VARIEDADES UNIDIMENSIONAIS NÃO-HAUSDORFF E FOLHEAÇÕES DO PLANO

Apresentado por: **João Marcos Xavier de Lima**

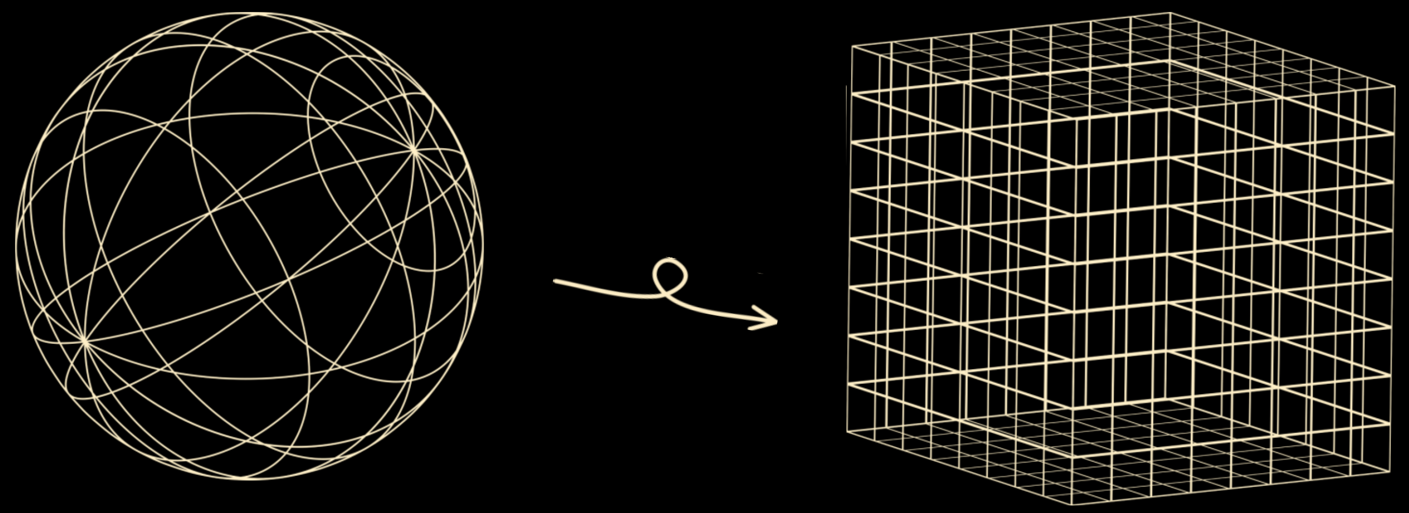
SUMÁRIO

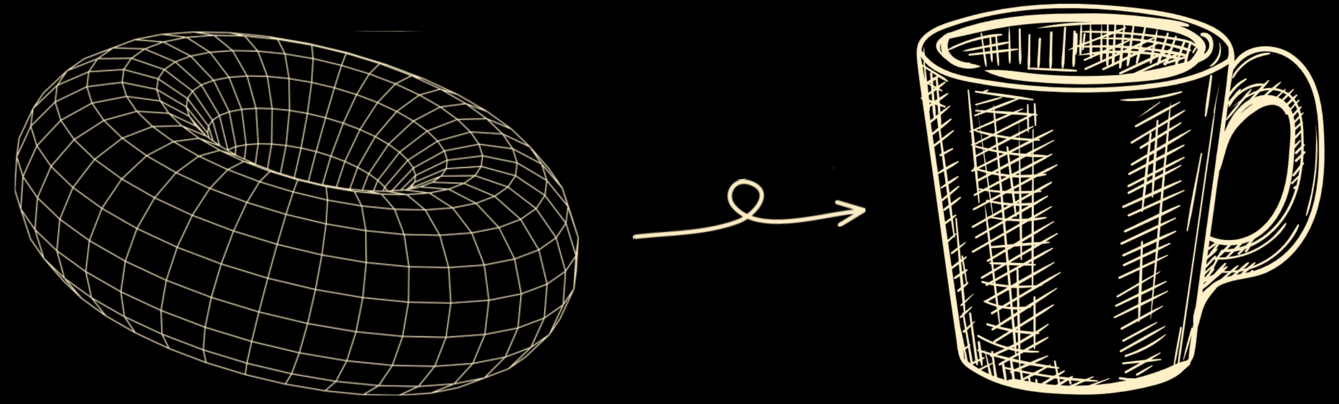
INTRODUÇÃO

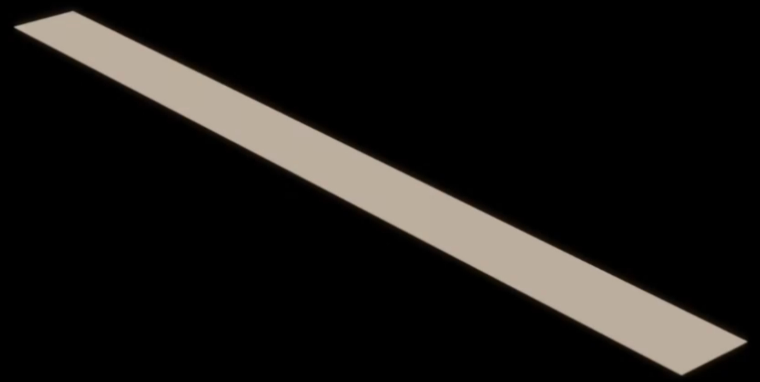
Neste trabalho, abordamos conceitos fundamentais de topologia geral, variedades e folheações, com o objetivo central de demonstrar o resultado principal apresentado no artigo de André Haefliger e George Reeb entitulado “Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan” de 1957. Esse resultado estabelece uma bela conexão entre folheações do plano e variedades unidimensionais possivelmente não-Hausdorff.

TOPOLOGIA

- Topologia x Geometria
- Abertos
- Transformações Contínuas
- Homeomorfismos
- Topologia Quociente







Fonte: [Andrew's Campfire]

VARIEDADES POSSIVELMENTE NÃO – HAUSDORFF

Localmente Euclidiano: Um espaço topológico M é dito ser localmente euclidiano de dimensão n se cada ponto de M possui uma vizinhança aberta em M homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$

Variedade Possivelmente Não-Hausdorff: Uma variedade n-dimensional M é um espaço topológico localmente euclidiano de base enumerável e não necessariamente de Hausdorff.

Qualquer ponto $p \in M$, admite uma vizinhança U de p tal que existe um homeomorfismo $\varphi : U \subset M \to W \subset \mathbb{R}^n$ chamado de carta. O mapa de transição associado a duas cartas φ e ψ de M em $\mathbb{R}^n$ com as respectivas imagens U e V é o homeomorfismo.

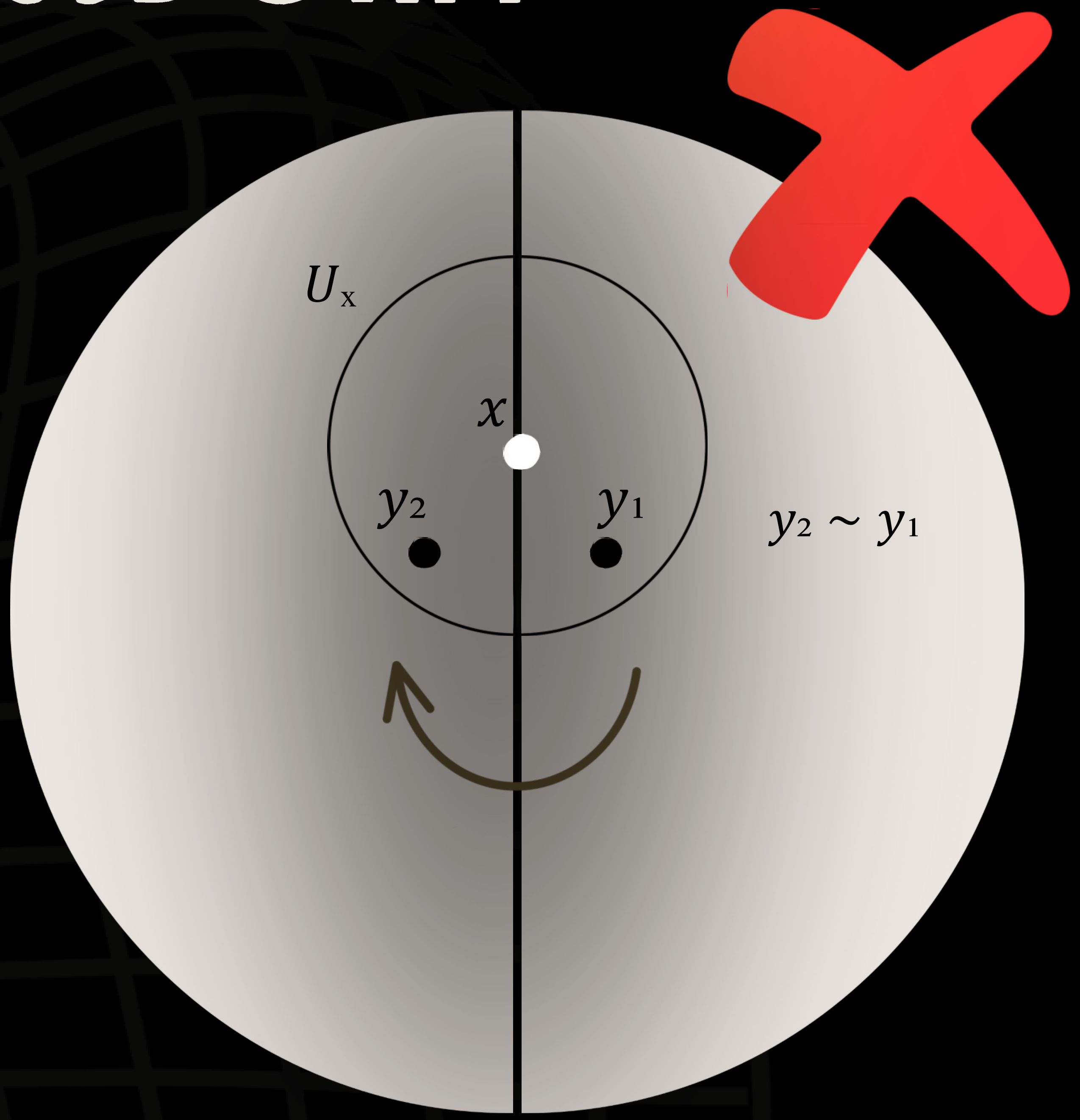
$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi\,(U \cap V) \to \psi\,(U \cap V).$$

O conjunto de cartas cujas imagens cobrem M é chamado de atlas $\mathcal{A}$ de M em $\mathbb{R}^n$.

VARIEDADES POSSIVELMENTE NÃO – HAUSDORFF

Proposição 1: Seja M uma variedade n-dimensional e seja ρ uma relação de equivalência aberta em M para o qual cada ponto $x \in M$ tenha uma vizinhança U_x tal que não haja dois pontos distintos em U_x ρ-equivalentes. Então o espaço quociente M/ρ é uma variedade n-dimensional (possivelmente não-Hausdorff).

Ponto de Ramificação: um ponto x numa variedade M é chamado de ponto de ramificação se existe um ponto $z \in M$, com $z \neq x$, que não é separável de x, isto é, qualquer vizinhança de x tem uma intersecção não vazia com toda vizinhança de z.



Contra-Exemplo Hipótese

EXEMPLO VARIEDADES UNIDIMENSIONAIS

Exemplo 1: Sejam R_1 e R_2 duas cópias da reta real $\mathbb{R}$. Considere um conjunto aberto $\Omega = (a,b)$ em $\mathbb{R}$ e a relação de equivalência ρ que identifica pontos em R_1 e R_2 que têm a mesma coordenada $t \in \Omega$. Ao aplicarmos o quociente, obtemos uma variedade unidimensional não-Hausdorff.

