3-Comportamento Dinâmico

3-1-Sistemas de primeira ordem

Um sistema de primeira ordem é aquele cuja saída y(t) é modelada por uma equação diferencial de primeira ordem. Então no caso de um sistema linear ou linearizado, temos:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bf(t) \qquad (3.1)$$

Em que f(t) é a entrada do sistema. Se $a_0 \neq 0$, então a equação acima pode ser escrita como:

$$\frac{a_1}{a_0}\frac{dy}{dt} + y = \frac{b}{a_0} f(t)$$

Definimos

$$\frac{a_1}{a_0} = \tau_p \ \text{ e } \ \frac{b}{a_0} = K_p$$

Logo a equação se transforma em

$$\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p f(t) \qquad (3.2)$$

τ_p é conhecida como a constante de tempo do sistema e K_p é chamado de ganho estático ou ganho estacionário do processo.

Se y(t) e f(t) estão em termos de variáveis desvio em torno do estado estacionário inicial, as condições iniciais são:

y(0)=0 e f(0)=0

Logo, a função de transferência de um processo de primeira ordem é:

$$G(s) = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \qquad (3.3)$$

Um processo de primeira ordem com a função de transferência acima é também conhecido como atraso de primeira ordem (*first-order lag*) ou atraso linear (*linear lag*).

Se a_0=0, então da eq. (3.1) temos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b}{a_1} f(t) = K_p' f(t)$$

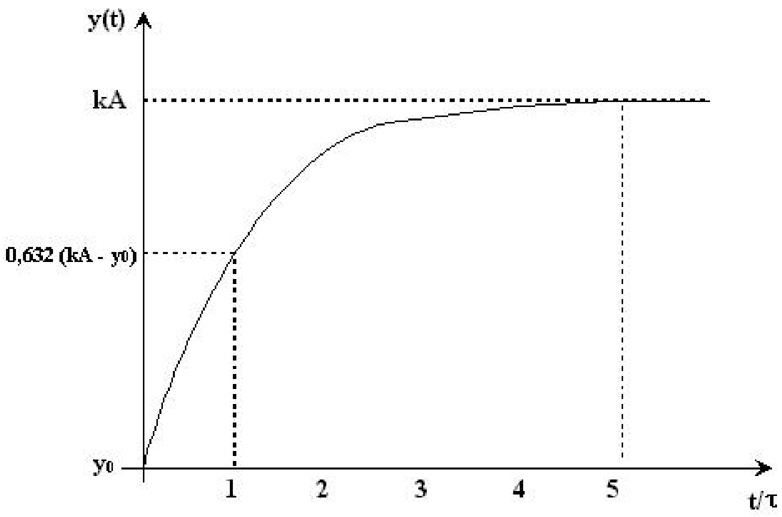
que leva a uma função de transferência:

$$G(s) = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{K_p^{'}}{s} \qquad (3.4)$$

Neste caso o processo é chamado de puramente capacitivo ou integrador puro.

Resposta dinâmica de um processo de segunda ordem frente a uma perturbação na forma de degrau

Imagine um processo com função de transferência dada pela eq.(3.3). Vamos examinar como ele responde a um degrau unitário em f(t). Como f(s)=1/s, da eq. (3.3) temos:



$$y(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} . \frac{1}{s}$$

3.2-Sistemas de segunda ordem

Um sistema de segunda ordem é descrito por equações diferenciais de segunda ordem. Por exemplo, a seguinte equação descreve um sistema linear de segunda ordem:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b\, u(t)$$

e se $a_0 \neq 0$ podemos divir por a_0 obtendo:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy}{dt} + y = k\, u(t)$$

com

$k = b/a_0$ (ganho estático)

$\tau = \sqrt{a_2/a_0}$ (período natural de oscilação do sistema)

$2\xi\tau = a_1/a_0$ (onde ξ é o fator de amortecimento)

Escrevendo-se a equação acima em termos de variáveis desvio e utilizando a transformada de Laplace, pode-se calcular a função de transferência:

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

Um sistema de 2ª ordem decorre de:

1. Processos multicapacitivos (dois sistemas de 1ª ordem em série);
2. Processos inerentemente de 2ª ordem (processo com inércia e submetido a aceleração (e.g. manômetro em U)
3. Processo de 1ª ordem e seu controlador.

