Física IV

Superposição de Ondas e Ondas Estacionárias

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Superposição de ondas harmônicas

Um importante aspecto do comportamento das ondas é o efeito combinado de **duas ou mais ondas que se propagam num mesmo meio**.

Princípio da superposição

Exemplos:

- *Ondas em cordas*
- *Ondas sonoras*
- *Ondas superficiais na água*
- *Ondas eletromagnéticas*

Princípio da superposição aplicado a ondas harmônicas

Exemplos:

- Uma corda tensionada, fixa nas duas extremidades, tem um conjunto discreto de formas de oscilação, denominados modos de vibração, que dependem da tensão na corda e da massa por unidade de comprimento. (Instrumentos musicais de cordas)

- Alguns outros instrumentos musicais usam as frequências naturais de ondas acústicas em tubos ocos. Essas frequências dependem do comprimento do tubo, da forma tubo e de uma extremidade estar aberta ou fechada. (Órgão e a flauta)

Princípio da superposição:

Quando duas ou mais ondas se propagam num mesmo meio linear, o deslocamento líquido do meio (onda resultante), em qualquer ponto, é igual à soma algébrica dos deslocamentos de todas as ondas.

- Mesma direção e meio
- Ambas têm a mesma frequência, comprimento de onda e amplitude,
- Mas possuem fases diferentes.

$$\begin{cases} y_1 = A_0 sen(kx - \omega t) \\ y_2 = A_0 sen(kx - \omega t - \phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = A_0 sen(kx - \omega t) \\ y_2 = A_0 sen(kx - \omega t - \phi) \end{cases}$$

$$y = A_0\left[sen(kx - \omega t) + sen(kx - \omega t - \phi)\right]$$

Identidade trigonométrica $\longrightarrow$ $$sen(a) + sen(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)sen\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Se $\begin{cases} a = kx - \omega t \\ b = kx - \omega t - \phi \end{cases}$

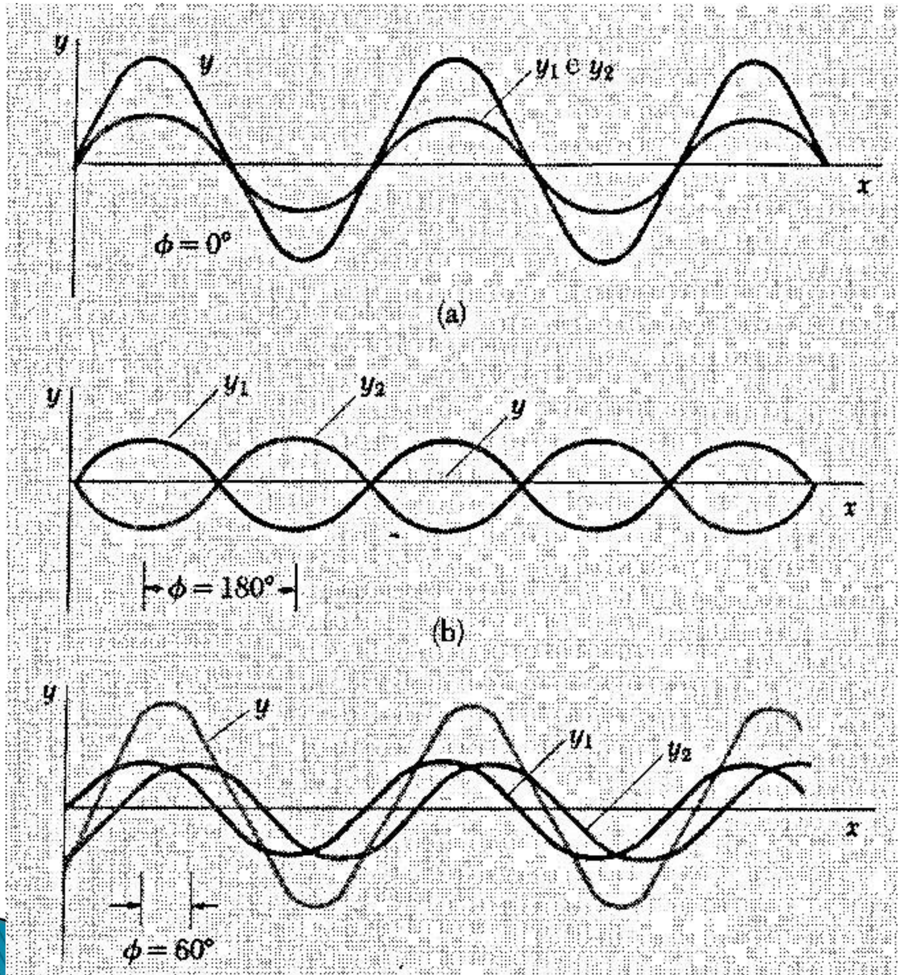
Função de onda resultante: $$y = \left(2A_0 \cos\frac{\phi}{2}\right)sen\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

