Plantão de dúvidas do dia 5 de fevereiro

$$\underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{C}{W} \xrightarrow{S} \underset{D}{U}$$

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D} \cdot [T]_{B,C}$$

$$[T]_C = [(I \circ T) \circ I]_{C,C} = [I \circ T]_{B,C} [I]_{C,B} = [I]_{B,C} [T]_{B,B} [I]_{C,B}$$

$$\underset{C}{V} \xrightarrow{I} \underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{B}{V} \xrightarrow{I} \underset{C}{V} \qquad I : V \to V$$

$$v \mapsto v$$

$$[T]_{C,C} = [\underbrace{I \circ T \circ I}_{=T}]_{C,C} = [I]_{B,C} \cdot [T]_{B,B} [I]_{C,B}$$

$$[T]_C = [I]_{B,C} \cdot [T]_B \cdot [I]_{C,B}$$

$$[I]_{B,C}^{-1} = [I]_{C,B}$$

$$[I]_{C,B}^{-1} = [I]_{B,C}$$

Prova Substitutiva

2)

b)

$\{(1,2,1),(1,2,3),(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$

$$Im(T) = [\underbrace{T(1,2,1)}_{=(0,0,0)}, \underbrace{T(1,2,3)}_{=(0,0,0)}, T(1,0,0)] = [\underbrace{T(1,0,0)}_{=(1,1,1)}] = [(1,1,1)].$$

c)

$\{(1,2,1),(1,2,3),(1,0,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) = a(1,2,1) + b(1,2,3) + c(1,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$T(x,y,z) = T\big(a(1,2,1) + b(1,2,3) + c(1,0,0)\big)$$

$$= a\underbrace{T(1,2,1)}_{=(0,0,0)} + b\underbrace{T(1,2,3)}_{=(0,0,0)} + c\underbrace{T(1,0,0)}_{=(1,1,1)}$$

$$= c(1,1,1) = \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,1,1).$$

$$\begin{cases} a+b+c = x \Rightarrow c = x - \frac{y}{2} \\ 2a+2b = y \Rightarrow a+b = \frac{y}{2} \\ a+3b = z \end{cases}$$

$$T(x,y,z) = \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,1,1)$$

$$T(1,0,0) = (1,1,1)$$

$$T(0,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$T(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3)

a)

$T: \mathbb{R}^{20} \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$

$S: \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{20}$

PRIMEIRO MÉTODO:

$\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 20 - \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(T))}_{\leq 10} \geq 20 - 10 = 10 > 0 \Rightarrow T$ não é injetora

$\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(S \circ T) \Rightarrow S \circ T$ não é injetora.

SEGUNDO MÉTODO:

$$\dim(\mathrm{Im}(S)) = 10 - \underbrace{\dim(\ker(S))}_{\geq 0} \leq 10 \Rightarrow \mathrm{Im}(S) \neq \mathbb{R}^{20}$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{Im}(S\circ T) \subseteq \mathrm{Im}(S) \subseteq \mathbb{R}^{20} \\ \mathrm{Im}(S) \neq \mathbb{R}^{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\mathrm{Im}(S\circ T) \neq \mathbb{R}^{20}}$$

$\Rightarrow S\circ T$ não é sobrejetora

$$w \in \mathrm{Im}(S\circ T) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^{20} : w = (S\circ T)(v) = S(T(v)) \in \mathrm{Im}(S)$$

E SE FOSSE "$T\circ S$" NO LUGAR DE "$S\circ T$"?

$$T : \mathbb{R}^{20} \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$$
$$(x_1, \dots, x_{20}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{10})$$

$$S : \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{20}$$
$$(x_1, \dots, x_{10}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{10}, 0, \dots, 0)$$

$$(T\circ S)(x_1, \dots, x_{10}) = T(S(x_1, \dots, x_{10})) = T(x_1, \dots, x_{10}, 0, \dots, 0)$$
$$= (x_1, \dots, x_{10})$$
$$\Downarrow$$
$$T\circ S = I_{\mathbb{R}^{10}}$$

b)

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $P_A(t) := (-1)^n \det(A - tI_n)$.

Se $A := \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, então $P_A(t) = t^2 - (a+b)t + ab - c^2$.

$$t^2 - (a+b)t + ab - c^2 = 0$$

$$\Delta = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2$$
$$= \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{=(a-b)^2} + 4c^2 = \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4c^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow c = 0, \text{ e } a = b$$

$$\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$\Delta \geq 0$.

- Se $\Delta = 0$, a matriz é diagonal.
- Se $\Delta > 0$, a matriz possui dois autovalores distintos.

c)

HIPÓTESE: $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é LI.

TESE: $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI $\Leftrightarrow$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, vale que, se $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V$, então $a_1 = \dots = a_n = 0$

DEMONSTRAÇÃO.

Para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V \Rightarrow T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = T(0_V)$$
$$\Rightarrow a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0_V$$
$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$

$\downarrow$ $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é LI

Logo, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI.

d) Suponhamos que B seja um subconjunto LI de V com m elementos.

- G é um conjunto gerador de V com m elementos $\Rightarrow$ qualquer base de V possui, no máximo, m elementos.
- B é um subconjunto LI de V com m elementos $\Rightarrow$ qualquer base de V possui, pelo menos, m elementos.

CONCLUSÃO: qualquer base de V possui exatamente m elementos (isto é, $\dim(V) = m$).

Como B é LI, existe uma base C de V tal que $B \subseteq C$. E, se C é uma base de V tal que $B \subseteq C$, então, como B e C têm m elementos, $B = C$. Logo, B é uma base de V.

SEGUNDA PROVA

2)

c)

Seja $U := [(1,0,0,0),(0,1,0,0)]$.

PROVA DE QUE $W \oplus U = \mathbb{R}^4$.

