PROVA 2 - APLICAÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR - MAP2210

PROFESSOR: PEDRO T. P. LOPES

A prova é individual e sem consulta. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração. Não é permitido o uso de determinantes. A prova vale 10,5, mas a nota máxima é 10.

Boa Prova!

Exercício 1. *(Decomposição LU)* (1,75 ponto) Ache uma matriz de permutação P e matrizes L (triangular inferior) e U (triangular superior) tais que $PA = LU$. Usando *apenas* as matrizes P, L e U (sem escalonar A novamente), ache a solução de $Ax = b$ com $b = (1, 0, 0)$ (é necessário resolver um sistema com L e outro com U).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2. *(Espaços fundamentais)* (1,75 ponto) Considere a matriz abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ache a matriz escalonada reduzida associada a A e determine uma base para $C(A)$ e para o espaço fundamental que é ortogonal a $C(A)$. Quem é esse subespaço?

Exercício 3. *(Determinantes)* (1,75 ponto) Calcule o determinante de A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \pi & -\pi & e \\ 0 & 0 & 0 & \ln(5) & 40 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4. *(Autovalores, autovetores e Ortogonalidade)* Para os exercícios abaixo considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1,75 ponto) a) Ache uma matriz $Q \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tal que $Q^T Q = I$ e $Q^T AQ$ seja diagonal.

(1,75 ponto) b) Ache matrizes $Q \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e $R \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tais que $A = QR$, $Q^T Q = I$ e R é triangular superior.

Exercício 5. *(Métodos iterativos)* (1,75 ponto) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal a matriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_v \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, em que $h = I - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}$ com $I \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, seja tal que HAH é tridiagonal. Dica: Lembre-se que as matrizes de Householder satisfazem $h_{w-\|w\|e_1}(w) = \|w\|e_1$, em que $e_1 = (1, 0)$.