(10.51)}{=} \frac{(y'(t), -x'(t), 0)}{\sqrt{[y'(t)]^2 + [-x'(t)]^2 + 0^2}} \\ &= \frac{(y'(t), -x'(t), 0)}{\sqrt{[y'(t)]^2 + [x'(t)]^2}}, \end{aligned} \quad (10.52)$$

que denominaremos de vetor normal unitário à curva γ , no instante $t \in [a, b]$.

5. Como vimos, no caso da curva parametrizada $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ ser uma curva fechada e orientada positivamente, para cada $t \in [a, b]$, o vetor $\vec{n}(t)$ será o vetor normal, unitário e exterior ao traço da curva parametrizada γ .
6. Observemos que se $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ é uma curva parametrizada suave por partes, então podemos definir, para cada $t \in [a, b]$, o vetor $\vec{n}(t)$, a menos de um número finito de pontos de $\partial\Omega = \gamma([a, b])$.
7. Lembremos também que uma curva parametrizada regular $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ pode ser sempre reparametrizada, pelo comprimento de arco, isto é, podemos encontrar uma reparametrização $\beta: J \rightarrow \Omega$ do traço da curva γ , de modo que

$$\|\beta'(s)\| = 1, \quad \text{para cada } s \in J. \quad (10.53)$$

De fato, como

$$\gamma'(t) \neq \vec{0}, \quad \text{para cada } t \in [a, b],$$

então, definido-se a função $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$s(t) \doteq \int_a^t \|\gamma'(r)\| dr, \quad \text{para cada } t \in [a, b], \quad (10.54)$$

segue que a função $s = s(t)$ é continuamente diferenciável em $[a, b]$ e como

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0, \quad \text{para cada } t \in [a, b]. \quad (10.55)$$

Logo, a função $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora, logo será bijetora sobre sua imagem.

Como a função s é contínua em $[a, b]$, segue que

$$J \doteq s([a, b]) \stackrel{(10.54)}{=} [0, L]$$

(onde $L \doteq \int_a^b \|\gamma'(r)\| dr$) será um intervalo fechado e limitado de $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Novamente, como

$$s'(t) \neq 0, \quad \text{para cada } t \in [a, b],$$

segue, do Teorema da diferenciação da função inversa, visto na disciplina de Análise I, que a função inversa $s^{-1} : s([a, b]) \rightarrow [a, b]$ será diferenciável em $J \doteq s([a, b])$ e além disso, se

$$t = t(s) = s^{-1}(s),$$

para cada $s = s(t) \in J$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{ds^{-1}}{ds}(s) &= \frac{dt}{ds}(s) \\ &\stackrel{\text{Teor. da derivada da função inversa}}{=} \frac{1}{\frac{ds}{dt}(s)} \\ &\stackrel{(10.55)}{=} \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}. \end{aligned} \tag{10.56}$$

Logo considerando $\beta : J \rightarrow \Omega$ dada por

$$\beta(s) \doteq \gamma[t(s)], \quad \text{para cada } s \in J, \tag{10.57}$$

segue que a curva parametrizada β será uma curva parametrizada regular que tem o mesmo traço da curva parametrizada γ (ou seja, uma reparametrização do traço da curva parametrizada γ) e, além disso, para cada $s \in J$, teremos:

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \frac{d\beta}{ds}(s) \\ &\stackrel{\text{Regra da cadeia em (10.57)}}{=} \frac{d\gamma}{dt}(t) \cdot \frac{dt}{ds}(s) \\ &\stackrel{(10.56)}{=} \gamma'(t) \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}, \end{aligned} \tag{10.58}$$

$$\begin{aligned} \text{logo: } \|\beta'(s)\| &\stackrel{(10.58)}{=} \left\| \gamma'(t) \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \right\| \\ &= 1 \end{aligned} \tag{10.59}$$

ou seja, (10.53) ocorre.

8. Dada $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$, definimos a integral da função f , ao longo da curva γ , em relação ao comprimento de arco, indicada por $\int_{\gamma} f ds$, como sendo:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_a^b f[\gamma(t)] \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_c^d f[\beta(s)] ds, \end{aligned} \quad (10.60)$$

onde $\beta : [c, d] \rightarrow \Omega$ é uma reparametrização do traço da curva parametrizada regular $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, pelo comprimento de arco.

Com a nomenclatura acima podemos enunciar o Teorema da divergência, cuja demonstração foi vista na disciplina Cálculo II, a saber:

Teorema 10.61 (da Divergência) *Seja Ω um domínio limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, cuja fronteira é uma reunião finita de curvas parametrizadas, regulares e orientadas positivamente.*

Suponhamos que o campo vetorial $\vec{F} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$.

Então

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} ds, \quad (10.62)$$

onde, para cada $s \in J$, o vetor

$$\vec{n} = \vec{n}(s),$$

é um vetor normal unitário exterior à fronteira de Ω .

Observação 10.63 *O Teorema da divergência vale no \mathbb{R}^n .*

10.2 As identidades de Green - Unicidade do problema de Dirichlet

A seguir faremos aplicações do Teorema de Green (isto é, o Teorema (10.39)) para obter as importantes identidades de Green.

Começaremos pelo:

Teorema 10.64 (1.a e 2.a identidades de Green) *Sejam Ω um domínio limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, onde vale o Teorema da Divergência (isto é, o Teorema (10.61)) e $u, v \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.*

Então teremos:

$$\int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla v \nabla u) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds, \quad (10.65)$$

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) \, ds, \quad (10.66)$$

onde $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ denota a derivada direcional, na direção do vetor unitário exterior à fronteira de Ω , isto é, do vetor $\vec{n} = \vec{n}(s)$, para cada $s \in J$.

Demonstração:

Para mostrar a identidade (10.65) consideramos o campo vetorial $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\vec{F} \doteq v \nabla u, \quad \text{em } \Omega. \quad (10.67)$$

Deste, pelas hipótese, temos que o campo vetorial $\vec{F} \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ e, além disso,

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \vec{F} &\stackrel{(10.67)}{=} \nabla \bullet (v \nabla u) \\ &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \nabla v \bullet \nabla u + v (\nabla \bullet \nabla u) \\ &\stackrel{(10.23)}{=} \nabla v \bullet \nabla u + v \Delta u, \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (10.68)$$

Logo, do Teorema da Divergência (isto é, o Teorema (10.61)), segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \bullet \vec{F} \, dx \, dy &\stackrel{(10.62)}{=} \int_{\partial\Omega} \vec{F} \bullet \vec{n} \, ds \\ &\stackrel{(10.67)}{=} \int_{\partial\Omega} (v \nabla u) \bullet \vec{n} \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} v \left(\underbrace{\nabla u \bullet \vec{n}}_{\substack{\text{propriedades} \\ \text{do gradiente}}} \right) \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds, \end{aligned}$$

que, juntamente com (11.15), mostra a identidade (10.65).

Para mostrar a identidade (10.66), notemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx \, dy &= \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla v \nabla u) \, dx \, dy - \int_{\Omega} (u \Delta v + \nabla v \nabla u) \, dx \, dy \\ &\stackrel{(10.65)}{=} \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) \, ds, \end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (10.66) e completando a demonstração do resultado. \square

Como consequência temos o:

Corolário 10.69 *Suponhamos que as hipótese do Teorema da Divergência (isto é, o Teorema (10.61)) estejam satisfeitas e $u \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ é tal que*

$$\Delta u = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (10.70)$$

Então temos as seguintes identidades:

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds, \quad (10.71)$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds = 0. \quad (10.72)$$

Demonstração:

Considerando-se a função $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v \doteq u,$$

na 1.a identidade de Green (10.65), obteremos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds &\stackrel{(10.65)}{=} \int_{\Omega} \left(\underbrace{u \Delta u}_{\stackrel{(10.65)}{=} 0} + \underbrace{\nabla u \cdot \nabla u}_{= \|\nabla u\|^2} \right) \, dx \, dy \\ &= \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, dx \, dy, \end{aligned}$$

ou seja, (10.71).

Considerando-se a função $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$v \doteq 1,$$

na 2.a identidade de Green (10.66), obteremos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(1 \cdot \underbrace{\Delta u}_{\stackrel{(10.66)}{=} 0} - u \underbrace{\Delta 1}_{=0} \right) \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} \left(1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial \vec{n}}}_{=0} \right) \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds, \end{aligned}$$

obtendo-se a validade de (10.72), completando a demonstração. \square

Como aplicação dos resultados acima temos o:

Corolário 10.73 *Sejam Ω um domínio de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, onde vale o Teorema da Divergência (isto é, o Teorema (10.61)),*

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}) \quad e \quad g \in C^2(\partial\Omega; \mathbb{R}). \quad (10.74)$$

Então o problema de Dirichlet

$$\Delta u = f, \quad em \quad \Omega, \quad (10.75)$$

$$u = g, \quad em \quad \partial\Omega, \quad (10.76)$$

$$u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \quad (10.77)$$

tem, no máximo, uma solução.

Demonstração:

Suponhamos que as funções

$$u, v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

são duas soluções do problema (10.75), (10.76), (10.77) acima.

Consideremos a função $w : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$w \doteq u - v, \quad em \quad \Omega. \quad (10.78)$$

Então, como a EDP (10.75) é linear e as funções u e v a satisfazem, é fácil ver que a função w satisfaz o seguinte problema

$$\begin{aligned} \Delta w &\stackrel{(10.78)}{=} \Delta(u - v) \\ &\stackrel{(10.75)}{=} f - f \\ &= 0, \quad em \quad \Omega, \end{aligned} \quad (10.79)$$

$$\begin{aligned} w &\stackrel{(10.78)}{=} u - v \\ &\stackrel{(10.76)}{=} g - g \\ &= 0, \quad em \quad \partial\Omega, \end{aligned} \quad (10.80)$$

$$w \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}). \quad (10.81)$$

Logo, do Corolário (10.69), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 \, dx \, dy &\stackrel{(10.71)}{=} \int_{\partial\Omega} \underbrace{w}_{\stackrel{(10.80)}{=} 0} \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \, ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implicará que

$$\nabla w = 0, \quad em \quad \Omega,$$

pois ∇w é uma função contínua em $\overline{\Omega}$.

Como o conjunto $\underline{\Omega}$ é conexo em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ e a função w é contínua em $\overline{\Omega}$, segue que a função w deverá ser constante em $\overline{\Omega}$.

Mas

$$w \stackrel{(10.80)}{=} 0, \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Portanto

$$w = 0, \quad \text{em } \overline{\Omega},$$

o que implicará, por (10.78), que

$$u = v, \quad \text{em } \overline{\Omega},$$

mostrando que, se existir, a solução do problema (10.75), (10.76), (10.77) acima ela deverá ser única, completando a demonstração. □

Observação 10.82

1. O Corolário (10.73) acima garante a unicidade da solução problema de Dirichlet, associado à equação de Laplace, não homogênea e com dado de contorno não homogêneo.
2. Mas adiante mostraremos que o Corolário (10.73) permanece válido para (compare com (10.74)):

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}).$$

10.3 3.a identidade Green - Solução fundamental para o Laplaciano

Lembremos que a equação de Laplace é dada por:

$$\Delta u = 0 \tag{10.83}$$

onde $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ e $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$

Começaremos com a:

Definição 10.84 A função $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} F(\xi) &\doteq \frac{1}{2\pi} \ln(\|\xi\|) \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln\left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right), \quad \text{para cada } \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \end{aligned} \tag{10.85}$$

será denominada solução fundamental da equação de Laplace (10.83) em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Para $n \geq 3$, temos a:

Definição 10.86 A função $F: \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$F(\xi) \doteq \frac{1}{(2-n)\omega_n} \|\xi\|^{2-n}, \quad \text{para cada } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}, \quad (10.87)$$

onde ω_n denota a área da esfera unitária

$$S^{n-1} \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n; \|\xi\| = 1\}, \quad (10.88)$$

será denominada solução fundamental da equação de Laplace (10.83) em $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$.

Com isto temos as seguintes considerações:

Observação 10.89

1. As funções $F: \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}$, introduzidas nas Definições (10.84) e (10.86) acima, satisfazem as seguintes propriedades:

$$F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{O\}; \mathbb{R})$$

e

$$\Delta F = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \{O\}. \quad (10.90)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. Para $n = 1$, a solução fundamental da equação Laplace

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (10.91)$$

será a função $F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, 0) \\ x, & \text{para } x \in (0, \infty) \end{cases}. \quad (10.92)$$

3. No caso $n = 2$, a solução fundamental da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (10.93)$$

será a função $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$F(x, y) \doteq \frac{1}{2\pi} \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right), \quad \text{para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (10.94)$$

4. Para $n \geq 3$ temos que a solução fundamental da equação de Laplace será dada por (10.87).

5. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixado, denotaremos por $F_\xi: \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$, a função dada por:

$$F_\xi(\eta) \doteq F(\xi - \eta), \quad \text{para cada } \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}. \quad (10.95)$$

6. Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixado, como consequência do item 1. acima, temos que

$$F_\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}; \mathbb{R})$$

e, além disso,, teremos:

$$\Delta F_\xi = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}. \quad (10.96)$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

7. Lembremos que a área da esfera unitária S^{n-1} , será dada por:

$$\omega_n \doteq \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (10.97)$$

onde, para cada $x \in (0, \infty)$, $\Gamma(x)$ denota o valor função gama calculada em x , ou ainda,

$$\Gamma(x) \doteq \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1} dy, \quad \text{para cada } x \in (0, \infty). \quad (10.98)$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

8. Em geral, a área da esfera de raio $R > 0$ em \mathbb{R}^n é dada por

$$\omega_n R^{n-1}. \quad (10.99)$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Com as notações e observações acima podemos enunciar e demonstrar o:

Teorema 10.100 (3.a identidade de Green) *Sejam Ω um domínio de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, onde vale o Teorema da Divergência (isto é, o Teorema (10.61)) e $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.*

Então, para cada $\xi \in \Omega$ fixado, temos que:

$$u(\xi) = \underbrace{\int_{\Omega} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta}_{\doteq I} + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} F_\xi \right) ds. \quad (10.101)$$

Antes de exibir uma demonstração do Teorema (10.100) acima, faremos algumas considerações sobre o mesmo.

Observação 10.102

1. A 1.a dificuldade na demonstração do Teorema (10.100) acima é fazer sentido a integral sobre Ω , ou seja, \overline{I} , em (10.101).

Isto porque, de (10.95) e (10.85), teremos, para cada $\xi \in \Omega$, que:

$$\begin{aligned} F_\xi(\eta) &\stackrel{(10.95)}{=} F(\xi - \eta) \\ &\stackrel{(10.85)}{=} \frac{1}{2\pi} \ln(\|\xi - \eta\|) \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } \eta \rightarrow \xi, \end{aligned} \quad (10.103)$$

e com isto teremos que tomar muito cuidado para definir a referida integral em Ω (, ou seja, \overline{I}), pois esta será, na verdade, uma integral do tipo integral imprópria.

2. Por outro lado, observemos que para a integral sobre $\partial\Omega$ não teremos nenhum problema pois, se

$$\xi \in \Omega \quad \text{e} \quad \eta \in \partial\Omega,$$

teremos que a função F_ξ (veja (10.95) e (10.85)) estará bem definida e, além disso, será uma função contínua em $\partial\Omega$.

3. Notemos que no Teorema (10.100) acima, se a função $u = u(\xi)$ for harmônica em $\underline{\Omega}$, isto é,

$$\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (10.104)$$

segue que:

$$\begin{aligned} u(\xi) &\stackrel{(10.101)}{=} \int_{\overline{\Omega}} F_\xi(\eta) \overbrace{\Delta u(\eta)}^{(10.104)_0} d\eta + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} F_\xi \right) ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} F_\xi \right) ds, \quad \text{para cada } \xi \in \Omega, \end{aligned} \quad (10.105)$$

ou seja, o valor da função u no conjunto $\underline{\Omega}$ depende, a grosso modo, somente dos valores da função u e da função F_ξ (dada por (10.95) e (10.85)) no conjunto $\partial\Omega$.

4. Dado $R > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por

$$B(\xi; R) \doteq \{ \eta \in \mathbb{R}^2; \|\xi - \eta\| < R \}, \quad (10.106)$$

$$\overline{B(\xi; R)} \doteq \{ \eta \in \mathbb{R}^2; \|\xi - \eta\| \leq R \}. \quad (10.107)$$

A seguir passaremos a demonstração do Teorema (10.100) acima.

Para isto precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 10.108 *Sejam $\xi \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ fixados e consideremos a função $g : \overline{B(\xi; R)} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Suponhamos que a função g é limitada em $\overline{B(\xi; R)}$ e que a função $F_\xi \cdot g$ (onde F_ξ dada por (10.95) e (10.85)) é integrável, em relação ao comprimento de arco, ao longo de qualquer circunferência centrada no ponto ξ e raio r , para cada $r \in (0, R)$.