Função de onda resultante: $y = \left(2A_0 \cos\frac{\phi}{2}\right) sen\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)$

Há vários aspectos importantes nesse resultado:

- A função de onda resultante y é também uma onda harmônica, e têm a mesma frequência e comprimento de onda que as ondas individuais.
- A amplitude da onda resultante é: $2A_0 \cos\frac{\phi}{2}$
- A fase é: $\frac{\phi}{2}$

Função de onda resultante: $y = \left(2A_0 \cos\frac{\phi}{2}\right) sen\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)$



Interferência construtiva:

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \pm 1$$

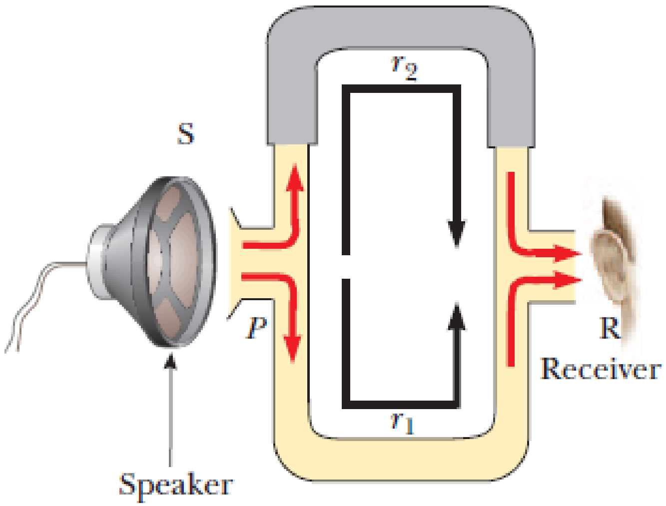
$$\phi = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ ...$$

Interferência destrutiva:

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0$$

$$\phi = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi\ ,\ ...$$

Interferência de ondas sonoras:



Diferença de percurso: $\Delta r = |r_2 - r_1|$

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = \frac{\lambda}{2\pi}\phi$$

Trombone de vara

Interferência construtiva:

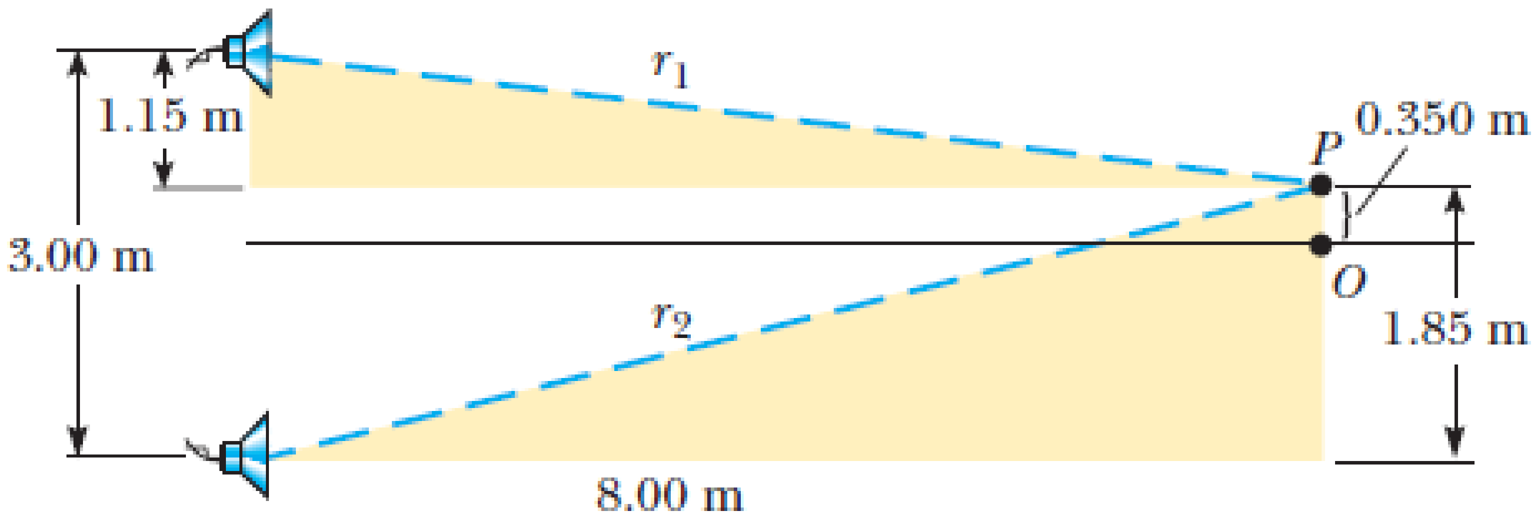
- quando $\Delta r = 0$ ou um múltiplo inteiro de λ
- *Máximo de intensidade do som*

