Os Autovalores do Operador Laplaciano Esférico

Clenilton de Souza Gomes
Marcus Marrocos

Instituto de Ciências Exatas

Universidade Federal do Amazonas

Workshop de Verão ICMC-USP

31 de Janeiro de 2024

UFAM

Sumário

Motivação

Considere a seguinte Equação Diferencial Parcial (EDP),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Revisão de Álgebra Linear

Definição 1

Problema de Autovalor: Sejam $S : V \to V$ *um operador linear, onde* $F = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$ *e* $S[v] = \lambda v$ *tal que* $\lambda \in F$. *Se o sistema admite solução para um* $v \neq 0$, *então* λ *é chamado de* **autovalor** *do operador* S *e* v *é chamado de* **autovetor** *ou* **autofunção**.

Definição 2

Autoespaço: $V_\lambda = ker\,(S - \lambda I) = \{v; S[v] = \lambda v\} \subset U$

UFAM

Definição 3

Operador Autoadjunto: Um Operador Linear $S : V \rightarrow V$*, num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se* **autoadjunto** *quando* $S = S^*$*, ou seja, quando* $\langle S[u], v\rangle = \langle u, S[v]\rangle \ \forall \ u, v \in V$*.*

Definição 4

Multiplicidade Geométrica: é a dimensão de V_λ

UFAM

Teorema 1

Se $S = S^*$ é um operador autoadjunto em um espaço vetorial U munido de produto interno, então seus autovalores são números reais. Além disso, os autovetores ou autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais dois a dois.

Demonstração.

$\lambda \|v\|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Sv, v \rangle = \langle v, Sv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \|v\|^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ ∎

UFAM

Teorema 2

Se $S > 0$ é um operador autoadjunto definido positivo, então todos seus autovalores são estritamente positivos: $\lambda > 0$. Se $S \geq 0$ é autoadjunto e semi-definido positivo, então seus autovalores são não-negativos: $\lambda \geq 0$.

Teorema 3

Teorema Espectral: *Seja V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita munido com produto interno. Se $T \in \mathscr{L}(V)$ é autoadjunto, então existe uma base ortonormal de V cujos vetores são autovetores de V.*

DEFINIÇÕES BÁSICAS

UFAM

Definição 5

Condições de Contorno: Em EDP's quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região temos um problema de valores de contorno.

Definição 6

$$\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega$$

$$\mathcal{B}u(x) = 0, x \in \partial\Omega$$

Em que B é uma das três condições. A função f é dada no problema. Quando $f = 0$, então uma solução de classe C^2 da equação de Laplace $\Delta u(x) = 0$ também é chamada de função harmônica.

UFAM

Definição 7

Condição de Contorno de Dirichlet: especifíca os valores que a solução precisa assumir quando sujeita a condição de contorno.

Definição 8

Equação de Helmholtz: $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \lambda v = 0$

Definição 9

Coordenadas Esféricas: Problemas em geometria esférica são analisados mais naturalmente em coordenadas esféricas r, φ, θ. *Nossa convenção é definir* $x = rsen\varphi\ cos\theta$, $y = rsen\varphi\ sen\theta$, $z = rcos\theta$, *onde* $-\pi < \theta \leq \pi$ *é a longitude, enquanto* $0 < \varphi \leq \pi$ *é a latitude na esfera de raio* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

O Laplaciano Esférico

Construção de Δ_s

Em coordenadas esféricas, a equação de Laplace para $u(r, \varphi, \theta)$ toma a forma:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{cos\varphi}{r^2 sen\varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 sen^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Para construir soluções separáveis para a equação acima, começamos separando a parte radial da solução, definindo: $u(r, \varphi, \theta) = v(r)w(\varphi, \theta)$

