PROVA SUB - APLICAÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR - MAP2210

PROFESSOR: PEDRO T. P. LOPES

A prova é individual e sem consulta. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração. A prova vale 10,5, mas a nota máxima é 10.

Boa Prova!

Exercício 1. *(Subespaços fundamentais)*

(1,75 ponto) Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ache uma base e a dimensão dos espaços fundamentais de A.

Para que exista $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $x^T A = b^T$, é necessário e suficiente que $b \in \mathbb{R}^3$ seja ortogonal a qual subespaço fundamental?

Exercício 2. *(Ortogonalidade/ Métodos iterativos)*

Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1,75 ponto) a) Aplique o método de Gram-Schmidt nas colunas de A e ache matrizes Q e R tais que Q é ortogonal, R é triangular superior e $A = QR$.

(1,75 ponto) b) Ache uma matriz de rotação de Givens G, em que G é da forma $\begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix}$ (com $s^2 + c^2 = 1$), para que GA seja triangular superior. Use isto para achar novamente matrizes Q e R tais que Q é ortogonal, R é triangular superior e $A = QR$.

Exercício 3. *(Determinantes)*

(1,75 ponto) Ache o determinante da matriz abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 9e^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Qual termo da expansão $\det(C) = \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) C_{1\sigma(1)} C_{2\sigma(2)} C_{3\sigma(3)} C_{4\sigma(4)}$ é diferente de zero?

Exercício 4. *(Decomposição LU)*

(1,75 ponto) Ache uma decomposição LDL^T da matriz A dado abaixo e a partir dela responda: A é positiva?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5. *(Diagonalização)*

(1,75 ponto) Ache $Q \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ ortogonal e $D \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ diagonal tal que $Q^T B Q = D$, em que

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$