1. **(3, 0)** As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \text{ e } C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

têm o mesmo polinômio característico, $p(t) = (t-1)^2(t-4)$. Quais delas são diagonalizáveis? se alguma delas for diagonalizável,determine uma matriz inversível $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}XP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

onde $X = A$ ou $X = C$.

Para a matriz A

Determinar $V(1)$ (Autoespaço associado ao autovalor 1)

$x = -4y$

$$(A - I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$V(1) = \{(-4y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= [(-4, 1, 0), (0, 0, 1)]$$

$m_g(1) = \dim V(1) = m_a(1) = 2 \Rightarrow$ A diagonalizável

(A é diagonalizável pois $m_a(4) = m_g(4) = 1$, já que $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ para todo λ autovalor)

Para determinar uma matriz P, temos que determinar $V(4)$.

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x + y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Logo $V(4) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y \text{ e } z = 0\}$
$= [(1, -1, 0)]$.

$\underbrace{B = \{(-4,1,0), (0,0,1), (1,-1,0)\}}_{\text{base do } \mathbb{R}^3 \text{ formada por autovetores de } A}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{B} \arrow[r, "P"'] & \mathbb{R}^3_{can} \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3_{can} \arrow[r, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^3_{B} \end{tikzcd}$$

$$P = [I]_{B, can} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **(3,0)**

(a) Estenda o conjunto $S = \{(1,1,1),(1,2,1)\}$ a uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Defina um operador linear $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que:

  i. Ker$T \neq 0$;

  ii. 2 é um autovalor de T e $V(2)$ é o subespaço gerado por S.

(c) Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(a) S é LI, já que (1,1,1) e (1,2,1) não são múltiplos um do outro.

Vamos estender S a uma base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

Pela matriz escalonada vemos que

$B = \{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,2,1)}_{v_2}, \underbrace{e_1}_{v_3}\}$ (ou $B = \{(1,1,1),(1,2,1), e_3\}$)

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Para definir uma transformação linear, basta defini-la em um base.

Queremos que

$V(2) = [\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,2,1)}_{v_2}]$

Então definimos $T(v_1) = 2v_1$

$T(v_2) = 2v_2$

e como $\text{Ker}T \neq 0$, colocamos $T(v_3) = 0$.

Então $$[T]_B = \begin{array}{c} \begin{matrix} T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$ já que

$$T(v_1) = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3$$
$$T(v_2) = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3$$
$$T(v_3) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

(c)
$$\begin{tikzcd} \underset{can}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "I"] & \underset{B}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "T"] & \underset{B}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "I"] & \underset{can}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

$$[T]_{can} = [I]_{B,can} \, [T]_B \, [I]_{can,B}$$

$$[I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Achar $[I]_{can,B} = [I]_{B,can}^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\underbrace{}_{[I]_{B,can}}$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$\underbrace{}_{[I]_{can,B}}$

Logo
$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(A resposta depende de como S é estendido a uma base e a ordem dos vetores na base B.)

3. **(2,0)** As afirmações a seguir são **verdadeiras** ou **falsas**? **JUSTIFIQUE!**

(a) A matriz real

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

é diagonalizável quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) A matriz real

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$$

é diagonalizável quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $p_A(t) = (a-t)(b-t) - c^2$

$= t^2 - (a+b)t + ab - c^2$

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$

$\Delta = (a+b)^2 - 4ab + 4c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2$

$= (a-b)^2 + 4c^2$

Afirmação s
VERDADEIRA

Note que $\Delta \geq 0 \ \forall a, b, c$

Se $a \neq b$ ou $c \neq 0$, $\Delta > 0$ e nesse caso, A diagonalizável por ter 2 autovalores distintos.

$\Delta = 0 \iff a = b$ e $c = 0$, e nesse caso $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ que já é diagonal.

(b) $A = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$

$p_A(t) = (a-t)(b-t) - ab$

$= t^2 - (a+b)t + ab - ab$

$= t(t - (a+b))$

Se $a+b \neq 0$, A tem dois autovalores distintos 0 e $a+b$, e é diagonalizável

Se $a+b=0$

$A = \begin{bmatrix} a & a \\ -a & -a \end{bmatrix}$

$p_A(t) = t^2$

$m_a(0) = 2$, mas $m_g(0) = 1$ se $a \neq 0$

AFIRMAÇÃO s
FALSA s

Se $a = 0$
$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T \in L(V)$.Prove as afirmações a seguir.

   (a) Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ tais que $\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ é LI. Então $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é LI.

   (b) Suponha que V tem dimensão finita. Prove que uma transformação linear $T \in L(V)$ é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

(a) HIPÓTESE $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ é LI.

TESE: $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LI.

Suponha que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$

Como T é linear,

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = T(0) = 0$$

$$\Vert$$

$$a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n) = 0$$

Pela hipótese, temos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Logo $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LI. ∎

(b) $\dim V < \infty$.

$T : V \longrightarrow V$ linear

O Teorema do Núcleo e da Imagem afirma que

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$$

($\Rightarrow$) Suponha que T é injetora. Então $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Logo $\dim \operatorname{Im} T = \dim V$. Mas $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de V com a mesma dimensão de V o que implica que $\operatorname{Im} T = V$ e T é sobrejetora.

($\Leftarrow$) Se T é sobrejetora, então $\operatorname{Im} T = V$.

Logo $\dim V = \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\} \Rightarrow T$ injetora. ∎