Substituindo na equação, multiplicando por $\frac{r^2}{vw}$ e colocando todos os termos que envolvem r de um lado, temos:

$$\frac{1}{v}\left(r^2\frac{d^2v}{dr^2}+2r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{1}{w}\Delta_S\left[w\right] \ ,$$

onde

$$\Delta_S\left[w\right]=\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{cos\varphi}{sen\varphi}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{1}{sen^2\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}.$$

$$\Delta_s w + \mu w = \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{cos\varphi}{sen\varphi}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{sen^2\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu w = 0$$

O operador diferencial de segunda ordem Δ_S que envolve apenas as componentes angulares do operador Laplaciano Δ é de particular importância. É conhecido como **Laplaciano Esférico** e rege o equilíbrio e a dinâmica de cascas esféricas. E esta última equação é conhecida como a equação de autovalores para o operador Laplaciano Esférico.

UFAM

Autosoluções das Equações de Evolução Linear

Novamente, considere um corpo sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que é modelado pela equação do calor(evolução):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), (x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Começamos impondo uma solução do tipo exponencial:

$$u(t,x) = e^{-\lambda t} v(x)$$

Substituindo esta solução na equação diferencial do calor e cancelando as exponenciais, segue que v satisfaz o problema de autovalor de Helmholtz:

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

sujeito as condições de contorno relevantes.
Para as condições de contorno de Dirichlet, o Laplaciano é um operador definido positivo, e portanto seus autovetores são estritamente positivos,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \text{ com } \lambda_n \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Estamos interessados, particularmente, em resolver problemas do tipo:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

cuja solução em geral para estes problemas são da forma:

$$u(t) = ce^{\lambda t}$$

onde c é uma constante arbitrária. Além disso, é sabido que: $\frac{du}{dt} = Au$ em que A é uma matriz quadrada constante.

Seja $v \in \mathbb{R}^n$ e considere $u(t) = e^{\lambda t} v$, assim:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} v\right) = \lambda e^{\lambda t} v$$

$$Au = Ae^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av$$

$$\Rightarrow u(t) \text{ resolve o sistema} \Leftrightarrow v \text{ satisfaz } Av = \lambda v$$

Cada autovalor λ e autevetor v produz uma solução exponencial para o sistema de EDO's:

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \cdots, u_n(t) = e^{\lambda_n t} v_n.$$

Apresentaremos agora uma prova alternativa para encontrar as auto-soluções para o operador Δ_s, usando ferramentas das Álgebras e Grupos de Lie e suas representações.

Resultados Preliminares

Definição 10

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}); det(A) \neq 0\}$

Definição 11

SO(n):= $\left\{X \in \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R}); X^{-1} = X^T / det(X) = 1\right\}$

Definição 12

$$\mathrm{L}^2[a,b] := \left\{ \|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$f : S^2 \longrightarrow \mathbb{C} \Leftrightarrow \int \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

Definição 13

Esféricos Harmônicos: são funções harmônicas que representam a variação espacial de um conjunto ortogonal de solução da Equação de Laplace, quando a solução é expressa em coordenadas esféricas.

UFAM

Definição 14

P_n := funções de valores complexos em S^2 que podem ser escritas como polinômios em x, y, z de grau $\leq n$

Definição 15

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um tipo de álgebra sobre um corpo. É um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ juntamente com uma operação binária $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ chamade de colchete de Lie que satisfaz três axiomas: Bilinearidade, Anticomutatividade e Identidade de Jacobi

UFAM

Definição 16

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) :=$ *o espaço de todas as transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$.*

Definição 17

$\mathfrak{so}(n,\mathbb{K}) := \left\{ X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}); X^t = -X \right\}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$

Definição 18

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}); trX = 0\}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$

Definição 19

Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que V). Uma **representação** *de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

Denominaremos V como o espaço da representação enquanto que sua dimensão é a dimensão da representação.

UFAM

Definição 20

Seja V uma representação de $\mathfrak{so}(2, \mathbb{C})$. Um vetor $v \in V$ é chamado **vetor de peso** λ *com $\lambda \in \mathbb{C}$ se v é um autovetor associado ao autovalor λ. Denotaremos por $V_{[\lambda]} \subset V$ o subespaço dos vetores de peso λ.*

UFAM

Teorema 4

Cada representação de dimensão finita de V *de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ *pode ser escrita da forma:*

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{[\lambda]}$$

Essa decomposição é chamada de decomposição de peso de V.

