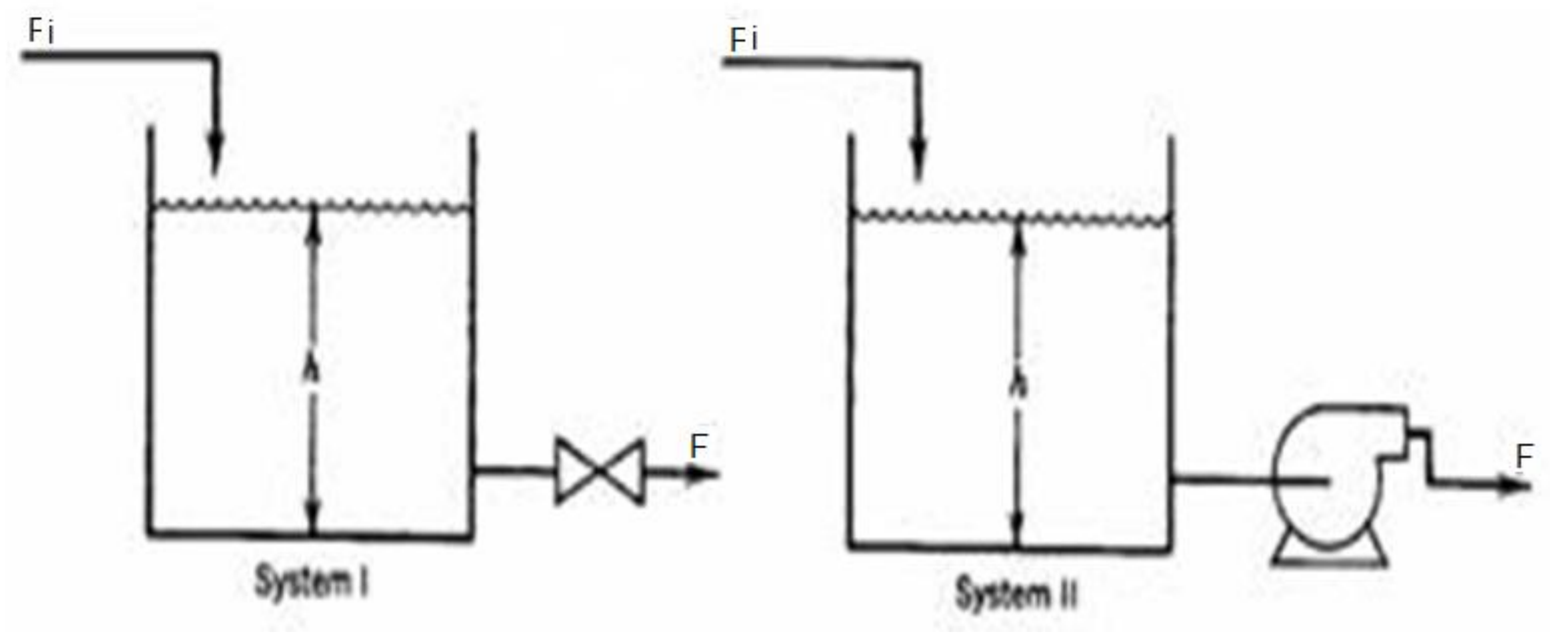
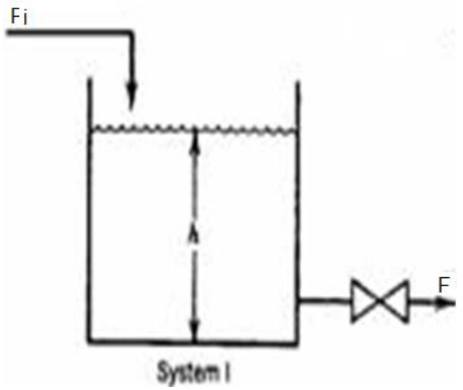
Exemplos de obtenção da função de transferência de sistemas de 1ª. e 2ª. ordem

- Balanço de massa para tanques pulmão.