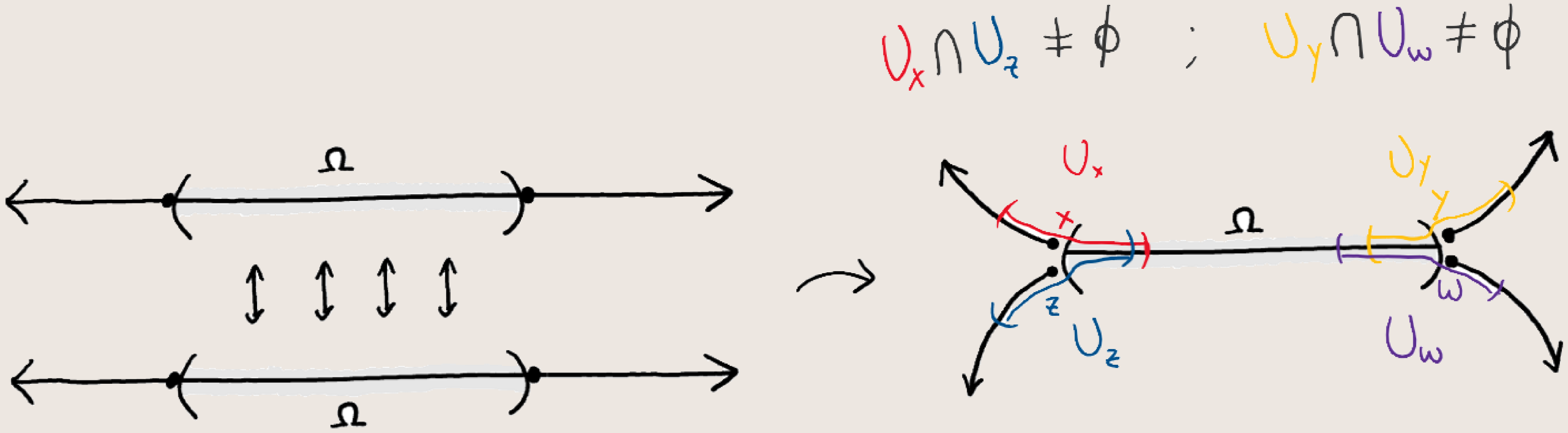
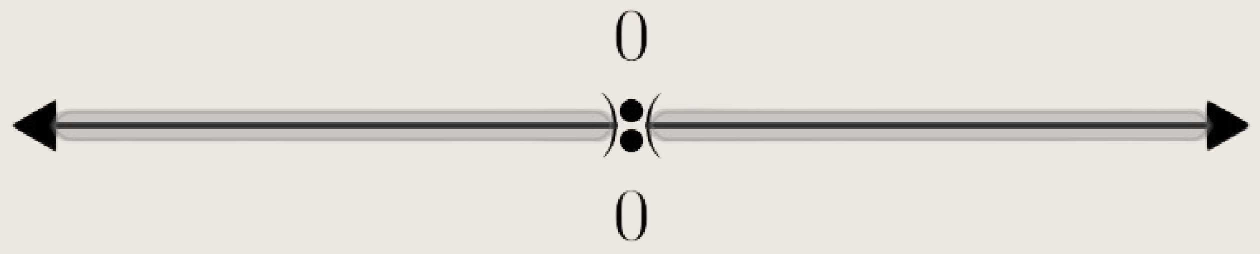
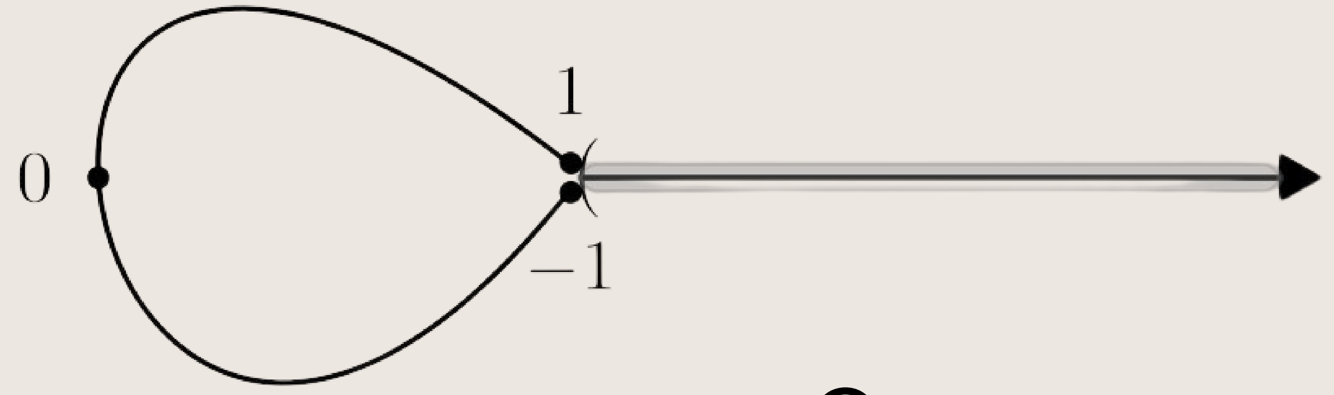


Ilustração Adaptada do Artigo Traduzido

EXEMPLO VARIEDADES UNIDIMENSIONAIS



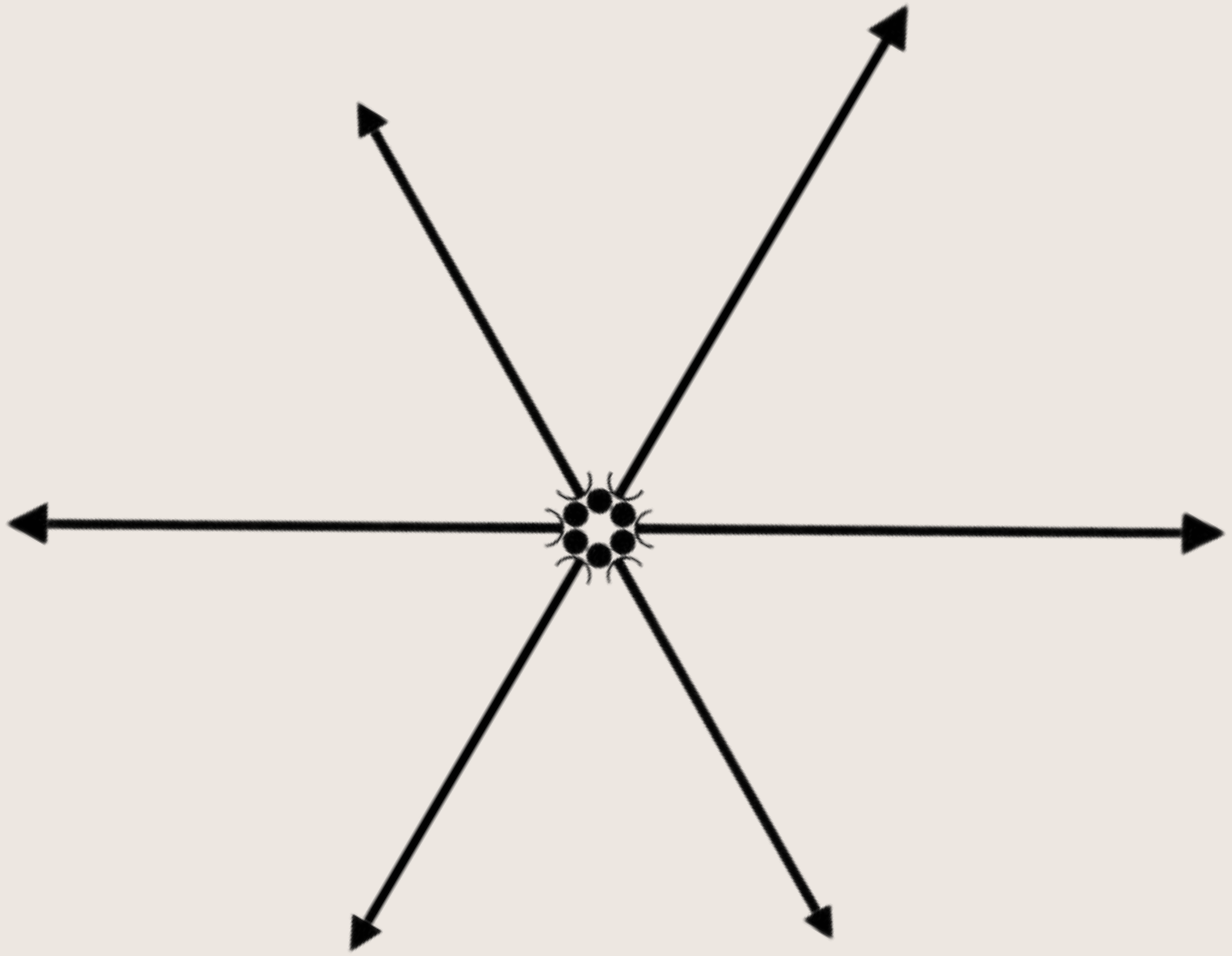
A Reta de Duas
Origens



O
Laço

A Ramificação
Simples

EXEMPLO VARIEDADES UNIDIMENSIONAIS



A Estrela de 6 pontas

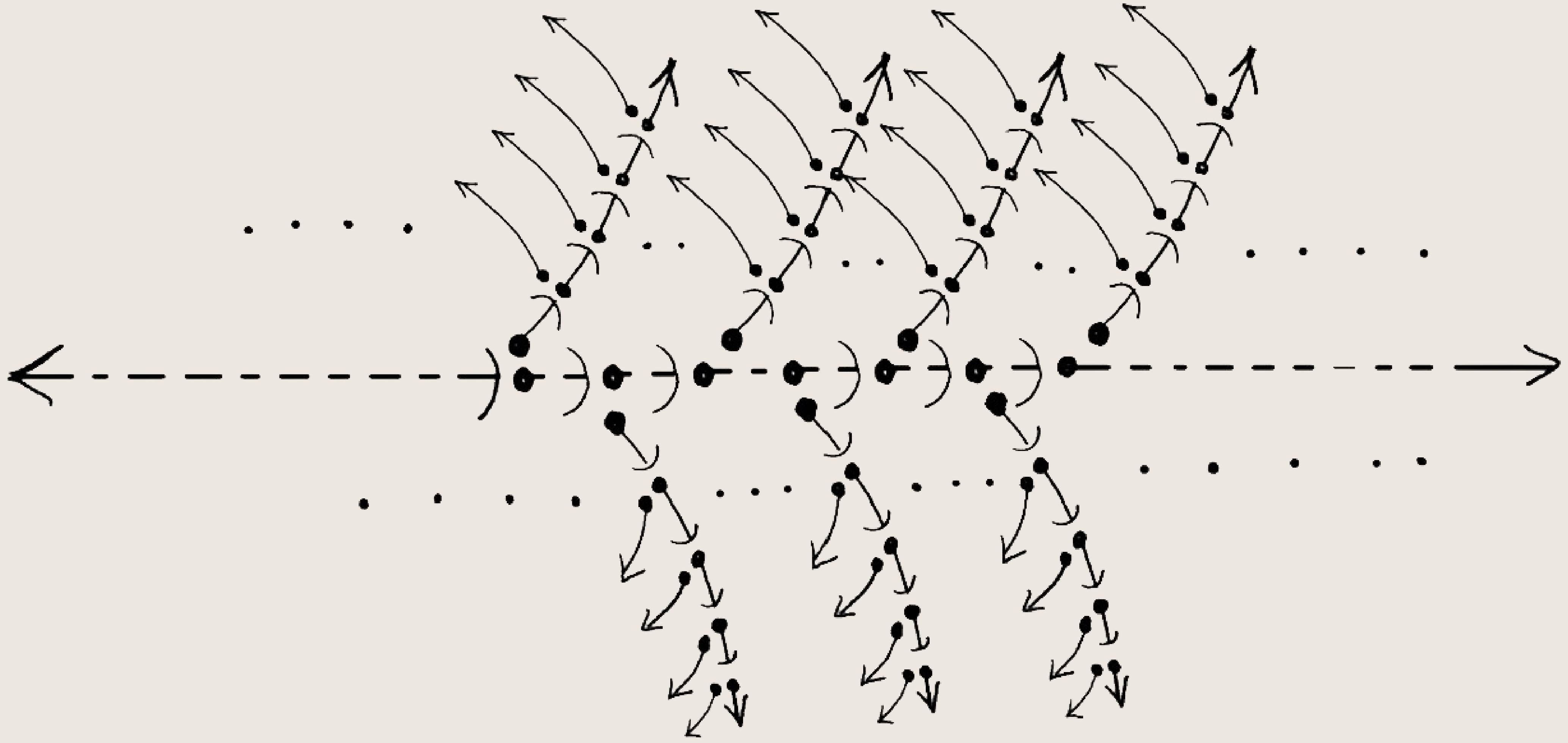


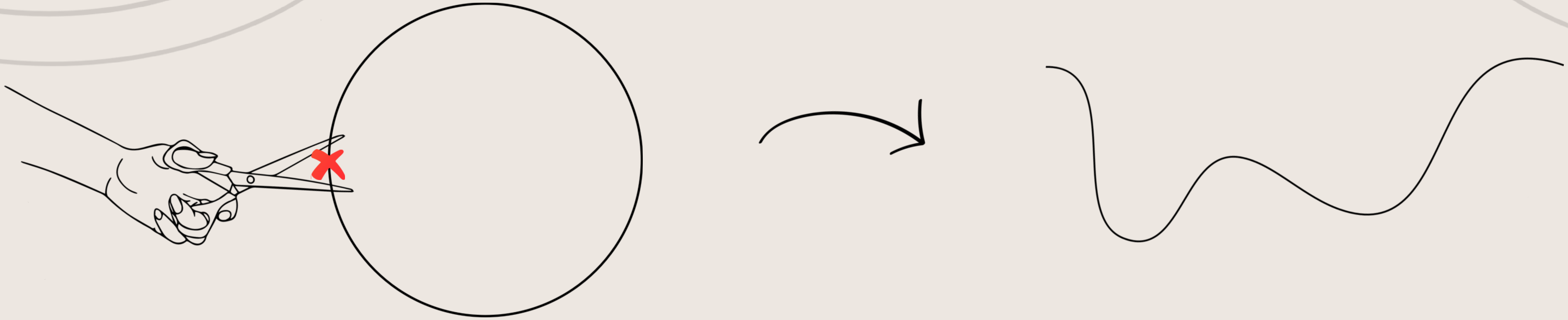
Ilustração do artigo traduzido

A Pluma Completa

VARIEDADES UNIDIMENSIONAIS SIMPLESMENTE CONEXAS

Espaço simplesmente conexo: Um espaço topológico M será chamado de simplesmente conexo se, for conexo e se, para qualquer recobrimento conexo (M', p) de M, a projeção canônica p for um homeomorfismo de M' para M.

lema 1: Se M é uma variedade simplesmente conexa de dimensão 1, então, para qualquer $x \in M$, $M/\{x\}$ tem exatamente duas componentes conexas[1].



O círculo $\mathbb{S}^1$ não é simplesmente conexo

[1] se M é uma variedade unidimensional com a propriedade de que o complemento de todo ponto $x \in M$ é desconexo, então M é simplesmente conexo

PROPOSIÇÃO HOMEOMORFISMO LOCAL

proposição 2: Suponha que M seja uma variedade unidimensional simplesmente conexa. Então, existe um homeomorfismo local $f : M \to \mathbb{R}$.

Corolário: Um homeomorfismo local $f : M \to \mathbb{R}$ não possui máximo nem mínimo.

