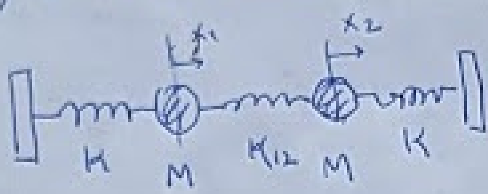
Bônus - Oscilações Acopladas

Roteiro:

1) 2 massas oscilando, a partir da 2ª lei de Newton



$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -Kx_1 + K_{12}(x_2 - x_1) = -(K+K_{12})x_1 + K_{12}x_2 \\ M\ddot{x}_2 = -Kx_2 - K_{12}(x_2 - x_1) = K_{12}x_1 - (K+K_{12})x_2 \end{cases}$$

equilíbrio: $x_1 = x_2 = 0$

vetorialmente: $\ddot{X} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{K+K_{12}}{M} & -K_{12}/M \\ -K_{12}/M & \frac{K+K_{12}}{M} \end{pmatrix}}_{\equiv A} X$

$X \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Diagonalizando: $A\xi = \lambda\xi \rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{K+K_{12}}{M} - \lambda\right)^2 - \frac{K_{12}^2}{M^2} = 0 = \frac{K^2}{M^2} + \frac{2KK_{12}}{M^2} + \lambda^2 - 2\lambda\frac{(K+K_{12})}{M}$$

$$\lambda = \frac{\cancel{2}(K+K_{12})}{\cancel{2}M} \pm \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}M}\sqrt{(K+K_{12})^2 - K^2 - 2KK_{12}} = \frac{1}{M}(K + K_{12} \pm K_{12})$$

autovalores: $\lambda^{(1)} = \frac{K+2K_{12}}{M}$, $\lambda^{(2)} = \frac{K}{M}$

check: $A\xi^{(1)} = \lambda^{(1)}\xi^{(1)}$

$A\xi^{(2)} = \lambda^{(2)}\xi^{(2)}$

autovetores: $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

↳ ou posso normalizar c/ fator $\frac{1}{\sqrt{2}}$

→ Note que: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\xi^1 + \xi^2}{2}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\xi^2 - \xi^1}{2}$

Portanto posso escrever $X = \frac{x_1}{2}(\xi^1 + \xi^2) + \frac{x_2}{2}(\xi^2 - \xi^1) = \frac{\overbrace{\eta_1}^{= x_1 - x_2}}{2}\xi^1 + \frac{\overbrace{\eta_2}^{= x_1 + x_2}}{2}\xi^2$

e tenho $\ddot{X} = -AX = \frac{\ddot{\eta}_1}{2}\xi^1 + \frac{\ddot{\eta}_2}{2}\xi^2 = -\lambda^1\frac{\eta_1}{2}\xi^1 - \lambda^2\frac{\eta_2}{2}\xi^2$

que implica pois ξ^1 e ξ^2 são "ortogonais"

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 = -\lambda^1\eta_1 \\ \ddot{\eta}_2 = -\lambda^2\eta_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ os "modos" η_1 e η_2 oscilam c/ frequências simples $\omega^2 = \lambda$

x_1 e x_2 são combinações dos modos η_1 e η_2

Podemos escrever: $\eta_1(t) = C_1^+ e^{i\omega_1 t} + C_1^- e^{-i\omega_1 t}$ onde $\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda^{1,2}}$

$$\eta_2(t) = C_2^+ e^{i\omega_2 t} + C_2^- e^{-i\omega_2 t}$$

e as constantes serão ajustadas a partir das cond. iniciais para x_1 e x_2:

⇒ Marion supõe x_1, x_2 comb. de oscilações com ω_1, ω_2 e encontra soluções como abaixo