- Balanço de massa para o sistema 1:



Entra – sai + produzido – consumido = acumula

$$\rho_i F_{i(t)} - \rho\, F_{(t)} = \frac{dM_{(t)}}{dt} = \frac{d\left(\rho\, V_{(t)}\right)}{dt} = \frac{d\left(\rho\, area\ h_{(t)}\right)}{dt} \qquad F_{(t)} = \beta\sqrt{h_{(t)}}$$

Hipóteses: Densidade constante; Área de seção transversal (*area*) constante.

$$F_{i(t)} - \beta\sqrt{h_{(t)}} = area\frac{dh_{(t)}}{dt} \quad (1)$$

EDO não linear – Termo não linear: $\sqrt{h_{(t)}}$

Linearização por expansão de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}\frac{x-x_0}{1!} + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots\ldots + \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x_0}\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \ldots$$

$$\sqrt{h_{(t)}} \approx \sqrt{h_{(ss)}} + \left.\frac{d\sqrt{h_{(t)}}}{dt}\right|_{ss}\left(h_{(t)} - h_{(ss)}\right) \qquad \sqrt{h_{(t)}} \approx \sqrt{h_{(ss)}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{(t)}}}\left(h_{(t)} - h_{(ss)}\right) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$F_{i(t)} - \beta\left(\sqrt{h_{(ss)}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{(ss)}}}\left(h_{(t)} - h_{(ss)}\right)\right) = area\frac{dh_{(t)}}{dt} \quad (3)$$

Aplicando-se o estado estacionário na equação diferencial ordinária original (1):

$$F_{i(ss)} - \beta\sqrt{h_{(ss)}} = 0 \quad (4)$$

Subtraindo (4) de (3):

$$\left(F_{i(t)} - F_{i(ss)}\right) - \beta\left(\sqrt{h_{(ss)}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{(ss)}}}\left(h_{(t)} - h_{(ss)}\right)\right) + \beta\sqrt{h_{(ss)}} = area\,\frac{dh_{(t)}}{dt}$$

$$\left(F_{i(t)} - F_{i(ss)}\right) - \frac{\beta}{2\sqrt{h_{(ss)}}}\left(h_{(t)} - h_{(ss)}\right) = area\,\frac{dh_{(t)}}{dt} \qquad (5)$$

Escrevendo (5) no forma de variável desvio:

$$F'_{i(t)} - \frac{\beta}{2\sqrt{h_{(ss)}}}h'_{(t)} = area\,\frac{dh'_{(t)}}{dt} \qquad (6)$$

Aplicando-se a Transforma de Laplace:

$$\overline{F_{i(s)}} - \frac{\beta}{2\sqrt{h_{(ss)}}}\overline{h_{(s)}} = area\ s\,\overline{h_{(s)}} \qquad (7)$$

Rearranjando (7):

$$\overline{h_{(s)}} = \frac{1}{area\ s + \frac{\beta}{2\sqrt{h_{(ss)}}}}\overline{F_{i(s)}} \qquad (8)$$

Colocando a função de transferência (8) no formato padrão temos: $\overline{h_{(s)}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}}{\frac{2\ area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}s + 1}\overline{F_{i(s)}}$ (9)

$$\overline{h_{(s)}} = \frac{\frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}}{\frac{2\ area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}s+1}\overline{F_{i(s)}}$$

em que $\frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}$ é o ganho estático do processo K_p, e $\frac{2\ area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}$ é a constante de tempo τ_p.

Para o cálculo do novo estado estacionário, frente a uma perturbação degrau em $\overline{F_{i(s)}}$ de amplitude A, utiliza-se o Teorema do Valor Final (TVF):

TVF= $\lim_{s\to 0} s\,\overline{h_{(s)}}$

$$TVF = \lim_{s\to 0}\ s\frac{\frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}}{\frac{2\ area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}s+1}\overline{F_{i(s)}}$$

$$TVF = \lim_{s\to 0}\ s\frac{\frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}}{\frac{2\ area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}s+1}\frac{A}{s}$$

$$TVF = \frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}A$$

Para determinar-se o comportamento dinâmico do processo, frente a uma perturbação degrau em $\overline{F_{i(s)}}$ de amplitude A, utiliza-se a Transformada de Laplace Inversa:

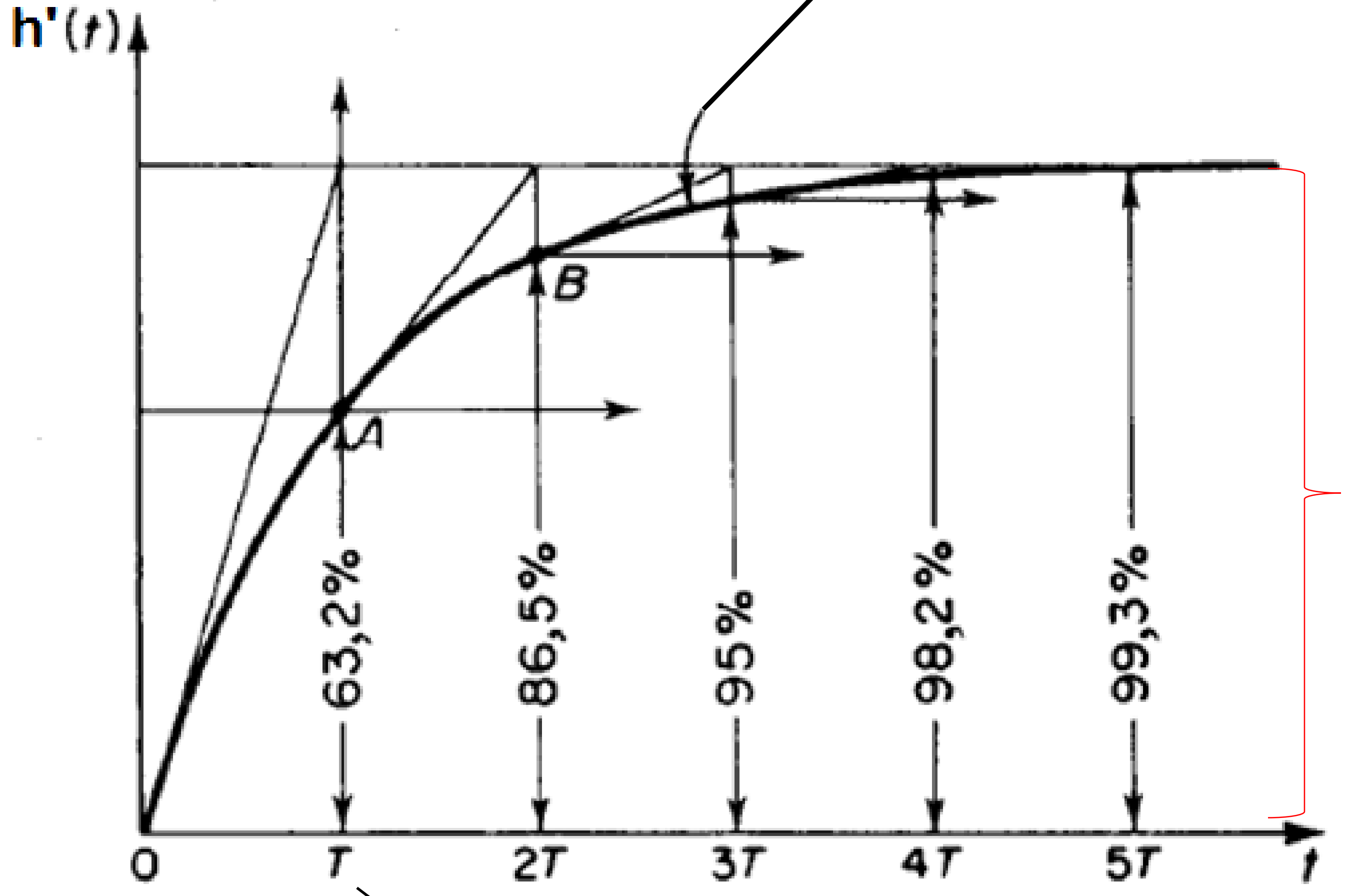
$$\overline{h_{(s)}} = \frac{\frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}}{\frac{2\ area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}s+1}\frac{A}{s}$$

$$L^{-1}\left(\overline{h_{(s)}}\right) = L^{-1}\left(\frac{\frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}}{\frac{2\ area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}s+1}\frac{A}{s}\right)$$

$$h'_{(t)} = \frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}A\left(1-e^{\frac{-t}{\frac{2\ area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}}}\right)$$

$$h'_{(t)} = \frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}\, A \left(1 - e^{\frac{-t}{\frac{2\,area\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}}}\right)$$