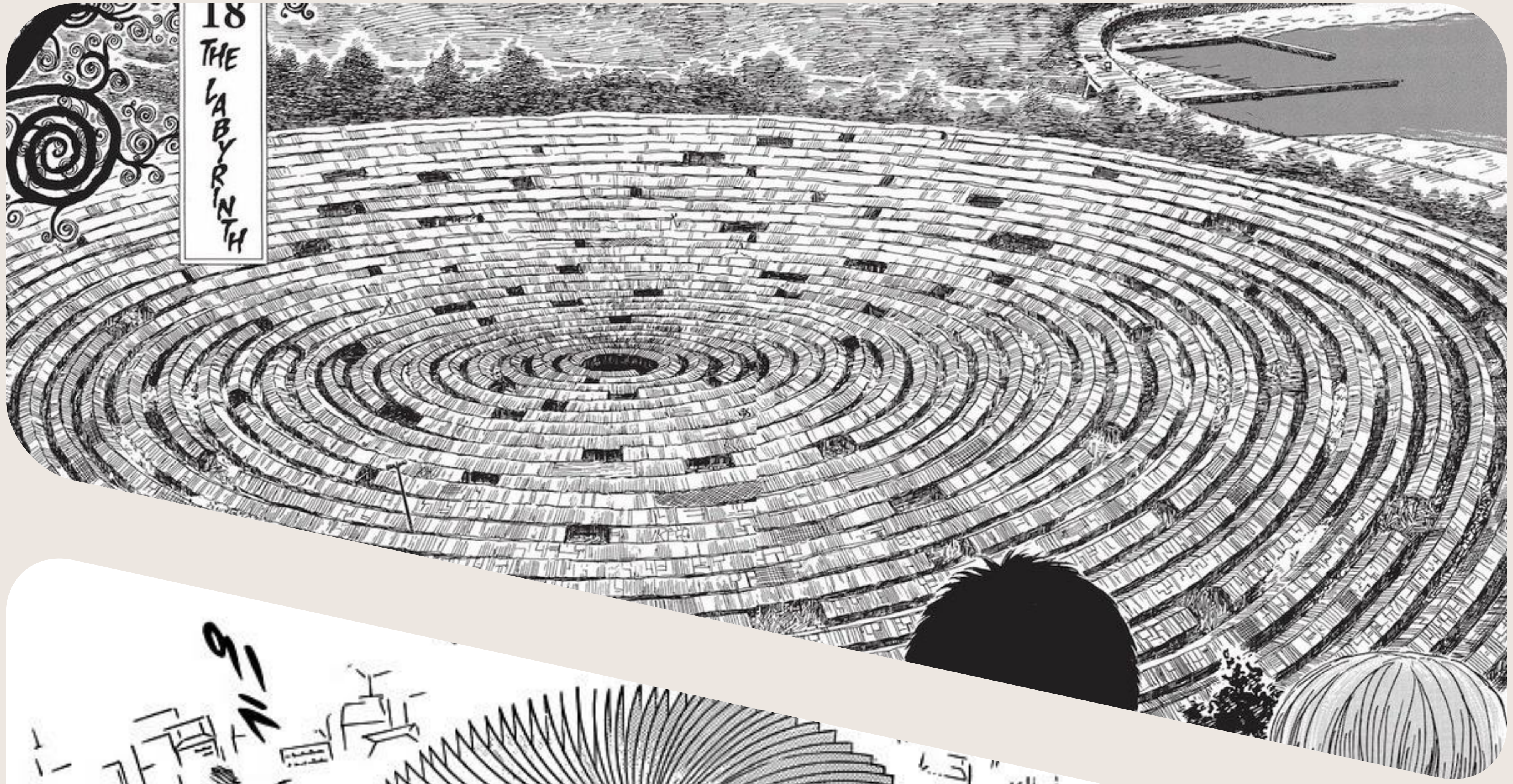
Demonstração: Fica a cargo do leitor

Sugestão: Use o Lema 1 para garantir que as intersecções dos domínios de cartas pelo domínio de carta seguinte seja conexo. Segue-se por indução o resto.

FOLHEAÇÕES

Ilustrações de Junji Ito

Ilustrações de Junji Ito



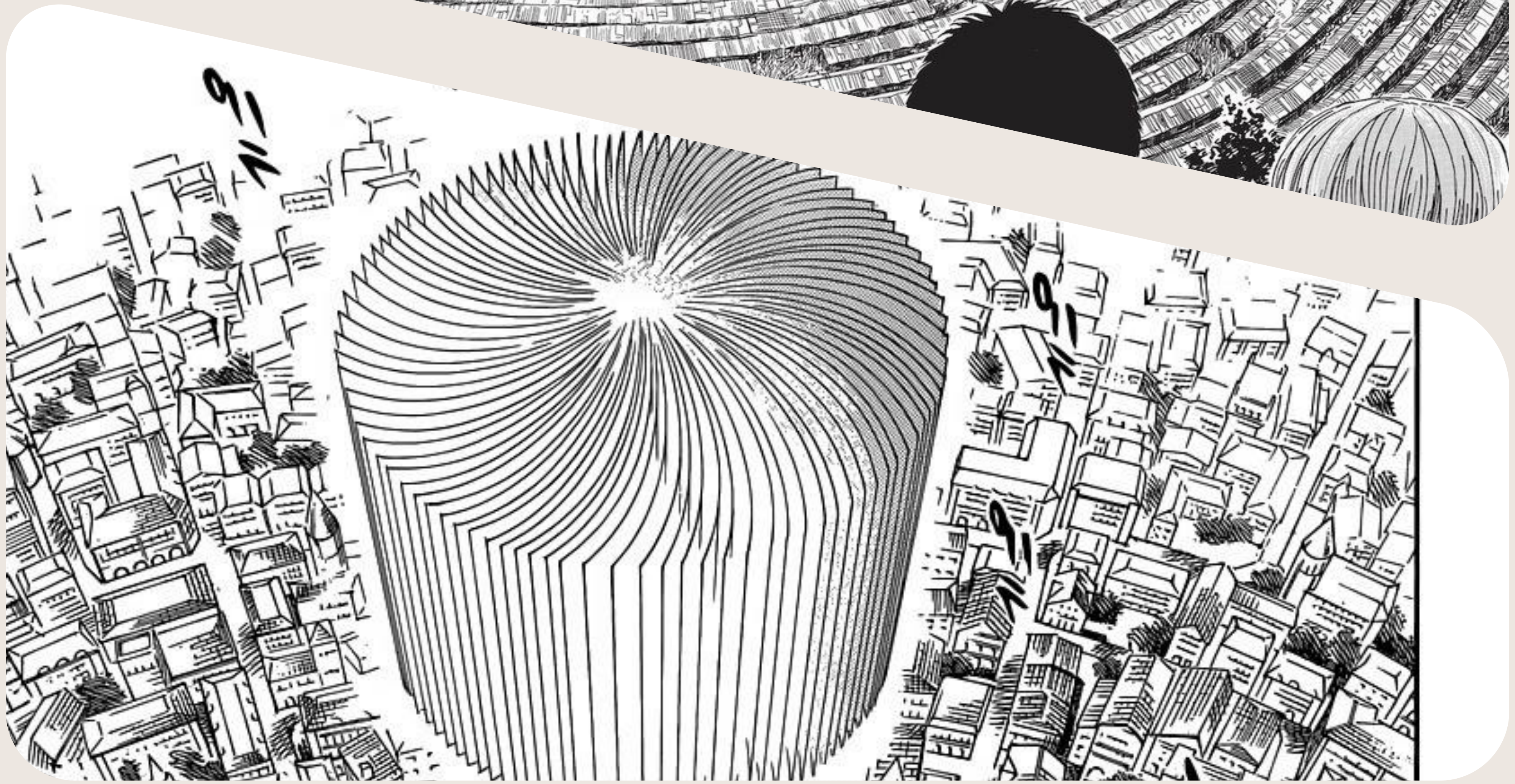


Ilustração de Yūki Tabata

FOLHEAÇÕES

Folheação: Uma Folheação $\mathcal{F}$ de uma variedade M (esta é de Hausdorff) é um atlas de $\mathbb{R}^n$ para M tal que se φ e ψ são quaisquer duas cartas, o mapa de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um homeomorfismo expresso por equações da forma:

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (h_1(x,y), h_2(y))$$

Folhas de uma Folheação: Nos dominios de cartas U_i de cada carta $\varphi_i \in \mathcal{F}$, definimos a relação de equivalência ρ_i cujas classes são as pré-imagens de φ_i restritas a y = *constante*. Defina ρ como a relação de equivalência gerada pelos ρ_i. As classes de ρ em M são chamadas de folhas da folheação $\mathcal{F}$

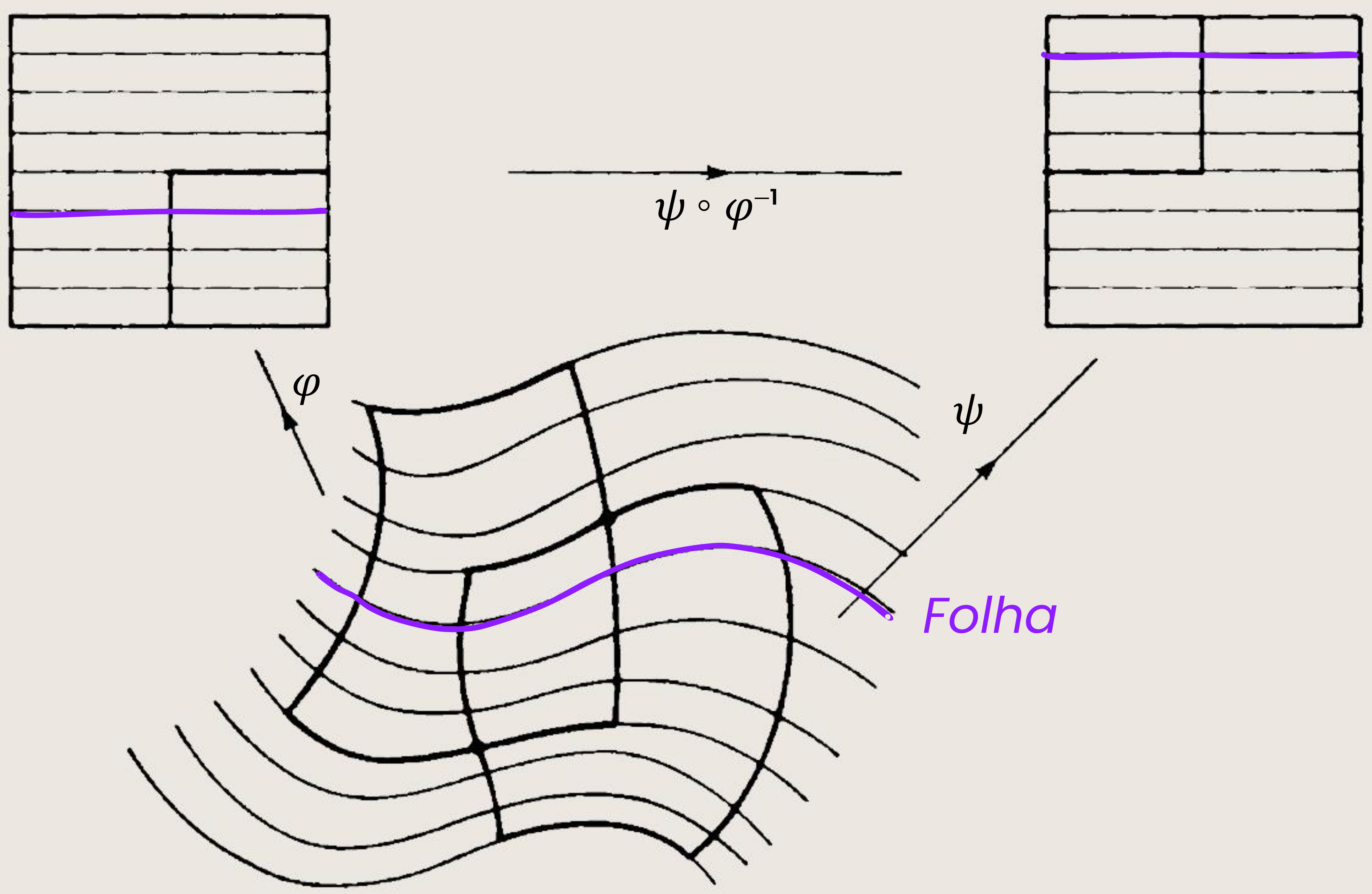


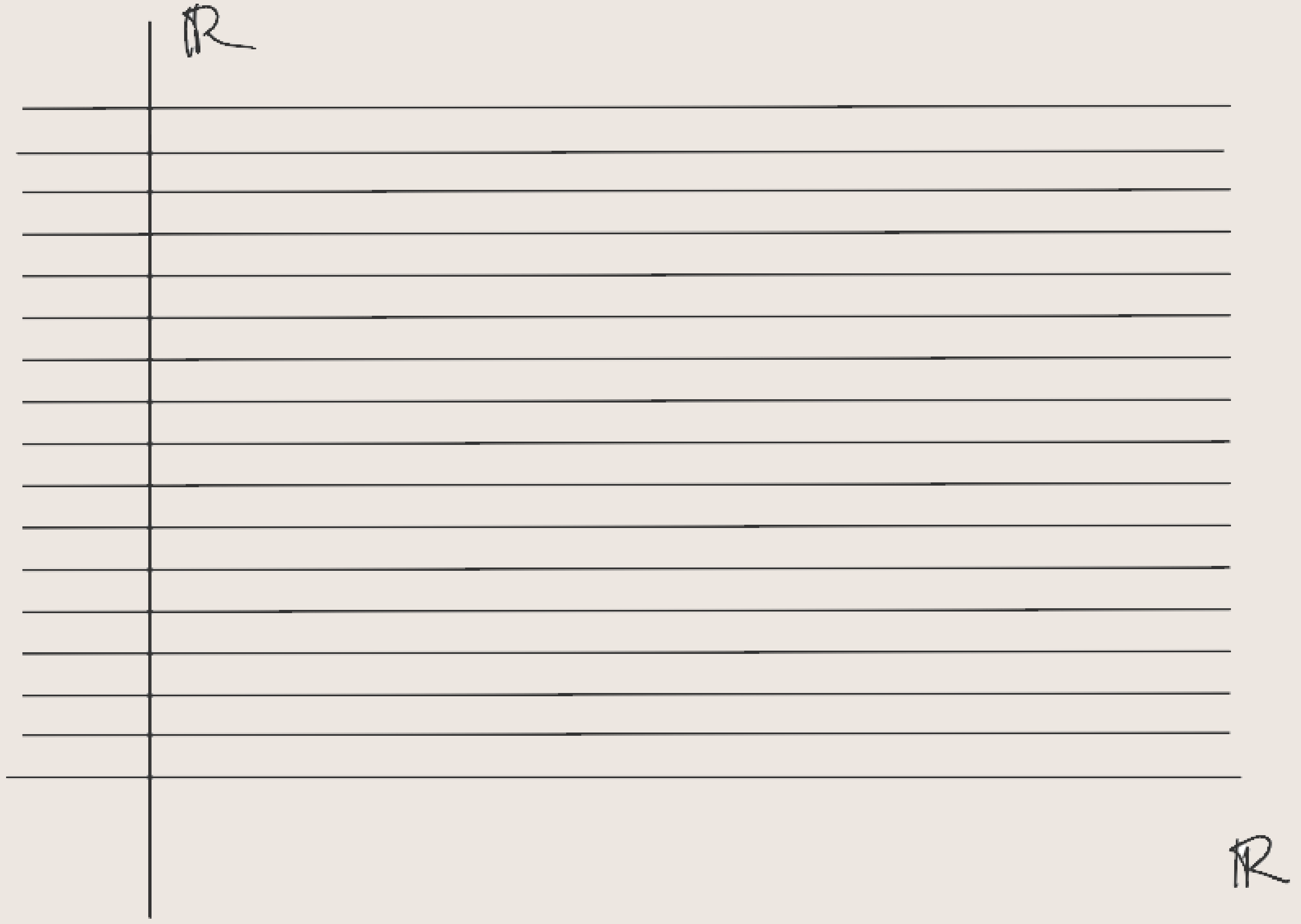
Ilustração Adaptada do Livro "Teoria Geométrica das Folheações"

Qual seria a diferença entre o Atlas folheado $\mathcal{F}$ e o Atlas que trata-se no contexto de variedades?