Sejam $B_W := \{(-2,1,4,0),(-3,0,9,1)\}$ e $B_U := \{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$. Note que

$$W+U = \underbrace{[B_W]}_{=W} + \underbrace{[B_U]}_{=U} = [\underbrace{B_W \cup B_U}_{\text{é base de } \mathbb{R}^4}] = \mathbb{R}^4.$$

Como $W+U = \mathbb{R}^4$,

$$\dim(W \cap U) = \underbrace{\dim(W)}_{=2} + \underbrace{\dim(U)}_{=2} - \underbrace{\dim(W+U)}_{=4} = 0.$$

Logo, $W \cap U = \{(0,0,0,0)\}$, e, portanto, resulta do fato de que $W+U = \mathbb{R}^4$ que $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$.

PROBLEMA: encontrar um suplementar de um subespaço W de $\mathbb{R}^n$ (isto é, encontrar um subespaço U de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n = W \oplus U$).

ROTEIRO:

1) Encontrar uma base de W (B_W).

2) Estender essa base de W a uma base de $\mathbb{R}^n$ (B).

3) Um suplementar de W é $U := [\underbrace{B}_{\text{base de } \mathbb{R}^n \text{ tal que } B_W \subseteq B} \setminus \underbrace{B_W}_{\text{base de } W}]$.

OBS.: $B \setminus B_W = \{x \in B : x \notin B_W\}$.

2)

c)

HIPÓTESES: $\dim(V)=n$, e U e W são subespaços de V tais que $\dim(U)+\dim(W)>n$.

TESE: $U\cap W\neq\{0_V\}$.

$$\dim(U+W)=\underbrace{\dim(W)+\dim(U)}_{>n}-\dim(U\cap W)>n-\dim(U\cap W)$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(U\cap W)>n-\underbrace{\dim(U+W)}_{\leq n}\geqslant 0 \qquad (\dim(U+W)\leq n \Leftrightarrow n-\dim(U+W)\geqslant 0)$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(U\cap W)>0 \qquad (a>b\geqslant 0\Rightarrow a>0)$$
$$\Downarrow$$
$$U\cap W\neq\{0_V\}$$

d) Suponhamos que $S\subseteq V$ seja LI, e que $A\subseteq S$. Como S é LI, os coeficientes de qualquer combinação linear de um número finito de vetores dois a dois distintos de S que resulte no vetor nulo de V são necessariamente todos iguais a 0. Como $A\subseteq S$, disso resulta, em particular, que os coeficientes de qualquer combinação linear de um número finito de vetores dois a dois distintos de A que resulte no vetor nulo de V são necessariamente todos iguais a 0. Logo, A é LI.

DEFINIÇÃO. Se V e W são espaços vetoriais, e se $T:V\to W$ é linear, então
$$\mathrm{Ker}(T):=\{v\in V: T(v)=0_W\}.$$

4-d)

$$T:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$$
$$(x,y,z,t)\longmapsto(0,0,x,y)$$

$$T(x,y,z,t)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow(0,0,x,y)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow x=y=0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(T)&=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: T(x,y,z,t)=(0,0,0,0)\}\\&=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: x=y=0\}\\&=\{(0,0,z,t): z,t\in\mathbb{R}\}=\{z(0,0,1,0)+t(0,0,0,1)\}\\&=[(0,0,1,0),(0,0,0,1)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Im(T) &= \{T(x,y,z,t) : x,y,z,t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(0,0,x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x(0,0,1,0) + y(0,0,0,1) : x,y \in \mathbb{R}\}\\ &= [(0,0,1,0)),(0,0,0,1)].\end{aligned}$$

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, e seja $T \in L(V)$. Nessas condições, se $Ker(T) = Im(T)$, então

$$\dim(V) = \underbrace{\dim(Ker(T))}_{= \dim(Im(T))} + \dim(Im(T)) = 2\dim(Im(T)).$$

TERCEIRA PROVA. (TURMA DO IAG)

3)

a) $T \in L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$, $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5)$

$$T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z,t,u) \longmapsto (x,y,z)$$

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,z,0,0)$$

$T \circ S = I_{\mathbb{R}^3}$.

para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(T \circ S)(x,y,z) = T(S(x,y,z)) = T(x,y,z,0,0) = (x,y,z)$$

b)

$$(t-a)^2 - b^2 = t^2 - 2at + a^2 - b^2$$

$$t^2 - 2at + (a^2 - b^2) = 0$$

$$\Delta = 4a^2 - 4(a^2 - b^2) = 4b^2 \geq 0$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

c) $A := \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$

$$p_A(t) = (-1)^2 \begin{vmatrix} a-t & b \\ a & b-t \end{vmatrix} = (a-t)(b-t) - ab = ab - (a+b)t + t^2 - ab$$
$$= t^2 - (a+b)t = t\,(t-(a+b))$$

$$t(t-(a+b)) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = a+b$$

• CASO EM QUE $a+b=0$.

$P_A(t) = t^2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Nessas condições: A é semelhante a $B \Leftrightarrow$ existe uma matriz inversível $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

$$\underbrace{P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P}_{= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix} \Rightarrow a = 0$$

(ou)

$$V(0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a(x-y) = 0\right\}$$
$$= \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{se } a = 0 \\ [(1,1)], & \text{se } a \neq 0 \end{cases}$$

Logo, $mg(0) = 2 \Leftrightarrow a = 0$.

d) $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

$$P_A(t) = (t-1)(t-a).$$
$$\Downarrow$$
Se $a \neq 1$, A é diagonalizável

PERGUNTA: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável?

· $ma(1) = 2$.

$$V(1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,0) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \cdot (1,0) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= [(1,0)].$$

Como $mg(1) = \dim(V(1)) = 1 < 2$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.