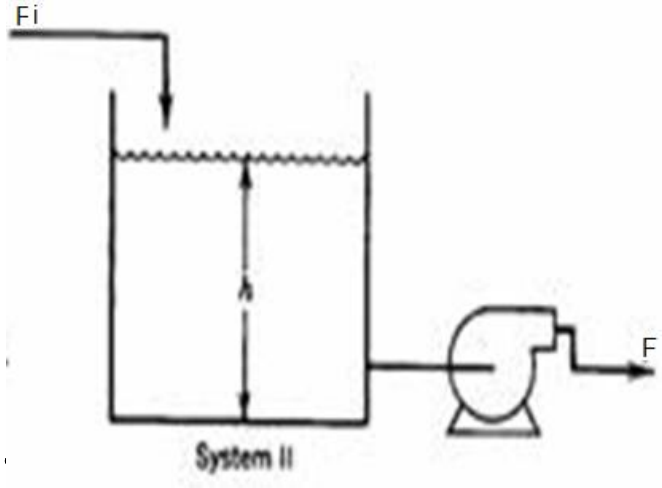
$$h'_{(t)} = K_p\, A \left(1 - e^{-\frac{-t}{\tau_p}}\right)$$



$$K_p\, A = \frac{2\sqrt{h_{(ss)}}}{\beta}\, A$$

τ_p

- Balanço de massa para o sistema 2:



Entra – sai + produzido – consumido = acumula

$$\rho_i F_{i(t)} - \rho\, F_{(t)} = \frac{dM_{(t)}}{dt} = \frac{d\left(\rho\, V_{(t)}\right)}{dt} = \frac{d\left(\rho\, area\, h_{(t)}\right)}{dt}$$

Hipóteses: Densidade constante; Área de seção transversal (*area*) constante.

$$F_{i(t)} - F_{(t)} = area\frac{dh_{(t)}}{dt} \qquad (1)$$

EDO linear

Aplicando-se o estado estacionário na equação diferencial ordinária (1):

$$F_{i(ss)} - F_{(ss)} = 0 \qquad (2)$$

Subtraindo-se (2) de (1):

$$\left(F_{i(t)} - F_{i(ss)}\right) - \left(F_{(t)} - F_{(ss)}\right) = area\frac{dh_{(t)}}{dt} \qquad (3)$$

Escrevendo-se (3) na forma de variável desvio:

$$F'_{i(t)} - F'_{(t)} = area\frac{dh'_{(t)}}{dt} \qquad (4)$$

$$F'_{i(t)} - F'_{(t)} = area\frac{dh'_{(t)}}{dt} \qquad (4)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace em (4):

$$\overline{F_{i(s)}} - \overline{F_{(s)}} = area\ s\ \overline{h_{(s)}} \qquad (5)$$

Rearranjando-se (5):

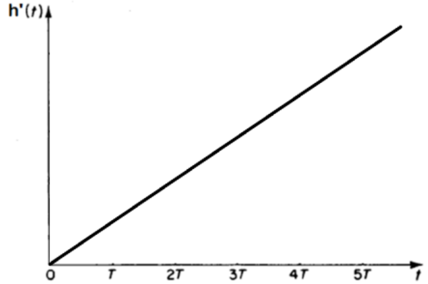
$$\overline{h_{(s)}} = \frac{1}{area\ s}\overline{F_{i(s)}} - \frac{1}{area\ s}\overline{F_{(s)}} \qquad (6)$$

Para o cálculo do novo estado estacionário, frente a uma perturbação degrau em $\overline{F_{i(s)}}$ de amplitude A, utiliza-se o Teorema do Valor Final (TVF):

TVF= $\lim\limits_{s \to 0} s\ \overline{h_{(s)}}$ $\qquad TVF = \lim\limits_{s \to 0} s \frac{1}{area\ s}\overline{F_{i(s)}}$ $\qquad TVF = \lim\limits_{s \to 0} s \frac{1}{area\ s + 1}\frac{A}{s}$ $\qquad TVF = +\infty$

Para determinar-se o comportamento dinâmico do processo, frente a uma perturbação degrau em $\overline{F_{i(s)}}$ de amplitude A, utiliza-se a Transformada de Laplace Inversa:

$\overline{h_{(s)}} = \frac{1}{area\ s}\frac{A}{s}$ $\qquad L^{-1}(\overline{h_{(s)}}) = L^{-1}\left(\frac{1}{area\ s}\frac{A}{s}\right)$ $\qquad h'_{(t)} = \frac{A}{area}t$