EXEMPLOS DE FOLHEAÇÕES

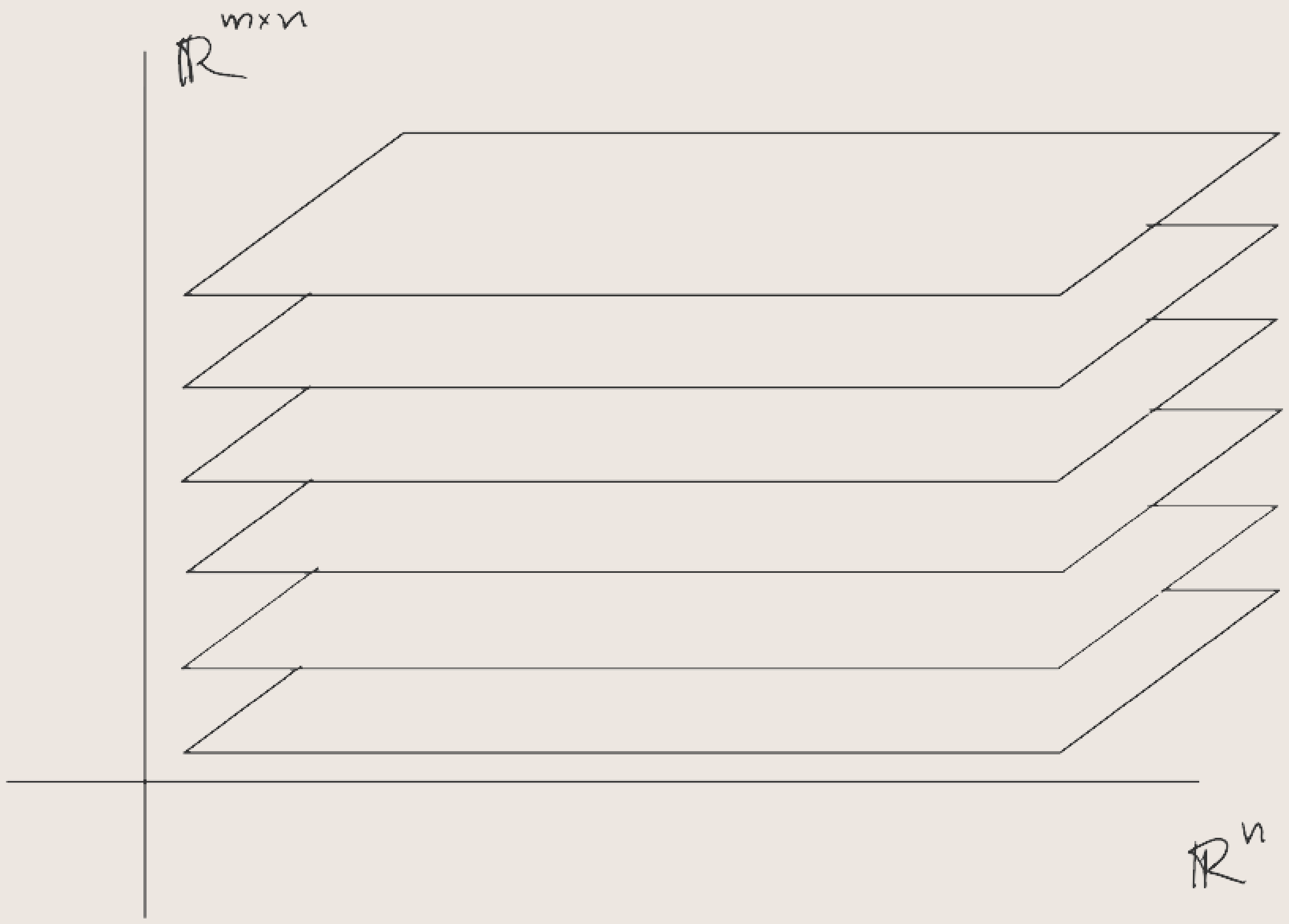
Folheação Trivial do Plano

as curvas de nível da função $f(x) = c$ são as folhas dessa folheação do $\mathbb{R}^2$



Folheação n-dimensional Trivial do $\mathbb{R}^n$

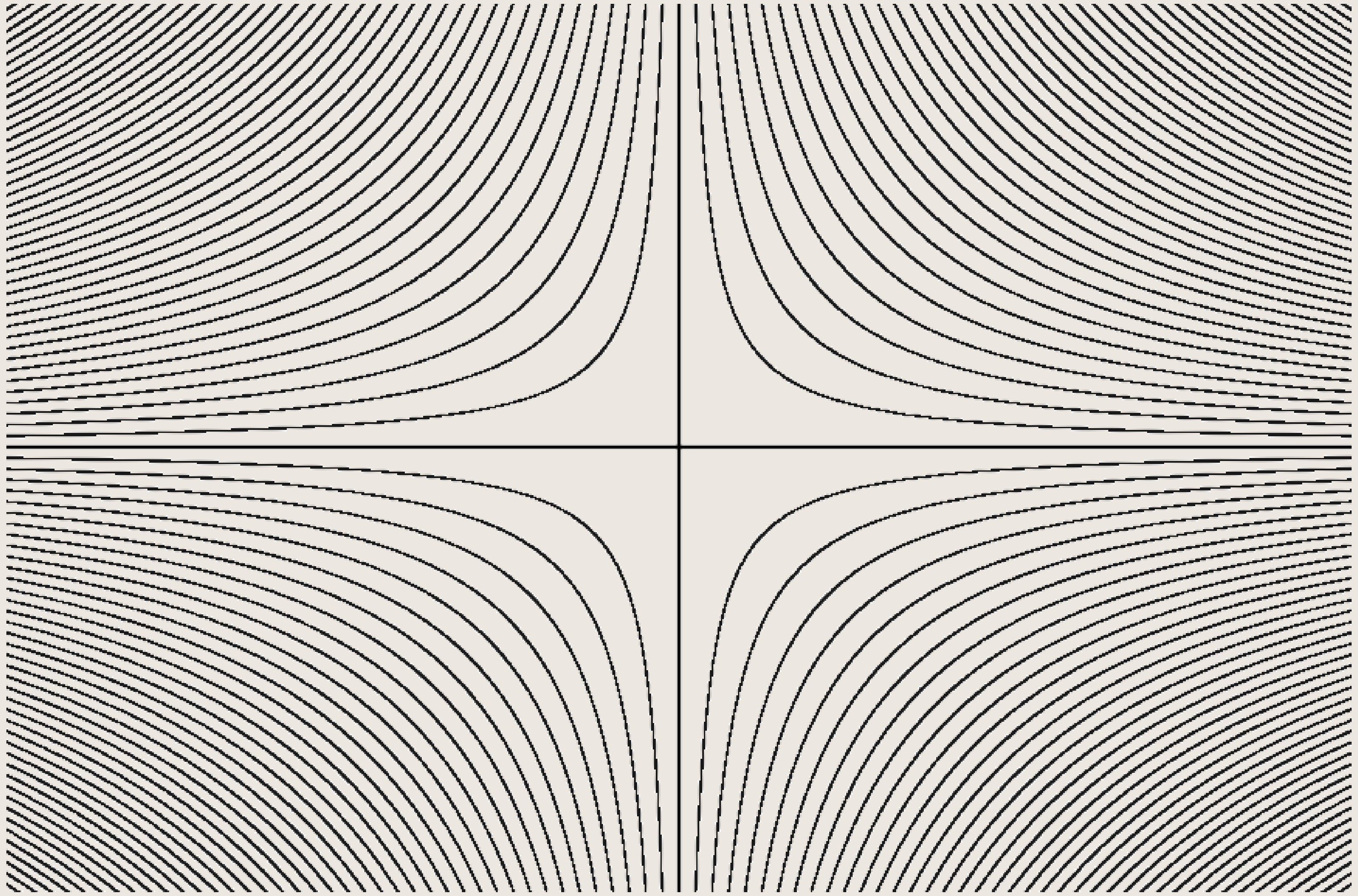
as curvas de nível da função $f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = c$ são as folhas dessa folheação do $\mathbb{R}^2$

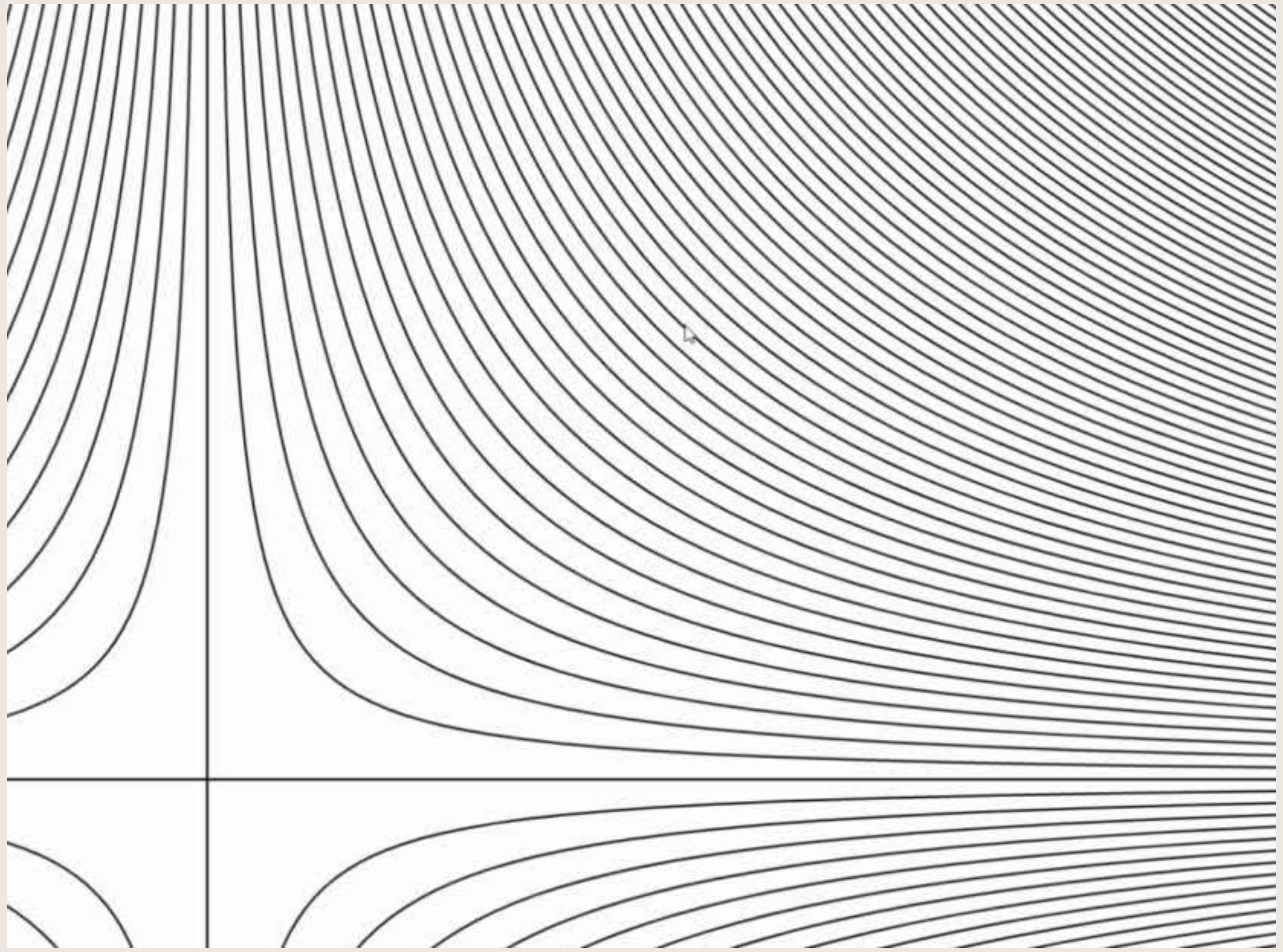


EXEMPLOS DE FOLHEAÇÕES

Folheação Hiperbólica do plano

Seja U o complemento, em $\mathbb{R}^2$, do conjuntos de pontos com $x = 0$ e $y \geq 0$. As componentes conexas das curvas de nível da função $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = xy$ são as folhas de uma folheação em U