Teorema 5

Seja V *uma representação de dimensão finita de* $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, *então* V *admite uma decomposição de peso com inteiros, tal que* $n \in \mathbb{Z}$:

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{[n]}$$

UFAM

Teorema 6

Uma representação V *de* $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ *pode ser elevada a uma representação* $SO(3,\mathbb{R})$ *se todos os pesos são pares, e além disso* $V_{[k]} = 0$ *para todo ímpar* k.

Teorema 7

O espaço P_n *pode ser escrito como:*

$$P_n = \bigoplus V_{2k}$$

Soma direta de representações irredutíveis.

Teorema 8

Dim$P_{n[2k]} = n + 1 - k$ *e além disso temos que* $P_n \simeq V_0 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_{2n}$.

APLICAÇÕES

Teorema Principal

Teorema 9

Os autovalores do operador Laplaciano Esférico Δ_s no espaço P_n são

$$\lambda_k = -k(k+1),\ k = 0, \cdots, n$$

e a multiplicidade de λ_k é igual a dimensão $dim V_{2k} = 2k+1$. E além disso, cada autofunção de Δ_s(em $C^\infty(S^2)$) é um polinômio.

UFAM

Demonstração: Por conveniência denotaremos por Δ_s o Laplaciano esférico, então consideremos o Laplaciano em coordenadas polares

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_s u$$

Procuremos funções harmônicas homogêneas, ou seja, soluções para a equação de Laplace $\Delta u = 0$

UFAM

Suponha que $u(r,\theta,\varphi) = r^k g(\theta,\varphi)$ sejam as soluções harmônicas para $\Delta u = 0$. Temos que:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial (r^k g)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_s (r^k g)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k r^{k+1} g\right) + r^{k-2}\Delta_s g$$

$$= r^{k-2}k(k+1)g + r^{k-2}\Delta_s g$$

$$= r^{k-2}(k(k+1)g + \Delta_s g)$$

Portanto, $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \Delta_s g = -k(k+1)g$, ou seja, g é uma autofunção de Δ_s associada ao autovalor $-k(k+1)$.

UFAM

Demonstração: Considere o espaço $L^2(S^2,\mathbb{C})$ das funções L^2 de valores complexos em S^2. Uma vez que a ação de $SO(3)$ preserva a forma volume, também preserva produto interno em $L^2(S^2,\mathbb{C})$ e mostra que Δ_s é hermitiano, em particular, autoadjunto.
Seja $\mathrm{E}_n \subset \mathrm{P}_n$ o complemento ortogonal de P_{n-1}. Então E_n é $SO(3)$-invariante e além disso, $SO(3)$-módulo $\mathrm{E}_n \simeq V_{2n}$ então Δ_s atua em E_n, por λ_n. Por outro lado, como P_n é denso em L^2, temos:

$$L^2(S^2,\mathbb{C}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{E}_n$$

(soma direta de Espaços de Hilbert).

UFAM

Assim, se $\Delta_s \mathrm{f} = \lambda f$ para alguma função f $\in C^\infty(S^2) \subset L^2(S^2)$, então $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n, o que força $\langle f, E_n \rangle = 0$ para todo n, então $f = 0$ ou $\lambda = \lambda_n$, então $\langle f, E_n \rangle = 0$ para todo $k \neq n$, então $f \in \mathrm{E}_n$.

■

UFAM

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referências Bibliográficas I

- Alexander Kirillov Jr, An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras,Cambridge University Press, New York, 2008.
- Luiz A. B. San Martin, Álgebras de Lie, 2020.
- Peter J. Olver, Introduction to Partial Differential Equations, Springer International Publishig, Switzerland, 2014.

UFAM