Então

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds = 0. \quad (10.109)$$

Demonstração:

Notemos que, como a função g é limitada em $\overline{B(\xi; R)}$, existe $M > 0$ tal que

$$|g(\eta)| \leq M, \quad \text{para } \eta \in \overline{B(\xi; R)}. \quad (10.110)$$

Logo, para cada $r \in (0, R)$, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds &\stackrel{(10.95)}{=} \int_{\|\xi - \eta\|=r} F(\xi - \eta) g(\eta) \, ds(\eta) \\ &\stackrel{(10.85)}{=} \int_{\|\xi - \eta\|=r} \frac{\ln \left(\overbrace{\|\xi - \eta\|}^{\eta \in \partial B(\xi; r)} \right)}{2\pi} g(\eta) \, ds(\eta) \\ &= \frac{\ln(r)}{2\pi} \int_{\|\xi - \eta\|=r} g(\eta) \, ds(\eta). \end{aligned} \quad (10.111)$$

Logo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds \right| &\stackrel{(10.111)}{=} \left| \frac{\ln(r)}{2\pi} \int_{\|\xi - \eta\|=r} g(\eta) \, ds(\eta) \right| \\ &\leq \left| \frac{\ln(r)}{2\pi} \right| \int_{\|\xi - \eta\|=r} \underbrace{|g(\eta)|}_{\leq M} \, ds(\eta) \\ &= \frac{M}{2\pi} \underbrace{\int_{\|\xi - \eta\|=r} ds(\eta)}_{=2\pi r} \\ &= M r |\ln(r)|, \end{aligned} \quad (10.112)$$

para cada $r \in (0, R)$ fixado.

Observemos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0^+} [r |\ln(r)|] &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(r)}{\frac{1}{r}} \\
 &\stackrel{\infty}{=} \text{logo L'Hospital, implicará:} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{d}{dr}[\ln(r)]}{\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\right]} \\
 &= - \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r = 0. \tag{10.113}
 \end{aligned}$$

Portanto, de (10.112) e (10.113), segue que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi g \, ds = 0,$$

completando a demonstração. □

Temos também o:

Lema 10.114 *Sejam $\xi \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ fixados e $g \in C(\overline{B(\xi; R)}; \mathbb{R})$.*

Então

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} g \, ds = g(\xi), \tag{10.115}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ denota a derivada direcional, na direção do vetor normal unitário exterior à $\partial B(\xi; r)$, para cada $r \in (0, R]$.

Demonstração:

Consideremos a seguinte notação:

$$\xi \doteq (a, b) \quad \text{e} \quad \eta \doteq (x, y). \tag{10.116}$$

Com isto, para cada $\eta \in \partial B(\xi; r)$, teremos:

$$F_\xi(\eta) \stackrel{(10.95) \text{ e } (10.85)}{=} \frac{1}{2\pi} \ln(\|\xi - \eta\|) \tag{10.117}$$

$$\stackrel{(10.116)}{=} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right). \tag{10.118}$$

Com isto, para cada $\eta \in \partial B(\xi; r)$, de (10.118), segue que:

$$\frac{\partial F_\xi}{\partial x}(\eta) \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{x - a}{\|\xi - \eta\|^2} \quad (10.119)$$

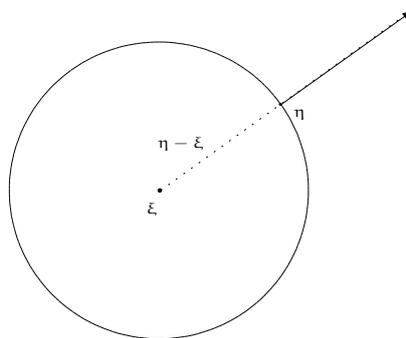
$$\frac{\partial F_\xi}{\partial y}(\eta) \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{y - b}{\|\xi - \eta\|^2}, \quad (10.120)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla F_\xi(\eta) &= \left(\frac{\partial F_\xi}{\partial x}(\eta), \frac{\partial F_\xi}{\partial y}(\eta) \right) \\ &\stackrel{(10.119) \text{ e } (10.120)}{=} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{x - a}{\|\xi - \eta\|^2}, \frac{1}{2\pi} \frac{y - b}{\|\xi - \eta\|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\eta - \xi}{\|\xi - \eta\|^2}. \end{aligned} \quad (10.121)$$

Além disso, para cada $\eta \in \partial B(\xi; r)$, temos que o vetor normal unitário, no ponto ξ exterior à $\partial B(\xi; r)$, será dada por (veja a figura abaixo):

$$\vec{n}(\eta) \doteq \frac{\eta - \xi}{\|\eta - \xi\|}. \quad \vec{n} = \frac{\eta - \xi}{\|\eta - \xi\|} \quad (10.122)$$



Logo, das considerações acima, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\xi; r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} g \, ds &= \int_{\partial B(\xi; r)} [\nabla F_\xi(\eta) \bullet \vec{n}] g(\eta) \, ds(\eta) \\ &\stackrel{(10.121), (10.122)}{=} \int_{\partial B(\xi; r)} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{\eta - \xi}{\|\xi - \eta\|^2} \bullet \frac{\eta - \xi}{\|\eta - \xi\|} \right] g(\eta) \, ds(\eta) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(\xi; r)} \left[\underbrace{\frac{1}{\|\xi - \eta\|}}_{\substack{\eta \in \partial B(\xi; r) \\ r}} \underbrace{\vec{n} \bullet \vec{n}}_{\substack{(10.122)_1 \\ = 1}} \right] g(\eta) \, ds(\eta) \\ &= -\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} g(\eta) \, ds(\eta). \end{aligned} \quad (10.123)$$

Observação 10.124 Notemos que a última integral (10.123) é conhecida como o valor médio da função g , na circunferência de centro na origem e raio igual a r .

Como a função g é contínua em $\overline{B(\xi; R)}$, que é um subconjunto compacto, segue que ela será uniformemente contínua em $\overline{B(\xi; R)}$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar

$$\delta = \delta(\varepsilon) > 0,$$

de modo que,

$$\begin{aligned} & \text{se } \eta, \eta' \in \overline{B(\xi; R)}, \\ & \text{satisfazendo, } \|\eta - \eta'\| < \delta, \\ & \text{segue que: } |g(\eta) - g(\eta')| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{10.125}$$

Portanto, para cada

$$r \in (0, \delta) \tag{10.126}$$

fixado, teremos:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial B(\xi; r)} \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} g \, ds - g(\xi) \right| \stackrel{(10.123)}{=} \left| \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} g(\eta) \, ds(\eta) - \underbrace{\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} ds(\eta)}_{=1} \overbrace{g(\xi)} \right| \\ & = \frac{1}{2\pi r} \left| \int_{\partial B(\xi; r)} [g(\eta) - g(\xi)] \, ds(\eta) \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} \underbrace{|g(\eta) - g(\xi)|}_{\substack{\text{por (10.125), pois } \|\eta - \xi\| \\ \leq r \stackrel{(10.126)}{<} \delta}} \, ds(\eta) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r} \underbrace{\int_{\partial B(\xi; r)} ds(\eta)}_{=2\pi r} \\ & = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando (10.115) e completando a demonstração. □

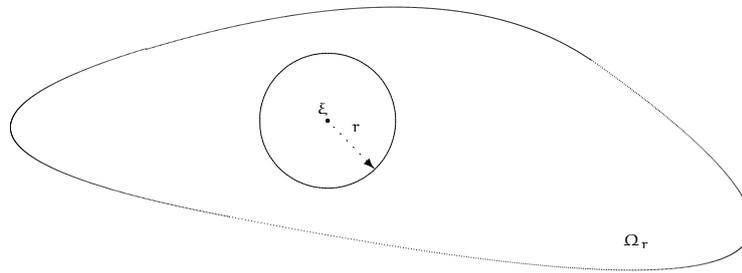
Temos também o:

Lema 10.127 Dado $\xi \in \Omega$, seja $R > 0$ tal que $\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega$, onde $\underline{\Omega}$ é como no Teorema (10.100). Para cada $r \in (0, R)$ fixado, consideremos (veja a figura abaixo)

$$\Omega_r \doteq \Omega \setminus \overline{B(\xi; r)}. \quad (10.128)$$

Se $g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, então existe o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_r} F_\xi(\eta) g(\eta) d\eta. \quad (10.129)$$



Demonstração:

Consideremos a função $I : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$I(r) \doteq \int_{\Omega_r} F_\xi(\eta) g(\eta) d\eta, \quad \text{para cada } r \in (0, R). \quad (10.130)$$

Para cada $r \in (0, R)$, o integral (10.130) acima existe, pois $F_\xi g \in C(\overline{\Omega_r}; \mathbb{R})$.

Para ver isto, basta notar que a função F_ξ , dada por (10.95) e (10.85), só tem problema quando $\eta = \xi$, e este ponto pertence à $\Omega \setminus \overline{B(\xi; R)}$.

Como $g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ e $\overline{\Omega}$ é fechado e limitado em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ (logo um subconjunto compacto em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$), segue que a função g é limitada em $\overline{\Omega}$, ou seja, existe $M > 0$ tal que

$$|g(\eta)| \leq M, \quad \text{para cada } \eta \in \overline{\Omega}. \quad (10.131)$$

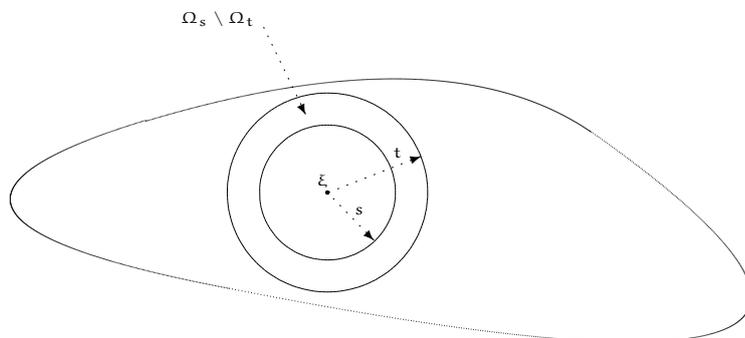
Notemos que, para

$$0 < s < t < R, \quad (10.132)$$

de (10.128) (veja a figura abaixo), segue que

$$\Omega_t \subseteq \Omega_s \quad (10.133)$$

$$e \quad \overline{\Omega_s} \setminus \Omega_t = \{\eta \in \mathbb{R}^2; s \leq \|\eta - \xi\| \leq t\}. \quad (10.134)$$



Logo, para (10.132), teremos que:

$$\begin{aligned}
 |I(t) - I(s)| &\stackrel{(10.130)}{=} \left| \int_{\Omega_t} F_\xi(\eta) g(\eta) \, d\eta - \int_{\Omega_s} F_\xi(\eta) g(\eta) \, d\eta \right| \\
 &= \left| \int_{\Omega_t} F_\xi(\eta) g(\eta) \, d\eta - \int_{\overline{\Omega_s}} F_\xi(\eta) g(\eta) \, d\eta \right| \\
 &\stackrel{(10.133)}{=} \left| \int_{\overline{\Omega_s} \setminus \Omega_t} F_\xi(\eta) g(\eta) \, d\eta \right| \\
 &\leq \int_{\overline{\Omega_s} \setminus \Omega_t} |F_\xi(\eta)| |g(\eta)| \, d\eta \\
 &\stackrel{(10.134)}{=} \int_{s \leq \|\xi - \eta\| \leq t} |F_\xi(\eta)| \underbrace{|g(\eta)|}_{\stackrel{(10.131)}{\leq} M} \, d\eta \\
 &\stackrel{(10.117)}{\leq} \frac{M}{2\pi} \int_{s \leq \|\xi - \eta\| \leq t} |\ln(\|\xi - \eta\|)| \, d\eta. \tag{10.135}
 \end{aligned}$$

Para calcular a última integral em (10.135) acima, utilizaremos mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, isto é, consideremos:

$$\xi - \eta \doteq (r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \quad \text{para cada } \theta \in [0, 2\pi). \tag{10.136}$$

Com isto teremos, utilizando-se o Teorema de Mudança de Variáveis na integral múltipla (visto em Cálculo II), teremos:

$$\begin{aligned}
 \int_{s \leq \|\xi - \eta\| \leq t} |\ln(\|\xi - \eta\|)| \, d\eta &= \left\langle \begin{array}{l} \|\xi - \eta\| \stackrel{(10.136)}{=} \|(r \cos(\theta), r \sin(\theta))\| = r \\ j(r, \theta) = r \end{array} \right\rangle \int_s^t \int_0^{2\pi} |\ln(r)| r \, d\theta \, dr \\
 &= 2\pi \int_s^t |\ln(r)| r \, dr. \tag{10.137}
 \end{aligned}$$

Observemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} [r \ln(r)] = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln(r)}{\frac{1}{r}}$$

$$\stackrel{\infty}{\infty} \text{ logo, por L'Hospital: } = 0,$$

em particular,

$$\text{existe } N \in (0, \infty), \text{ tal que: } |r \ln(r)| \leq N, \quad \text{para } r \in (0, 1), \quad (10.138)$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{MN}. \quad (10.139)$$

Consideremos uma sequência numérica $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de modo que

$$r_n \in (0, r), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

e

$$r_n \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

Em particular, a sequência numérica $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será um sequência numérica de Cauchy em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Logo podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$, de modo:

$$\text{se } m, n \geq N_o, \quad \text{teremos: } |r_n - r_m| < \delta. \quad (10.140)$$

Logo, de (10.135), (10.137), para

$$m, n \geq N_o,$$

teremos:

$$\begin{aligned} |I(r_n) - I(r_m)| &\stackrel{(10.135),(10.137)}{=} \frac{M}{2\pi} 2\pi \left| \int_{r_n}^{r_m} \underbrace{r |\ln(r)|}_{\stackrel{(10.138)}{\leq} N} dr \right| \\ &< MN \underbrace{|r_n - r_m|}_{\stackrel{(10.140)}{<} \delta} \\ &< MN \underbrace{\delta}_{\stackrel{(10.139)}{=} \frac{\varepsilon}{MN}} \\ &= \varepsilon, \end{aligned} \quad (10.141)$$

ou seja, a sequência numérica $\{I(r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

Logo a sequência numérica $\{I(r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ será convergente em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, ou seja, existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(r_n).$$

Como $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ é um espaço métrico, segue que existirá o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} I(r),$$

ou ainda, existirá o limite (10.129), completando a demonstração. □

Observação 10.142 Com o Lema (10.127) acima, podemos dar sentido a integral \boxed{I} , sobre $\overline{\Omega}$, em (10.101), a saber:

$$\int_{\Omega} F_{\xi}(\eta) \Delta u(\eta) \, d\eta \doteq \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_r} F_{\xi}(\eta) \Delta u(\eta) \, d\eta. \quad (10.143)$$

Para isto basta, no Lema (10.127), definir a função $g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(\eta) \doteq \Delta u(\eta), \quad \text{para cada } \eta \in \overline{\Omega} \quad (10.144)$$

e assim teremos $g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, pois $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ (veja as hipóteses do Teorema (10.100)).

Podemos agora demonstrar a 3.a identidade de Green (10.101), ou seja, o Teorema (10.100).

Seja $\xi \in \Omega$ e consideremos $R > 0$, tal que

$$B(\xi; R) \subseteq \Omega.$$

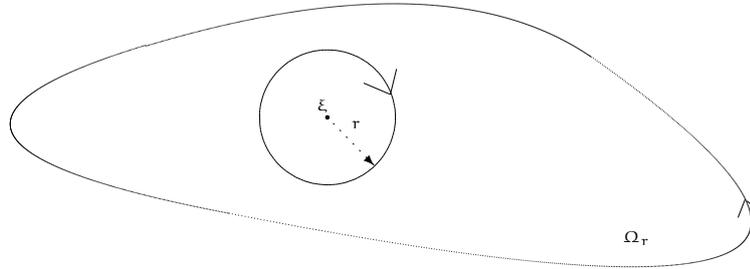
Para cada $r \in (0, R]$ fixado, definamos

$$\Omega_r \doteq \Omega \setminus \overline{B(\xi; r)}.$$

Observemos que

$$\partial\Omega_r = \partial\Omega \cup \partial B(\xi; r) \quad (10.145)$$

e a orientemos de modo positivo, relativamente à $\underline{\Omega}_r$ (veja a figura abaixo).



Notemos que esta orientação de $\underline{\partial\Omega}_r$, coincide com a orientação positiva de $\underline{\partial\Omega}$ e com a orientação negativa de $\underline{\partial B(\xi; r)}$ (a orientação de uma circunferência é a do sentido anti-horário), ou seja, se o vetor $\underline{\vec{n}}$, denota o vetor normal unitário exterior à $\underline{\partial\Omega}_r$ e o vetor $\underline{\vec{m}}$, denota o vetor normal unitário exterior à $\underline{\partial B(\xi; r)}$ deveremos ter:

$$\underline{\vec{m}} = -\underline{\vec{n}}, \quad \text{em } \underline{\partial B(\xi; r)}, \quad (10.146)$$

para cada $r \in (0, R]$.

Do item 6. da Observação (10.89) (veja (10.96)), segue que:

$$\Delta F_\xi(\eta) = 0, \quad \text{para cada } \eta \in \overline{\Omega}_r, \quad (10.147)$$

para cada $r \in (0, R]$.

Aplicando a 2.a identidade de Green (isto é, o Teorema (10.64)) em $\overline{\Omega}_r$, para a função $v : \overline{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v \doteq F_\xi, \quad (10.148)$$

obteremos

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega}_r} F_\xi \Delta u \, d\eta &\stackrel{\Delta F_\xi(\eta) \stackrel{(10.147)}{=} 0}{=} \int_{\overline{\Omega}_r} (F_\xi \Delta u - u \Delta F_\xi) \, d\eta \\ &\stackrel{(10.66)}{=} \int_{\partial\Omega_r} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \underline{\vec{n}}} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial \underline{\vec{n}}} \right) \, ds \\ &\stackrel{(10.145)}{=} \int_{\partial\Omega} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \underline{\vec{n}}} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial \underline{\vec{n}}} \right) \, ds + \int_{-\partial B(\xi; r)} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \underline{\vec{n}}} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial \underline{\vec{n}}} \right) \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \underline{\vec{n}}} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial \underline{\vec{n}}} \right) \, ds - \int_{\partial B(\xi; r)} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \underline{\vec{m}}} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial \underline{\vec{m}}} \right) \, ds, \end{aligned} \quad (10.149)$$

para cada $r \in (0, R]$.