Interferência destrutiva:

- quando $\Delta r = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots, n\lambda/2$ (n impar)
- *Nenhum som*

Exemplo:

Um par de alto-falantes, separados por 3m, é alimentado pelo mesmo oscilador. Um ouvinte se encontra, inicialmente no ponto 0, localizado a 8 m da linha central. O ouvinte anda perpendicularmente à linha central, e percorre 0,35 m antes de chegar ao primeiro mínimo da intensidade do som. Qual a frequência do oscilador?



Ondas Estacionárias

Se uma corda elástica tensionada estiver fixa em ambas as pontas, as ondas progressivas na corda se refletem nas extremidades fixas e provocam ondas que nela se propagam em duas dimensões.

As ondas incidente e refletida se combinam conforme o princípio da superposição.

$$\begin{cases} y_1 = A_0 sen(kx - \omega t) \\ y_2 = A_0 sen(kx + \omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = A_0 sen(kx - \omega t) \\ y_2 = A_0 sen(kx + \omega t) \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2 = A_0 sen(kx - \omega t) + A_0 sen(kx + \omega t)$$

Identidade trigonométrica $\longrightarrow$ $sen(a \pm b) = sen(a)\cos(b) \pm \cos(a) sen(b)$

Função de onda resultante de uma **onda estacionária**:

$$y = [2A_0 sen(kx)]\cos(\omega t)$$

- A amplitude do movimento depende de *x*.

Função de onda resultante de uma **onda estacionária**: $$y = [2A_0 sen(kx)]\cos(\omega t)$$

Amplitude máxima (ventres ou antinodos):

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \ldots, = \frac{n\lambda}{4}$$

n = 1, 3, 5, 7, ...

Amplitude mínima (nodos):

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \ldots, = \frac{n\lambda}{2}$$

n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Exemplo:

Duas ondas, propagam-se em direções opostas, provocam uma onda estacionária. As funções de onda de cada uma delas são:

$$y_1 = (4cm)sen(3x - 2t)$$

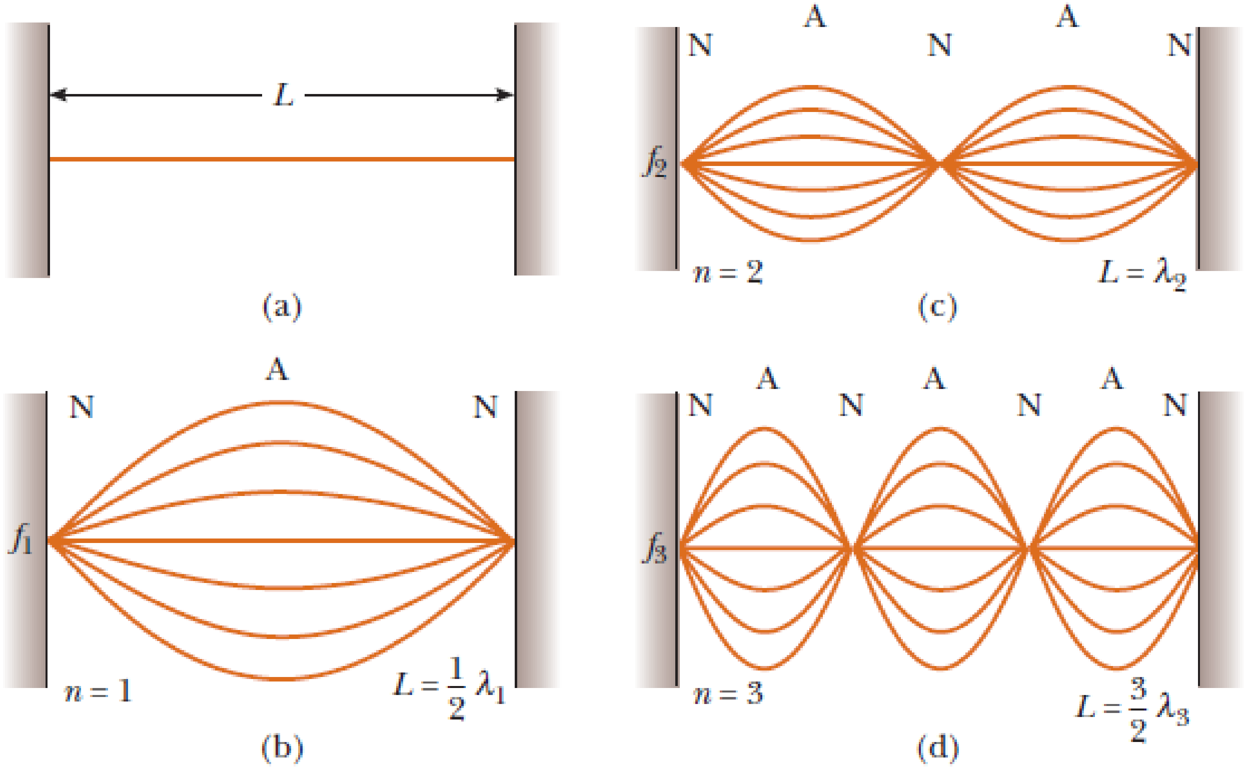
$$y_2 = (4cm)sen(3x + 2t)$$

onde, x e y estão em cm.

a) Achar o deslocamento máximo do movimento em $x = 2{,}3$ cm.
b) As posições dos nodos e antinodos

Ondas estacionárias numa corda fixa nas duas extremidades

A corda tem diversas figuras naturais de vibrações: **os modos normais**



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}v$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$

<u>Frequências Naturais:</u>

$$\boxed{f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$

A frequência **fundamental**, $n = 1$: $\longrightarrow$ $f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$

Os outros modos de vibração, denominados **harmônicos**, são múltiplos inteiros da frequência fundamental.

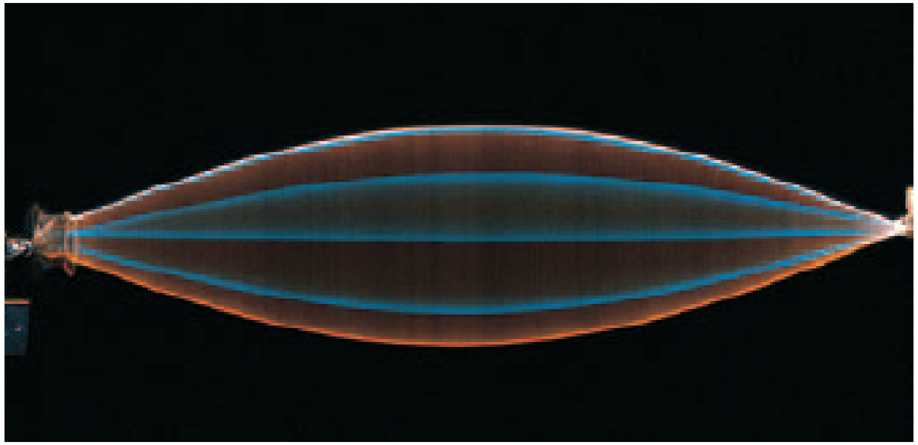
$2f_1, 3f_1, 4f_1, \ldots$

Série harmônica: $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \ldots, nf_1$