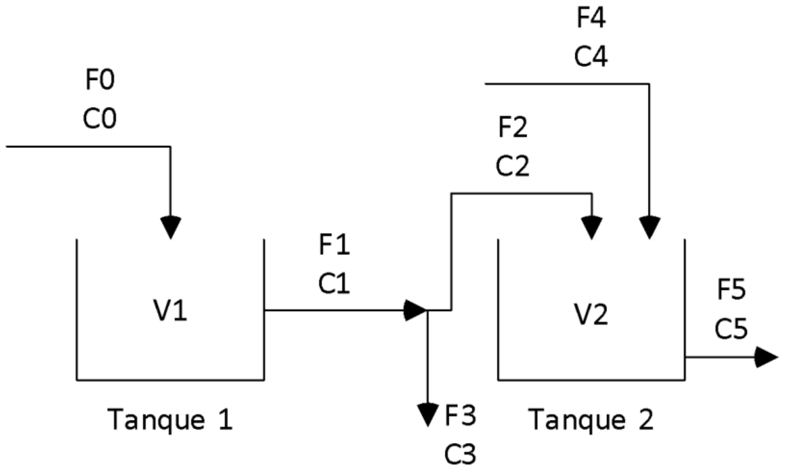
O sistema descrito na Figura a seguir representa parte do processo de fabricação de álcool e açúcar. O tanque 1, que possui volume (V1) de $100m^3$, recebe caldo de cana clarificado com uma vazão (F0) igual a $100m^3/h$ e concentração (C0) de $30kg/m^3$ de açúcares redutores totais (ART). Parte da vazão de saída (F1) do tanque 1 é encaminhada para o processo de fabricação de açúcar (F3=0,8F1), e parte é encaminhada para fabricação de etanol (F2=0,2F1). O tanque 2 possui volume (V2) de $100m^3$, e recebe a corrente F2, e a corrente (F4), a qual tem uma vazão igual a $40m^3/h$ e concentração (C4) igual a $60kg/m^3$. A corrente de saída do tanque 2 (F5) segue para o processo de fermentação. Diante do exposto:

a) Determine a função de transferência do tanque 1, correlacionando a composição da corrente de saída em função das variáveis de entrada. Determine os valores das constantes da função de transferência. Considere V1 e F0 constantes.

b) Para as condições inicialmente estabelecidas na letra (a), avalie o efeito na variável de saída frente a uma variação instantânea da concentração C0, que passa de $30kg/m^3$ para $10kg/m^3$. Esboce o comportamento dinâmico da variável de saída.

c) Determine a função de transferência do tanque 2, correlacionando a composição da corrente de saída em função das variáveis de entrada do sistema (levar em consideração o tanque 1 e o tanque 2). Determine os valores das constantes da função de transferência. Considere V1, V2, F0, C4 constantes.

d) Para as condições inicialmente estabelecidas nas letras (a) e (c), avalie o efeito na concentração de saída do tanque 2 frente a uma variação instantânea da concentração C0, que passa de $30kg/m^3$ para $10kg/m^3$.O processo é estável em malha aberta? O processo apresenta comportamento oscilatório?



- Balanço de massa para a concentração de ART no tanque 1:

Entra – sai + produzido – consumido = acumula

$$F_0 C_{0(t)} - F_1 C_{1(t)} = \frac{dM_{1(t)}}{dt} = \frac{d\left(V_1\, C_{1(t)}\right)}{dt} = V_1 \frac{d\, C_{1(t)}}{dt} \quad (1)$$

Equação diferencial ordinária linear

Hipóteses: mistura perfeita. Considerações: V_1 e F_0 constantes. ⇒ $F_0 = F_1$

Aplicando-se o estado estacionário na equação diferencial ordinária original (1):

$$F_0 C_{0(ss)} - F_0 C_{1(ss)} = 0 \quad (2)$$

Subtraindo-se (2) de (1):

$$\left(F_0 C_{0(t)} - F_0 C_{0(ss)}\right) - \left(F_0 C_{1(t)} - F_0 C_{1(ss)}\right) = V_1 \frac{d\, C_{1(t)}}{dt} \quad (3)$$

Escrevendo (3) no forma de variável desvio:

$$F_0 C'_{0(t)} - F_0 C'_{1(t)} = V_1 \frac{d\, C'_{1(t)}}{dt} \quad (4)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace em (4):

$$F_0 \overline{C_{0(s)}} - F_0 \overline{C_{1(s)}} = V_1\, s\, \overline{C_{1(s)}} \quad (5)$$