$\eta_1 = x_1 - x_2$

$\eta_2 = x_1 + x_2$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} x_1 &= \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = \frac{C_1^+}{2} e^{i\omega_1 t} + \frac{C_1^-}{2} e^{-i\omega_1 t} + \frac{C_2^+}{2} e^{i\omega_2 t} + \frac{C_2^-}{2} e^{-i\omega_2 t} \\ x_2 &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} = -\frac{C_1^+}{2} e^{i\omega_1 t} - \frac{C_1^-}{2} e^{-i\omega_1 t} + \frac{C_2^+}{2} e^{i\omega_2 t} + \frac{C_2^-}{2} e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right.$$

e.g. $x_1(0) = -x_2(0)$ e $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$ ⇒ $\eta_2(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0 \Rightarrow C_2^+ = C_2^- = 0$

o→ ←o freq $\omega_1 = \sqrt{\frac{K+2K_{12}}{M}}$

ou seja $\eta_2(t) = 0$, modo antisimétrico (x_1 e x_2 estão sempre fora de fase)

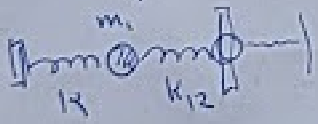
$x_1(0) = x_2(0)$ e $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$ → $\eta_1(0) = \dot{\eta}_1(0) = 0 \to C_1^+ = C_1^- = 0$ e $\eta_1(t) = 0$

o→ o→ freq $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

ou seja, as massas oscilam em fase com freq. ω_2: modo simétrico

Note: - freq. do modo antisimétrico é maior
- se 1 das massas é mantida fixa a freq. da outra é $\sqrt{(K+K_{12})/M} \equiv \omega_0$ (1 massa entre 2 molas/paredes) ⇒ as 2 freqs. acima estão relacionadas à freq. isolada por $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1$: ω_0 — ω_1, ω_2
→ a inclusão da interação "separou" os níveis de energia degenerados.

2) Como dito acima, p/ m_1 ou m_2 oscilando "sozinha", a freq. será a equivalente a uma mola c/ $K + K_{12}$



i.e. $(m_1 = m_2 = M)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}}$

⇒ mas note que é 1 situação diferente, não corresponde às eqs acima não há condição inicial que produza x_1 ou x_2 fixos (apenas o limite $K_{12} \to 0$)

Portanto o acoplamento introduz freqs. ω_1 (movimento anti-simétrico) e ω_2 (simétrico) com $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1$

Acoplamento fraco: $K_{12} \ll K$, o efeito aproxima, no limite $K_{12} \to 0$, o caso desacoplado c/ $\omega_0 \to \sqrt{\frac{K}{M}}$

mais precisamente: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K+K_{12}}{M}} \simeq \sqrt{\frac{K}{M}}(1+\varepsilon)$; $\varepsilon = \frac{K_{12}}{2K} \ll 1$

Neste caso as frequências ficam mais simétricas:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{K}{M}}\underbrace{(1+2\epsilon)}_{\approx(1+\epsilon)^2} \approx \omega_0(1+\epsilon)$$

$$\omega_2 \approx \omega_0(1-\epsilon) \approx \sqrt{\frac{K}{M}}(1-\cancel{\epsilon^2})$$

e.g. p/ $x_1(0)=D$, $\dot{x}_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$

temos $C_1^+=C_1^-=C_2^+=C_2^-=D/2$ → é indep. de ser acoplamento fraco

$$\Rightarrow x_1(t)=D(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)\ ,\quad x_2(t)=D(\underbrace{-\cos\omega_1 t}_{=\cos(\omega_1 t+\pi)}+\cos\omega_2 t)$$

p/ acoplamento fraco: $\omega_{1,2}=\omega_0(1\pm\epsilon)$

Note: $\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t=2\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$

$2\cos^2\omega_1/2\,t-1+2\cos^2\frac{\omega_2}{2}t-1$

$\left(\cos\omega_1 t/2\cos\frac{\omega_2}{2}t-\sin\omega_1 t/2\sin\omega_2 t/2\right)(\ldots+\ldots)=\cos^2\frac{\omega_1}{2}t\cos^2\frac{\omega_2}{2}t-\left(1-\cos^2\frac{\omega_1}{2}t\right)\left(1-\cos^2\frac{\omega_2 t}{2}\right)$

