Plantão de dúvidas do dia 25 de Janeiro

$\dim(V_C(1)) = m_g^C(1) = 2$ $\quad B_1 := \{v_1, v_2\}$ base de $V_C(1)$

$\dim(V_C(3)) = m_g^C(3) = 1$ $\quad B_3 := \{v_3\}$ base de $V_C(3)$.

$B := (v_1, v_2, v_3)$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$

Seja $T_C \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T_C]_{can} = C$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = [T_C]_B = \underbrace{[I]_{can,B}}_{= [I]^{-1}_{B,can}} [T_C]_{can} [I]_{B,can}$$
$$= [I]^{-1}_{B,can}\, C\, [I]_{B,can}$$

Conclusão: Se $P := [I]_{B,can}$, então P tem inversa, e $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$[I]^{-1}_{B,can} = [I]_{can,B}$$
$$[I]^{-1}_{can,B} = [I]_{B,can}$$

$$\underline{[T]_B} = [I]_{can,B} [T]_{can} [I]_{B,can}$$

$$\underline{[T]_{can}} = [I]_{B,can} [T]_B [I]_{can,B}$$

$$[T]_{\underline{C}} = [I]_{B,C} [T]_B [I]_{C,B}$$

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita tais que $\dim(V) = n$, e $\dim(W) = m$, B uma base ordenada de V, C uma base ordenada de W e $T \in L(V, W)$.

$B := (v_1, \dots, v_n)$

$$[T]_{B,C} = \left[[T(v_1)]_C \;\vdots\; [T(v_2)]_C \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; [T(v_n)]_C \right].$$

- Para cada $v \in V$,

$$[T(v)]_C = [T]_{B,C} [v]_B.$$

EXEMPLO.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x+y, y)$

$B := ((1,0),(0,1))$

$C := ((1,2),(3,1))$

$T(1,2) = (3,2) = 3\cdot(1,0) + 2(0,1)$

$T(3,1) = (4,1) = 4\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1)$

$[T(1,0)]_C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\quad [T]_{C,B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- $T(1,0) = (1,0) = \underbrace{a(1,2) + b(3,1)}_{=(a+3b,\,2a+b)} \Leftrightarrow a + 3b = 1, \text{ e } 2a+b = 0$

$$\begin{cases} a+3b = 1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+3b = 1 \\ -5b = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} a+3b = 1 \\ b = \frac{2}{5} \end{cases} \sim \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

- $T(0,1) = (1,1) = c(1,2) + d(3,1) \Leftrightarrow c + 3d = 1, \text{ e } 2c+d = 1$

$$\begin{cases} c+3d = 1 \\ 2c+d = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} c+3d = 1 \\ -5d = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} c = \frac{2}{5} \\ d = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

PROVA SUBSTITUTIVA (TURMA DO IAG)

2)

a) Estenda o conjunto $S:=\{(1,2,1),(1,2,3)\}$ a uma base de $\mathbb{R}^3$.

RESOLUÇÃO.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2' := L_2 - 2L_1 \\ L_3' := L_3 - L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2'' := L_3' \\ L_3'' := L_2'}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o conjunto $\{(1,2,1),(1,2,3),(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Defina um operador linear $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $Ker(T)=[(1,2,1),(1,2,3)]$, e $Im(T)=[(1,1,1)]$.

RESOLUÇÃO.

Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(1,2,1)=T(1,2,3)=(0,0,0)$, e $T(1,0,0)=(1,1,1)$.

Observe que

$$Im(T) = [\underbrace{T(1,2,1)}_{=(0,0,0)}, \underbrace{T(1,2,3)}_{=(0,0,0)}, \underbrace{T(1,0,0)}_{=(1,1,1)}] = [(1,1,1)].$$

Como $Im(T)=[(1,1,1)]$,

$$dim(Ker(T)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Im(T)) = 3-1=2.$$

Logo, como S é um subconjunto LI de $Ker(T)$, podemos concluir que

$$Ker(T)=[S]=[(1,2,1),(1,2,3)].$$

c)

$$T(x,y,z) \qquad \begin{cases} a+b+c = x \\ 2a+2b = y \\ a+3b = z \end{cases} \qquad -2c = y-2x \qquad c = x-\frac{y}{2}$$

$$(x,y,z) = a(1,2,1)+b(1,2,3)+c(1,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$T(x,y,z) = T(a(1,2,1)+b(1,2,3)+c(1,0,0))$$

$$= a\underbrace{T(1,2,1)}_{=(0,0,0)} + b\underbrace{T(1,2,3)}_{=(0,0,0)} + c\underbrace{T(1,0,0)}_{=(1,1,1)}$$

$$= c(1,1,1) = \underline{\left(x-\frac{y}{2}\right)(1,1,1)}.$$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$T(0,1,0)=(-1/2,-1/2,-1/2)$.

