

Prova de SEGUNDA AVALIAÇÃO de MAP 2320
BMA - BMAC 2º Semestre de 2023, aos 01 de fevereiro de 2024
PARTE “TEÓRICA”

Instruções

1. Esta prova deve ser resolvida até 23:59 de 09.02.2024.
2. A solução desta parte deve ser entregue em um único arquivo no formato “pdf”, depositado no local destinado a isso, na página desta disciplina no e-disciplinas.
3. O arquivo mencionado no item anterior deve ser um arquivo texto, não compactado, nem protegido por senha, que deve ser aberto por programas padrão de leitura de arquivos “pdf” (por exemplo: Adobe Acrobat Reader).
4. Esta parte da prova vale até 6,0 (seis) pontos no total da prova.
5. A parte “numérica” da prova valerá também até seis pontos no total da prova, a nota da prova será o mínimo entre 10,0 e a soma das notas obtidas nas partes teórica e numérica.
6. Você pode usar qualquer resultado enunciado em sala de aula, ou nas atividades extra de sábado, mesmo que o mesmo não tenha sido demonstrado durante a disciplina (por exemplo, a forma forte do princípio do máximo para equações parabólicas, resultados sobre convergência de séries de Fourier e fórmula integral de Poisson no plano).
7. Justifique suas afirmações e conclusões de forma precisa e clara, verifique as hipóteses dos teoremas que usar para essas justificativas, mas sem neuras (por exemplo, não é preciso provar que polinômios são funções contínuas).
8. A prova é do tipo *com consulta* e, durante a sua resolução, você pode conversar com colegas sobre as questões, não é exigido nenhum *voto de clausura* no período, mas a redação das soluções das questões deve ser uma atividade individual, não deve haver comunicação entre vocês para essa atividade. A quebra desta norma de conduta pode ter consequências nefastas...
9. Se você tiver dúvidas sobre enunciados das questões e/ou detalhes de sua resolução, envie um e-mail para garc341@gmail.com com o assunto (ou “subject”) PREC - MAP2320 Dúvida.

QUESTÕES

Questão 1 Considere a equação de primeira ordem no plano

$$yu_x + 4xu_y = 0.$$

- (a) Determine as curvas características dessa equação. (Valor: 0,5 ponto)
- (b) Mostre que o problema de encontrar $u : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$ que resolve essa equação e $u(x, 0) = e^{-4x^2}$ tem mais do que uma solução. (Valor: 0,5 ponto)
- (c) Determinar o maior subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ em que todas as soluções do problema colocado em (b) coincidem. (Valor: 0,5 ponto)

Questão 2 (Valor: 1,5 pontos) Use o método de separação de variáveis e resolva o problema

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0, \pi] \times [0, +\infty), \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2((0, \pi) \times (0, +\infty), \mathbb{R}) \\ u_t = u_{xx}, \text{ em } (0, \pi) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \cos x \sin x, \forall x \in [0, \pi] \\ u_x(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Questão 3 (Valor: 1,5 pontos) A função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $u_{tt} = u_{xx}$ em todo o plano e $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, com $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função ímpar.

Suponha ainda que tanto ϕ como ψ anulam-se fora do intervalo $[-1, 1]$.

- (a) Calcular $A \subset \mathbb{R}$ tal que, se $u(17, t) \neq 0$, então $t \in A$.
- (b) Calcular $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que, se $u(x, t) \neq 0$, então $(x, t) \in \Omega$.

Questão 4 Sejam $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ e $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

- (a) Prove que se $u : D \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$ é harmônica então $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $v(x, y) = u(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ é harmônica. (Valor: 0,5 ponto)
- (b) Prove que existe uma, e só uma, função contínua e limitada $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, harmônica em D tal que, se $x^2 + y^2 = 1$, então $u(x, y) = \sin(x + y)$. (Valor: 1,0 ponto)