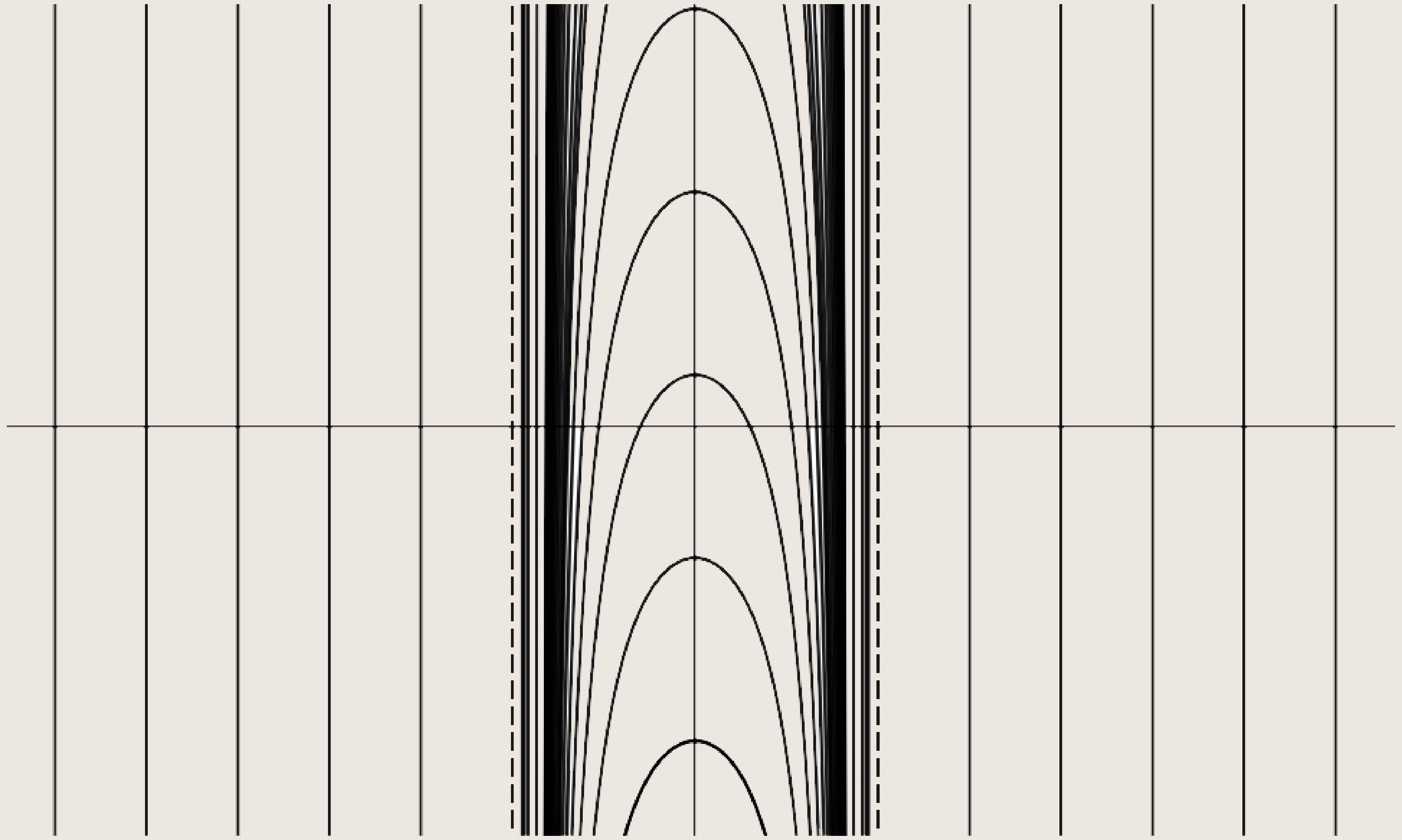


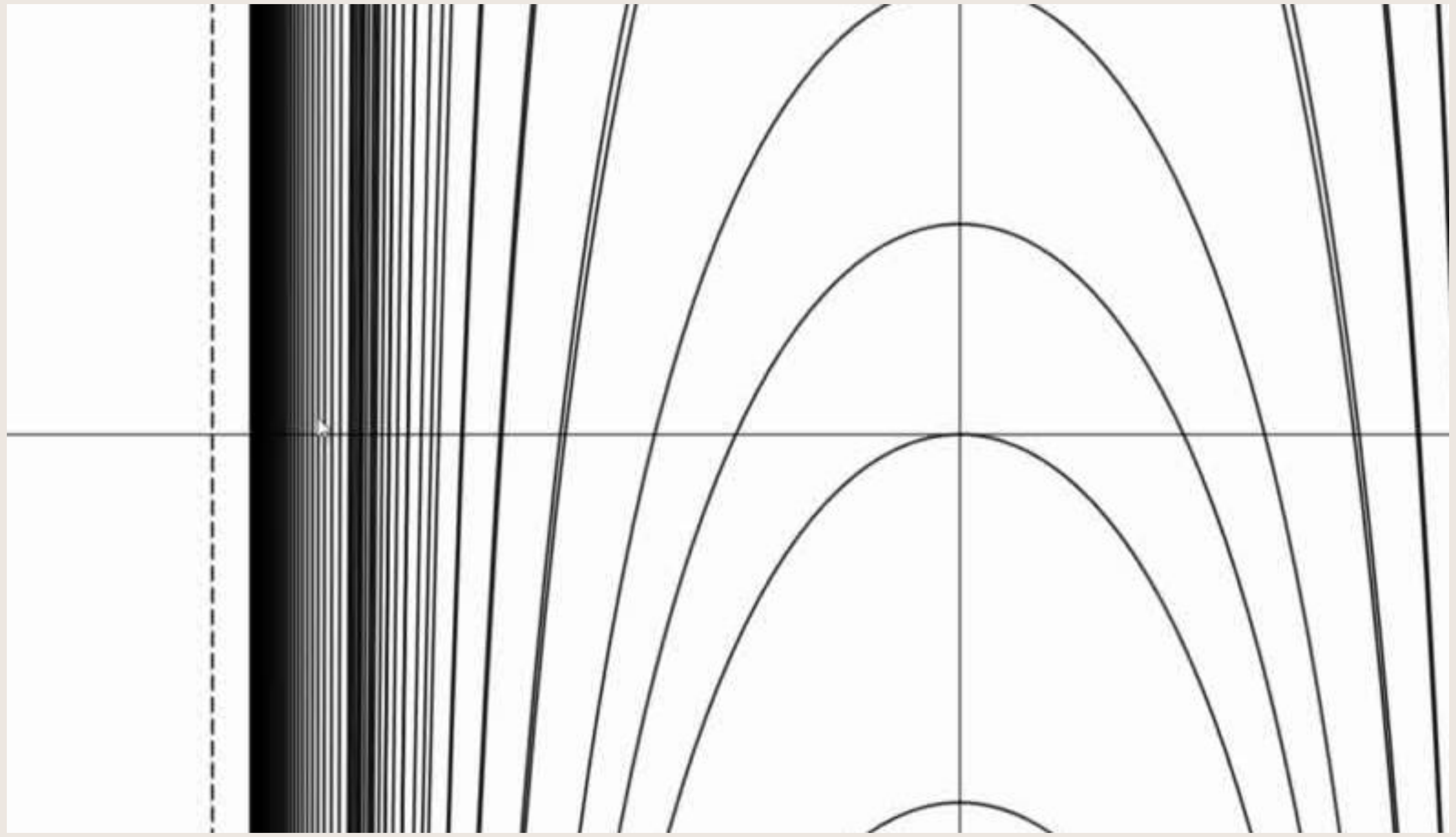


EXEMPLOS DE FOLHEAÇÕES

Folheação de Reeb do plano

As componentes conexas das curvas de nível da função $f(x) = -e^{\frac{1}{(1-x^2)}} + c$ se $-1 < x < 1$ e $x = b$, se $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ são as folhas de uma folheação em $\mathbb{R}^2$





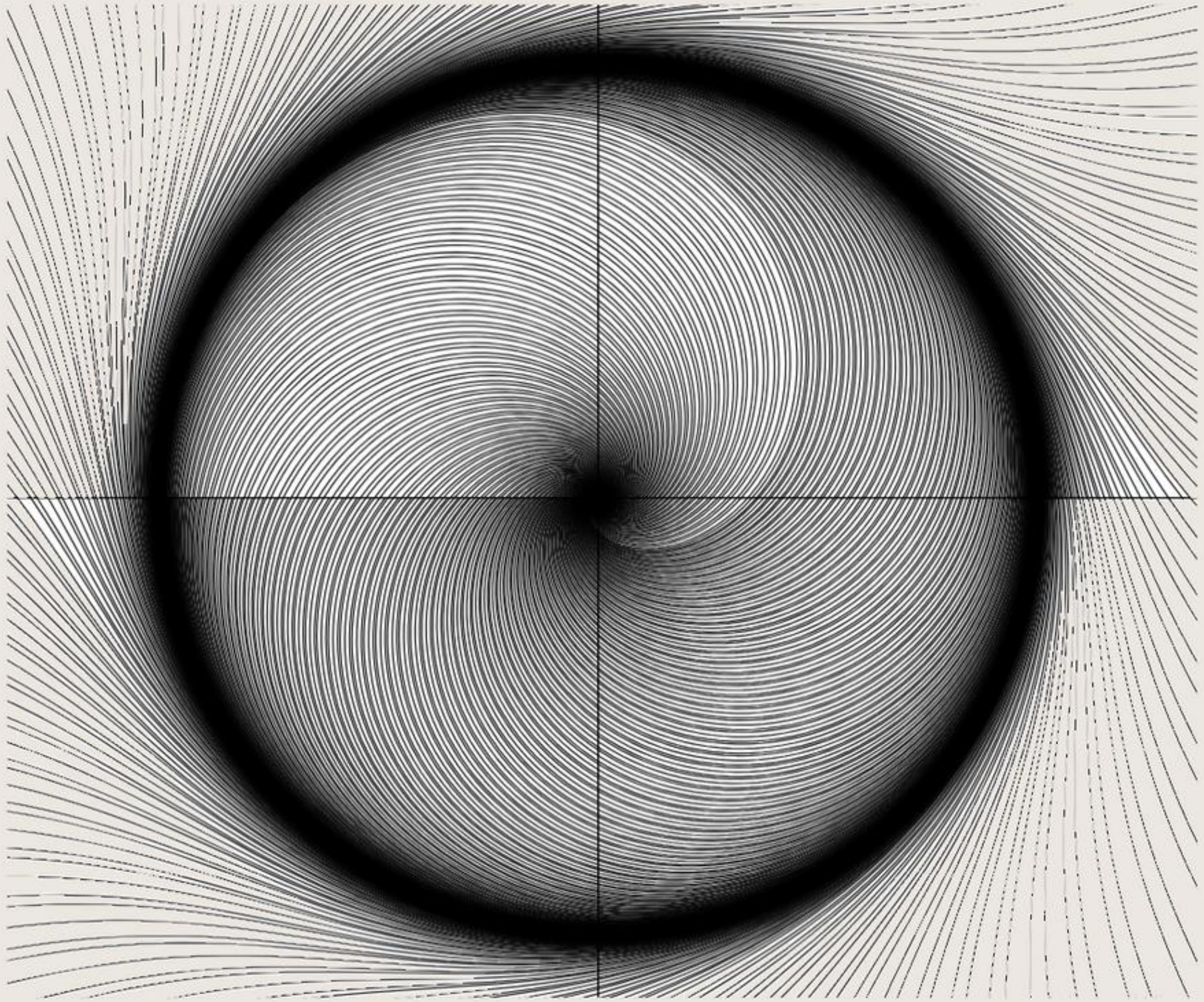
EXEMPLOS DE FOLHEAÇÕES

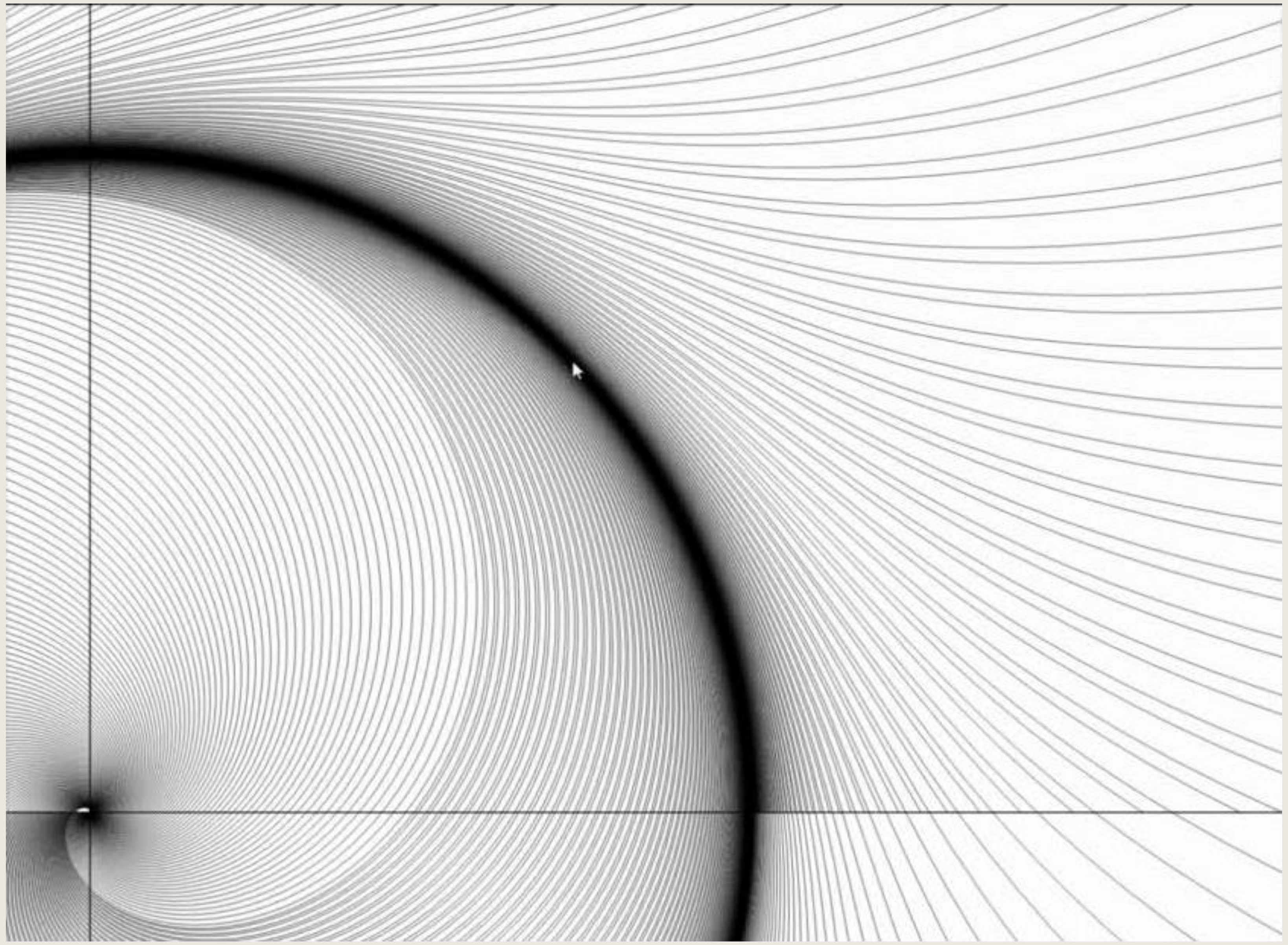
Folheação por espirais do plano com singularidade

As curvas que são soluções da equação diferencial (em coordenadas polares r e ω)

$$\frac{dr}{dw} = r\,(1 - r^2)$$

são as folhas de uma folheação de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. O círculo $r = 1$ é uma folha em torno da qual as outras folhas se enrolam assintoticamente.





