MAP2320 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais II
Prova REC - Parte "Numérica"

2º Semestre de 2023

Observação: Apesar de aparentemente esta prova parecer ter 5 questões, na verdade ela deveria ter apenas QUESTÃO A (= Questão 1 + Questão 2) , QUESTÃO B (= Questão 3) e QUESTÃO C (= Questão 4 + Questão 5), a divisão apresentada deve-se apenas a motivos técnicos relativos às ferramentas disponíveis para elaboração no Moodle.

Preâmbulo para as questões 1 e 2

Considere o problema de Poisson no quadrado $[0,1] \times [0,1]$

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y), (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1),$$

$$\begin{aligned} \text{com condições de contorno } u(x,0) = \alpha_0(x), u(x,1) = \alpha_1(x), \qquad & \text{se } x \in [0,1] \\ u(0,y) = \beta_0(y), u(1,y) = \beta_1(y), \qquad & \text{se } y \in [0,1] \end{aligned}$$

Para $m \geq 2$ dado, vamos considerar $h = \frac{1}{m+1}$ e a malha definida no quadrado pelos pontos (x_i, y_j) dados por $x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, m+1$, e $y_j = jh, j = 0, 1, \ldots, m+1$.

Por causa dos dados de contorno, o valor da solução $u(x,y)$ é conhecido nos pontos da malha em que $i = 0$, em que $i = m+1$, em que $j = 0$, e em que $j = m+1$.

É desconhecido nos outros pontos, ou seja, desconhecemos o valor de

$$\widehat{U} = (u(x_1,y_1), \ldots, u(x_m,y_1), (u(x_1,y_2), \ldots, u(x_m,y_2), \ldots, \ldots, u(x_1,y_m), \ldots, u(x_m,y_m)) \in R^{m^2}.$$

Observe que essa lista de valores desconhecidos foi colocada numa ordem especial, que deve ser mantida no que segue.

Queremos obter uma aproximação

$$U = (U_1^1, \ldots, U_m^1, U_1^2, \ldots, U_m^2, \ldots, \ldots, U_1^m, \ldots, U_m^m) \in R^{m^2}$$

para $\widehat{U}$ usando o Método de Discretização do Laplaciano com 5 pontos e a ordenação da malha determinada acima. Com isso obtemos um sistema da forma matricial

$$\frac{1}{h^2} AU = b + \frac{1}{h^2} c \tag{1}$$

onde A é matriz $m^2 \times m^2$, b e c são matrizes $m^2 \times 1$, com A, b e c independentes de h.

Questão 1 **1.5 pontos** Leia o **Preâmbulo para as questões 1 e 2** e, para os itens abaixo, use
$\alpha_0(x_i) = \alpha_1(x_i) = Vi$ (por exemplo, $\alpha_0(x_2) = \alpha_1(x_2) = V2$),
$\beta_0(y_j) = \beta_1(y_j) = Wj$ (por exemplo, $\beta_0(y_2) = \beta_1(y_2) = W2$),
e $f(x_i y_j) = Fij$ (por exemplo, $f(x_2, y_3) = F23$).

(a) Considere $m = 3$, obtenha a matriz A e apresente-a abaixo, começando pela primeira linha e terminando com a última linha.

linha 1: ... ...

linha 2: ... ...

linha 3: ... ...

linha 4: ... ...

linha 5: ... ...

linha 6: ... ...

linha 7: ... ...

linha 8: ... ...

linha 9: ... ...

(b) Considere $m=3$, obtenha a matriz b e apresente seus elementos abaixo.

$b_1 = \dots\ b_2 = \dots\ b_3 = \dots\ b_4 = \dots\ b_5 = \dots\ b_6 = \dots\ b_7 = \dots\ b_8 = \dots\ b_9 = \dots$

(c) Considere $m=3$, obtenha a matriz c e apresente seus elementos abaixo.

$c_1 = \dots\ c_2 = \dots\ c_3 = \dots\ c_4 = \dots\ c_5 = \dots\ c_6 = \dots\ c_7 = \dots\ c_8 = \dots\ c_9 = \dots$

Questão 2 **1.0 ponto** Leia o **Preâmbulo para as questões 1 e 2** , considere $m=3$ e os dados especiais abaixo:

$\alpha_0(x) = \alpha_1(x) = 0, \beta_0(y) = \beta_1(y) = 0,$

e $f(x,y) = 10\sin(\pi x)\sin(\pi y)$

Use o Método de Gauss-Jacobi para aproximar a solução do sistema (1) (e portanto, para aproximar a solução do problema de contorno apresentado no referido **Preâmbulo**), e apresente uma tabela com os resultados.

Anexe também cópia do código usado para a obtenção da tabela, se for o caso, e o teste feito com os dados.