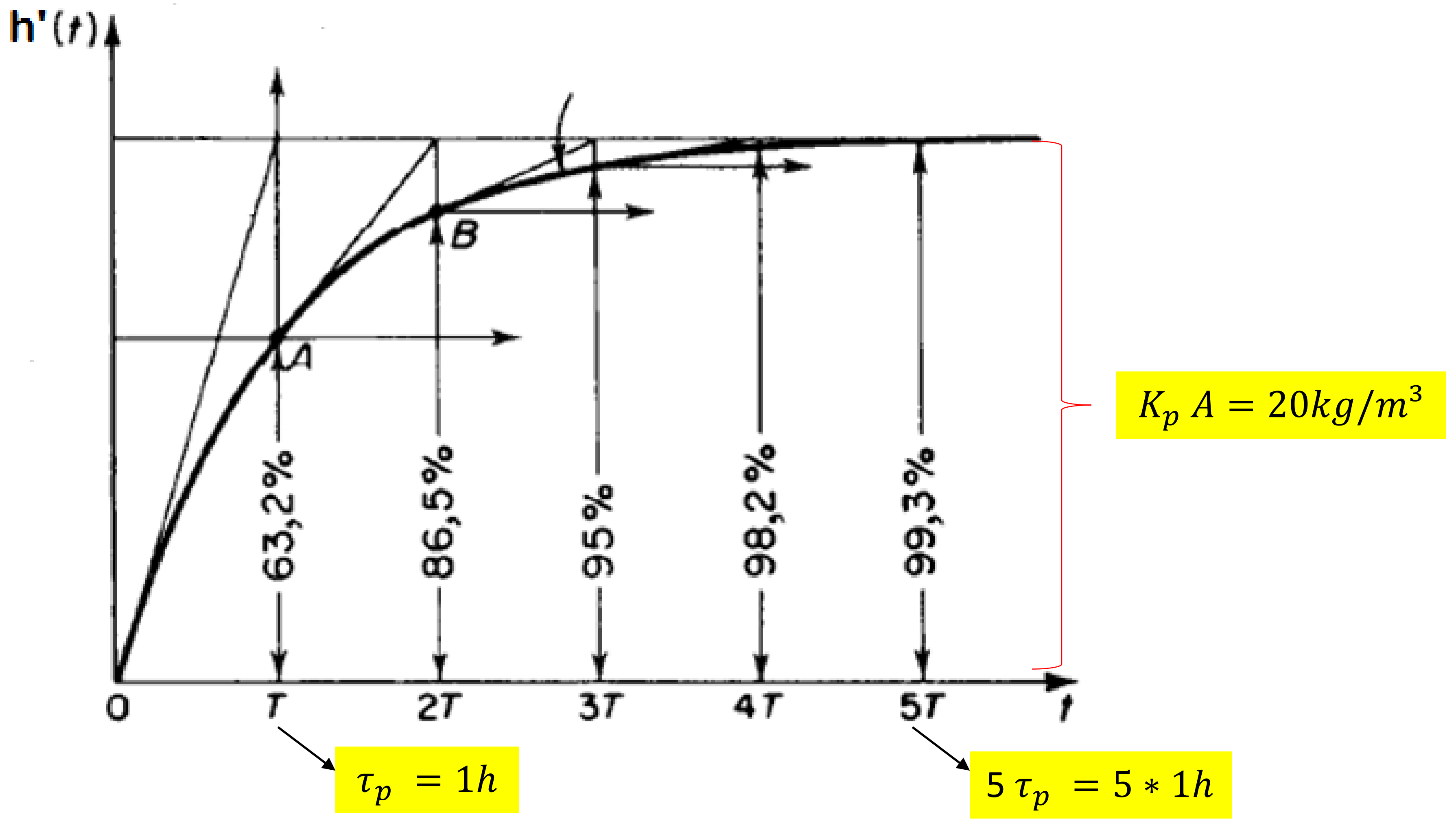
Rearranjando-se (5) e colocando no formato padrão:

$$\overline{C_{1(s)}} = \frac{1}{\frac{V_1}{F_0} s + 1} \overline{C_{0(s)}} \quad (6)$$