Como o conjunto $\overline{\Omega}$ é fechado e limitado em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ (ou seja, é um subconjunto compacto em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$) e a função

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{m}} = \nabla u \bullet \vec{m}, \quad \text{em } \overline{B(\xi; r)}, \quad (10.150)$$

é uma função contínua em $\overline{B(\xi; r)}$, segue que ela será uma função limitada em $\overline{B(\xi; r)}$, para cada $r \in (0, R]$.

Logo, do Lema (10.108) (ou ainda, (10.109)), onde a função $g : \overline{B(\xi; R)} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$g(\eta) \doteq \frac{\partial u}{\partial \vec{m}}(\eta), \quad \text{para cada } \eta \in \overline{B(\xi; R)}, \quad (10.151)$$

segue que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} F_\xi \frac{\partial u}{\partial \vec{m}} ds = 0. \quad (10.152)$$

Por outro lado, como $u \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, pelo Lema (10.114) (ou ainda, (10.115)), considerando a função $g : \overline{B(\xi; R)} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(\eta) \doteq u(\eta), \quad \text{para cada } \eta \in \overline{B(\xi; R)}, \quad (10.153)$$

segue que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(\xi; r)} u \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{m}} ds = u(\xi), \quad (10.154)$$

para cada $r \in (0, R]$.

Notemos também, que, do fato que $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, assim, pelo Lema (10.127) (ou ainda, (10.129)), aplicado à função $g : \overline{B(\xi; R)} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$g(\eta) \doteq \Delta u(\eta), \quad \text{para cada } \eta \in \overline{B(\xi; R)}, \quad (10.155)$$

segue que existe o limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\overline{\Omega}_r} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta. \quad (10.156)$$

Utilizaremos a seguinte notação para simplificar:

$$\int_{\overline{\Omega}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta \doteq \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\overline{\Omega}_r} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta. \quad (10.157)$$

Logo podemos passar o limite em (10.149), quando $r \rightarrow 0^+$ e, utilizando-se (10.152) e (10.154), obter a seguinte identidade:

$$\int_{\overline{\Omega}} F_\xi(\eta) \Delta u(\eta) d\eta = \int_{\overline{\Omega}} \left(F_\xi \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} \right) ds + u(\xi),$$

ou seja,

$$u(\xi) = \int_{\Omega} F_{\xi}(\eta) \Delta u(\eta) \, d\eta + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial F_{\xi}}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} F_{\xi} \right) \, ds,$$

mostrando a validade da identidade (10.101), ou ainda, do Teorema (10.100) .

□

Observação 10.158 *As três identidades de Green, ou seja, (10.65), (10.66), (10.101), são válidas em \mathbb{R}^n .*

A demonstração que das duas primeiras, ou seja, (10.65) e (10.66), são idênticas ao caso $n = 2$, bastando utilizar o Teorema de divergência em \mathbb{R}^n .

Para $n \geq 3$, a demonstração da 3.a identidade é diferente do caso $n = 2$, pois a solução fundamental tem uma forma diferente para $n \geq 3$ (veja o Teorema 2.2, na página 256, de [2]).

10.4 Exercícios

Capítulo 11

Princípios do Máximo e do Mínimo - Unicidade de Soluções

Começaremos tratando da unicidade para o problema da distribuição de calor no fio finito (ou seja, relacionado com a equação do calor) depois trataremos da unicidade do problema de Dirichlet em um conjunto Ω , que é um subconjunto aberto e limitado em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ (ou seja, relacionado com a equação de Laplace) e finalmente do problema da unicidade da corda finita vibrante (ou seja, relacionado com a equação da onda).

11.1 Princípio do máximo (e do mínimo) para a equação do calor - unicidade para o problema do fio aquecido

O objetivo desta seção é mostrar a unicidade de soluções dos problemas relacionados a equação do calor, a uma dimensão espacial, utilizando um princípio do máximo.

Para isto, temos o seguinte resultado:

Lema 11.1 *Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado, Ω um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ e a transformação linear $L : C^2(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow C(\Omega; \mathbb{R})$, dada por:*

$$L(u) \doteq \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{para cada } u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}). \quad (11.2)$$

Suponhamos que a função

$$u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}), \quad (11.3)$$

satisfaz a desigualdade

$$[L(u)](t, x) > 0, \quad \text{para todo } (t, x) \in \Omega, \quad (11.4)$$

então a função $u = u(t, x)$ não terá máximo global em Ω .

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que a função $u = u(t, x)$ assume um valor máximo global em $\underline{\Omega}$, isto é, podemos encontrar $(t_0, x_0) \in \Omega$, de modo que

$$u(t, x) \leq u(t_0, x_0), \quad \text{para todo } (t, x) \in \Omega. \quad (11.5)$$

Como, por hipótese, a função u é diferenciável em $(t_0, x_0) \in \Omega$ (veja (11.3)) e o conjunto $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ segue que, o ponto (t_0, x_0) deverá ser ponto crítico da função u (visto em Cálculo II), ou seja, deveremos ter

$$\nabla u(t_0, x_0) = 0. \quad (11.6)$$

Em particular, segue que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) = 0. \quad (11.7)$$

Notemos também que, neste caso, a função

$$x \mapsto u(t_0, x)$$

deverá ter um máximo local em $x = x_0$.

Como $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, segue que a função

$$x \mapsto u(x, t_0)$$

será duas vezes continuamente diferenciável em uma vizinhança de x_0 e assim (pelo teste da 2.a derivada do Cálculo I) segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0) \leq 0. \quad (11.8)$$

Portanto

$$\begin{aligned} [L(u)](t_0, x_0) &\stackrel{(11.2)}{=} \alpha^2 \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0, x_0)}_{\stackrel{(11.8)}{\leq} 0} - \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0)}_{\stackrel{(11.7)}{=} 0} \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

contrariando (11.4).

Logo, podemos concluir que a função $u = u(t, x)$ não terá máximo global em $\underline{\Omega}$, completando a demonstração. □

Temos um resultado semelhante para o mínimo global, a saber:

Corolário 11.9 *Com as mesmas hipótese do Lema (11.1) sobre o conjunto $\underline{\Omega}$ e a transformação linear \underline{L} (dado por (11.2)), se a função $v \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ satisfaz*

$$[\underline{L}(v)](t, x) < 0, \quad \text{para todo } (t, x) \in \Omega, \quad (11.10)$$

então a função $v = v(t, x)$ não terá mínimo global em $\underline{\Omega}$.

Demonstração:

Consideremos a função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$u(t, x) \doteq -v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega. \quad (11.11)$$

Logo a função $u = u(t, x)$ satisfaz as hipóteses do Lema (11.1) e, para cada $(t, x) \in \Omega$, temos que:

$$\begin{aligned} [\underline{L}(u)](t, x) &\stackrel{(11.11)}{=} [\underline{L}(-v)](t, x) \\ &\stackrel{\underline{L} \text{ é linear}}{=} -[\underline{L}(v)](t, x) \\ &\stackrel{(11.10)}{>} 0. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Logo, do Lema (11.1), segue que a função u não possui máximo global em $\underline{\Omega}$ que, por (11.11), é equivalente a dizer que a função v não possui mínimo global em $\underline{\Omega}$, completando a demonstração. □

Como uma outra consequência do Lema (11.1) acima, temos o:

Corolário 11.13 *Sejam $\underline{\Omega}$ um subconjunto aberto, conexo, limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ e*

$$u \in C(\overline{\underline{\Omega}}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}) \quad (11.14)$$

satisfazendo

$$[\underline{L}(u)](t, x) > 0, \quad \text{para todo } (t, x) \in \Omega, \quad (11.15)$$

onde \underline{L} é dado por (11.2).

Então o valor máximo global da função u em $\overline{\underline{\Omega}}$ deverá, necessariamente, ocorrer em $\partial\underline{\Omega}$.

Demonstração:

Notemos que, como a função u é contínua em $\overline{\underline{\Omega}}$ e este é um subconjunto limitado e fechado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ (isto é, um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$), segue que a função u assume seu valor máximo global em $\overline{\underline{\Omega}}$.

Do Lema (11.1), segue que o valor máximo global da função u não poderá ocorrer em $\underline{\Omega}$. Portanto o mesmo só poderá ocorrer em $\partial\underline{\Omega}$, completando a demonstração. □

Observação 11.16 Temos um resultado análogo ao Corolário (11.13) acima, para o caso de mínimo global, a saber: se o conjunto $\underline{\Omega}$ e a função \underline{v} satisfazem as hipóteses do Corolário (11.13) e, além disso,

$$[L(\underline{v})](t, x) < 0, \quad \text{para todo } (t, x) \in \Omega, \quad (11.17)$$

onde \underline{L} é dado por (11.2).

Então o valor mínimo global da função $v = u(t, x)$ em $\overline{\Omega}$ deverá, necessariamente, ocorrer em $\underline{\partial\Omega}$.

Para a demonstração deste resultado basta aplicar o Corolário (11.13) à função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(t, x) \doteq -v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \overline{\Omega}.$$

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

Com isto temos o:

Teorema 11.18 (Princípio do máximo para a transformação \underline{L}) *Sejam (veja a figura abaixo)*

$$\Omega \doteq (0, T) \times (a, b), \quad (11.19)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\doteq \{(t, a); \text{ para } t \in [0, T]\} \\ &= [0, T] \times \{a\}, \end{aligned} \quad (11.20)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &\doteq \{(0, x); \text{ para } x \in [a, b]\} \\ &= \{0\} \times [a, b], \end{aligned} \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &\doteq \{(t, b); \text{ para } t \in [0, T]\} \\ &= [0, T] \times \{b\}, \end{aligned} \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &\doteq \{(T, x); \text{ para } x \in [a, b]\} \\ &= \{T\} \times [a, b]. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Suponhamos que

$$u \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega \cap \Gamma_4; \mathbb{R}) \quad (11.24)$$

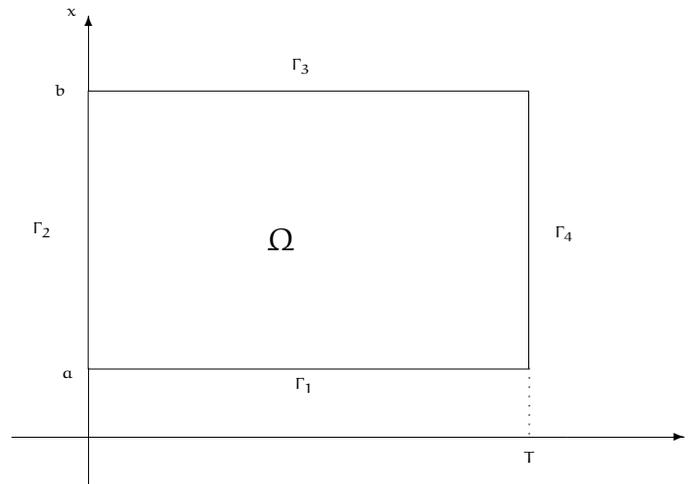
e satisfaz

$$[L(u)](t, x) \geq 0, \quad \text{para todo } (t, x) \in \Omega \cup \Gamma_4, \quad (11.25)$$

onde \underline{L} é dado por (11.2).

Então o máximo da função u em $\overline{\Omega}$ ocorrerá (veja a figura abaixo), em

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \quad (11.26)$$



Demonstração:

Como a função \underline{u} é contínua em $\overline{\Omega}$, que é um subconjunto fechado e limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ (logo um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$) segue que a função \underline{u} tem máximo global em $\overline{\Omega}$.

Notemos também que o conjunto (11.26) também é fechado e limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ (logo um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$), assim a função \underline{u} assume seu valor máximo global no conjunto (11.26), isto é, existe:

$$m \doteq \max\{u(t, x); (t, x) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3\}. \tag{11.27}$$

Suponhamos, por absurdo, que o máximo da função \underline{u} em $\overline{\Omega}$, não ocorra no conjunto

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

isto é, se definirmos:

$$M \doteq \max \{u(t, x); (t, x) \in \overline{\Omega}\}, \tag{11.28}$$

teremos:

$$m < M. \tag{11.29}$$

Logo, poderemos encontrar

$$(t_0, x_0) \in \Omega \cup \overset{\circ}{\Gamma}_4 = \overline{\Omega} \setminus [\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3], \tag{11.30}$$

onde

$$\overset{\circ}{\Gamma}_4 \doteq \{T\} \times (a, b),$$

de modo que

$$u(t_0, x_0) = M. \tag{11.31}$$

Consideremos as funções $w, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$w(t, x) \doteq \frac{M - m}{2(b - a)^2} (x - x_0)^2, \quad \text{para cada } (t, x) \in \bar{\Omega}, \quad (11.32)$$

$$v(t, x) \doteq u(t, x) + w(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \bar{\Omega}, \quad (11.33)$$

como isto teremos:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(t, x) \doteq \frac{M - m}{(b - a)^2} (x - x_0), \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega, \quad (11.34)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) \doteq \frac{M - m}{(b - a)^2}, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega, \quad (11.35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega. \quad (11.36)$$

Notemos que, para cada $(t, x) \in \Omega$, segue que:

$$\begin{aligned} [L(w)](t, x) &\stackrel{(11.2)}{=} \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) \\ &\stackrel{(11.35) \text{ e } (11.36)}{=} \alpha^2 \frac{M - m}{(b - a)^2}. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Como

$$w \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad u \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}),$$

de (11.33), segue que

$$v \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}). \quad (11.38)$$

Além disso, para cada $(t, x) \in \Omega \subseteq \Omega \cup \Gamma_4$, teremos:

$$\begin{aligned} [L(v)](t, x) &\stackrel{(11.33)}{=} [L(u + w)](t, x) \\ &\stackrel{L \text{ é linear}}{=} \underbrace{[L(u)](t, x)}_{\stackrel{(11.25)}{\geq 0} \text{ em } \Omega \cup \Gamma_4} + [L(w)](t, x) \\ &\geq [L(w)](t, x) \\ &\stackrel{(11.37)}{=} \alpha^2 \underbrace{\frac{M - m}{(b - a)^2}}_{\stackrel{(11.29)}{> 0}} \\ &> 0. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Logo, do Corolário (11.13), segue que o máximo da função v no conjunto compacto $\bar{\Omega}$, será atingido somente em

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4. \quad (11.40)$$

Por outro lado, se

$$(t, x) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

teremos:

$$\begin{aligned} v(t, x) &\stackrel{(11.33)}{=} u(t, x) + w(t, x) \\ &\stackrel{(11.27) \text{ e } (11.32)}{\leq} m + \frac{M - m}{2(b - a)^2} (x - x_0)^2 \\ &\stackrel{(x - x_0)^2 \leq (b - a)^2}{\leq} m + \frac{M - m}{2(b - a)^2} (b - a)^2 \\ &= m + \frac{M - m}{2} \\ &= \frac{M + m}{2} \\ &\stackrel{(11.29)}{<} \frac{M + M}{2} \\ &= M \\ &\stackrel{(11.31)}{=} u(t_0, x_0) \\ &\stackrel{w(t, x_0) \stackrel{(11.32)}{=} 0}{=} u(t_0, x_0) + w(t, x_0) \\ &\stackrel{(11.33)}{=} v(t_0, x_0), \end{aligned}$$

ou seja,

$$v(t, x) < v(t_0, x_0), \tag{11.41}$$

para todo

$$(t, x) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

Portanto, de (11.41), segue que o máximo da função v em $\overline{\Omega}$, que ocorrerá em $\partial\Omega$, será atingido somente no conjunto

$$\overset{\circ}{\Gamma}_4 \doteq \{T\} \times (a, b)$$

(veja (11.40)) ou seja, podemos encontrar (veja (11.23) e a figura acima)

$$X_0 \in (a, b), \tag{11.42}$$

de modo que

$$v(T, X_0) \doteq \max\{v(t, x); (t, x) \in \overline{\Omega}\}. \tag{11.43}$$

Logo, devido a (11.43), a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) \doteq v(T, x), \quad \text{para } x \in [a, b], \tag{11.44}$$

terá seu máximo global no conjunto $[a, b]$, ocorrendo em

$$X_0 \in (a, b).$$

Como a função v satisfaz (11.38), segue que

$$g \in C([a, b]; \mathbb{R}) \cap C^2((a, b); \mathbb{R}).$$

Além disso, deveremos ter (via o teste da derivada 2.a do Cálculo I)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(T, X_0) \stackrel{(11.44)}{=} g''(X_0) \leq 0. \quad (11.45)$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{(T, X_0) \in \Omega \cup \Gamma_4 \text{ e } (11.39)}{<} [L(v)](T, X_0) \\ & \stackrel{(11.2)}{=} \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(T, X_0) - \frac{\partial v}{\partial t}(T, X_0), \\ \text{isto é, } & \frac{\partial v}{\partial t}(T, X_0) < \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(T, X_0) \\ & \stackrel{(11.45)}{\leq} 0, \\ \text{ou seja, } & \frac{\partial v}{\partial t}(T, X_0) < 0. \end{aligned} \quad (11.46)$$

Por outro lado, temos que a função $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(t) \doteq v(t, X_0), \quad \text{para cada } t \in [0, T] \quad (11.47)$$

é uma função não decrescente em $[0, T]$, pois ela possui um máximo global em $t = T$ (veja (11.41)).