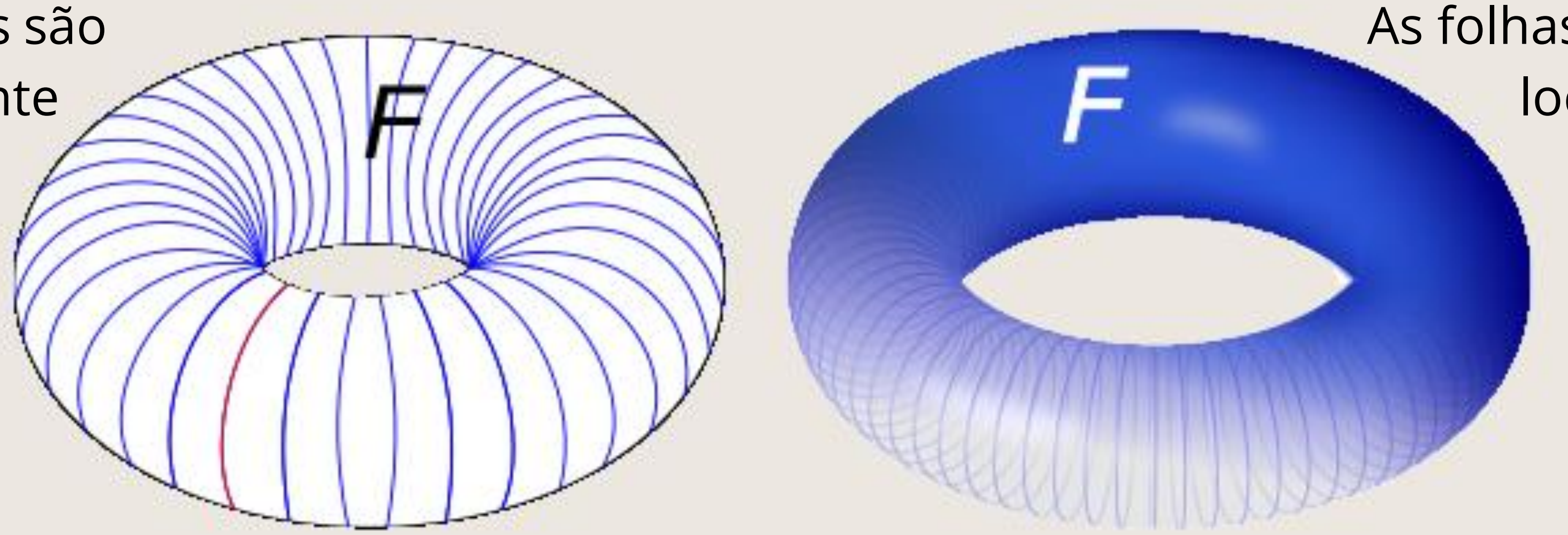
ESPAÇO DE FOLHAS

Definição do Espaço de Folhas: O espaço de folhas de $\mathcal{F}$, $M/\mathcal{F}$, é o espaço quociente de M sob a relação de equivalência que identifica dois pontos de M se eles estão na mesma folha F.

Teorema da Topologia Intrínseca das Folhas: Seja M uma variedade folheada por uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão n. Cada folha F de $\mathcal{F}$ de dimensão n possui estrutura de uma variedade, na qual os domínios das cartas são as pré-imagens de y = *constante*.

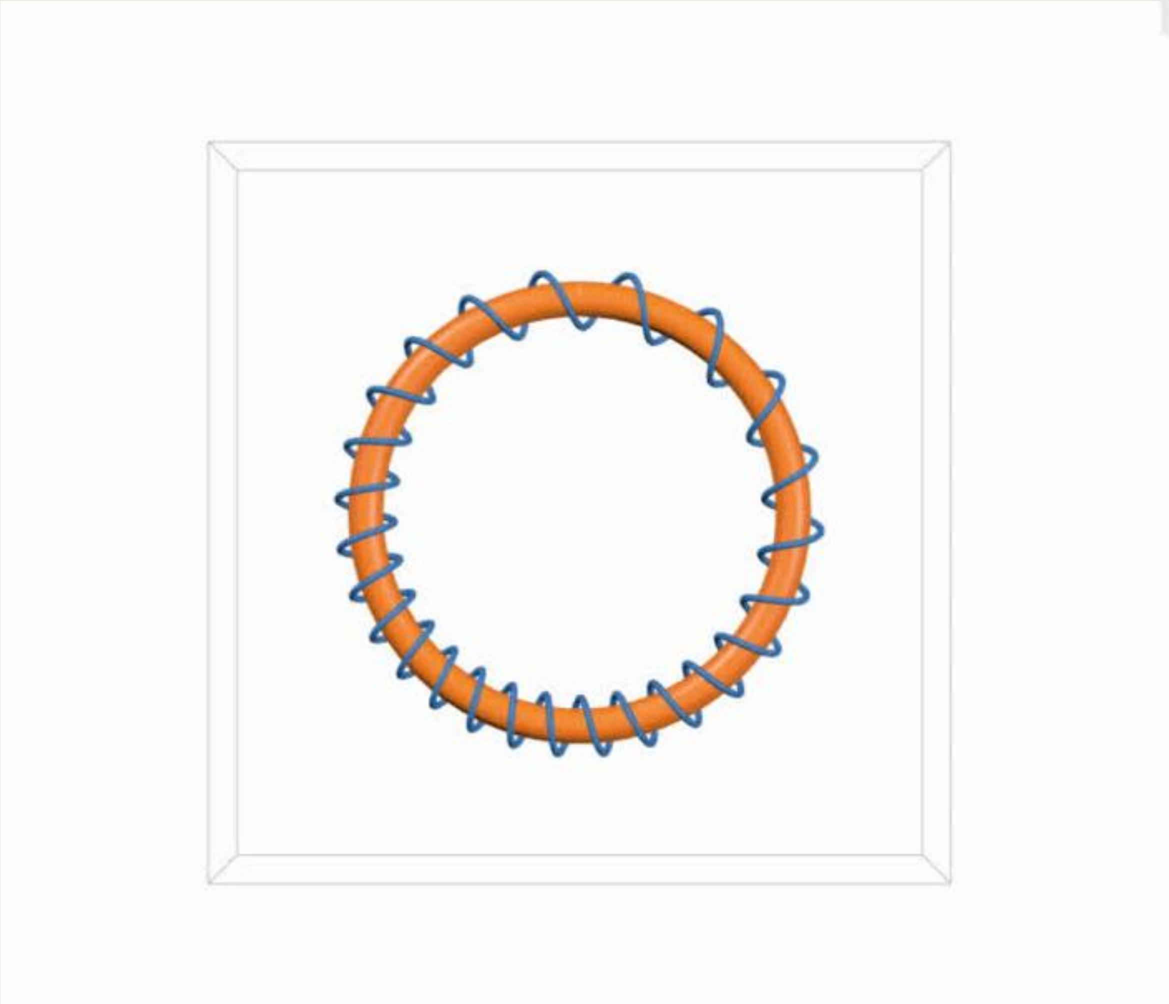
Essa topologia intrínseca em uma folha F, em geral, não coincide a topologia de subespaço de M.

As folhas são localmente conexas



As folhas não são localmente conexas

Ilustração por Lantonov



RESULTADO CLÁSSICO DE HAEFLIGER E REEB

Preliminares:

Proposição 3: Se a $\mathcal{F}$ uma folheação qualquer de dimensão n de M. O mapa quociente $\pi : M \to M/\mathcal{F}$ é uma aplicação aberta.

Proposição 4: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação do $\mathbb{R}^2$, toda folha F de $\mathcal{F}$ é fechada e $\mathcal{F}$ não possui folhas compactas.

Teorema de Poincaré-Bendixon: Seja (U,φ) uma carta de uma folheação $\mathcal{F}$ do $\mathbb{R}^2$. A imagem por φ da intersecção de U com qualquer folha F ou é o $\emptyset$ ou é uma linha $y = constante$

Teorema de Jordan: Seja C uma curva fechada[2] sem auto-intersecções no plano. Então, o complemento $\mathbb{R}^2 \backslash C$, consiste exatamente em duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada.

[2]no sentido de ser imagem de uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$

RESULTADO CLÁSSICO DE HAEFLIGER E REEB

Teorema Principal:

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{R}^2$. O espaço quociente V de $\mathbb{R}^2$, pela relação de equivalência ρ associada à folheação, é uma variedade unidimensional (possivelmente Não-Hausdorff) simplesmente conexa.

Demonstração: Como $\mathbb{R}^2$ é conexo e tem base enumerável, V também é conexo e possui base enumerável. Veja que V é uma variedade unidimensional, basta mostrar que todos os pontos z em V possuem uma vizinhança aberta homeomorfa a $\mathbb{R}$ (Teorema de Poincaré-Bendixon).

O complemento de qualquer folha, tem duas componentes conexas (Teorema da Curva de Jordan). Portanto, o complemento de qualquer ponto em V também tem duas componentes conexas. A propriedade dita é equivalente ao fato de que V é simplesmente conexo (Lema 1)

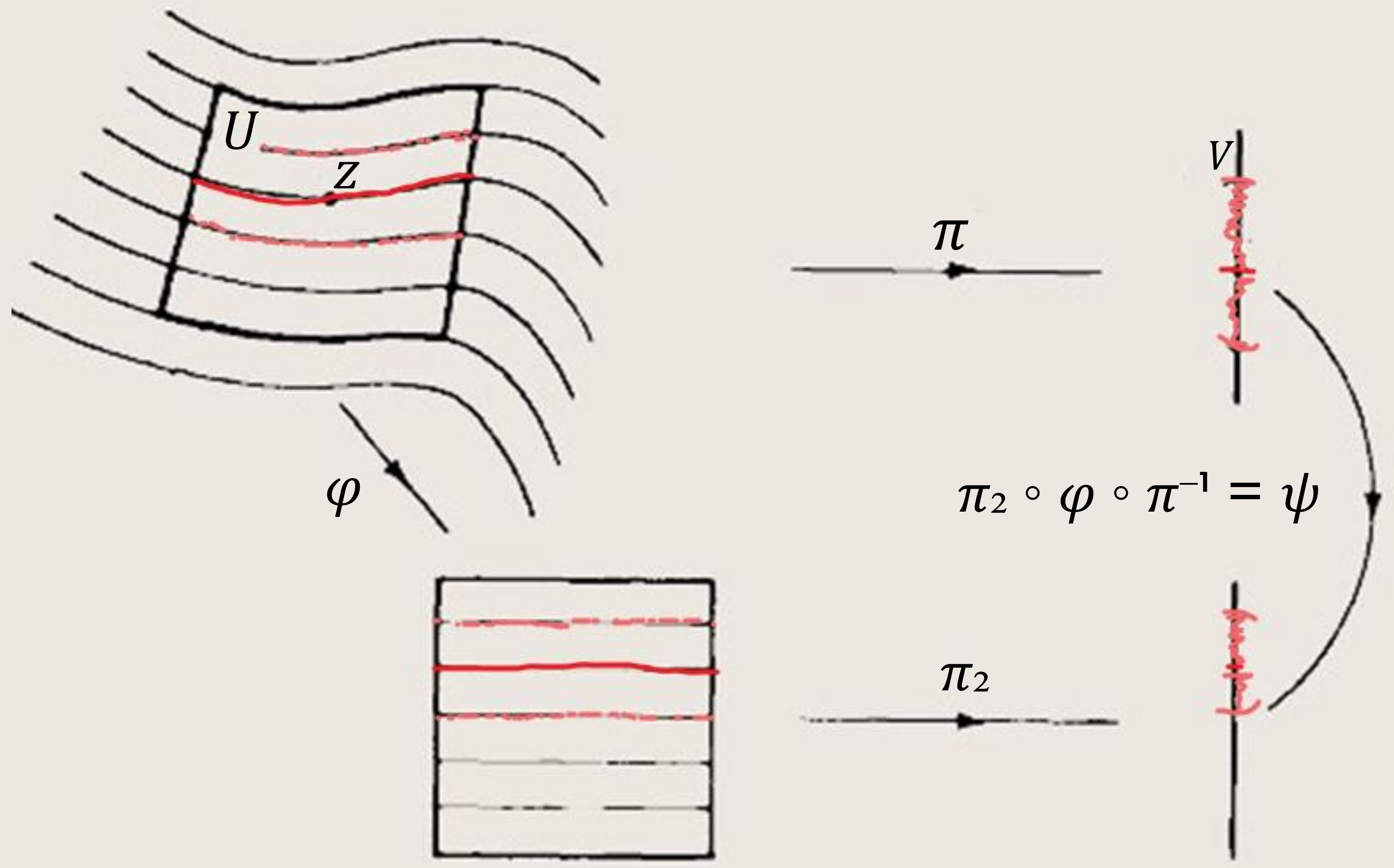
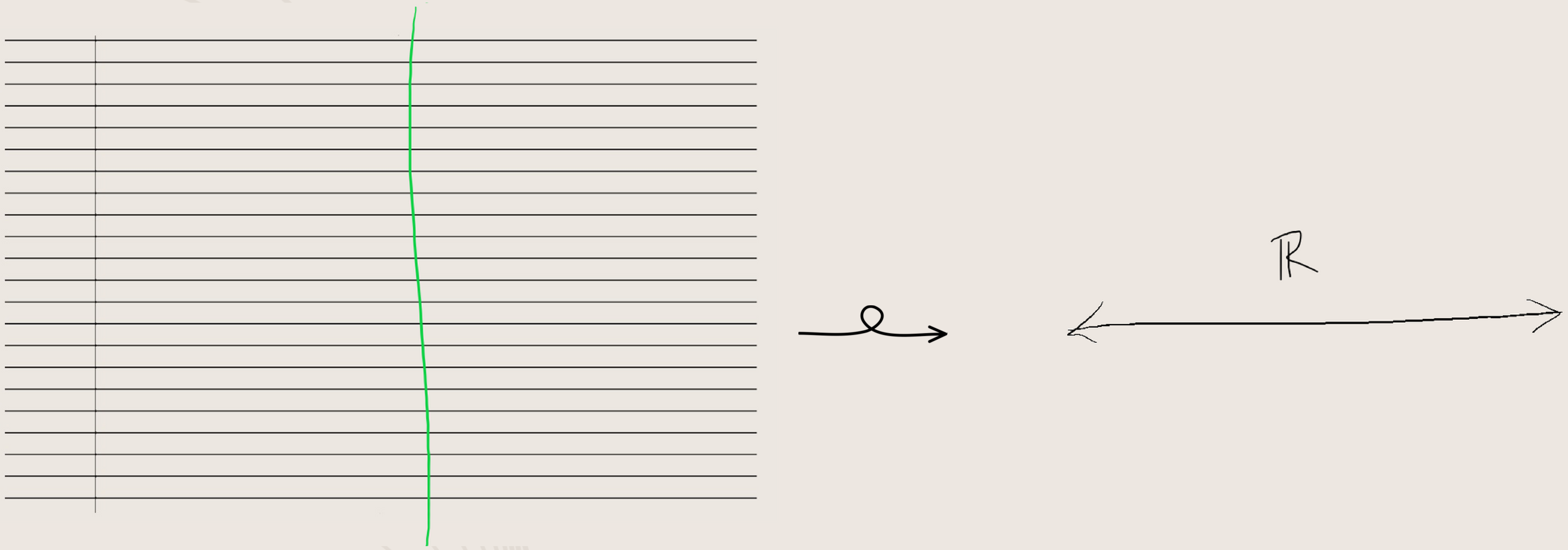