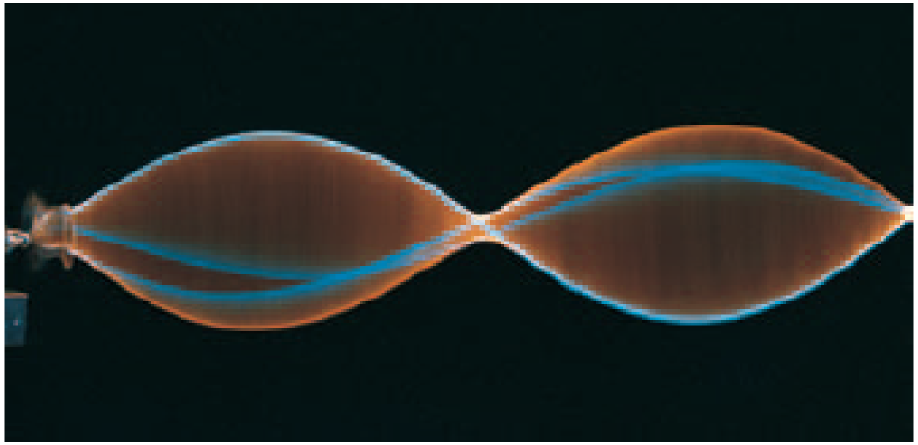
Primeiro harmônico: f_1
Segundo harmônico: $2f_1$
Terceiro harmônico: $3f_1$
.
.
.
N-ésimo harmônico: nf_1

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

- A tensão é utilizada para afinar o instrumento em determinada frequência.
- A medida que o comprimento diminui a frequência sobe.

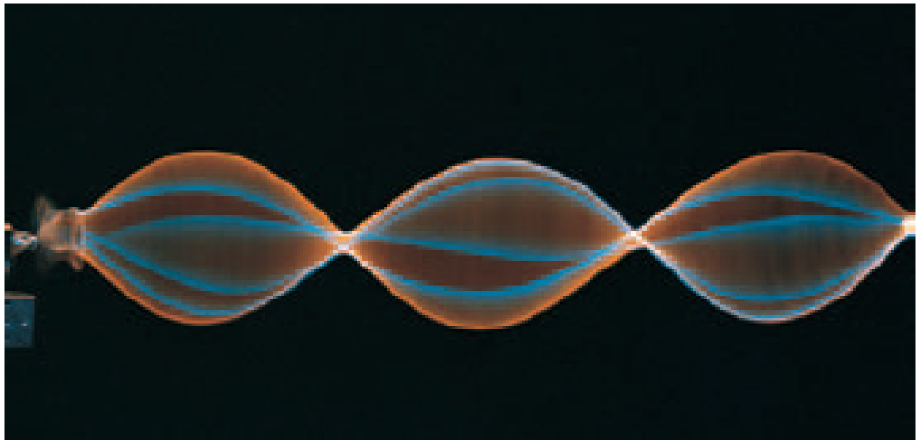


(a)



(b)

© Richard Megna, Fundamental Photographs



(c)

Multiflash photographs of standing-wave patterns in a cord driven by a vibrator at the left end. The single-loop pattern in (a) represents the fundamental frequency ($n = 1$), the two-loop pattern in (b) the second harmonic ($n = 2$), and the three-loop pattern in (c) the third harmonic ($n = 3$).

Exemplo:

A corda do *dó* médio, da escala em *dó maior* de um piano, tem a fundamental com 264 Hz, e a corda do *lá* tem a fundamental com 440 Hz.

a) Calcular a frequência dos dois harmônicos imediatamente superiores da corda *dó*.
b) Se as duas cordas do piano, a do *lá* e a do *dó*, tiveram a mesma massa por unidade de comprimento e o mesmo comprimento, determinar a razão entre as tensões nas duas cordas.
c) Embora as densidades das cordas sejam, de fato, iguais, a corda *lá* tem 64% do comprimento da corda *dó*. Qual a razão entre as tensões?

