Teorema de Representação de Riesz para funcionais limitados C[a,b]

Victor Ferreira de Araújo Santos

31 Janeiro 2024

Workshop de Verão - Icmc - 2024

UFAL

Universidade Federal de Alagoas

Apresentador: Victor Ferreira de Araújo Santos.
Orientador: Márcio Cavalcante de Melo.

CAPES

Teorema de Representação de Riesz para funcionais limitadas C[a,b].

Definição 1

A função $w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser de **variação limitada** em $[a, b]$ se a sua *variação total* $Var(w)$ em $[a, b]$ é finita, onde

$$Var(w) = \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})|, \tag{1}$$

o supremo é tomado sobre todas as partições

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \tag{2}$$

do intervalo $[a, b]$; aqui $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário e também é a escolha dos valores $t_1, ..., t_{n-1}$. em $[a, b]$ e no entanto, deve satisfazer a condição (2).

Definição 2
Uma norma no espaço vetorial de todas as funções de variação limitada em $[a, b]$ é definida por

$$\|w\| = |w(a)| + Var(w). \tag{3}$$

O espaço assim definido é denotado por $BV[a, b]$.
Seja $x \in C[a, b]$ e $w \in BV[a, b]$. Seja P_n uma partição de $[a, b]$ dada pela relação (2) e seja

$$\eta(P_n) = max(t_1 - t_0, ..., t_n - t_{n-1})$$

para cada partição P_n de $[a, b]$ nos consideramos a soma

$$s(P_n) = \sum_{j=1}^{n} x(t_j)[w(t_j) - w(t_{j-1})]. \tag{4}$$

existe um numero ρ com a propriedade de que para cada $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\eta(P_n) < \delta \tag{5}$$

implica

$$|\rho - s(P_n)| < \epsilon. \tag{6}$$

ρ é chamada de integral de Riemann-Stieltjes de x sobre o intervalo $[a, b]$ com respeito a w e é denotada por

$$\int_a^b x(t)dw(t). \tag{7}$$

Podemos obter (7) como o limite das somas (4) para uma sequência (P_n) de partições de $[a, b]$ satisfazendo $\eta(P_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Sejam $x_1, x_2 \in C[a,b]$ e escalares α e β e $w, w_1, w_2 \in BV[a,b]$. Valem:

$$\int_a^b [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] dw(t) = \alpha \int_a^b x_1(t) dw(t) + \beta \int_a^b x_2(t) dw(t)$$

e

$$\int_a^b x(t) d(\alpha w_1 + \beta w_2)(t) = \alpha \int_a^b x(t) dw_1(t) + \beta \int_a^b x(t) dw_2(t).$$

e

$$|\int_a^b x(t) dw(t)| \leqslant \max_{t \in [a,b]} |x(t)| Var(w). \tag{8}$$

Lema 1 (Teorema de Hahn-Banach)
Seja f um funcional linear limitado de um subespaço Z de um espaço normado X. Então existe uma extensão linear e limitada de f, denotada por $\tilde{f}$, em X tal que $||\tilde{f}|| = ||f||$.

Teorema 1(Teorema de Riesz para Funcionais em $C[a, b]$)
Todo funcional linear limitado f em $C[a, b]$ pode ser representado por uma integral de Riemann-Stieltjes

$$f(x) = \int_a^b x(t)dw(t) \tag{9}$$

onde w é de variação limitada em $[a, b]$ e tem variação total

$$Var(w) = \|f\| \tag{10}$$

Demonstração: Do Teorema de Hahn-Banach para espaços normados, vemos que f tem uma extensão $\tilde{f}$ de $C[a,b]$ para o espaço normado $B[a,b]$ consistindo de todas as funções limitadas em $[a,b]$ com norma definida por

$$\|x\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Mais ainda, o funcional linear $\tilde{f}$ é limitado e tem a mesma norma que f, isto é,

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Seja x_t a função característica do intervalo $[a,t]$. Definimos w por

$$w(a) = 0 \qquad w(t) = \tilde{f}(x_t), \qquad t \in (a,b].$$

Seja $\zeta \in \mathbb{C}$, então $\zeta = |\zeta| e(\zeta)$ onde $e(\zeta) = \begin{cases} 1, \text{ se } \zeta = 0 \\ e^{i\theta}, \text{ se } \zeta \neq 0. \end{cases}$