Ao denominador da função de transferência igualado a 0 é dado o nome de equação característica, e através da analise desta equação, ou mais precisamente as raízes desta, é possível conhecer a priori informações importantes sobre as características dinâmicas do processo (por exemplo, estabilidade).

Resposta dinâmica de um processo de segunda ordem frente a uma perturbação na forma de degrau

Perturbando-se o sistema de segunda ordem descrito acima com um degrau de entrada:

$$U(s) = .\frac{M}{s}$$

a resposta do sistema será:

$$Y(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}\frac{M}{s}$$

Calculando as duas raízes do denominador da função de transferência tem-se:

$$p_1 = \frac{-\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{-\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

Estas raízes, também chamadas polos da função de transferência, permitem escrever a saída do processo, fatorando o polinômio, como:

$$Y(s) = \frac{k\ M}{(s - p_1)(s - p_2)\ s}$$

De acordo com as raízes da equação característica (os polos da função de transferência), a resposta pode ser **superamortecida** ($\xi > 1$), ou seja raízes reais e distintas), **criticamente amortecida** ($\xi = 1$), raízes reais e repetidas) ou **subamortecida** ($\xi < 1$), raízes complexas conjugadas).

a) Reposta superamortecida

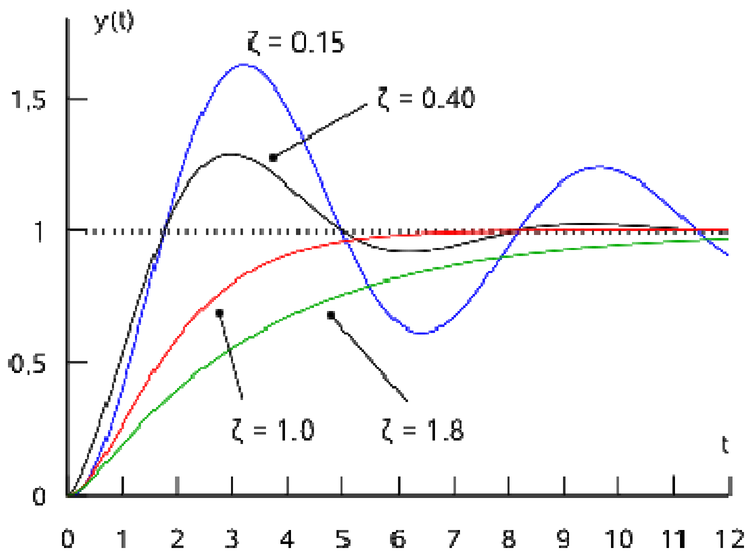
Se $\xi > 1$, ou seja raízes são reais e distintas, a saída do processo no domínio do tempo é:

$$y(t) = \frac{k\ M}{p_1 p_2}\left(1 - \frac{p_1 e^{-p_2 t} - p_2 e^{-p_1 t}}{p_1 - p_2}\right)$$

b) Resposta subamortecida

Corresponde a valores de $\xi < 1$, ou seja, raízes complexas conjugadas.

Neste caso, a resposta apresenta característica oscilatória. Quanto menor o fator de amortecimento, mais suave é o amortecimento da oscilação, isto é, a oscilação permanece durante muito tempo. Nestas condições o tempo de resposta é mais rápido. Ao se projetar um sistema de controle para um processo de 1ª ordem, em geral, se escolhe um fator de amortecimento $0{,}3 < \xi < 0{,}5$ que corresponde a um sistema subamortecido.