$T(1,0,0)=(1,1,1)$ $\quad T(0,0,1)=(0,0,0)$

3)

a) Sejam $T \in L(\mathbb{R}^{20}, \mathbb{R}^{10})$ e $S \in L(\mathbb{R}^{10}, \mathbb{R}^{20})$. Então $S \circ T$ não pode ser bijetora.

1º CAMINHO: T não é injetora $\Rightarrow$ $S \circ T$ não é injetora.

2º CAMINHO: S não é sobrejetora $\Rightarrow$ $S \circ T$ não é sobrejetora.

$$\underbrace{Ker(T)}_{\neq\{0_V\}} \subseteq \underbrace{Ker(S \circ T)}_{\neq\{0_V\}}$$

$$T(v) = 0_V \Rightarrow (S \circ T)(v) = S(T(v)) = S(0_V) = 0_V$$

$Im(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^{10} \Rightarrow dim(Im(T)) \leq dim(\mathbb{R}^{10}) = 10$

$$dim(Ker(T)) = \underbrace{dim(\mathbb{R}^{20})}_{=20} - \underbrace{dim(Im(T))}_{\leq 10}$$

$$\geq 20 - 10 = 10.$$

$$Ker(T) \neq \{0_{\mathbb{R}^{20}}\}$$

$$Im(S \circ T) \subseteq Im(S)$$

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)) \in Im(S).$$

$$Im(S) \neq \mathbb{R}^{20}$$

$$Im(S \circ T) \subseteq Im(S) \subseteq \mathbb{R}^{20}$$

$$Im(S \circ T) \subseteq Im(S) \subsetneq \mathbb{R}^{20} \Rightarrow Im(S \circ T) \neq \mathbb{R}^{20}$$

$$dim(Im(S)) = \underbrace{dim(\mathbb{R}^{10})}_{=10} - \underbrace{dim(Ker(S))}_{\geq 0} \leq 10 < 20 \Rightarrow Im(S) \neq \mathbb{R}^{20}$$

$$S: \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{20}$$
$$(x_1, \dots, x_{10}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{10}, 0, \dots, 0)$$

$$T: \mathbb{R}^{20} \to \mathbb{R}^{10}$$
$$(x_1, \dots, x_{20}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{10})$$

$$T \circ S = I_{\mathbb{R}^{10}}$$

PROPOSIÇÃO. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, e seja $T \in L(V,W)$. Nessas condições:

- se $\dim(V) > \dim(W)$, T não é injetora;
- se $\dim(V) < \dim(W)$, T não é sobrejetora.

b) A matriz real $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ é diagonalizável quaisquer que sejam a e b em $\mathbb{R}$.

$$(-1)^2 \det \begin{bmatrix} a-t & c \\ c & b-t \end{bmatrix} = (a-t)(b-t) - c^2 = t^2 - (a+b)t + ab - c^2$$

$$t^2 - (a+b)t + ab - c^2 = 0$$

$$\Delta = (a+b)^2 - 4(ab - c^2)$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2$$
$$= \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4c^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Se $\Delta > 0$, $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ tem dois autovalores distintos (e, portanto, é diagonalizável).

$$\Delta = 0 \iff \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4c^2}_{\geq 0} = 0$$
$$\iff a = b, \text{ e } c = 0.$$

Se $\Delta = 0$, $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ é diagonal (e, portanto, é diagonalizável).

c) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $T \in L(V)$ e $v_1, \dots, v_n \in V$ tais que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ seja LI. Então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é verdadeira.

DEMONSTRAÇÃO.

Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V$. Como

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V \Rightarrow T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = T(0_V)$$
$$\Rightarrow a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = 0_V$$
$$\underset{\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \text{ é LI}}{\Rightarrow} a_1 = \dots = a_n = 0,$$

resulta da arbitrariedade de $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V$ que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI.

d) Suponha que um espaço vetorial V tenha um conjunto gerador com m vetores. Se B é um subconjunto LI de V com m vetores, então B é uma base de V.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é verdadeira.

DEMONSTRAÇÃO.

• Como G gera V e tem m elementos, qualquer base de V tem, no máximo, m elementos.

• Como B é um subconjunto LI de V e tem m elementos, qualquer base de V tem, pelo menos, m elementos.

CONCLUSÃO: qualquer base de V possui exatamente m elementos.

• Como B é LI, podemos fixar uma base C de V de modo que $B \subseteq C$. Feito isso, notemos que, como B e C têm o mesmo número de elementos, $B = C$, e, portanto, B é uma base de V.