Como a função v satisfaz (11.38), segue que

$$h \in C([0, T]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, T); \mathbb{R})$$

e assim, como ela é não decrescente em $[0, T]$, deveremos ter:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(T, X_0) \geq 0, \quad (11.48)$$

o que contradiz (11.46), mostrando que o máximo da função u em $\bar{\Omega}$, deverá ocorrer em

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

completando a demonstração. □

Como consequência temos o:

Corolário 11.49 *Sejam*

$$\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \text{ e } \Gamma_4$$

como no Teorema (11.18) acima e

$$u \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma_4; \mathbb{R}).$$

Suponhamos que

$$[L(u)](t, x) \leq 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \cup \Gamma_4. \quad (11.50)$$

Então o mínimo global da função u em $\bar{\Omega}$, ocorrerá em

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

Em particular, se

$$[L(u)](t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in \Omega \cup \Gamma_4, \quad (11.51)$$

então o máximo e o mínimo globais da função u em $\bar{\Omega}$ ocorrerá em

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

Demonstração:

Para tanto, basta aplicar o Teorema (11.18) acima para a função $-u$ no lugar da função u .

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

□

Com isto podemos enunciar e demonstrar o:

Teorema 11.52 *Sejam*

$$f \in C([a, b]; \mathbb{R}), \quad A, B \in C([0, \infty); \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in C^1((0, \infty) \times (a, b); \mathbb{R})$$

funções dadas.

Então existe, no máximo, uma solução do problema

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (a, b), \quad (11.53)$$

$$u(t, a) = A(t), \quad (11.54)$$

$$u(t, b) = B(t), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (11.55)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [a, b], \quad (11.56)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [a, b]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (a, b); \mathbb{R}). \quad (11.57)$$

Demonstração:

Suponhamos que as funções $u, v : [0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são soluções do problema (11.53), (11.54), (11.55), (11.56), (11.57) acima.

Consideremos a função $w : [0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$w(t, x) \doteq u(t, x) - v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [a, b]. \quad (11.58)$$

Notemos que, de (11.57) e (11.58), segue que

$$w \in C([0, \infty) \times [a, b]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (a, b); \mathbb{R}). \quad (11.59)$$

Além disso, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times (a, b)$, teremos:

$$\begin{aligned} w_t(t, x) &\stackrel{(11.58)}{=} \frac{\partial}{\partial t} [u(t, x) - v(t, x)] \\ &= u_t(t, x) - v_t(t, x) \\ &\stackrel{(11.53) \text{ para } u \text{ e } v}{=} \alpha^2 u_{xx}(t, x) - \alpha^2 v_{xx}(t, x) \\ &= \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(t, x) - v(t, x)] \\ &\stackrel{(11.58)}{=} w_{xx}(t, x). \end{aligned} \quad (11.60)$$

Para cada $t \in [0, \infty)$, segue que:

$$\begin{aligned} w(t, a) &\stackrel{(11.58)}{=} u(t, a) - v(t, a) \\ &\stackrel{(11.54) \text{ para } u \text{ e } v}{=} A(t) - A(t) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (11.61)$$

e

$$\begin{aligned} w(t, b) &\stackrel{(11.58)}{=} u(t, b) - v(t, b) \\ &\stackrel{(11.55) \text{ para } u \text{ e } v}{=} B(t) - B(t) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11.62)$$

Finalmente, para cada $x \in [a, b]$, segue que:

$$\begin{aligned} w(0, x) &\stackrel{(11.58)}{=} u(0, x) - v(0, x) \\ &\stackrel{(11.56) \text{ para } u \text{ e } v}{=} f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11.63)$$

Logo, de (11.60), (11.61), (11.62) e (11.63), segue que a função w será uma solução do seguinte problema:

$$w_t(t, x) = \alpha^2 w_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (a, b), \quad (11.64)$$

$$w(t, a) = w(t, b) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (11.65)$$

$$w(0, x) = 0, \quad \text{para cada } x \in [a, b], \quad (11.66)$$

$$w \in C([0, \infty) \times [a, b]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (a, b); \mathbb{R}), \quad (11.67)$$

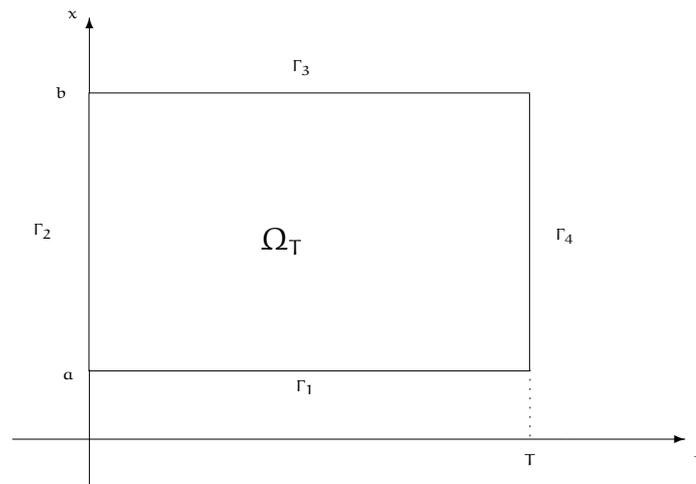
Seja $T > 0$ fixado.

Do Teorema (11.18) e do Corolário (11.49) acima, segue que o máximo e mínimo globais da função w em

$$\Omega_T \doteq [0, T] \times [a, b] \quad (11.68)$$

serão atingidos em (veja a figura abaixo)

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$



Notemos que, de (11.65) e (11.66) (veja a figura acima), segue que

$$w = 0, \quad \text{em } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

ou seja, o máximo e o mínimo da função w em Ω_T serão iguais a zero, ou ainda,

$$w = 0, \quad \text{em } [0, T] \times [a, b],$$

para cada $T > 0$, ou seja,

$$w = 0, \quad \text{em } [0, \infty) \times [a, b]. \quad (11.69)$$

Portanto, de (11.58) e (11.69) segue que

$$u = v, \quad \text{em } [0, \infty) \times [a, b],$$

mostrando que o problema (11.53), (11.54), (11.55), (11.56), (11.57) tem, no máximo, uma solução, completando a demonstração do resultado. \square

Temos também o:

Teorema 11.70 *Sejam*

$$f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad e \quad g \in C((0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$$

funções dadas.

Então existe, no máximo, uma solução do problema

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x) + g(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (11.71)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (11.72)$$

$$u \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad e \quad \underline{u} \text{ é função limitada.}, \quad (11.73)$$

Demonstração:

Suponhamos que as funções $u, v : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são soluções do problema (11.71), (11.72) e (11.73) acima.

Consideremos a função $w : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$w(t, x) \doteq u(t, x) - v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (11.74)$$

Notemos que, de (11.73) e (11.74), segue que

$$w \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad e \quad \underline{w} \text{ é função limitada.} \quad (11.75)$$

Além disso, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} w_t(t, x) &\stackrel{(11.74)}{=} \frac{\partial}{\partial t} [u(t, x) - v(t, x)] \\ &= u_t(t, x) - v_t(t, x) \\ &\stackrel{(11.71) \text{ para } u \text{ e } v}{=} \alpha^2 u_{xx}(t, x) + g(t, x) - [\alpha^2 v_{xx}(t, x) + g(t, x)] \\ &= \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(t, x) - v(t, x)] \\ &\stackrel{(11.74)}{=} w_{xx}(t, x). \end{aligned} \quad (11.76)$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, segue que:

$$\begin{aligned} w(0, x) &\stackrel{(11.74)}{=} u(0, x) - v(0, x) \\ &\stackrel{(11.72) \text{ para } u \text{ e } v}{=} f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11.77)$$

Portanto, de (11.74), (11.75), (11.76) e (11.77), segue que a função w será solução do seguinte problema:

$$w_t(t, x) = \alpha^2 w_{xx}(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (11.78)$$

$$w(0, x) = 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (11.79)$$

$$w \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad w \text{ é uma função limitada.} \quad (11.80)$$

Seja $M > 0$, tal que

$$|w(t, x)| \leq M, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (11.81)$$

Fixados $T, a > 0$, consideremos a função $z : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$z(t, x) \doteq w(t, x) - h(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (11.82)$$

onde a função $h : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$h(t, x) \doteq \frac{M}{a^2} x^2 - \frac{2M\alpha^2}{a^2} t, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (11.83)$$

Notemos que $h \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ e, para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, teremos:

$$h_x(t, x) \stackrel{(11.83)}{=} \frac{2M}{a^2} x, \quad (11.84)$$

$$h_{xx}(t, x) \stackrel{(11.84)}{=} \frac{2M}{a^2}, \quad (11.85)$$

$$h_t(t, x) \stackrel{(11.83)}{=} -\frac{2M\alpha^2}{a^2}. \quad (11.86)$$

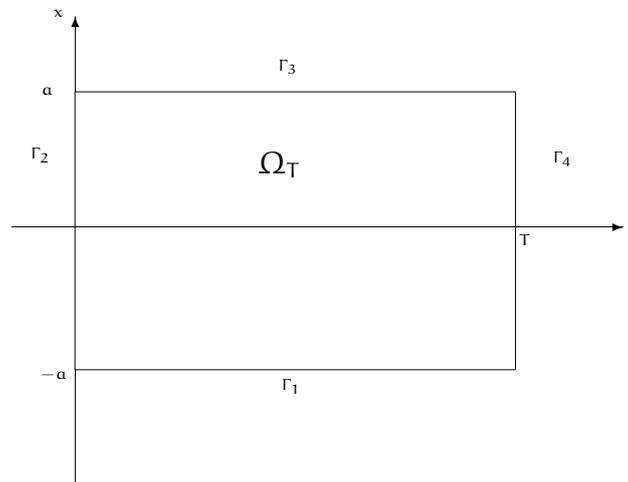
Consideremos (veja a figura abaixo)

$$\Omega_T \doteq (0, T) \times (-a, a) \quad (11.87)$$

e denotemos por

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3 \quad \text{e} \quad \Gamma_4,$$

os quatro segmentos de reta que compõe a fronteira de $\underline{\Omega}_T$, como na figura abaixo.



Notemos que, de (11.80) e (11.82), temos que

$$z \in C(\overline{\Omega}_T; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega_T \cup \Gamma_4; \mathbb{R}).$$

Além disso, para cada

$$(t, x) \in \Omega_T \cup \Gamma_4,$$

teremos:

$$\begin{aligned} [L(z)](t, x) &\stackrel{(11.83)}{=} [L(w - h)](t, x) \\ &\stackrel{L \text{ é linear}}{=} \underbrace{[L(w)](t, x)}_{\stackrel{(11.2)}{=} \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) \stackrel{(11.78)}{=} 0} - [L(h)](t, x) \\ &\stackrel{(11.2)}{=} \alpha^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \\ &\stackrel{(11.85), (11.86)}{=} -\alpha^2 \frac{2M}{a^2} + \frac{2M\alpha^2}{a^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Do Teorema (11.18) e do Corolário (11.49) acima, segue que o máximo e o mínimo globais da função z em $\overline{\Omega}_T$, deverá ocorrer em

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

Notemos que, para (veja a figura acima)

$$(t, x) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 = ([0, T] \times \{-a\}) \cup ([0, T] \times \{a\}),$$

teremos:

$$\begin{aligned}
 z(t, x) &\stackrel{(11.82)}{=} \underbrace{w(t, x) - h(t, x)}_{\stackrel{(11.81)}{\leq} M} \\
 &\stackrel{(11.83)}{=} M - \underbrace{\frac{M}{a^2} x^2}_{x=-a \text{ ou } x=a \Rightarrow \frac{M}{a^2} a^2 = M} - \underbrace{\frac{2M\alpha^2}{a^2} t}_{\substack{t \in [0, T] \\ \leq 0}} \\
 &\leq M - M \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{11.88}$$

Por outro lado, para

$$(t, x) \in \Gamma_2 = \{0\} \times [-a, a],$$

teremos:

$$\begin{aligned}
 z(0, x) &\stackrel{(11.82)}{=} \underbrace{w(0, x) - h(0, x)}_{\stackrel{(11.79)}{=} 0} \\
 &\stackrel{(11.83)}{=} \underbrace{-\frac{M}{a^2} x^2}_{\leq 0} - \underbrace{\frac{2M\alpha^2}{a^2} \cdot 0}_{=0} \\
 &\leq 0,
 \end{aligned} \tag{11.89}$$

Como o máximo e o mínimo da função z em $\overline{\Omega_T}$, deverá ocorrer em

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

e, de (11.88) e (11.89), deveremos ter

$$z \leq 0, \text{ em } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

segue que a

$$z \leq 0, \text{ em } \overline{\Omega_T}. \tag{11.90}$$

Logo, para cada $(t, x) \in \overline{\Omega_T} \stackrel{(11.87)}{=} [0, T] \times [-a, a]$, teremos:

$$\begin{aligned}
 w(t, x) &= \underbrace{z(t, x)}_{\leq 0} + h(t, x) \\
 &\stackrel{(11.83)}{\leq} \frac{M}{a^2} x^2 + \frac{2M\alpha^2}{a^2} t.
 \end{aligned} \tag{11.91}$$

Logo, para cada $T > 0$, tomando-se o limite, quando $\alpha \rightarrow \infty$, na desigualdade (11.91) acima, obteremos:

$$\begin{aligned} w(t, x) &\stackrel{(11.91)}{\leq} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{\alpha^2} x^2 + \frac{2M\alpha^2}{\alpha^2} t \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (11.92)$$

para cada $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, o que implicará que

$$w(t, x) \leq 0, \quad \text{em } [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (11.93)$$

De modo semelhante, se considerarmos a função $z_1 : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$z_1(t, x) \doteq -w(t, x) - \frac{M}{\alpha^2} x^2 - \frac{2M\alpha^2}{\alpha^2} t, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (11.94)$$

utilizando-se as mesmas ideias acima, para cada $T, \alpha > 0$, podemos mostrar que

$$[L(z_1)](t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Omega_T \cup \Gamma_4,$$

onde Ω_T é dado por (11.87).

Do Teorema (11.18) e do Corolário (11.49) acima, segue que o máximo e o mínimo globais da função z_1 em $\overline{\Omega_T}$, deverá ocorrer em

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

e assim podemos mostrar (semelhante ao caso acima) que

$$z_1(t, x) \leq 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \overline{\Omega_T},$$

o que implicará (semelhante ao caso acima)

$$\begin{aligned} w(t, x) &\stackrel{(11.94)}{=} \underbrace{-z_1(t, x)}_{\geq 0} + \frac{M}{\alpha^2} x^2 + \frac{2M\alpha^2}{\alpha^2} t \\ &\geq \frac{M}{\alpha^2} x^2 + \frac{2M\alpha^2}{\alpha^2} t, \quad \text{para cada } (t, x) \in \overline{\Omega_T} = [0, T] \times [-\alpha, \alpha]. \end{aligned}$$

Logo, para cada $T > 0$ fixado, tomando-se o limite quando $\alpha \rightarrow \infty$, na desigualdade acima, obteremos:

$$\begin{aligned} w(t, x) &\geq \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{\alpha^2} x^2 + \frac{2M\alpha^2}{\alpha^2} t \right) \\ &= 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (11.95)$$

para cada $T > 0$ fixado, o que implicará que

$$w(t, x) \geq 0, \quad \text{em } [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (11.96)$$

Logo, segue de (11.93) e (11.96), que

$$w(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Portanto, de (11.74) teremos

$$u(t, x) = v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

mostrando a existência de, no máximo, uma solução do problema (11.71), (11.72) e (11.73) e completando a demonstração. \square

Observação 11.97 *Vale um princípio do máximo (e do mínimo) em \mathbb{R}^n para a transformação linear $L : C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \rightarrow C((0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, dada por*

$$Lu \doteq \alpha^2 \Delta u - \partial_t u, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$$

onde $u \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Até aqui para a 2.a Prova, Prova Substitutiva e Prova de Recuperação

11.2 Princípio do máximo (e do mínimo) para funções harmônicas

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades de funções harmônicas que permitirão demonstrar resultados relacionados com a unicidade de soluções do problema de Dirichlet em um conjunto $\underline{\Omega}$, que é um subconjunto aberto e limitado em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$.