Questão 3 **1.0 ponto** Mostre que para o Método de Crank-Nicolson para a equação do Calor

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

em regiões retangulares, com passo h na variável x e passo k na variável t, o erro de truncamento local $\tau(x,t)$ é de ordem 2 tanto na posição como no tempo, isto é,

$$\tau(x,t) = O(||(h,k)||^2) = O(h^2 + k^2).$$

Preâmbulo para a Questão 4

Vimos em sala que o Método da Discretização nas Linhas aplicado a EDP

$$u_t = c^2 u_{xx} \tag{2}$$

com dado inicial $u(x,0) = \phi(x), x \in [0,L]$,
e dados de contorno $u(0,t) = \alpha(t), u(L,t) = \beta(t), t \in [0,T]$,
consiste em tomar $h = \frac{L}{m+1}$ e $x_1, x_2, \dots, x_m$ dados por

$$x_0 = 0, x_i = x_{i-1} + h, i = 1, 2, \dots, m+1,$$

e então observar algumas coisas e fazer algumas aproximações:

(i) A solução exata deve satisfazer

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \text{ para todo } (x,t) \text{ no domínio considerado.}$$

(ii) Consequentemente

$$u_t(x_i,t) = c^2 u_{xx}(x_i,t), \text{ para } i = 1, 2, \dots, m. \tag{3}$$

(iii) Aproximamos, por exemplo, $u_{xx}(x_i,t)$ por

$$\frac{u(x_{i-1},t) - 2u(x_i,t) + u(x_{i+1},t)}{h^2}$$

e motivados por isso e por (3) buscamos aproximação $U_i(t)$ para $u(x_i,t)$ usando

$$U_i'(t) = c^2 \frac{(U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t))}{h^2}, i = 1, 2, \dots, m,$$

que é um sistema de EDO's.

(Num instante t_j teremos uma aproximação $U_i(t_j)$ para $u(x_i,t_j)$).

(iv) Escrevemos o sistema linear de EDO's acima na forma matricial pondo $U(t) = (U_1(t), U_2(t), \ldots, U_m(t))$ e ele toma a forma

$$U'(t) = AU(t) + b(t) \tag{4}$$

onde $A \in \mathcal{M}_{m\times m}$ e $b(t) \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ (que dependem do valor de h).

(v) Podemos aproximar

$$U(t_j) = (U_1(t_j), U_2(t_j), \ldots, U_m(t_j)) \text{ por } U^j = (U_1^j, U_2^j, \ldots, U_m^j)$$

usando algum método para resolução numérica de EDO's (Método de Euler, Método do Ponto Médio, Método dos Trapézios, Métodos de Runge-Kutta, etc)

(vi) Por exemplo: para aproximar a solução de um sistema de EDO's

$$U'(t) = G(t, U)$$

com passo k no tempo, nos instantes $t_1, \ldots, t_N$, podemos usar:

(vi-1) Método de Euler: $U^{j+1} = U^j + kG(t_j, U^j)$

(vi-2) Método dos Trapézios: $U^{j+1} = U^j + k\frac{G(t_{j+1},U^{j+1})-G(t_j,U^j)}{2}$

(vi-3) etc.

Eles diferem na ordem de convergência e de estabilidade (para EDO's), por exemplo.

Questão 4 **2.5 pontos** Leia com atenção o preâmbulo para a questão 4, e considere o problema envolvendo a equação (2).

Fixe $c = 1, L = 3, T = 1, h = 0.3, k = 0.05$, e os dados iniciais e de contorno
$u(x, 0) = 1 + \sin(\frac{\pi}{3}x), x \in [0, 3]$,
$u(0, t) = u(L, t) = 1, t \in [0, T] = [0, 1]$.

Nota: Nas respostas, se for necessário usar casas decimais, use PONTO (e não vírgula) para separar a parte decimal, com 3 casas decimais depois do PONTO.

(a) Usando os passos descritos no preâmbulo para esta questão, e em (vi) usando (vi-1) Método de Euler, determine quem é a matriz A que aparece em (4), e apresente-a abaixo.

linha 1: ... ...

linha 2: ... ...

linha 3: ... ...

linha 4: ... ...

linha 5: ... ...

linha 6: ... ...

linha 7: ... ...

linha 8: ... ...

linha 9: ... ...

(b) Usando os passos descritos no preâmbulo para esta questão, e em (vi) usando (vi-1) Método de Euler, determine quem é a matriz $b(t)$ que aparece em (4), e apresente-a abaixo:

$b_1 = \ldots$ $b_2 = \ldots$ $b_3 = \ldots$ $b_4 = \ldots$ $b_5 = \ldots$ $b_6 = \ldots$ $b_7 = \ldots$ $b_8 = \ldots$ $b_9 = \ldots$

(c) Resolva o sistema (4) com os dados iniciais e de contorno acima, e apresente abaixo a tabela das aproximações no instante $t = 0.4$:

$U_1^\ell = \ldots$ $U_2^\ell = \ldots$ $U_3^\ell = \ldots$ $U_4^\ell = \ldots$ $U_5^\ell = \ldots$ $U_6^\ell = \ldots$ $U_7^\ell = \ldots$ $U_8^\ell = \ldots$ $U_9^\ell = \ldots$