⇒ $K_p = 1$ $\tau_p = 1\text{h}$

Para o cálculo do novo estado estacionário, frente a uma perturbação degrau em $\overline{C_{0(s)}}$ de amplitude 20kg/m³, utiliza-se o Teorema do Valor Final (TVF):

$$TVF = \lim_{s\to 0} s\,\overline{C_{1(s)}} \qquad TVF = \lim_{s\to 0}\ s\,\frac{1}{\frac{V_1}{F_1}s+1}\overline{C_{0(s)}} \qquad TVF = \lim_{s\to 0}\ s\,\frac{1}{1\,s+1}\,\frac{30-10}{s} \qquad TVF = 20kg/m^3$$



- Balanço de massa para a concentração de ART no tanque 2:

Entra – sai + produzido – consumido = acumula

$$F_2 C_{2(t)} + F_{4(t)} C_4 - F_{5(t)} C_{5(t)} = \frac{dM_{2(t)}}{dt} = \frac{d\left(V_2\, C_{5(t)}\right)}{dt} = V_2 \frac{d\, C_{5(t)}}{dt} \qquad (7)$$

Hipóteses: mistura perfeita. Considerações: V_1, V_2, F_0, C_4 constantes. $F_2 = 0{,}2\, F_0$ (8) $F_5 = 0{,}2\, F_0 + F_4$ (9)

Substituindo (8) e (9) em (7):

$$0{,}2\ F_0\, C_{2(t)} + F_{4(t)} C_4 - 0{,}2\ F_0 C_{5(t)} - F_{4(t)} C_{5(t)} = V_2 \frac{d\, C_{5(t)}}{dt}$$

(10) Equação diferencial ordinária não linear

Termo não linear: $F_{4(t)} C_{5(t)}$ (11)

Linearização (11) por expansão de Taylor:

$$f_1(x_1, x_2) \approx f_1(x_{1,0}, x_{2,0}) + \left(\frac{df_1}{dx_1}\right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_1 - x_{1,0}) + \left(\frac{df_1}{dx_2}\right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_2 - x_{2,0})$$

$$F_{4(t)} C_{5(t)} \approx F_{4(ss)} C_{5(ss)} + \left(\frac{\partial F_{4(t)} C_{5(t)}}{\partial F_{4(t)}}\right)_{ss} (F_{4(t)} - F_{4(ss)}) + \left(\frac{\partial F_{4(t)} C_{5(t)}}{\partial C_{5(t)}}\right)_{ss} (C_{5(t)} - C_{5(ss)})$$

$$F_{4(t)} C_{5(t)} \approx F_{4(ss)} C_{5(ss)} + C_{5(ss)} (F_{4(t)} - F_{4(ss)}) + F_{4(ss)} (C_{5(t)} - C_{5(ss)}) \qquad (12)$$

Substituindo-se (12) em (10):

$$0{,}2\ F_0 C_{2(t)} + F_{4(t)} C_4 - 0{,}2\ F_0 C_{5(t)} - F_{4(ss)} C_{5(ss)} - C_{5(ss)}(F_{4(t)} - F_{4(ss)}) - F_{4(ss)}(C_{5(t)} - C_{5(ss)}) = V_2 \frac{d\ C_{5(t)}}{dt} \quad (13)$$

Aplicando-se o estado estacionário na equação diferencial ordinária original (10):

$$0{,}2\ F_0 C_{2(ss)} + F_{4(ss)} C_4 - 0{,}2\ F_0 C_{5(ss)} - F_{4(ss)} C_{5(ss)} = 0 \quad (14)$$

Subtraindo (14) de (13):

$$0{,}2\ F_0 (C_{2(t)} - C_{2(ss)}) + C_4 (F_{4(t)} - F_{4(ss)}) - 0{,}2\ F_0 (C_{5(t)} - C_{5(ss)}) - C_{5(ss)}(F_{4(t)} - F_{4(ss)}) - F_{4(ss)}(C_{5(t)} - C_{5(ss)}) = V_2 \frac{d\ C_{5(t)}}{dt} \quad (15)$$

Escrevendo (15) no forma de variável desvio:

$$0{,}2\ F_0 C'_{2(t)} + C_4 F'_{4(t)} - 0{,}2\ F_0 C'_{5(t)} - C_{5(ss)} F'_{4(t)} - F_{4(ss)} C'_{5(t)} = V_2 \frac{d\ C'_{5(t)}}{dt} \quad (16)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace em (16):

$$0{,}2\ F_0 \overline{C_{2(s)}} + C_4 \overline{F_{4(s)}} - 0{,}2\ F_0 \overline{C_{5(s)}} - C_{5(ss)} \overline{F_{4(s)}} - F_{4(ss)} \overline{C_{5(s)}} = V_2\ s\ \overline{C_{5(s)}} \quad (17)$$