Ilustração Adaptada do Livro "Teoria Geométrica das Folheações"

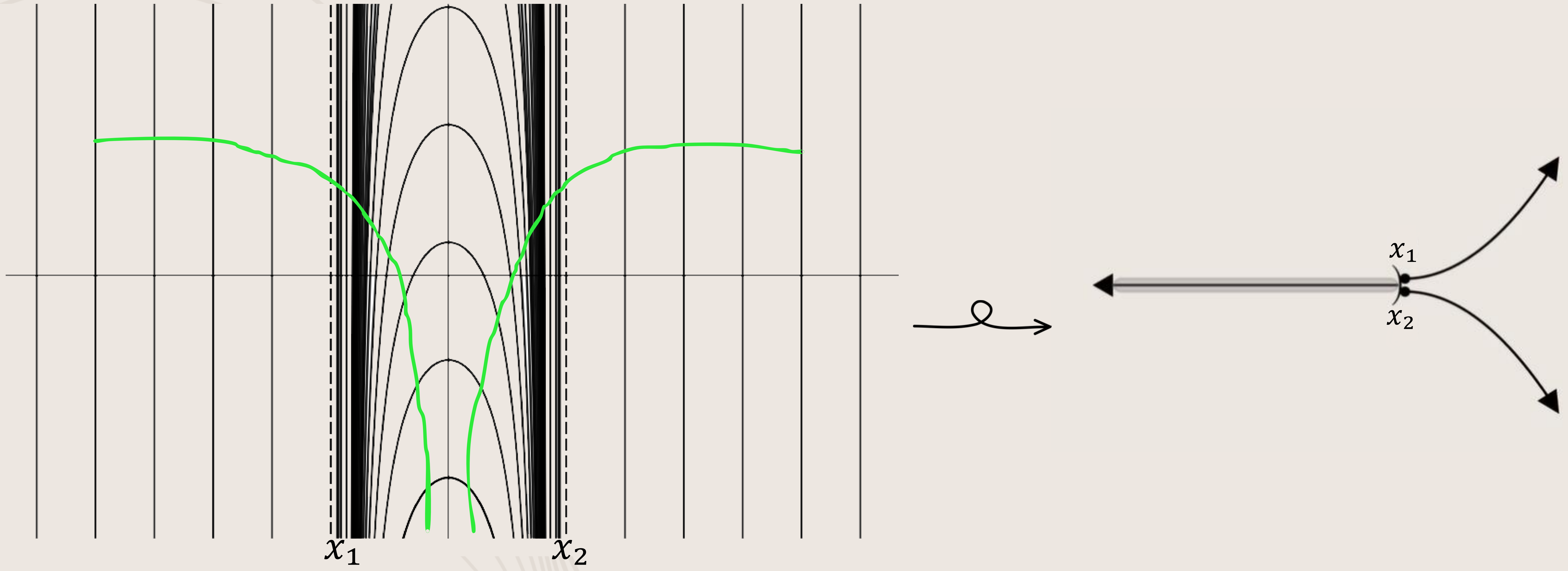
RESULTADO CLÁSSICO DE HAEFLIGER E REEB

Espaço de folhas da folheação trivial



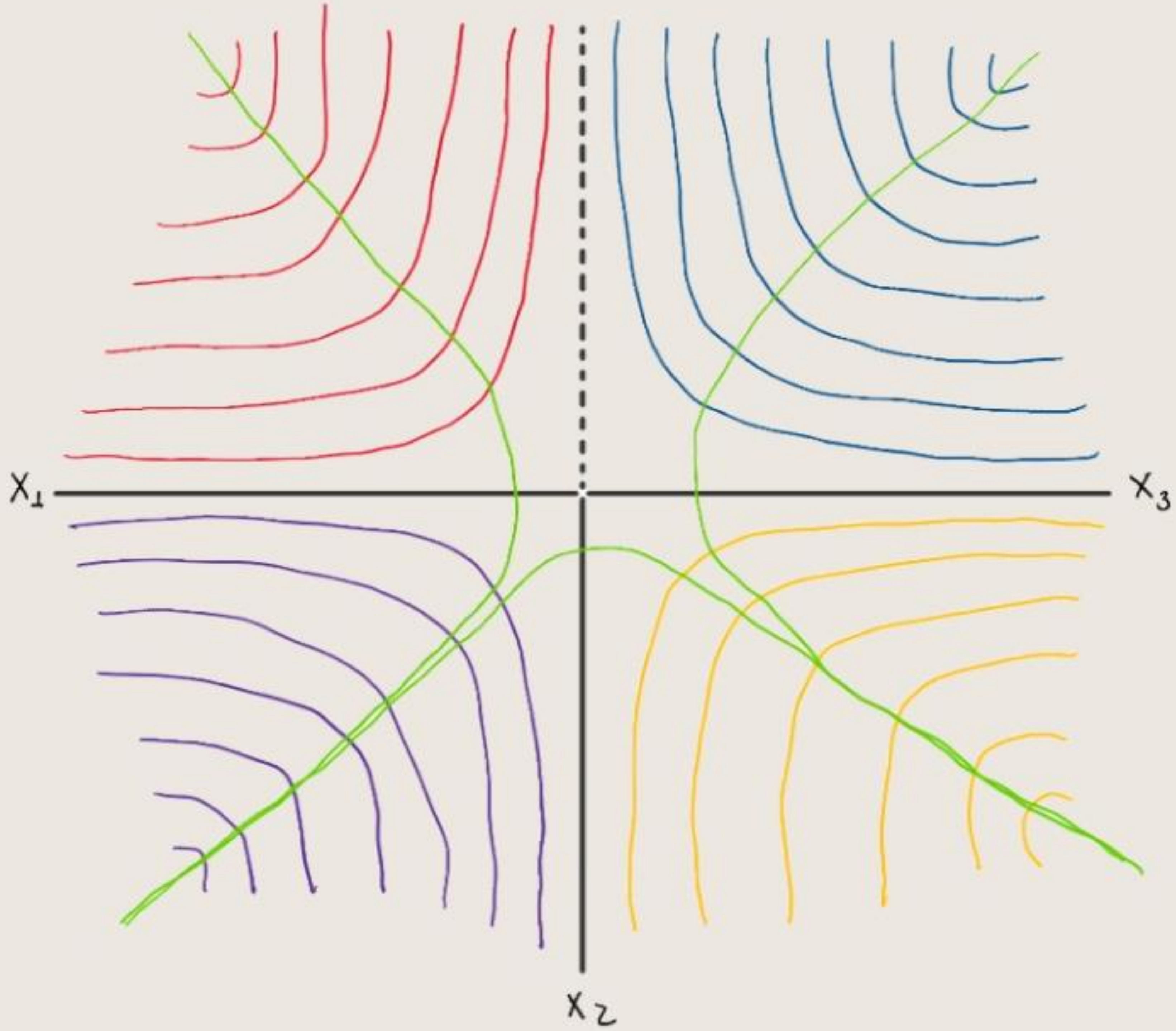
RESULTADO CLÁSSICO DE HAEFLIGER E REEB

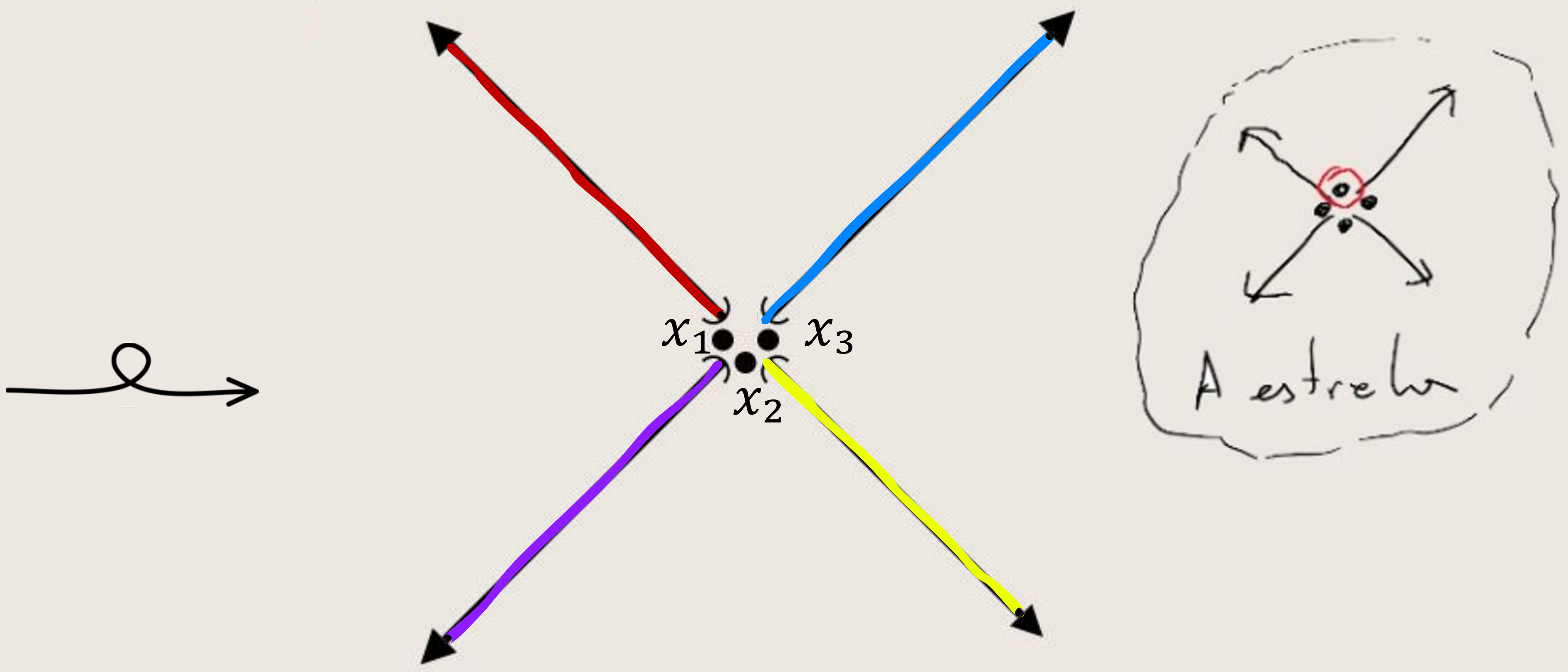
Espaço de folhas da folheação de Reeb



RESULTADO CLÁSSICO DE HAEFLIGER E REEB

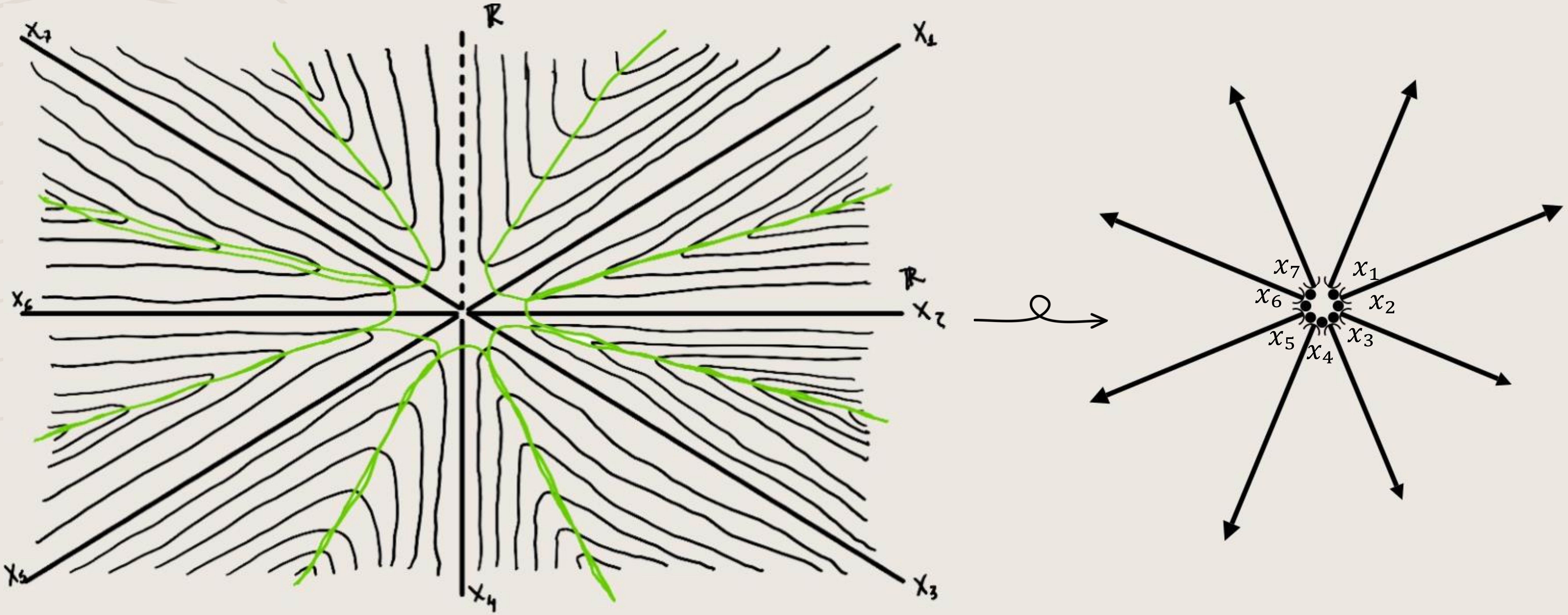
Espaço de folhas da folheação hiperbólica





