PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 3 DE FEVEREIRO

PROVA SUBSTITUTIVA DO DIA 18 DE JANEIRO

1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{l} -4x-4y=0, \\ x+y=0, \text{ e} \\ -3z=0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} V_A(4) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x, \text{ e } z = 0\} \\ &= \{(x,-x,0) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,-1,0) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,-1,0)] \end{aligned}$$

Se $T_A \in L(\mathbb{R}^3)$ é tal que $[T_A]_{can} = A$, e se $P := [I]_{B,can}$, então P possui inversa, e

$$P^{-1}AP = \underbrace{[I]_{B,can}^{-1}}_{=[I]_{can,B}} \cdot [T_A]_{can} [I]_{B,can} = [I]_{can,B} \cdot [T_A]_{can} [I]_{B,can}$$

$$= [T_A]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$B_1 := \{(-4,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base de $V_A(1)$

$B_4 := \{(1,-1,0)\}$ é uma base de $V_A(4)$

$B' := B_1 \cup B_4 = \{(-4,1,0), (0,0,1), (1,-1,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$

$B := ((-4,1,0), (0,0,1), (1,-1,0))$

$$[T_A]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$T_A(-4,1,0) = 1.(-4,1,0)$

$T_A(0,0,1) = 1.(0,0,1)$

$T_A(1,-1,0) = 4.(1,-1,0)$

Se $C := ((-4,1,0), (1,-1,0), (0,0,1))$, então $[T_A]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

PROPOSIÇÃO.

Sejam V, W e U espaços vetoriais de dimensão finita, e sejam B, C e D bases ordenadas de V, W e U, respectivamente. Nessas condições, se $T \in L(V,W)$, e se $S \in L(W,U)$, então $S \circ T \in L(V,U)$, e

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D} \cdot [T]_{B,C}.$$

PROPOSIÇÃO.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, e sejam B e C bases ordenadas de V. Nessas condições, se $T \in L(V)$, então

$$[T]_C = [(I \circ T) \circ I]_C = [I \circ T]_{B,C} \cdot [I]_{C,B} = [I]_{B,C} \cdot [T]_B \cdot [I]_{C,B}.$$

Obs.: $[I]_{C,B}^{-1} = [I]_{B,C}$ e $[I]_{B,C}^{-1} = [I]_{C,B}$.

$$\underset{C}{V} \xrightarrow{I} \underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{B}{V} \xrightarrow{I} \underset{C}{V}$$

SEGUNDA PARTE DA RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO 1 DA PROVA DO DIA 18 DE JANEIRO

Seja

$$C := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$C - I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_C(1) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (C - I_3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, \text{ e } 2x + 5y = 0 \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0 \}$$

$$= \{ (0,0,z) : z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ z(0,0,1) : z \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(0,0,1)].$$

Logo,

$$m_g^C(1) = \dim(V_C(1)) = 1 < 2 = m_a^C(1),$$

e, portanto, C não é diagonalizável.

2)

b) Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(1,1,1) = 2.(1,1,1)$, $T(1,2,1) = 2.(1,2,1)$, e $T(1,0,0) = (0,0,0)$. Como $(1,0,0) \in Ker(T)$, $Ker(T) \neq \{(0,0,0)\}$. Vamos mostrar, a seguir, que $V(2) = [S]$.

DEMONSTRAÇÃO DE QUE S É UMA BASE DE V(2).

PRIMEIRO MÉTODO.

Como $S \subseteq V(2)$, e como S é LI, $\dim(V(2)) \geq 2$. Por sua vez, como $V(2)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, $\dim(V(2)) \leq 3$. Se $\dim(V(2)) = 3$, $V(2) = \mathbb{R}^3$, e, portanto, nesse caso,

$$(0,0,0) = T(1,0,0) = 2.(1,0,0) = (2,0,0),$$

o que seria um absurdo. Logo, $\dim(V(2)) = 2$, e, consequentemente, S é uma base de V(2).

SEGUNDO MÉTODO.

Seja $B := \{(1,1,1), (1,2,1), (1,0,0)\}$. Como

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

é fácil ver que $p_T(t) = t(t-2)^2$. Logo, $\dim(V(2)) = mg(2) \leq ma(2) = 2$. Por sua vez, como S é um subconjunto LI de $V(2)$, $\dim(V(2)) \geq 2$. Portanto, $\dim(V(2)) = 2$ — a partir do que concluímos que S é uma base de $V(2)$.

4)

a) Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V$. Note que

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V \Rightarrow T(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = T(0_V) = 0_V$$
$$\Rightarrow a_1 T(v_1) + \ldots + a_n T(v_n) = 0_V$$
$$\Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0.$$
$$\downarrow$$
$$\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\} \text{ é LI}$$

Logo, resulta da arbitrariedade de $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V$ que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é LI.

b)

PRIMEIRA PARTE

- HIPÓTESE: T é injetora.
- TESE: T é sobrejetora.

DEMONSTRAÇÃO.

1) Se T é injetora, então $Ker(T) = \{0_V\}$.

2) Se $Ker(T) = \{0_V\}$, então $\dim(Ker(T)) = 0$.

3) Se $\dim(Ker(T)) = 0$, então $\dim(Im(T)) = \dim(V)$. pois $\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$

4) Se $\dim(Im(T)) = \dim(V)$, então, como $Im(T)$ é um subespaço de V, $Im(T) = V$.

5) Se $Im(T) = V$, então T é sobrejetora.

SEGUNDA PARTE

- HIPÓTESE: T é sobrejetora.
- TESE: T é injetora.

DEMONSTRAÇÃO.

1) Se T é sobrejetora, então $Im(T) = V$. pois $\dim(Ker(T)) = \dim(V) - \dim(Im(T))$
2) Se $Im(T) = V$, então $\dim(Im(T)) = \dim(V)$.
3) Se $\dim(Im(T)) = \dim(V)$, então $\dim(Ker(T)) = 0$.
4) Se $\dim(Ker(T)) = 0$, então $Ker(T) = \{0_V\}$.
5) Se $Ker(T) = \{0_V\}$, então T é injetora.