Começaremos pelo:

Teorema 11.98 (do valor médio para funções harmônicas) *Consideremos $\underline{\Omega}$ um subconjunto aberto e limitado em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, onde vale a 3.a identidade de Green (veja o Teorema (10.100)), e $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ uma função harmônica em $\underline{\Omega}$, isto é,*

$$\Delta u = 0, \quad \text{em } \underline{\Omega}. \quad (11.99)$$

Então, dados $\xi \in \Omega$ e $R > 0$, de modo que

$$\overline{B(\xi; R)} \subseteq \Omega,$$

teremos:

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u \, ds. \quad (11.100)$$

Demonstração:

Apliquemos a 3.a identidade de Green (10.101) (ou seja, o Teorema (10.100)), para

$$\Omega \doteq B(\xi; R)$$

e assim obteremos:

$$\begin{aligned} u(\xi) &\stackrel{(10.101)}{=} \int_{B(\xi; R)} F_\xi(\eta) \underbrace{\Delta u(\eta)}_{(11.99)_0} d\eta + \int_{\partial B(\xi; R)} \left(u \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} F_\xi \right) ds \\ &= \int_{\partial B(\xi; R)} \left(u \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} F_\xi \right) ds. \end{aligned} \quad (11.101)$$

Notemos que, para cada

$$\eta \in \partial B(\xi; R), \quad (11.102)$$

teremos:

$$\begin{aligned} F_\xi(\eta) &\stackrel{(10.85), (10.95)}{=} \frac{1}{2\pi} \ln(\|\xi - \eta\|) \\ &\stackrel{\|\xi - \eta\| \stackrel{(11.102)}{=} R}{=} \frac{1}{2\pi} \ln(R), \end{aligned} \quad (11.103)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\xi}{\partial \vec{n}}(\eta) &= \nabla F_\xi(\eta) \cdot \vec{n} \\ &\stackrel{(10.121), (10.122)}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{\xi - \eta}{\|\eta - \xi\|^2} \cdot \frac{\eta - \xi}{\|\eta - \xi\|} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\|\xi - \eta\|} \\ &\stackrel{\|\xi - \eta\| \stackrel{(11.102)}{=} R}{=} \frac{1}{2\pi R}. \end{aligned} \quad (11.104)$$

Substituindo (11.103) e (11.104) em (11.101), obteremos:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_{\partial B(\xi; R)} \left(u \frac{1}{2\pi R} - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \frac{1}{2\pi} \ln(R) \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u ds - \frac{1}{2\pi} \ln(R) \int_{\partial B(\xi; R)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds. \end{aligned} \quad (11.105)$$

Como a função u é harmônica em $\underline{\Omega}$, do Corolário (10.69) (mais especificamente (10.72)), segue que

$$\int_{\partial B(\xi; R)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = 0. \quad (11.106)$$

Logo, (11.105) e (11.106) implicarão em

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B(\xi; R)} u ds,$$

ou seja, vale a identidade (11.100), completando a demonstração. □

Observação 11.107

1. Vale a recíprova do Teorema (11.98) acima, isto é, se o conjunto $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ e $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ satisfaz a identidade (11.100), então a função u será uma função harmônica em $\underline{\Omega}$, isto é,

$$\Delta u = 0, \quad \text{em } \underline{\Omega}.$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. Como consequência do fato acima, podemos mostrar que toda função harmônica em $\underline{\Omega}$ (onde vale o Teorema (10.100)), será analítica em $\underline{\Omega}$.
3. Lembremos, da disciplina de Análise I, que se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em A então, se o conjunto F é um subconjunto fechado em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, então o conjunto

$$f^{-1}(F) \doteq \{x \in A; f(x) \in F\},$$

será um subconjunto fechado em $(A, d_{\mathbb{R}^n})$.

Podemos enunciar e demonstrar o:

Teorema 11.108 (Princípio do máximo para funções harmônicas) Consideremos $\underline{\Omega}$ um subconjunto aberto, conexo e limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ onde vale a 3.a identidade de Green (veja o Teorema (10.100)) e $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ uma função harmônica em $\underline{\Omega}$.

Suponhamos que o máximo da função u em $\overline{\Omega}$, ocorra em $\underline{\Omega}$, isto é, existe $\xi_0 \in \underline{\Omega}$ tal que

$$u(\xi) \leq u(\xi_0), \quad \text{para todo } \xi \in \overline{\Omega}. \quad (11.109)$$

Então a função u deve ser constante em $\overline{\Omega}$.

Demonstração:

Como a função u é contínua em $\overline{\Omega}$, que é um subconjunto fechado e limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ (logo um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$), segue que a função u atinge seu valor máximo global (e seu valor mínimo global) em $\overline{\Omega}$.

Suponhamos que exista $\xi_0 \in \underline{\Omega}$, de modo que

$$u(\xi_0) = M \doteq \max \{u(\xi); \xi \in \overline{\Omega}\}, \quad (11.110)$$

o máximo global da função u em $\overline{\Omega}$ é assumido em $\underline{\Omega}$.

Consideremos o seguinte conjunto

$$S \doteq \{\xi \in \underline{\Omega}; u(\xi) = M\} \subseteq \underline{\Omega}. \quad (11.111)$$

(i) Segue de (11.110) que

$$S \neq \emptyset,$$

pois $\xi_0 \in S$.

(ii) Como

$$S = u^{-1}(\{M\}),$$

o conjunto $\{M\}$ é um subconjunto fechado em $(\mathbb{R}, r_{\mathbb{R}})$ e a função u é contínua em $\overline{\Omega}$ segue, do item 3. da Observação (11.107) acima, que o conjunto \underline{S} é um subconjunto fechado em $(\overline{\Omega}, d_{\mathbb{R}^2})$.

(iii) Afirmamos que o conjunto \underline{S} é um subconjunto aberto em $(\overline{\Omega}, d_{\mathbb{R}^n})$.

De fato, dado

$$\xi \in S \subseteq \Omega, \quad (11.112)$$

como o conjunto $\underline{\Omega}$ é um subconjunto aberto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, existe $R > 0$, de modo que

$$B(\xi; R) \subseteq \Omega. \quad (11.113)$$

Como a função u é harmônica em $\underline{\Omega}$, do Teorema do valor médio para funções harmônicas, isto é, do Teorema (11.98) aplicado à

$$B(\xi; r) \subseteq B(\xi; R) \subseteq \Omega,$$

para cada $r \in (0, R)$ (na verdade, da identidade (11.100)), segue que

$$\begin{aligned} M &\stackrel{\xi \in S}{=} u(\xi) \\ &\stackrel{(11.100)}{=} \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} u \, ds. \end{aligned} \quad (11.114)$$

Afirmamos que

$$B(\xi; R) \subseteq S. \quad (11.115)$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que exista

$$\eta \in B(\xi; R) \setminus S. \quad (11.116)$$

Com isto deveremos ter

$$\begin{aligned} u(\eta) &\stackrel{\eta \notin S}{<} M \\ &\stackrel{\xi \in S}{=} u(\xi). \end{aligned} \quad (11.117)$$

Como a função u é contínua em $B(\xi; R) \subseteq \Omega$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$, de modo que

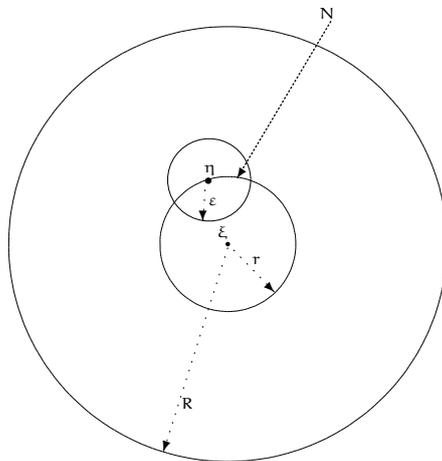
$$B(\eta; \varepsilon) \stackrel{(11.116)}{\subseteq} B(\xi; R), \text{ que é aberto} \subseteq B(\xi; R) \tag{11.118}$$

e

$$u(z) < M, \text{ para todo } z \in B(\eta; \varepsilon). \tag{11.119}$$

Consideremos, (veja figura abaixo):

$$\begin{aligned} r &\doteq \|\xi - \eta\| \stackrel{(11.118)}{\in} (0, R), \\ N &\doteq B(\eta; \varepsilon) \cap \partial B(\xi; r) \subseteq B(\eta; \varepsilon). \end{aligned} \tag{11.120}$$



Notemos que, de (11.120) e (11.119), segue que

$$u(z) < M, \text{ para todo } z \in N. \tag{11.121}$$

Com isto teremos

$$\begin{aligned} M &\stackrel{(11.112)}{\underset{\xi \in S}{\geq}} u(\xi) \\ &\stackrel{(11.114)}{=} \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r)} u \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r) \setminus N} \underbrace{u}_{\stackrel{(11.110)}{\leq} M} \, ds + \frac{1}{2\pi r} \int_N \underbrace{u}_{\stackrel{(11.121)}{<} M} \, ds \\ &< \frac{M}{2\pi r} \int_{\partial B(\xi; r) \setminus N} ds + \frac{M}{2\pi r} \int_N ds \\ &= \frac{M}{2\pi r} \left(\int_{\partial B(\xi; r) \setminus N} ds + \int_N ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{2\pi r} \underbrace{\int_{\partial B(\xi; r)} ds}_{\text{comprimento da circunferência } 2\pi r} \\
&= M, \\
&\text{ou seja, } M < M,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Logo deveremos ter (11.115), mostrando que o conjunto \underline{S} é um subconjunto aberto em $(\overline{\Omega}, d_{\mathbb{R}^2})$.

Como o conjunto $\underline{\Omega}$ é um subconjunto conexo de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, segue da disciplina Análise II, que

$$S = \Omega$$

pois $S \neq \emptyset$.

Logo, deste fato e de (11.111), segue que

$$u(\xi) = M, \quad \text{para cada } \xi \in \Omega,$$

mostrando que a função \underline{u} deverá ser constante em $\overline{\Omega}$, como queríamos demonstrar. □

Observação 11.122

1. Vale a recíproca do Teorema (11.108) acima.

A verificação deste fato é imediata.

2. O Teorema (11.108) acima nos diz que o máximo global de uma função harmônica em um subconjunto aberto, cujo fecho é um subconjunto conexo e limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, onde vale a 3.a identidade de Green (veja o Teorema (10.100)), deverá ocorrer, necessariamente, em $\partial\Omega$.

3. Vale o Princípio do mínimo para funções harmônicas, isto é, com as mesmas hipótese do Teorema (11.108) acima, segue que se a função \underline{u} atingir seu mínimo global em $\underline{\Omega}$, então ela deverá ser constante em $\overline{\Omega}$.

Para mostrar esse resultado basta aplicar o Teorema (11.108) acima à função $-\underline{u}$.

Deixaremos os detalhes do enunciado e da demonstração deste resultado como exercício para o leitor.

4. O Teorema (11.108) acima pode ser estendido, no seguinte sentido: é possível demonstrar que se uma função u é harmônica em um domínio Ω de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ e tem uma máximo local (ou mínimo local) em Ω , então a função deverá ser constante em $\bar{\Omega}$.

Tal resultado é conhecido como Princípio forte do máximo (mínimo) para funções harmônicas.

Podemos agora provar um resultado relacionado à unicidade de soluções do problema de Dirichlet em um domínio limitado Ω de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, mais precisamente:

Corolário 11.123 *Sejam Ω um subconjunto aberto, conexo, limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ onde vale a 3.a identidade de Green (veja o Teorema (10.100)), $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ e $g \in C(\partial\Omega; \mathbb{R})$.*

Então existe, no máximo, uma solução do problema

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \quad (11.124)$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \partial\Omega, \quad (11.125)$$

$$u \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}). \quad (11.126)$$

Demonstração:

Consideremos as funções $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, duas soluções do problema (11.124), (11.125) e (11.126) acima.

Definamos a função $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$w(x, y) \doteq u(x, y) - v(x, y), \quad \text{para cada } (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (11.127)$$

Notemos que

$$w \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}), \quad (11.128)$$

$$\begin{aligned} \Delta w(x, y) &\stackrel{(11.127)}{=} \Delta(u - v)(x, y) \\ &= \Delta u(x, y) - \Delta v(x, y) \\ &\stackrel{(11.124)}{=} f(x, y) - f(x, y) \\ &= 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (11.129)$$

$$\begin{aligned} w(x, y) &\stackrel{(11.127)}{=} u(x, y) - v(x, y) \\ &\stackrel{(11.125)}{=} g(x, y) - g(x, y) \\ &= 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (11.130)$$

ou seja, a função $w = w(x, y)$ será solução do seguinte problema:

$$\Delta w(x, y) = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega, \quad (11.131)$$

$$w(x, y) = 0, \quad \text{para cada } (x, y) \in \partial\Omega, \quad (11.132)$$

$$w \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R}). \quad (11.133)$$

Como a função w é uma função contínua em $\overline{\Omega}$ (veja (11.133)), que é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, segue ela tem máximo global em $\overline{\Omega}$.

Por outro lado, como w é uma função harmônica em Ω (veja (11.131)) e este é um subconjunto aberto, conexo, limitado de $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ onde vale a 3.a identidade de Green (veja o Teorema (10.100)), segue, do Princípio do máximo e do mínimo (isto é, do Teorema (11.108) e do item 3. da Observação (11.122), que a função w atingirá seu máximo e seu mínimo globais em $\partial\Omega$ que, de (11.132), é o mesmo que:

$$w = 0, \quad \text{em } \overline{\Omega}. \quad (11.134)$$

Portanto, de (11.127) e (11.134), segue que

$$u = v, \quad \text{em } \overline{\Omega},$$

mostrando que existe, no máximo, uma solução do problema (11.124), (11.125) e (11.125), completando a demonstração. □

11.3 Integrais de energia - unicidade para a equação da onda

Nesta seção trataremos da unicidade de soluções do problema da corda vibrante, ou seja, para problemas de Cauchy associado a equação da onda.

A demonstração da unicidade, neste caso, pode ser feita de três modos diferentes, a saber:

1. Através da mudança de variáveis, na equação da onda:

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases};$$

2. por meio de um princípio do máximo (e do mínimo);
3. por meio de integrais de energia.

Observação 11.135

1. Vale notar que o primeiro processo não se estende para dimensões maiores que um.

A elaboração do mesmo, para o caso $n = 1$, será deixada como exercício para o leitor.

2. A elaboração do segundo método será deixado como exercício para o leitor.
3. Abordaremos, a seguir, o terceiro processo, ou seja, via as denominadas integrais de energia.

Consideremos o problema de Cauchy:

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (11.136)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (11.137)$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (11.138)$$

$$u \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}), \quad (11.139)$$

onde

$$f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

Com isto temos as:

Observação 11.140

1. Afirmamos que basta mostrar a unicidade de soluções do problema de Cauchy acima, para

$$t \in (0, \infty).$$

De fato, o problema em

$$(-\infty, 0)$$

pode ser reduzido ao caso em

$$(0, \infty),$$

por meio da mudança de variáveis

$$\begin{cases} s \doteq -t \\ y \doteq x \end{cases}. \quad (11.141)$$

Notemos que a equação da onda é invariante por essa mudança de variáveis (o mesmo não ocorre com a equação do calor).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Conclusão: se provarmos a unicidade de soluções para o problema de Cauchy acima em

$$[0, \infty) \times \mathbb{R},$$

utilizando-se a mudança de variáveis (11.141) acima, obteremos a unicidade de soluções para o problema de Cauchy acima em

$$(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$$

e assim teremos a unicidade de soluções para o problema de Cauchy acima em \mathbb{R}^2 .

2. Lembremos que as curvas características associadas à equação da onda (11.136) são dadas por :

$$x \pm ct = \text{constante.}$$

Notemos que, as curvas características associadas à equação da onda, que passam pelo ponto

$$(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

serão da forma:

$$x + ct = x_0 + ct_0 \quad e \quad x - ct = x_0 - ct_0,$$

ou ainda,

$$(x - x_0) = -c(t - t_0) \quad e \quad (x - x_0) = c(t - t_0),$$

o que implicará, multiplicando as duas equações, que

$$\begin{aligned} (x - x_0)(x - x_0) &= [-c(t - t_0)] [c(t - t_0)], \\ \text{ou seja, } (x - x_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{11.142}$$

Podemos agora introduzir a:

Definição 11.143 *Sejam*

$$I \doteq [a, b] \subseteq \mathbb{R},$$

$T > 0$ e uma função $u : (0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u(T, \cdot) \in C^2(I; \mathbb{R}).$$

Definamos

$$E(u; T, I) \doteq \frac{1}{2} \int_I \left\{ [u_t(T, x)]^2 + c^2 [u_x(T, x)]^2 \right\} dx, \tag{11.144}$$

que será denominada integral de energia da função u no intervalo I , no instante T .

Observemos que

$$E(u; T, I) \geq 0. \tag{11.145}$$

Podemos agora enunciar e demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 11.146 *Sejam $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ e $T > 0$.*

Definamos (veja a figura abaixo):

$$\Omega \doteq \{(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}; (x - x_0)^2 - c(t - t_0)^2 < 0\}, \quad (11.147)$$

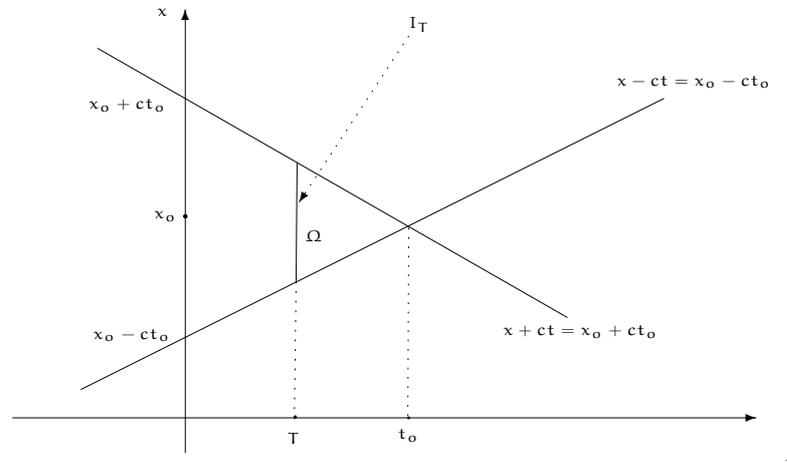
$$I_0 \doteq [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0], \quad (11.148)$$

$$I_T \doteq [x - c(t_0 - T), x_0 + c(t_0 - T)]. \quad (11.149)$$

Suponhamos que $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ é uma solução da equação da onda (11.136) em $\underline{\Omega}$.