Vemos que se $\zeta \neq 0$ então $|\zeta| = \zeta e^{-i\theta}$. Portanto, qualquer ζ, zero ou não, temos

$$|\zeta| = \zeta \overline{e(\zeta)}, \tag{11}$$

onde a barra indica conjugação complexa.
Seja $\epsilon_j = \overline{e(w(t_j) - w(t_{j-1}))}$ e seja $x_{t_j} = x_j$, dessa forma por (11) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| &= |\tilde{f}(x_1)| + \sum_{j=2}^{n} |\tilde{f}(x_j) - \tilde{f}(x_{j-1})| \\
&= \epsilon_1 \tilde{f}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} \epsilon_j [\tilde{f}(x_j) - \tilde{f}(x_{j-1})] \\
&= \tilde{f}\left(\epsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \epsilon_j [(x_j) - (x_{j-1})]\right) \\
&\leqslant \|\tilde{f}\| \left\| \epsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \epsilon_j [(x_j) - (x_{j-1})] \right\|.
\end{aligned}$$

No lado direito, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ e o outro fator $\left\|\epsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \epsilon_j [(x_j) - (x_{j-1})]\right\| = 1$, pois $|\epsilon_j| = 1$ e da definição dos x_j's vemos que para cada $t \in [a, b]$ somente um dos termos $x_1, x_2 - x_1, \ldots,$ não é zero (e sua norma é 1). Do lado esquerdo, tomamos o supremo sobre todas as partições de $[a, b]$. Então temos

$$Var(w) \leqslant \|f\|. \tag{12}$$

Portanto w é de variação limitada em $[a, b]$.
Para cada partição P_n da forma (2) definimos uma função, que denotamos simplesmente por z_n ao invés de $z(P_n)$, por:

$$z_n = x(t_0)x_1 + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[x_j - x_{j-1}]. \tag{13}$$

Então $z_n \in B[a,b]$. Pela definição de w,

$$\tilde{f}(z_n) = x(t_0)\tilde{f}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[\tilde{f}(x_j) - \tilde{f}(x_{j-1})]$$

$$= x(t_0)w(t_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})] \tag{14}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})] \tag{15}$$

onde a ultima igualdade segue de $w(t_0) = w(a) = 0$. Agora escolhemos qualquer sequência (P_n) de partições do intervalo $[a,b]$ tal que $\eta(P_n) \longrightarrow 0$; quando $n \longrightarrow \infty$, a soma no lado direito de (14) se aproxima da integral da equação (9).

Vamos mostrar que $\tilde{f}(z_n) \longrightarrow \tilde{f}(x)$. Lembrando a definição de x_t, vemos que (13) nos fornece $z_n(a) = x(a)1$ já que a soma em (13) é nula em $t = a$. Portanto $z_n(a) - x(a) = 0$. Mais ainda, por (13), se $t_{j-1} < t \leqslant t_j$, então obtemos $z_n(t) = x(t_{j-1})1$.
Segue daí que para este "t",

$$|z_n(t) - x(t)| = |x(t_{j-1}) - x(t)|.$$

Consequentemente, se $\eta(P_n) \longrightarrow 0$, então $\|z_n - x\| \longrightarrow 0$ porque x é contínua em $[a, b]$, portanto uniformemente contínua no intervalo $[a, b]$, já que $[a, b]$ é compacto. A continuidade de $\tilde{f}$ implica que $\tilde{f}(z_n) \longrightarrow \tilde{f}(x)$, e $\tilde{f}(x) = f(x)$, então provamos que $\tilde{f}(z_n) \rightarrow$f(x).

De (9) e (8) temos

$$|f(x)| \leqslant \max_{t\in[a,b]} |x(t)|Var(w) = \|x\|Var(w). \tag{16}$$

Tomamos o supremo sobre todos os $x \in C[a,b]$ de norma 1, obtemos $\|f\| \leqslant Var(w)$. Como provamos anteriormente que

$$Var(w) \leqslant \|f\|.$$

obtemos por fim

$$Var(w) = \|f\|. \tag{17}$$

Bibliografia

1. BOTELHO, G; PELLEGRINO, D; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional.** 2º edição. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
2. KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** 2º edição. Toronto: John Wiley Sons, 1978.