RESULTADO CLÁSSICO DE HAEFLIGER E REEB

Espaço de folhas da folheação hiper-hiperbólica



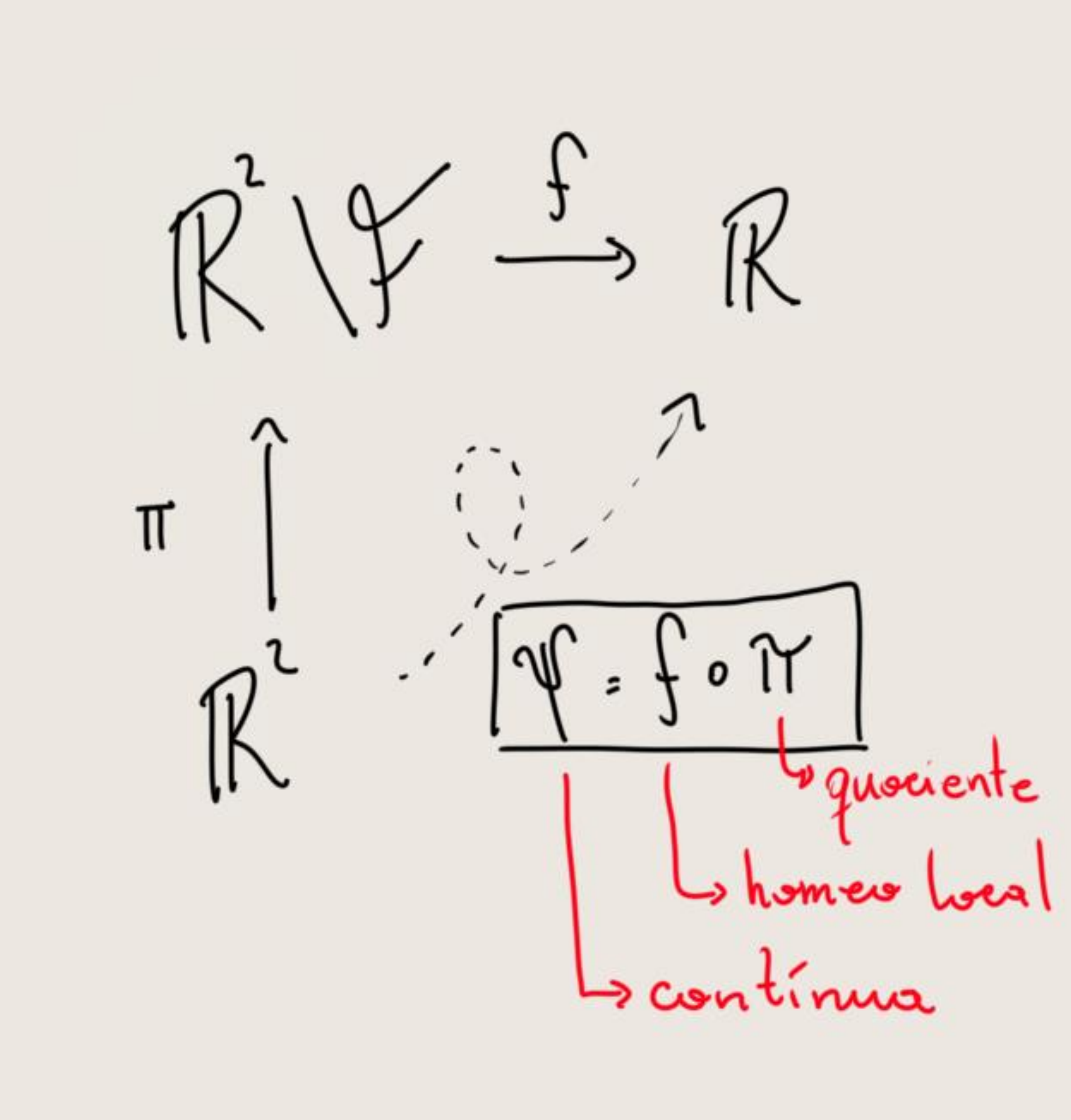
TEOREMA DE KAPLAN

Teorema de Kaplan: Para qualquer folheação de $\mathbb{R}^2$, podemos associar uma função de valores reais $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(i) ψ é contínua e não possui um máximo ou mínimo.

(ii) ψ é constante nas folhas da folheação

Demonstração: segue direta pela proposição 2 e pelo Resultado de Haefliger e Reeb.



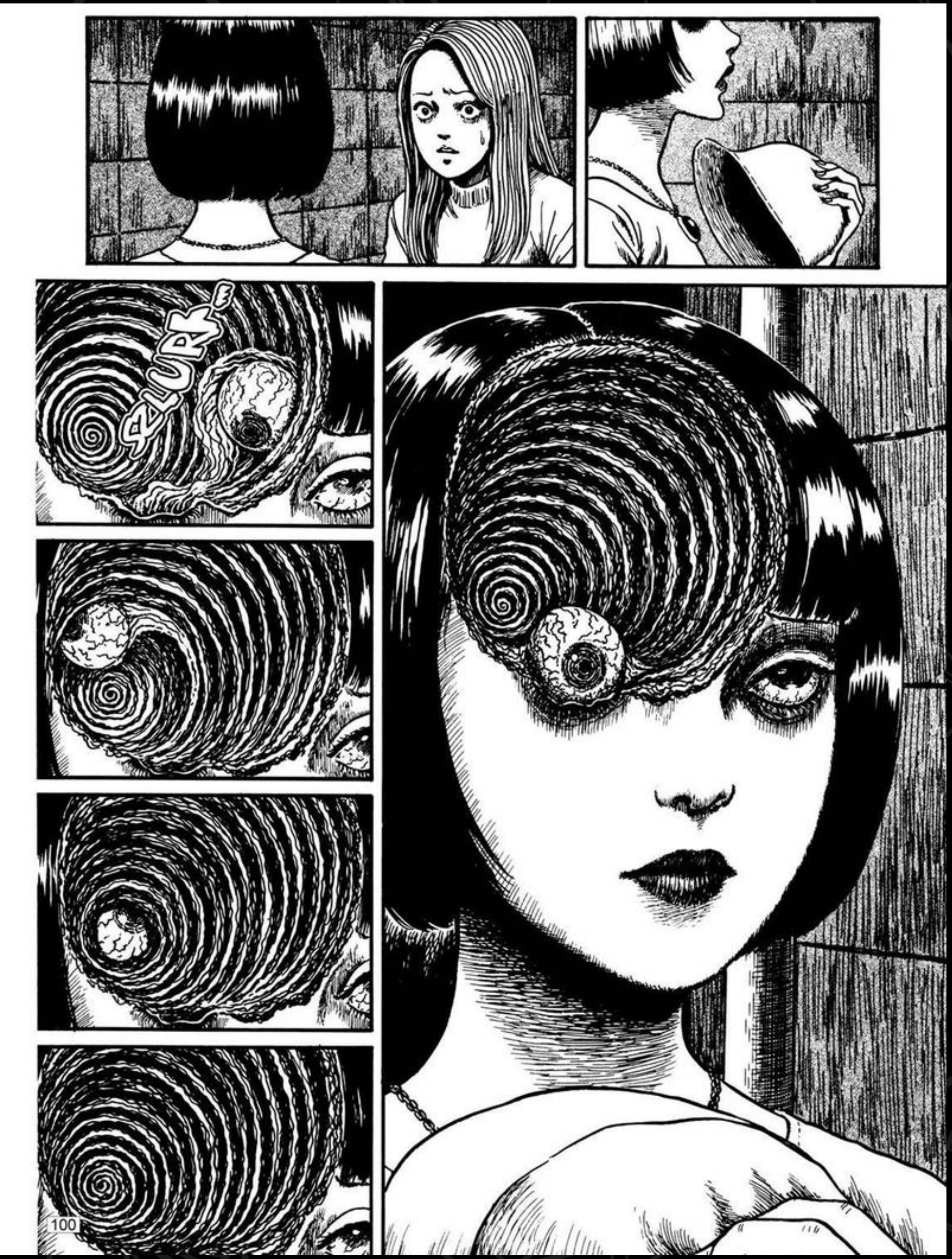


Ilustração por Junji Ito

CONSIDERAÇÕES FINAIS

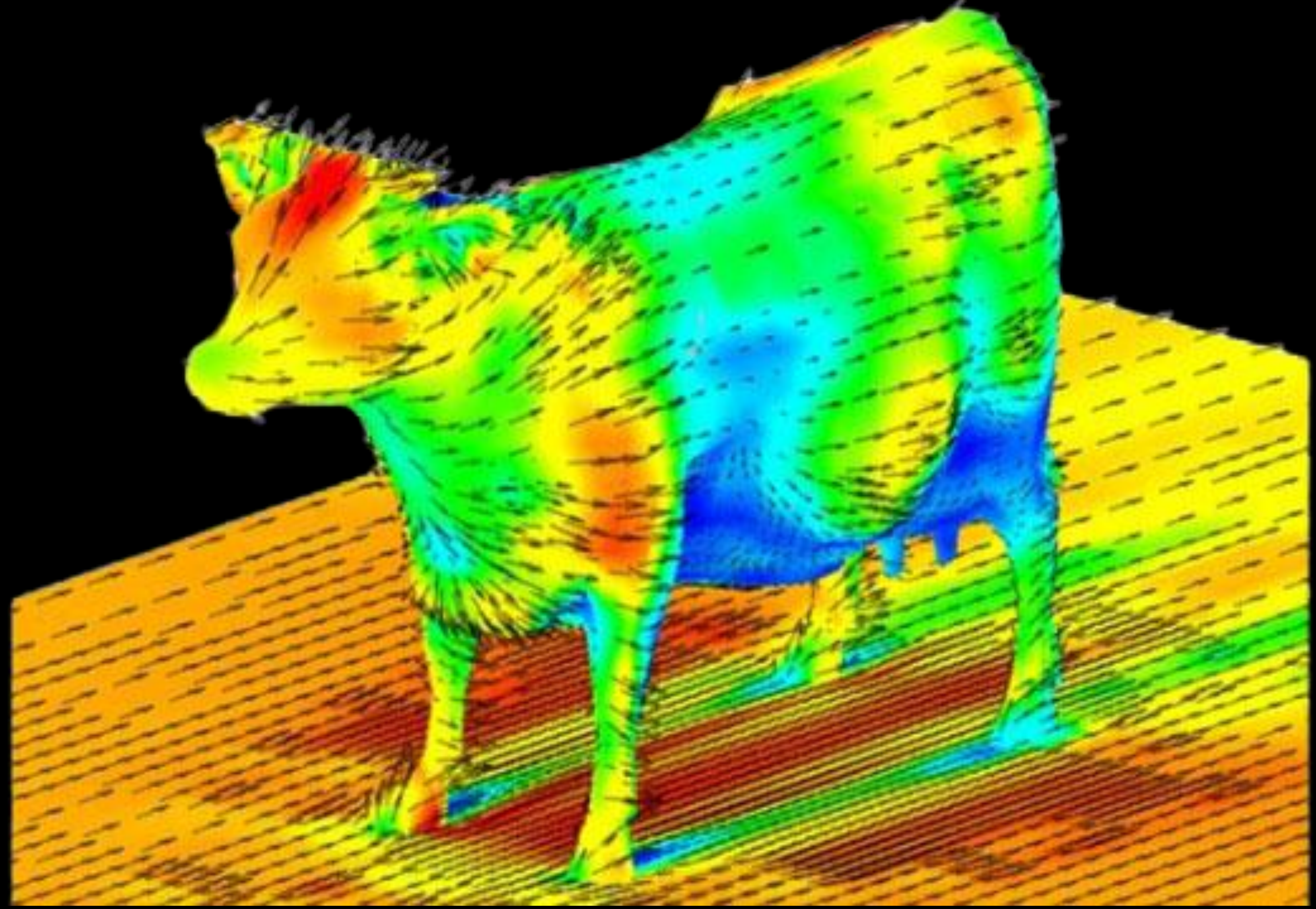
Variedades diferenciaveis

Orientabilidade de uma Folheação

Transversalidade de uma Folheação

Classificação das Folheações do Plano

OBRI



GADO!