Então

$$E(u; T, I_T) \leq E(u; 0, I_0). \quad (11.150)$$



Demonstração:

Como $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, para cada $(t, x) \in \overline{\Omega}$, da regra da cadeia, teremos:

$$\partial_t [(u_t)^2](t, x) = [2u_t u_{tt}](t, x) \quad (11.151)$$

e

$$\begin{aligned} 2c^2 [u_t u_{xx}](t, x) &= 2c^2 \{\partial_x [u_t u_x] - 2u_{tx} u_x\}(t, x) \\ &= 2c^2 \{\partial_x [u_t u_x] - \partial_t [(u_x)^2]\}(t, x). \end{aligned} \quad (11.152)$$

Logo, para cada $(t, x) \in \overline{\Omega}$, teremos:

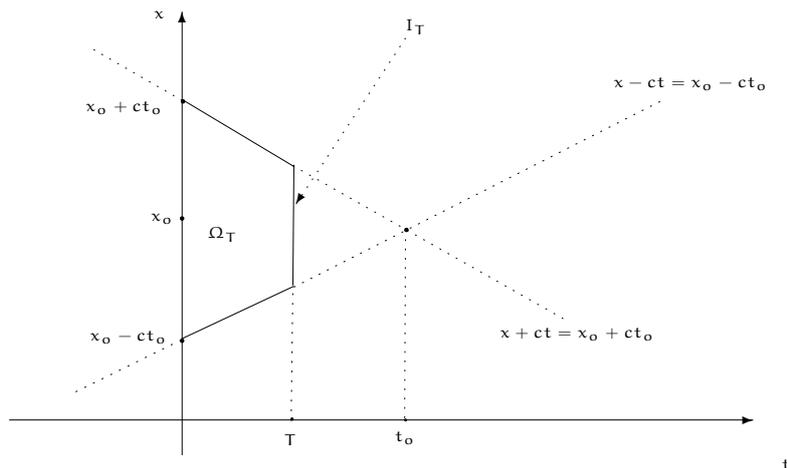
$$\begin{aligned} [2u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx})](t, x) &= \left[\begin{array}{c} \stackrel{(11.151)}{=} \underbrace{\partial_t [(u_t)^2]}_{2u_t u_{tt}} - \underbrace{2c^2 \partial_x [u_t u_x] - \partial_t [(u_x)^2]}_{2c^2 u_t u_{xx}} \end{array} \right] (t, x) \\ &= \{\partial_t [(u_t)^2] - 2c^2 \partial_x [u_t u_x] + \partial_t [(u_x)^2]\}(t, x) \\ &= \{\partial_t [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2] - 2c^2 \partial_x (u_t u_x)\}(t, x) \end{aligned} \quad (11.153)$$

Para cada $T > 0$ fixado, consideremos (veja a figura abaixo)

$$\Omega_T \doteq \{(t, x) \in \Omega; t \in (0, T)\}, \quad (11.154)$$

$$\partial\Omega_T = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \quad (11.155)$$

onde, Γ_i , para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, são dados pela figura abaixo.



Definamos o campo vetorial $\vec{F} : \overline{\Omega_T} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por:

$$\vec{F}(t, x) \doteq \left([(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2](t, x), [-2c^2 u_t u_x](t, x) \right), \quad (11.156)$$

para cada $(t, x) \in \overline{\Omega_T}$.

Como $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ segue que $\vec{F} \in C^1(\overline{\Omega_T}; \mathbb{R})$ e além disso, para cada $(t, x) \in \overline{\Omega_T}$, teremos:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{F})(t, x) &\stackrel{(11.156)}{=} \partial_t [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2] + \partial_x [-2c^2 u_t u_x] \\ &\stackrel{(11.153)}{=} [2u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx})](t, x). \end{aligned} \quad (11.157)$$

Podemos aplicar o Teorema da Divergência ao campo vetorial \vec{F} em $\overline{\Omega_T}$ (veja o Teorema (10.61)) e assim obteremos:

$$\begin{aligned} 0 \quad &\underline{u} \text{ é solução da equação da onda} \int_{\overline{\Omega_T}} \left\{ u_t \left[\overbrace{u_{tt} - c^2 u_{xx}}^{=0} \right] \right\} (t, x) dt dx \\ &\stackrel{(11.157)}{=} \int_{\overline{\Omega_T}} [\nabla \cdot \vec{F}](t, x) dt dx \\ &\stackrel{\text{Teor. Divergência ou (10.62)}}{=} \int_{\partial\Omega_T} \vec{F} \cdot \vec{n} ds \\ &\stackrel{(11.155)}{=} \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot \vec{n} ds \end{aligned} \quad (11.158)$$

onde, para cada $(t, x) \in \partial\Omega$, o vetor $\vec{n} = \vec{n}(t, x)$, é o vetor normal unitário à

$$\partial\Omega_T = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

apontando para o exterior de $\underline{\Omega}_T$, onde (veja a figura abaixo):

$$\Gamma_1 \doteq \{(0, x); x \in [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]\} = I_0, \tag{11.159}$$

$$\Gamma_2 \doteq \{(t, ct + x_0 - ct_0); t \in [0, T]\}, \tag{11.160}$$

$$\Gamma_3 \doteq \{(T, x); x \in [x_0 - ct_0 + cT, x_0 + ct_0 - cT]\} = I_T, \tag{11.161}$$

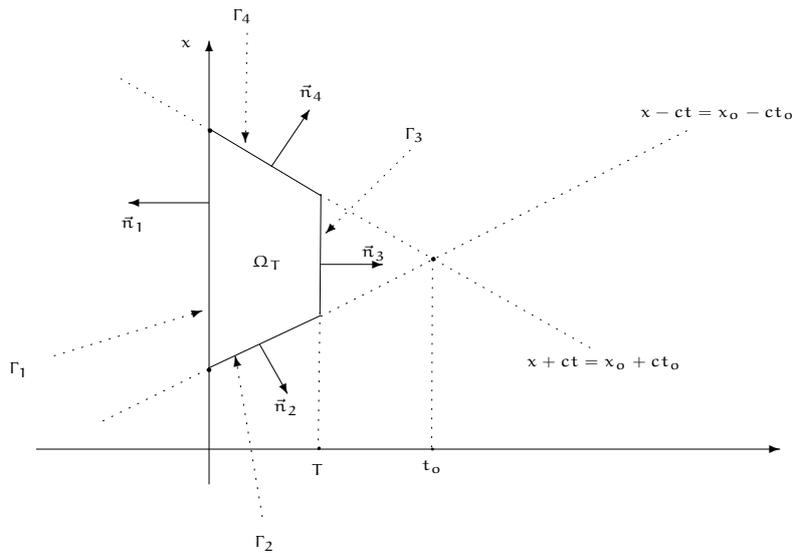
$$\Gamma_4 \doteq \{(t, -ct + x_0 + ct_0); t \in [0, T]\}. \tag{11.162}$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, denotemos por

$$\vec{n}_i = \vec{n}_i(t, x)$$

o correspondente vetor normal unitário correspondente à Γ_i , ou seja, (veja a figura abaixo)

$$\vec{n}_i = \vec{n}, \quad \text{em } \Gamma_i.$$



Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, calculemos cada uma das integrais $\int_{\Gamma_i} \vec{F} \bullet \vec{n}_i \, ds$.

Observemos que (veja a figura acima)

$$\vec{n}_1(t, x) = (-1, 0), \tag{11.163}$$

$$\vec{n}_2(t, x) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} (c, -1), \tag{11.164}$$

$$\vec{n}_3(t, x) = (1, 0), \tag{11.165}$$

$$\vec{n}_4(t, x) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} (c, 1), \tag{11.166}$$

onde, em cada um dos casos acima, (t, x) pertencerá ao correspondente Γ_i , para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} [\vec{F} \bullet \vec{n}_1](t, x) &\stackrel{(11.156), (11.163)}{=} - \left([(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2](t, x), [-2c^2 u_t u_x](t, x) \right) \bullet (-1, 0) \\ &= - [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2](t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \Gamma_1, \end{aligned} \quad (11.167)$$

$$\begin{aligned} [\vec{F} \bullet \vec{n}_2](t, x) &\stackrel{(11.156), (11.164)}{=} - \left([(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2](t, x), [-2c^2 u_t u_x](t, x) \right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}}(c, -1) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} [c(u_t)^2 + c^2(u_x)^2 + 2c^2(u_t u_x)](t, x) \\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} [u_t + c u_x]^2(t, x) \geq 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad (11.168)$$

$$\begin{aligned} [\vec{F} \bullet \vec{n}_3](t, x) &\stackrel{(11.156), (11.165)}{=} - \left([(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2](t, x), [-2c^2 u_t u_x](t, x) \right) \bullet (1, 0) \\ &= [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2](t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \Gamma_3, \end{aligned} \quad (11.169)$$

$$\begin{aligned} [\vec{F} \bullet \vec{n}_4](t, x) &\stackrel{(11.156), (11.166)}{=} - \left([(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2](t, x), [-2c^2 u_t u_x](t, x) \right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}}(c, 1) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} [c(u_t)^2 + c^2(u_x)^2 - 2c^2(u_t u_x)](t, x) \\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} [u_t - c u_x]^2(t, x) \geq 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \Gamma_4. \end{aligned} \quad (11.170)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} [\vec{F} \bullet \vec{n}_1] ds &\stackrel{(11.167), (11.159)}{=} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} - [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2](0, r) dr \\ &\stackrel{(11.144)}{=} -2E(u; 0, I_0), \end{aligned} \quad (11.171)$$

$$\int_{\Gamma_2} [\vec{F} \bullet \vec{n}_2] ds \stackrel{(11.168)}{\geq} 0, \quad (11.172)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} [\vec{F} \bullet \vec{n}_3] ds &\stackrel{(11.169), (11.161)}{=} \int_{I_T} [(u_t)^2 - c^2 (u_x)^2](T, r) dr \\ &\stackrel{(11.144)}{=} 2E(u; T, I_T), \end{aligned} \quad (11.173)$$

$$\int_{\Gamma_4} [\vec{F} \bullet \vec{n}_4] ds \stackrel{(11.170)}{\geq} 0. \quad (11.174)$$

Portanto, de (11.158) e (11.171), (11.172), (11.173), (11.174), segue que

$$\begin{aligned}
 -2E(u; 0, I_0) + 2E(u; T, I_T) &\stackrel{(11.171), (11.173)}{=} \int_{\Gamma_1} [\vec{F} \cdot \vec{n}_1] + \int_{\Gamma_3} [\vec{F} \cdot \vec{n}_3] \\
 &\stackrel{(11.172), (11.174)}{\leq} \int_{\Gamma_1} [\vec{F} \cdot \vec{n}_1] + \int_{\Gamma_2} [\vec{F} \cdot \vec{n}_2] + \int_{\Gamma_3} [\vec{F} \cdot \vec{n}_3] + \int_{\Gamma_4} [\vec{F} \cdot \vec{n}_4] \\
 &\stackrel{(11.158)}{=} 0,
 \end{aligned}$$

implicando que

$$E(u; T, I_T) \leq E(u; 0, I_0),$$

ou seja, (11.150), completando a demonstração. \square

Com este resultado podemos obter um resultado de unidade para o problema de Cauchy para equação da onda, (11.136), (11.137), (11.138), (11.139) dado inicialmente.

Na verdade temos um resultado mais geral, a saber:

Teorema 11.175 *Sejam*

$$f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad e \quad h \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}).$$

Então existe, no máximo, uma solução do problema

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) + h(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (11.176)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (11.177)$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (11.178)$$

$$u \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}). \quad (11.179)$$

Demonstração:

De fato, suponhamos que as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sejam soluções do problema (11.176), (11.177), (11.178), (11.179) acima.

Consideremos a função $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$w(t, x) \doteq u(t, x) - v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (11.180)$$

Então é fácil ver que a função $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ será solução do seguinte problema:

$$w_{tt}(t, x) = c^2 w_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (11.181)$$

$$w(0, x) = 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (11.182)$$

$$w_t(0, x) = 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, \quad (11.183)$$

$$w \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}). \quad (11.184)$$

Aplicando-se o Teorema (11.146) acima para a função \underline{w} , para cada

$$(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad \text{e} \quad T \in (0, t_0),$$

obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(11.145)}{\leq} E(w; T, I_T) \\ &\stackrel{(11.150)}{\leq} E(w; 0, I_0) \\ &\stackrel{(11.144)}{=} \frac{1}{2} \int_{I_0} \left\{ [w_t(0, x)]^2 + c^2 [w_x(0, x)]^2 \right\} dx \\ &w(0, x) \stackrel{(11.182)}{=} 0 \text{ em } I_0 \stackrel{(11.148)}{=} \underline{\underline{\{ (0, x); x \in [x_0 - c t_0, x_0 + c t_0] \}}}} 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$E(w; T, I_T) = 0, \quad \text{para cada } T \in (0, \infty). \quad (11.185)$$

Mas

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(11.186)}{=} E(w; T, I_T) \\ &\stackrel{(11.144) \text{ e } (11.149)}{=} \frac{1}{2} \int_{x-c(t_0-T)}^{x+c(t_0-T)} \underbrace{\left\{ [w_t(T, x)]^2 + c^2 [w_x(T, x)]^2 \right\}}_{\geq 0} dx, \end{aligned} \quad (11.186)$$

para cada $T \in (0, t_0)$.

Como as funções \underline{w}_t e \underline{w}_x são contínuas em \mathbb{R}^2 (veja (11.184)), da disciplina de Análise II, segue que

$$w_t = w_x = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (11.187)$$

Mas o conjunto

$$(0, \infty) \times \mathbb{R}$$

é conexo em $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$, o que implicará que a função \underline{w} deverá ser constante em $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Como

$$w(0, x) \stackrel{(11.182)}{=} 0, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R},$$

assim segue que

$$w = 0, \quad \text{em } [0, \infty) \times \mathbb{R}$$

que, de (11.180) implicará que

$$u = v, \quad \text{em } [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

mostrando que existe, no máximo, uma solução do problema (11.176), (11.177), (11.178), (11.179) em $[0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Um raciocínio análogo pode ser aplicado para

$$(-\infty, 0] \times \mathbb{R}.$$

Deixaremos a verificação do mesmo como exercício para o leitor, completando com isto a demonstração. □

No caso do problema da corda finita vibrante a integral energia (11.144) será constante, como mostra o:

Teorema 11.188 *Suponhamos que*

$$u \in C^1([0, \infty) \times [a, b]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [a, b]; \mathbb{R})$$

satisfaz o seguinte problema:

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times [a, b], \quad (11.189)$$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (11.190)$$

Então

$$E(t) = E(0), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (11.191)$$

onde, para cada $t \in [0, \infty)$, *definimos*

$$E(t) \doteq \frac{1}{2} \int_a^b [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2] (t, x) dx. \quad (11.192)$$

Demonstração:

Podemos aplicar o resultado que garante a derivação sob o sinal de integração (ou seja, a Proposição (8.269)) e assim teremos que a função $E : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ será diferenciável em $[0, \infty)$ e além disso, para cada $t \in (0, \infty)$, teremos:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_a^b [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2] (t, x) dx \right] \\ &\stackrel{(8.271)}{=} \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2] (t, x) dx. \end{aligned} \quad (11.193)$$

Notemos que, para cada $t \in (0, \infty)$, teremos:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_a^b \left[u_t \underbrace{(u_{tt} - c^2 u_{xx})}_{(11.189)_0} \right] (t, x) \, dx \\
 &\stackrel{(11.153)}{=} \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2] - 2c^2 \partial_x (u_t u_x) \right\} (t, x) \, dx \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} [(u_t)^2 + c^2 (u_x)^2] \, dx}_{(11.193) \, E'(t)} - c^2 \underbrace{\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) (t, x) \, dx}_{\text{Teor. Fund. Cálculo}_{(u_t u_x)(t,b) - (u_t u_x)(t,a)}} \\
 &= E'(t) - c^2 [u_t(t, b) u_x(t, b) - u_t(t, a) u_x(t, a)]. \tag{11.194}
 \end{aligned}$$

Como $u \in C^1([0, \infty) \times [a, b]; \mathbb{R})$, podemos derivar a equação (11.190), em relação a \underline{t} , e assim obter:

$$u_t(t, a) = u_t(t, b) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \tag{11.195}$$

Logo, substituindo (11.195) em (11.204), obteremos

$$E'(t) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty)$$

e como $[0, \infty)$ é conexo em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, segue que a função \underline{E} deverá ser constante em $[0, \infty)$, ou seja,

$$E(t) = E(0), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty),$$

como queríamos demonstrar. □

Com isto podemos enunciar e demonstrar o seguinte resultado relacionado com a unicidade de solução do problema da corda finita vibrante:

Teorema 11.196 *Sejam*

$$A, B \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty); \mathbb{R}),$$

$$f \in C^2([a, b]; \mathbb{R}), \quad g \in C^1([a, b]; \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad h \in C^2((0, \infty) \times (a, b); \mathbb{R}).$$

Então existe, no máximo, uma solução do problema

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) + h(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (a, b), \tag{11.197}$$

$$u(t, a) = A(t), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \tag{11.198}$$

$$u(t, b) = B(t), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \tag{11.199}$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [a, b], \tag{11.200}$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [a, b], \tag{11.201}$$

$$u \in C([0, \infty) \times [a, b]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times (a, b); \mathbb{R}). \tag{11.202}$$

Demonstração:

De fato, suponhamos que as funções $u, v : [0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são soluções do problema (11.197), (11.198), (11.199), (11.200), (11.201), (11.202) acima.