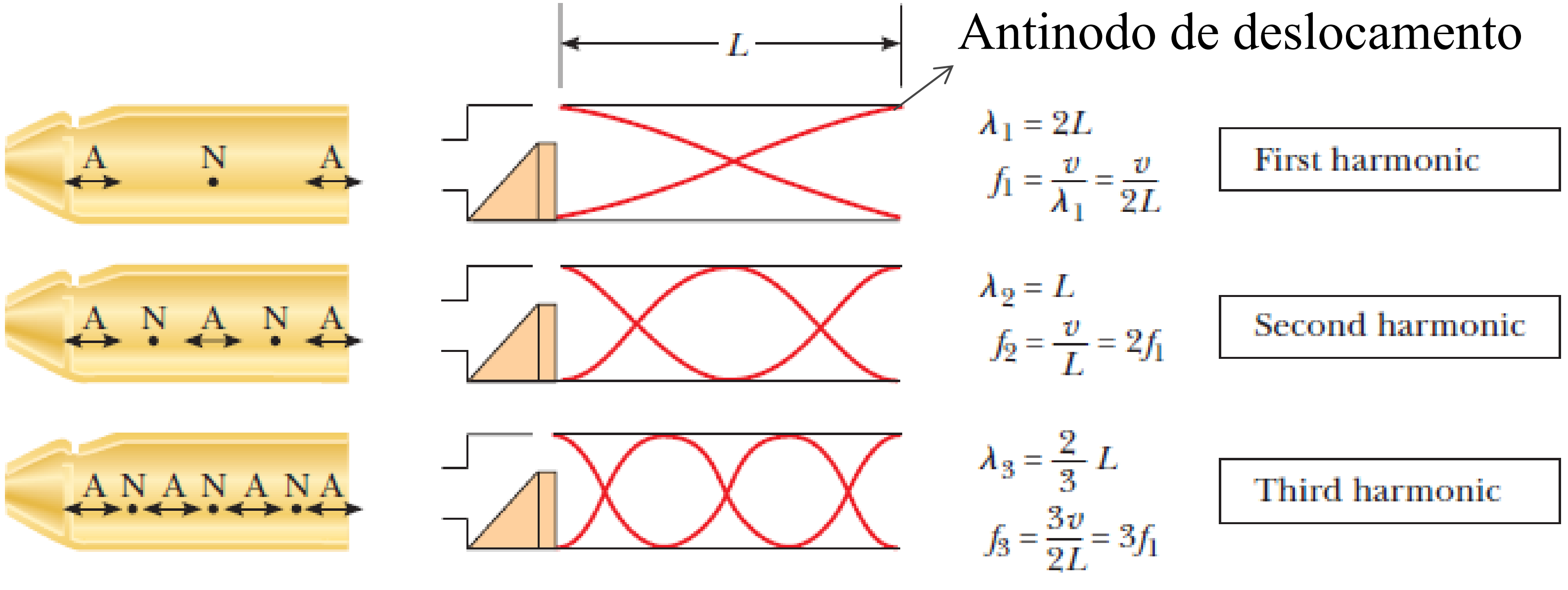
Ondas estacionárias em colunas de ar

Ondas estacionárias longitudinais que se propagam num tubo vão depender de o tubo ser aberto ou fechado em uma das extremidades.

- *A extremidade fechada de uma coluna de ar é um nodo de deslocamento.*
- *A extremidade fechada de uma coluna de ar corresponde a um antinodo de pressão (isto é, há um ponto de variação de pressão máxima).*

A extremidade aberta de uma coluna de ar é um antinodo de deslocamento e um nodo de pressão.

Ondas estacionárias longitudinais num tubo de órgão aberto em ambas as extremidades.