Rearranjando-se (17) e colocando no formato padrão:

$$\overline{C_{5(s)}} = \frac{\dfrac{0{,}2\ F_0}{0{,}2\ F_0 + F_4}}{\dfrac{V_2}{0{,}2\ F_0 + F_4}\ s + 1} \overline{C_{2(s)}} + \frac{\dfrac{C_4 - C_{5(ss)}}{0{,}2\ F_0 + F_4}}{\dfrac{V_2}{0{,}2\ F_0 + F_4}\ s + 1} \overline{F_{4(s)}} \quad (18)$$

Substituindo-se (6) em (18):

$$\overline{C_{1(s)}} = \overline{C_{2(s)}} = \frac{1}{\frac{V_1}{F_0}\, s + 1}\overline{C_{0(s)}} \qquad (6)$$

$$\overline{C_{5(s)}} = \frac{\frac{0{,}2\, F_0}{0{,}2\, F_0 + F_4}}{\frac{V_2}{0{,}2\, F_0 + F_4}\, s + 1}\overline{C_{2(s)}} + \frac{\frac{C_4 - C_{5(ss)}}{0{,}2\, F_0 + F_4}}{\frac{V_2}{0{,}2\, F_0 + F_4}\, s + 1}\overline{F_{4(s)}} \qquad (18)$$

$$\overline{C_{5(s)}} = \frac{\frac{0{,}2\, F_0}{0{,}2\, F_0 + F_4}}{\left(\frac{V_2}{0{,}2\, F_0 + F_4}\, s + 1\right)\left(\frac{V_1}{F_0}\, s + 1\right)}\overline{C_{0(s)}} + \frac{\frac{C_4 - C_{5(ss)}}{0{,}2\, F_0 + F_4}}{\frac{V_2}{0{,}2\, F_0 + F_4}\, s + 1}\overline{F_{4(s)}} \qquad (19)$$

$K_{p1} = \frac{0{,}2\, F_0}{0{,}2\, F_0 + F_4} = 0{,}333$ $\quad K_{p2} = \frac{C_4 - C_{5(ss)}}{0{,}2\, F_0 + F_4} = 0{,}1661 kg\ h/m^6$ $\quad \tau_{p1} = \frac{V_1}{F_0} = 1h$ $\quad \tau_{p2} = \frac{V_2}{0{,}2\, F_0 + F_4} = 1{,}667h$

Rearranjando (19):

$$\overline{C_{5(s)}} = \frac{K_{p1}}{(\tau_{p2} s + 1)(\tau_{p1}\, s + 1)}\overline{C_{0(s)}} + \frac{K_{p2}}{\tau_{p2}\, s + 1}\overline{F_{4(s)}} \qquad (20)$$

Colocando a primeira função de transferência no formato de uma F.T. de 2ª. Ordem:

$$\overline{C_{5(s)}} = \frac{K_{p1}}{\tau_p^2 s^2 + 2\tau_p \zeta s + 1}\overline{C_{0(s)}} + \frac{K_{p2}}{\tau_{p2}\, s + 1}\overline{F_{4(s)}}$$

$$\tau_p = \sqrt{\tau_{p1}\tau_{p2}} = 1{,}29h$$

$$\zeta = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2\tau_p} = 1{,}03$$

Para o cálculo do novo estado estacionário, frente a uma perturbação degrau em $\overline{C_{0(s)}}$ de amplitude -20kg/m³, utiliza-se o Teorema do Valor Final (TVF):

TVF$= \lim_{s \to 0} s\, \overline{C_{5(s)}}$ $\quad TVF = \lim_{s \to 0}\ s \frac{K_{p1}}{\tau_p^2 s^2 + 2\tau_p \zeta s + 1} \overline{C_{0(s)}} \quad TVF = \lim_{s \to 0}\ s \frac{0{,}333}{1{,}667 s^2 + 2{,}667 s + 1} \frac{-20}{s}$

$TVF = -6.7 kg/m^3$

Processo estável e não oscilatório.