Consideremos a função $w : [0, \infty) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$w(t, x) \doteq u(t, x) - v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [a, b]. \quad (11.203)$$

Então segue que a função w satisfaz as condições do Teorema (11.188) acima.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Notemos também que, para cada $x \in [a, b]$, teremos:

$$\begin{aligned} w_x(0, x) &\stackrel{(11.203)}{=} u_x(0, x) - v_x(0, x) \\ &\stackrel{(11.200)}{=} \text{para } u \text{ e } v \quad f'(x) - f'(x) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (11.204)$$

$$\begin{aligned} w_t(0, x) &\stackrel{(11.203)}{=} u_t(0, x) - v_t(0, x) \\ &\stackrel{(11.203)}{=} \text{para } u \text{ e } v \quad g(x) - g'(x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11.205)$$

Logo, para cada $t \in (0, \infty)$, do Teorema (11.188) (na verdade de (11.191)), segue que

$$\begin{aligned} &\stackrel{(11.192)}{=} \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \underbrace{[w_t(t, x)]^2}_{\geq 0} + c^2 \underbrace{[w_x(t, x)]^2}_{\geq 0} \right\} dx \\ &\stackrel{(11.191)}{=} E(t) \\ &\stackrel{(11.192)}{=} \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ [w_t(0, x)]^2 + c^2 [w_x(0, x)]^2 \right\} dx \\ &\stackrel{(11.204) \text{ e } (11.205)}{=} 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_a^b [w_t(t, x)]^2 + c^2 [w_x(t, x)]^2 dx = 0, \quad (11.206)$$

para cada $t \in [0, \infty)$, o que implicará que

$$\begin{aligned} w_t(t, x) = w_x(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times [a, b], \\ \text{ou seja, } \nabla w(t, x) = 0, \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times [a, b]. \end{aligned}$$

Como o conjunto $[a, b]$ é conexo em $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, segue que a função w deverá ser constante em $[0, \infty) \times [a, b]$.

Mas, para $t \in [0, \infty)$, teremos:

$$\begin{aligned} w(t, a) &\stackrel{(11.203)}{=} u(t, a) - v(t, a) \\ &\stackrel{(11.198)}{=} \text{para } u \text{ e } v \quad A(t) - A(t) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{11.207}$$

donde podemos concluir que

$$w \equiv 0, \quad \text{em } [0, \infty) \times [a, b],$$

que, de (11.203), implicará que

$$u \equiv v, \quad \text{em } [0, \infty) \times [a, b]$$

mostrando que problema (11.197), (11.198), (11.199), (11.200), (11.201), (11.202) possui, no máximo, uma solução, completando a demonstração. □

Observação 11.208

1. No Capítulo anterior mostramos a unicidade do problema acima, no caso que

$$h \equiv 0, \quad \text{em } [0, \infty) \times [0, L]$$

e

$$A = B = 0, \quad \text{em } [0, L],$$

para

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C((0, \infty) \times (0, L); \mathbb{R}),$$

de modo que exista o limite

$$u_t(0, x) \doteq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(h, x) - u(0, x)}{h}, \quad \text{para cada } x \in [0, L].$$

2. Os resultados acima podem ser estendidos para

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad \text{ou} \quad [0, \infty) \times [a, b]$$

e as respectivas demonstrações são análogas as que exibimos acima.

3. Lembremos que, no caso de \mathbb{R}^n , a equação da onda tornar-se-á:

$$u_{tt}(t, x) = c^2 \Delta u(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

11.4 Exercícios

Capítulo 12

Equação do calor, da onda não homogêneas e/ou com condições de contorno não homogêneas

Neste capítulo exibiremos uma solução para os problemas do calor, da onda e da equação de Laplace não homogêneas ou com condições de contorno não homogêneas.

12.1 Equação do calor homogênea, com dados de contorno não homogêneos

Nesta seção encontraremos que uma solução do problema da distribuição do calor no fio finito cujas extremidades são mantidas à temperaturas que dependerão do tempo (condições de contorno não-homogêneas) e temperatura inicial conhecidas, mais precisamente, trataremos de encontrar uma função a valores reais $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz às seguintes condições:

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (12.1)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.2)$$

$$u(t, 0) = h_0(t), \quad (12.3)$$

$$u(t, L) = h_1(t), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.4)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \quad (12.5)$$

Vamos supor que

$$f \in C([0, L]; \mathbb{R}) \quad \text{é tal que} \quad f' \in SC([0, L]; \mathbb{R}). \quad (12.6)$$

Observemos que a EDP (12.1) acima é homogênea.

Notemos que (condições de compatibilidade)

$$\begin{aligned} f(0) &\stackrel{(12.2) \text{ com } x=0}{=} u(0, 0) \\ &\stackrel{(12.3) \text{ com } t=0}{=} h_0(0), \end{aligned} \tag{12.7}$$

$$\begin{aligned} f(L) &\stackrel{(12.2) \text{ com } x=L}{=} u(0, L) \\ &\stackrel{(12.4) \text{ com } t=0}{=} h_L(L). \end{aligned} \tag{12.8}$$

Observação 12.9 *Fisicamente, o problema acima (12.1)- (12.5) descreve a distribuição da temperatura no fio finito de comprimento igual a L , onde uma extremidade é mantida a uma certa temperatura (ou seja, (12.3) no caso a função $h_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$), a outra extremidade é mantida a uma outra temperatura (ou seja, (12.4), no caso, a função $h_L : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$) que dependerão do tempo e temperatura inicial dada (no caso, a função $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$).*

A idéia é reduzir o problema (12.1), (12.2), (12.3), (12.4), (12.5) acima, a um problema equivalente, que tenha condições de contorno zero (isto é, condições de contorno homogêneas).

Deste modo poderemos aplicar as técnicas desenvolvidas na seção (8.1) do Capítulo 8, para encontrar uma solução do problema equivalente e depois obter uma solução do problema (12.1), (12.2), (12.3), (12.4), (12.5).

Suponhamos que as

$$h_0, h_L \in C^2([0, L]; \mathbb{R}). \tag{12.10}$$

Para isto, suponhamos que $v \in C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$ seja uma função que satisfaz

$$v(t, 0) = h_0(t), \tag{12.11}$$

$$v(t, L) = h_L(t), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \tag{12.12}$$

Notemos que se a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do problema (12.1), (12.2), (12.3), (12.4), (12.5) então, definindo-se a função $w : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, por:

$$w(t, x) \doteq u(t, x) - v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \tag{12.13}$$

segue, de (12.5) e (12.10) que

$$w \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$$

e, para $(t, x) \in (0, \infty) \times (0, L)$, teremos

$$\begin{aligned}
 w_t(t, x) &\stackrel{(12.13)}{=} \partial_t[u(t, x) - v(t, x)] \\
 &= u_t(t, x) - v_t(t, x) \\
 &\stackrel{(12.1)}{=} \alpha^2 u_{xx}(t, x) - v_t(t, x) \\
 &\stackrel{(12.1)}{=} \alpha^2 u_{xx}(t, x) - \alpha^2 v_{xx}(t, x) + \alpha^2 v_{xx}(t, x) - v_t(t, x) \\
 &= \alpha^2 [u_{xx}(t, x) - v_{xx}(t, x)] + [\alpha^2 v_{xx}(t, x) - v_t(t, x)] \\
 &\stackrel{(12.13)}{=} \alpha^2 w_{xx}(t, x) + [\alpha^2 v_{xx}(t, x) - v_t(t, x)] \\
 w(t, 0) &\stackrel{(12.13)}{=} u(t, 0) - v(t, 0) \\
 &\stackrel{(12.3), (12.11)}{=} h_o(t) - h_o(t) \\
 &= 0, \\
 w(t, L) &\stackrel{(12.13)}{=} u(t, L) - v(t, L) \\
 &\stackrel{(12.4), (12.12)}{=} h_L(t) - h_L(t) \\
 &= 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty) \\
 w(0, x) &\stackrel{(12.13)}{=} u(0, x) - v(0, x) \\
 &\stackrel{(12.2)}{=} f(x) - v(0, x), \quad \text{para cada } x \in [0, L],
 \end{aligned}$$

ou seja, a função $w : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, será uma solução do problema

$$w_t(t, x) = \alpha^2 w_{xx}(t, x) + g(t, x) \quad (12.14)$$

$$w(t, 0) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.15)$$

$$w(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.16)$$

$$w(0, x) = f(x) - v(0, x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (12.17)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}), \quad (12.18)$$

onde a função $g : (0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$g(t, x) \doteq \alpha^2 v_{xx}(t, x) - v_t(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]. \quad (12.19)$$

Observação 12.20 *Notemos que se existir uma função*

$$v \in C^2([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$$

satisfazendo a equação do calor e (12.12), de (12.19) então teremos

$$g(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$$

e, neste caso, o problema (12.14), (12.15), (12.16), (12.17), (12.18) foi tratado na seção (8.1), do Capítulo 8, com condições de contorno homogêneas.

Exemplificaremos as discussões acima no seguinte exemplo:

Exemplo 12.21 *Encontre uma solução para o problema (12.1), (12.2), (12.3), (12.4), (12.5), onde*

$$h_0(t) \doteq \beta \quad (12.22)$$

$$h_L(t) \doteq \gamma, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.23)$$

onde $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ estão fixas.

Resolução:

Estamos supondo que

$$f \in C([0, L]; \mathbb{R}) \quad \text{é tal que} \quad f' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$$

e satisfaz as condições de compatibilidade:

$$f(0) = h_0(0) = \beta \quad \text{e} \quad f(L) = h_L(L) = \gamma.$$

Observemos que a função $v : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$v(t, x) \doteq \gamma + \frac{\beta - \gamma}{L} x, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (12.24)$$

satisfaz

$$\underbrace{v_t(t, x)}_{\stackrel{(12.24)}{=} 0} - \alpha^2 \underbrace{v_{xx}(t, x)}_{\stackrel{(12.24)}{=} 0} = 0, \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L], \quad (12.25)$$

$$\begin{aligned} v(t, 0) &\stackrel{(12.24)}{=} \gamma + \frac{\beta - \gamma}{L} \cdot 0 \\ &= \gamma, \end{aligned} \quad (12.26)$$

$$\begin{aligned} v(t, L) &\stackrel{(12.24)}{=} \gamma + \frac{\beta - \gamma}{L} L \\ &= \beta, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (12.27)$$

Logo, se considerarmos a função $w : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$w(t, x) \doteq u(t, x) - v(t, x), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (12.28)$$

segue, do desenvolvimento feito anteriormente, que a função $w = w(t, x)$ será uma solução

do problema

$$\begin{aligned}
 w_t(t, x) &= \alpha^2 w_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \\
 w(t, 0) &\stackrel{(12.28)}{=} u(t, 0) - v(t, 0) \\
 &\stackrel{(12.3), (12.26)}{=} \gamma - \gamma \\
 &= 0, \quad \text{para cada } t \in [0, L], \\
 w(t, L) &\stackrel{(12.28)}{=} u(t, L) - v(t, L) \\
 &\stackrel{(12.4), (12.27)}{=} \beta - \beta \\
 &= 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \\
 w(0, x) &\stackrel{(12.28)}{=} \underbrace{u(0, x)}_{\stackrel{(12.2)}{=} f(x)} - \underbrace{v(0, x)}_{\stackrel{(12.24)}{=} \gamma + \frac{\beta - \gamma}{L} x} \\
 &\stackrel{(12.2), (12.24)}{=} f(x) - \gamma + \frac{\beta - \gamma}{L} x, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \\
 w &\in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}),
 \end{aligned}$$

ou seja, a função $w : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ deverá satisfazer o seguinte problemas:

$$w_t(t, x) = \alpha^2 w_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (12.29)$$

$$w(t, 0) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, L], \quad (12.30)$$

$$w(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.31)$$

$$w(0, x) + f(x) - \gamma + \frac{\beta - \gamma}{L} x, \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (12.32)$$

$$w \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (12.33)$$

Como vimos na a seção (8.1) do Capítulo 8 (veja (8.20)), uma solução do problema acima será dada por

$$w(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (12.34)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$b_n \doteq \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - \left(\gamma + \frac{\beta - \gamma}{L} x \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx. \quad (12.35)$$

Logo a função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &\stackrel{(12.28)}{\doteq} w(t, x) + v(t, x) \\
 &\stackrel{(12.35), (12.24)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) + \gamma + \frac{\beta - \gamma}{L} x, \quad (12.36)
 \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, será uma solução do problema original, com (12.22) (12.23). \square

Observação 12.37 *Notemos que a função u , dada por (12.36), satisfaz*

$$u \in C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}),$$

pois

$$h_0, h_L \in C^\infty([0, L]; \mathbb{R}).$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

12.2 Equação do calor não homogênea, com condições de contorno homogêneas

Nesta seção encontraremos que uma solução do problema da distribuição do calor no fio finito com extremidades mantidas a temperaturas zero graus, ao longo do tempo (condições de contorno homogêneas) e temperatura inicial conhecidas, mas a EDP que descreve o problema é não-homogênea, mais precisamente, trataremos de encontrar uma função a valores reais $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes condições:

$$\partial_t u(t, x) = \alpha^2 \partial_x^2 u(t, x) + g(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L], \quad (12.38)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (12.39)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad (12.40)$$

$$u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.41)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}). \quad (12.42)$$

Vamos supor que

$$g \in C((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R})$$

e

$$f \in C([0, L]; \mathbb{R}) \quad \text{é tal que} \quad f' \in SC([0, L]; \mathbb{R}).$$

Observemos que a EDP (12.38) acima é não-homogênea.

Notemos que (condições de compatibilidade):

$$\begin{aligned} f(0) &\stackrel{(12.39)}{=} \text{com } x=0 = u(0, 0) \\ &\stackrel{(12.40)}{=} \text{com } t=0 = 0, \end{aligned} \quad (12.43)$$

$$\begin{aligned} f(L) &\stackrel{(12.39)}{=} \text{com } x=L = u(0, L) \\ &\stackrel{(12.41)}{=} \text{com } t=0 = 0. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Observação 12.45 *Observemos que se a função $g : (0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que*

$$g(t, x) = 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L], \quad (12.46)$$

então uma solução u , do problema (12.38), (12.39), (12.40) (12.41), (12.42) acima, tratado na seção (8.1) do Capítulo 8, será dada por:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]. \quad (12.47)$$

Voltemos ao problema geral, ou seja, a função g não é identicamente (ou seja, não satisfaz (12.46)).

Baseado no caso em que g é identicamente (ou seja, (12.47)), tentaremos uma solução para o problema (12.38), (12.39), (12.41) e (12.42) do tipo

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (12.48)$$

onde

$$\begin{aligned} b_n(0) &= b_n \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (12.49)$$

ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad \text{para cada } x \in [0, L]. \quad (12.50)$$

Observemos que, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$, teremos

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &\stackrel{(12.48)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right] \\ &\stackrel{\text{Cuidado!}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \end{aligned} \quad (12.51)$$

$$\begin{aligned} u_x(t, x) &\stackrel{(12.48)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right] \\ &\stackrel{\text{Cuidado!}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \frac{n \pi}{L} \end{aligned} \quad (12.52)$$

$$\begin{aligned}
u_{xx}(t, x) &\stackrel{(12.48)}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] \\
&\stackrel{(12.52)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n\pi}{L} \right] \\
&\stackrel{\text{Cuidado!}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[b_n(t) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n\pi}{L} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]. \tag{12.53}
\end{aligned}$$

Substituindo (12.51), (12.53) na EDP (12.38) obteremos, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left[-\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] + g(t, x). \tag{12.54}$$

Suponhamos que para cada $t \in [0, \infty)$ fixado, tenhamos

$$g(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad \text{para cada } x \in [0, L]. \tag{12.55}$$

Substituindo em (12.49) obteremos, para cada $t \in [0, \infty)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) &= \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left[-\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\alpha^2 b_n(t) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + g_n(t) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \tag{12.56}
\end{aligned}$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (12.56) e (12.49), a função b_n , deverá satisfazer o seguinte PVI:

$$b_n'(t) = - \left(\frac{\alpha^2 n\pi}{L} \right)^2 b_n(t) + g_n(t), \tag{12.57}$$

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \tag{12.58}$$

cuja solução, pela fórmula da variação dos parâmetros (visto em Equações Diferenciais Ordinárias), será dada por:

$$b_n(t) = b_n(0) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} + e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \int_0^t g_n(s) e^{\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} s} ds, \tag{12.59}$$

para cada $t \in [0, L]$.

Substituindo (12.59) em (12.48) obtemos uma candidata a solução $u = u(t, x)$ (12.38), (12.39), (12.41) e (12.42).

Observação 12.60 *O problema será estudar a convergência da série de funções obtida para definir a função $u = u(t, x)$, ou seja, a série de funções (12.59), e mostrar que a mesma, de fato, satisfaz o problema (12.38), (12.39), (12.41) e (12.42).*

Para ilustrar consideraremos o seguinte problema:

Exemplo 12.61 *Encontrar uma solução $u = u(t, x)$, para o seguinte problema:*

$$u_t(t, x) = \alpha^2 u_{xx}(t, x) + t \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times [0, L], \quad (12.62)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (12.63)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.64)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}), \quad (12.65)$$

onde

$$f \in C([0, L]; \mathbb{R}) \quad \text{é tal que} \quad f' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$$

e satisfaz

$$f(0) = f(L) = 0.$$

Resolução:

Como observamos acima, tentaremos uma solução para o problema (12.62), (12.63), (12.64), (12.65), do tipo:

$$u(t, x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad \text{para cada } (t, x) \in [0, \infty) \times [0, L], \quad (12.66)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, temos que:

$$\begin{aligned} b_n(0) &= b_n \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (12.67)$$

ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad \text{para cada } x \in [0, L]. \quad (12.68)$$

Substituindo (12.66) na EDP (12.62) obteremos, para cada $(t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$ (supondo que possamos derivar as séries de funções envolvidas, termo a termo), que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) = \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left[-\operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \left(\frac{n \pi}{L} \right)^2 \right] + t \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right). \quad (12.69)$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$.