A resposta subamortecida, por sua importância em controle, é descrita por termos especiais:

tempo de subida (t_s): Este termo é usado para caracterizar a velocidade com a qual o sistema responde. É definido como o tempo necessário para a resposta atingir o seu valor final pela primeira vez o valor do novo estado estacionário. pode-se ver que quanto menor o valor de ξ, menor o tempo de ascensão, ou seja, mais rápida é a resposta do sistema, mas ao mesmo tempo maior é o valor do *overshoot*.

tempo para o primeiro pico (tp): é o tempo para o processo alcançar seu primeiro valor máximo.

tempo de resposta (tr): a resposta de um sistema sub amortecido atingirá o seu valor final de forma oscilatória quando t→∞. Para questões práticas considera-se que a resposta atingiu o valor final quando está dentro da faixa de ± 5% do valor final e permanece ai. O tempo necessário para a resposta chegar neste ponto é conhecida como tempo de resposta

sobrepasso / sobressinal (OS="overshoot"): é a relação "a/b", em que "b" é o valor final da resposta e "a" é o valor máximo do desvio.

$$OS = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

razão de decaimento (DR="decay ratio"): é a relação entre as duas primeiras amplitudes ("c/a").

$$DR = \exp\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = OS^2$$

período de oscilação (P): é o tempo decorrido entre dois picos sucessivos. Seja ω é a frequência do ciclo, tem-se:

$$P = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

período natural de oscilação (Pn): se ξ=0, não há amortecimento e o sistema oscilará com amplitude "sustentada".

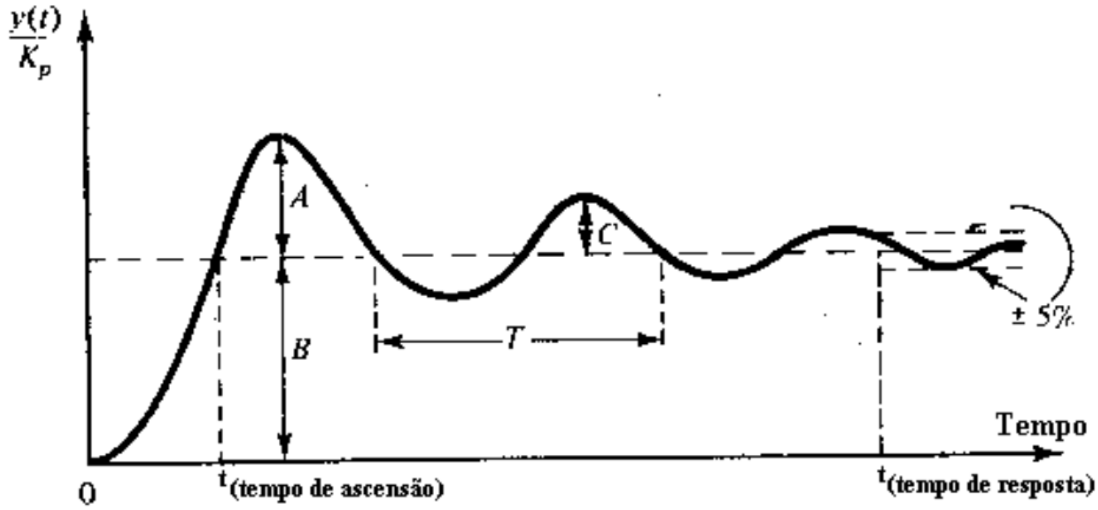
Sua função de transferência é:

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau^2 s + 1} = \frac{K_p/\tau^2}{(s - j\frac{1}{\tau})(s + j\frac{1}{\tau})}$$

ou seja, tem dois pólos imaginários puros e vai oscilar continuamente com amplitude constante e frequência natural igual a:

$$w_n = \frac{1}{\tau}$$

e período $P_n = 2\pi\tau$



Pode-se observar o seguinte:

1-A resposta sub amortecida é inicialmente mais rápida do que a criticamente amortecida ou super amortecida, que é caracterizada como lenta.
2-Embora a resposta sub amortecida seja inicialmente mais rápida e atinja o seu valor final rapidamente, não permanece lá, mas começa a oscilar com amplitude

progressivamente decrescente. Este comportamento oscilatório faz a resposta sub amortecida completamente diferente das outras.
3-O comportamento oscilatório se torna mais pronunciado com valores menores do fator de amortecimento ξ.

Deve ser enfatizado que quase todas as respostas sub amortecidas numa planta química são causadas pela interação de controladores com as unidades de processo que eles controlam. Assim, este é um tipo de resposta que vamos encontrar com bastante frequência e é importante nos familiarizarmos com as suas características.