(a) Open at both ends

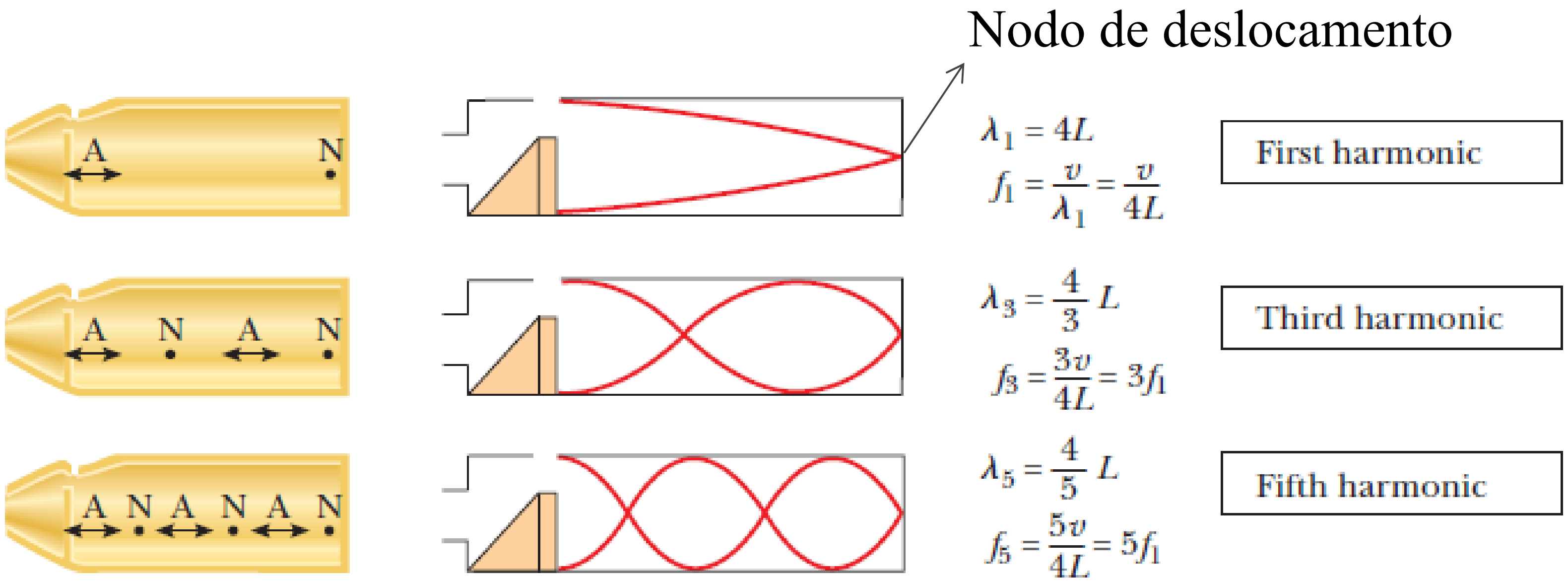
$$\boxed{f_n = n\frac{v}{2L}}$$

$(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

v = velocidade do som no ar

Num tubo de órgão, aberto em ambas as extremidades, as frequências naturais de vibração formam uma série harmônica, ou seja, os harmônicos superiores são múltiplos inteiros da fundamental.

Ondas estacionárias longitudinais num tubo de órgão fechado numa extremidade



(b) Closed at one end, open at the other

$$\boxed{f_n = n\frac{v}{4L}} \quad (n = 1, 3, 5, 7, ...)$$

Num tubo fechado numa extremidades, somente os harmônicos ímpares estão presentes.

Exemplo:

Um tubo tem o comprimento de 1,23 m.

a) Determinar as frequências dos três primeiros harmônicos se o tubo estiver aberto nas duas extremidades.
b) Quais as três frequências determinadas em (a), se o tubo estiver fechado numa extremidade?
c) No caso de um tubo aberto, quantos harmônicos estão presentes no intervalo normal de audição humana (entre 20 e 20.000 Hz)?

Batimentos: Interferência no tempo

Interferência espacial (mesma frequência de vibração)
Ex: ondas nas cordas e em tubos

Interferência temporal (frequências ligeiramente diferentes)

Os batimentos se formam pela combinação de duas ondas de **frequências ligeiramente diferentes**, que se propagam numa mesma direção.

Quando as duas ondas forem observadas num ponto fixo, ambas estarão, **periodicamente, em fase e fora de fase**. (uma alternância de interferência construtiva e interferência destrutiva)

Batimentos: Interferência no tempo

O batimento pode, então, ser definido como a variação periódica da intensidade do som, num certo ponto, provocada pela superposição de duas ondas cujas frequências diferem ligeiramente.

- O número de batimentos que se ouve por segundo, a frequência do batimento, é igual à diferença entre as frequências das duas ondas.

- Então, pode-se usar a os batimentos para afinar instrumentos musicais de corda.

Consideremos duas ondas:

- amplitudes iguais
- propagando-se num meio
- numa mesma direção
- frequências ligeiramente diferentes, f_1 e f_2

$$\begin{cases} y_1 = A_0 \cos(2\pi f_1 t) \\ y_2 = A_0 \cos(2\pi f_2 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = A_0 \cos(2\pi f_1 t) \\ y_2 = A_0 \cos(2\pi f_2 t) \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2 = A_0\left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right]$$

Identidade trigonométrica $\longrightarrow$ $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Se $\begin{cases} a = 2\pi f_1 t \\ b = 2\pi f_2 t \end{cases}$

Função de onda resultante: $y = 2A_0 \cos 2\pi\left(\dfrac{f_1 - f_2}{2}\right)t \cos 2\pi\left(\dfrac{f_1 + f_2}{2}\right)t$

Função de onda resultante: $y = 2A_0 \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$

$$A = 2A_0 \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t$$

Frequência de batimentos:

$$f_b = f_1 - f_2$$