Notemos que, para cada $t \in [0, \infty)$ fixado, se

$$\begin{aligned} t \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) &= g(t, x) \\ &= g(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \end{aligned} \quad (12.70)$$

então deveremos ter

$$g_n(t) \doteq 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (12.71)$$

$$g_1(t) \doteq t. \quad (12.72)$$

Para cada $t \in [0, \infty)$, substituindo (12.70) em (12.69), obteremos: a seguinte identidade

$$b_n'(t) = - \left(\frac{\alpha^2 n \pi}{L} \right)^2 b_n(t) + g_n(t), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \quad (12.73)$$

e satisfazendo (12.67), ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, de (12.73) e (12.67), a função b_n , deverá satisfazer o seguinte PVI:

$$b_n'(t) = - \left(\frac{\alpha^2 n \pi}{L} \right)^2 b_n(t) + g_n(t), \quad (12.74)$$

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (12.75)$$

para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ fixado (veja (12.71)), terá solução será dada por:

$$b_n(t) = b_n(0) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \quad (12.76)$$

Por outro lado, para $n = 1$ (veja (12.72)), pela fórmula da variação dos parâmetros, , ter como solução:

$$\begin{aligned} b_1(t) &= b_1(0) e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} + e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} \int_0^t \underbrace{g_1(s)}_{=s} e^{\frac{\alpha^2 \cdot 1 \cdot \pi^2}{L^2} s} ds \\ &= b_1(0) e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} + e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} \int_0^t s e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} ds, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (12.77)$$

Utilizando integração por partes na integral indefinida associada acima, obteremos:

$$\begin{aligned} \int s e^{\frac{\alpha^2 \cdot 1 \cdot \pi^2}{L^2} s} ds &\left\langle \begin{array}{l} u \doteq s, \text{ logo: } du = ds \\ dv \doteq e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} ds, \text{ logo: } v = \frac{1}{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2}} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} \end{array} \right\rangle \\ &= s \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} - \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} \frac{1}{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2}} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} \\ &= s \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} - \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} \frac{1}{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2}} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} \end{aligned}$$

$$= s \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} - \frac{L^4}{\alpha^4 \pi^4} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s}, \quad (12.78)$$

para $s \in \mathbb{R}$.

Logo, de (12.77), o Teorema Fundamental do Cálculo e (12.78), obteremos:

$$\begin{aligned} b_1(t) &= b_1(0) e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} + \left[s \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} - \frac{L^4}{\alpha^4 \pi^4} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} s} \right] \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= \left[t \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} - \frac{L^4}{\alpha^4 \pi^4} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} \right] - \left[0 \cdot \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} \cdot 0} - \frac{L^4}{\alpha^4 \pi^4} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} \cdot 0} \right] \\ &= t \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} + \left[1 - e^{\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} \right] \frac{L^4}{\alpha^4 \pi^4} \end{aligned}$$

Portanto uma candidata a solução do problema será dada por

$$\begin{aligned} u(t, x) &\doteq \left[e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} b_1 - \frac{L^2}{\alpha^2 \pi^2} t - \frac{L^4}{\alpha^4 \pi^4} + \frac{L^4}{\alpha^4 \pi^4} e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} \right] \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} b_n e^{-\frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2} t} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad (12.79) \end{aligned}$$

para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, L]$, onde, para $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, os coeficientes b_n serão dados por (12.67).

□

Observação 12.80 *Pode-se mostrar que a função u , dada por (12.79), é, de fato, uma solução do problema (12.62), (12.63), (12.64) e (12.65)e.*

Na verdade, teremos:

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}).$$

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

12.3 Equação da onda homogênea, com dados de contorno não homogêneos

Podemos, como nas seções anteriores, considerar os problemas associados à equação da onda com dados de contorno não-homogêneos, isto é, considerar os seguintes problemas:

Encontrar uma função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que seja solução do seguinte problema:

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L), \quad (12.81)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (12.82)$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (12.83)$$

$$u(t, 0) = h_0(t) \quad (12.84)$$

$$u(t, L) = h_L(t), \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.85)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}), \quad (12.86)$$

onde

$$h_0, h_L \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}),$$

$$f \in C^1([0, L]; \mathbb{R}) \quad \text{é tal que } f'' \in SC([0, L]; \mathbb{R}),$$

$$g \in C([0, L]; \mathbb{R}) \quad \text{é tal que } g' \in SC([0, L]; \mathbb{R})$$

e satisfazem

$$f(0) = h_0(0) \quad \text{e} \quad f(L) = h_L(0). \quad (12.87)$$

A obtenção da solução do problema acima, bem como a verificação que a mesma é solução do problema, serão deixados como exercício para o leitor.

Trata-se de um processo semelhante aos procedimentos que fizemos com a equação do calor, na seção (12.1).

12.4 Equação da onda, não homogênea, com dados de contorno homogêneos

Podemos, como nas seções anteriores, considerar os problemas associados à equação da onda não homogênea, com dados de contorno homogêneos, isto é, considerar o seguintes problema:

Encontrar uma função $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que seja solução do seguinte problema

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) + g(t, x), \quad \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times (0, L) \quad (12.88)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L], \quad (12.89)$$

$$u_t(0, x) = g(x), \quad \text{para cada } x \in [0, L] \quad (12.90)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, \infty), \quad (12.91)$$

$$u \in C([0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times [0, L]; \mathbb{R}), \quad (12.92)$$

onde

$$f \in C^1([0, L]; \mathbb{R}) \quad \text{é tal que } f'' \in SC([0, L]; \mathbb{R}),$$

$$g \in C([0, L]; \mathbb{R})$$

e

$$f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L).$$

A obtenção da solução do problema acima, bem como a verificação que a mesma é solução do problema, serão deixados como exercício para o leitor.

Trata-se de um processo semelhante aos procedimentos que fizemos com a equação do calor não homogênea, na seção (12.2).

12.5 Exercícios

Referências Bibliográficas

- [1] Iório, V. - *EDP - Um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, RJ, CNPq, 1989.
- [2] Iório, R. J. & Iório, V. - *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro. [10.158](#)
- [3] Figueiredo, D.G. - *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, 1987.
- [4] Strauss, W.A. - *Partial Differential Equations: An Introduction*, John Wiley & Sons, Inc. 1992.
- [5] Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. - *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Ed. Guanabara Dois, 1979.
- [6] Butkov, E. - *Física Matemática*, Rio de Janeiro, LTC, 1988.
- [7] Folland, G.B. - *Introduction fo Partial Differential Equations*, Princeton Univ. Press, 1976. [7](#)
- [8] Katznelson, Y. - *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1968.l
- [9] Medeiros, L.A. & Andrada, N. G. - *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro: Livro Técnico e Científico, 1978.
- [10] Simmons, G.F. - *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
- [11] Sotomayor, J. - *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, 1979. [1](#)
- [12] Tolstov, G.P. - *Fourier Series*, New York, Douer, 1976.
- [13] Weinberger, H.F. - *A First Course in Partial Differential Equations, with Complex Variables and Transform methods*, Waltham, Ma.: Ginn, 1965.

- [14] Zachmanoglou, E.C. & Thoe, D. - *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Williams and Wilkins, 1976.

Índice Remissivo

PVC

associado a uma EDO, 36

associado a uma EDP, 37

PVI

associado a uma EDO, 35

associado a uma EDP, 39

$SC(I, \mathbb{C})$, 320

$SC(I, \mathbb{R})$, 320

$\operatorname{div}(\vec{F})$, 530

$\int_{\gamma} \vec{F} \bullet d\vec{r}$, 533

$\gamma([a, b])$, 531

$\operatorname{grad}(f)$, 530

∇f , 530

$\nabla \bullet \vec{F}$, 530

j-ésima

componente de um campo vetorial, 529

EDP

linear homogêna associada, 31

solução clássica de uma, 33

Abel

convergência no sentido de, 524

aberto

conjunto, 527

base

canônica de um espaço euclidiano, 356

Bessel

desigualdade, para funções a valores complexos, 372

Bessel, na forma complexa)

desigualdade, 367

Bessel, na forma real

desigualdade, 364

Burger

equação de, 28

calor

equação (unidimensional) do, 22

equação do, 16, 29, 296, 297, 414

campo gradiente

associado a uma função, 530

campo vetorial

j-ésima componente de um, 529

divergência de um, 530

pertencente à $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$, 529

que provém de um potencial, 530

real definido em um conjunto, 529

Cauchy-Schwartz

desigualdade de, 329

coeficiente de Fourier

na forma complexa, 354

coeficientes de Fourier

associados à uma função, 345

condição de

Dirichlet, 37

Newman, 38

condição de salto

para uma EDP não-linear, 186

condições de compatibilidade, 42

condições iniciais

associadas a uma EDP, 39

condições iniciais

associadas a uma EDP, 40

- conjugado
de um número complexo, 327
- conjunto
conexo, 528
limitado, 528
que é um domínio, 528
simplesmente conexo, 528
- contorno
problema de valor de , 439
- convergência
no sentido de Cèsaro, 520
- convergência uniforme
quando $r \rightarrow 1^-$, 496
- convolução
entre duas funções, 508
- curva característica espacial
associada à EDP linear de 1.a ordem, 127
- curva característica plana
associada a EDP linear de 1.a ordem, 63
- curva parametrizada
fechada e simples em um conjunto, 532
fechada em um conjunto, 532
pertencente à $C^k([a, b]; \Omega)$, 531
regular em um conjunto, 532
simples em um conjunto, 532
suave em um conjunto, 531
suaves por partes em um conjunto, 533
traço de uma, 531
vetor unitário normal à uma, 537
- curvas características planas
associadas à EDP's de 2.a ordem lineares de duas variáveis, 214
associadas à EDP's lineares de 2.a ordem em duas variáveis, 208
- derivada total, 63
- descontinuidade
de 1.a espécie para uma função, em um ponto, 319
- desigualdade
de Bessel para funções a valores complexos, 372
de Bessel, na forma complexa), 367
de Bessel, na forma real, 364
triangular, 330
- Dirichet
núcleo de, 518
- Dirichlet
no disco, 482
problema de, 318
- disco
problema de Dirichlet no, 482
- discriminante
associado à uma EDP linear de 2.a ordem, 200
- divergência
de um campo vetorial em um conjunto, 530
teorema da, 539
- domínio de pendência
de um ponto sobre a curva inicial, 155
- EDP, 21
ordem de uma, 22
- elíptica
EDP linear de 2.a ordem, 200
- elíptica em um conjunto
EDP linear de 2.a ordem, 201
- Equação
da onda, 318
- equação
de Burger, 168
de Euler, de segunda ordem, 490
- equação da onda
integrals de energia para a, 596
integral de energia, 596–598
unicidade de solução para a, 596
- equação de Laplace

- princípio do máximo (e do mínimo), 589
- solução fundamental da, 543, 544
- unicidade de solução para a, 595
- unicidade de soluções para a, 589
- equação do calor
 - princípio do máximo (e do mínimo) para a, 573
 - princípio do máximo (ou do mínimo) em \mathbb{R}^n , para a, 589
 - princípio do máximo para a, 576
 - unicidade de soluções para a, 573
- Euler
 - equação de segunda ordem, de, 490
- Euler-Fourier
 - fórmulas de, 345
- extensão
 - ímpar e periódica de uma função à reta, 272
- Féjer
 - núcleo de, 521
- fechado
 - conjunto, 528
- forma canônica (ou normal)
 - de uma EDP de 2.a ordem linear em duas variáveis, 220
- Fourier
 - método de, 17, 298
- função
 - campo gradiente associado a uma, 530
 - contínua por partes, 320
 - gamma, 545
 - harmônica em um conjunto, 529
 - holomorfa em um conjunto, 505
 - limitada, 325
 - seccionalmente contínua, 320
 - uniformemente contínua, 507
- função harmônica
 - princípio do máximo para uma, 591
- princípio do mínimo para uma, 594
- princípio forte do máximo (mínimo) para uma, 595
- teorema do valor médio para uma, 589
- gamma
 - função, 545
- Green
 - 1.a e 2.a identidades de, 539
 - 3.a identidade de, 545
 - teorema de, 533
- harmônica
 - função, 529
- hiperbólica
 - EDP linear de 2.a ordem, 200
 - EDP do tipo, 318
 - EDP do tipo, 437
- hiperbólica em um conjunto
 - EDP linear de 2.a ordem, 201
- homôgenea
 - EDP linear, 25
- identidade
 - de Parseval, 402
- identidades
 - de Green, 539
- integral
 - de uma função, em relação ao comprimento de arco, 539
- integral de energia
 - para a equação da onda, 596, 597
 - para uma função em um instante, 598
- integral de linha
 - de um campo vetorial, ao longo de uma curva parametrizada, 533
- interno
 - produto, 328
- intervalo de dependência
 - de um ponto, 254

- Korteweg-de Vries
 equação de, 28
- Kortweg-de Vries
 equação de, 23
- Laplace
 equação (bidimensional) de, 23
 equação da, 296
 equação de, 17, 29
 operador de, 29
- Laplaciano
 operador, 29
- leis
 de conservação, 181
- Lema
 de Riemann-Lebesgue, na forma complexa, 372
- lema
 de Riemann-Lebesgue, na forma real, 372
- linear
 EDP, 24
- núcleo
 de Dirichlet de ordem N , 518
 de Féjer de ordem N , 521
 de Poison, 525
 de Poison do disco unitário, 494
- número complexo
 conjugado de um, 327
- não-homogênea
 EDP linear, 25
- não-linear
 EDP, 24
- Newman
 problema de, 319
- onda
 dente de serra, 323
 equação (unidimensional) da, 23
 equação da, 16, 296, 437
 quadrada, 322
- onda de choque
 para um problema de Cauchy não-linear, 179
- operador
 diferencial parcial linear, 30
- orientação positiva
 para a fronteira de um conjunto, 532
- parabólica
 EDP linear de 2.a ordem, 200
 EDP, 298
- parabólica em um conjunto
 EDP linear de 2.a ordem, 201
- parcial
 equação diferencial, 21
- Parseval
 identidade de, 402
- parte principal
 de uma EDP, 26
- Pitágoras
 teorema de, 331
- Poisson
 equação de, 29
 núcleo de, 494, 525
- polinômio
 trigonométrico, 523
- potencial
 campo vetorial que provém de um, 530
- princípio
 da superposição infinita, 34
 do máximo (e do mínimo), para a equação do calor, 589
 do máximo para a equação do calor, 576
 do máximo para funções harmônicas, 591
 do mínimo para funções harmônicas, 594
 forte do máximo (mínimo), para funções harmônicas, 595
- princípio de superposição (finita)

- de uma EDP linear e homogênea, 32
- problema
 - bem-posto (no sentido de Hadamard), 51
 - mal-posto (no sentido de Hadamard), 51
- problema de
 - Dirichlet, 37
 - Newman, 37
- problema de Cauchy
 - associado a uma EDP , 39
- problema de valor de contorno
 - associado a uma EDO, 36
 - associado a uma EDP , 37
- problema de valor de contorno da EDO
 - autofunções do, 300
 - autovalor do, 300
- problema de valor inicial
 - associado a uma EDO, 35
 - associado a uma EDP , 39
- problemas mistos
 - associados a uma EDP , 40
- região de influência
 - de um intervalo, 255
 - de uma curva contida no traço da curva inicial, 155
- retas características planas
 - associadas a um problema de Cauchy não-linear, 167
- Riemann-Lebesgue
 - lema, na forma complexa, de, 372
 - lema, na forma real, de, 372
- série
 - de cossenos, 315
 - de Fourier, 295, 316
 - de senos, 307
 - de senos e cossenos, 316
- série de Fourier
 - associada à uma função, 345
- convergente (ou somável) no sentido de Abel, 524
- convergente (ou somável) no sentido de Cèsaro em um ponto, 520
- na forma complexa, 354
- série numérica
 - do tipo valor principal, 354
- semi-linear
 - EDP, 27
- semi-norma
 - de uma função, 329
- separação de variáveis
 - método da, 298
- sine-Gordon
 - equação de , 28
- solução
 - de d'Alembert para a equação da onda, 230
 - de d'Alembert para a equação da onda (bidimensional), 244
- solução fundamental
 - da equação de Laplace no $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, 544
 - da equação de Laplace no plano, 543
- solução geral
 - de uma EDP de 1.a ordem linear, 97
 - de uma EDP linear de 1.a ordem, 53
- subconjunto
 - aberto em outro conjunto, 527
 - compacto de \mathbb{R} , 508
 - fechado em outro conjunto, 528
- superfície solução
 - do problema de Cauchy associado a um problema de Cauchy, 82
- telescópica
 - soma, 384
- teorema
 - 3.a identidade de Green, 545
 - da divergência, 539

- de aproximação de Weierstrass, 524
- de Cauchy-Kovalevski, 154
- de Green, 533
- tipo misto em um conjunto
 - EDP linear de 2.a ordem, 201
- traço
 - de uma curva parametrizada, 531
- trigonométrico
 - polinômio, 523
- variáveis
 - método da separação de, 296, 309, 414, 427, 437, 439, 455
- vetor unitário normal
 - à uma curva parametrizada plana, 537
- Weierstrass
 - teorema de aproximação de, 524