$=-1+\cos^2\omega_1 t/2+\cos^2\omega_2 t/2$

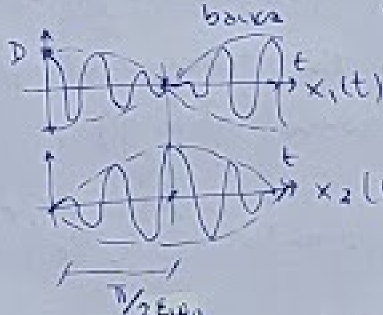
$$\Rightarrow x_1(t)=D\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

$$x_2(t)=D\cos\left(\frac{\omega_1 t+\pi+\omega_2 t}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 t+\pi-\omega_2 t}{2}\right)=D\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

∴ p/ $\omega_{1,2}=\omega_0(1\pm\epsilon)$ $\Rightarrow$ $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}=\omega_0$, $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}=\underbrace{\epsilon\omega_0}_{\text{freq. baixa}}$ $\Rightarrow$ oscilação com freq. ω_0 "modulada" por amplitude oscilando lentamente com $\epsilon\omega_0$

$$x_1(t)=\underbrace{(D\cos\epsilon\omega_0 t)}_{\text{modulação}}\cos\omega_0 t$$

$$x_2(t)=(D\sin\epsilon\omega_0 t)\sin\omega_0 t$$



energia transferida de m_1 p/ m_2 e vice-versa!

3) Lagrangiana do problema:

$$L=\frac{M\dot{x}_1^2}{2}+\frac{M\dot{x}_2^2}{2}-\left[\frac{Kx_1^2}{2}+\frac{K_{12}(x_2-x_1)^2}{2}+\frac{Kx_2^2}{2}\right]$$

Eqs. de Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_{1,2}}=\frac{\partial L}{\partial x_{1,2}}$ $\Rightarrow$ $M\ddot{x}_1=-Kx_1+K_{12}(x_2-x_1)$, $M\ddot{x}_2=-Kx_2-K_{12}(x_2-x_1)$

$\Rightarrow$ como acima, ∴ vai dar a mesma solução

4) Em geral: podemos supor K quadrática nas coord. gen. q_i e considerar movimento ao redor do ponto de equilíbrio dado por $q_i=0$, $U=0$ e $\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{equil.}=0$ $\Rightarrow$ assim, se o deslocamento for

pequena, a en. potencial pode ser aproximada pelos termos quadráticos apenas:

$$U = U_{eq} + \sum_i \cancel{\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{eq}}^{\,0} q_i + \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}}_{\text{"números"}} q_i q_j + \underbrace{\dots}_{\text{ñ considera}}$$

no ponto de equil.

simétrico em j,k

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\, \dot q_j \dot q_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}\, q_j q_k \qquad A_{jk} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_{eq} \text{ (simétrico)}$$

Eq. Lag. p/ cada q_k: $\sum_j \left(m_{jk}\ddot q_j + A_{jk} q_j\right) = 0$

"operador" $(m\partial_t^2 + A)\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ → $Rq = 0$

$\boxed{\text{GEVP}}$

Podemos pensar "vetorialmente", como acima e diagonalizar

A diferença é que tínhamos m diagonal (proporcional à identidade, na verdade)

Aqui vamos supor que cada q_j será comb. linear de soluções oscilatórias simples (como acima). Para cada solução dessas, de freq. ang. ω, vale a equação de Lagrange, i.e. vale $(-m\omega^2 + A)\xi = 0$

$\Rightarrow$ as n freqs. ω corresp. aos "autovalores" (obtidos de: $\det R = 0$) de $R = -m\omega^2 + A$ e cada "autovetor" terá comportamento $A\xi^r = \omega_r^2 m \xi^r$

$$\begin{bmatrix} \xi^{sT} A \xi^r = \omega_r^2\, \xi^{sT} m \xi^r \\ \xi^{rT} A \xi^s = \omega_s^2\, \xi^{rT} m \xi^s \end{bmatrix}$$

note que os autovetores são "ortogonais" p/ ω não degenerados

(Prod. esc. de q, q' definido como $q^T m q'$)

usando $m^T = m$, $A^T = A$ → $(\omega_r^2 - \omega_s^2)\underbrace{\xi^{sT} m \xi^r}_{=0 \text{ p/ } r \neq s} = 0$

tb: tomo $\xi^T \cdot \xi = 1$ (base ortonormal)

$\Rightarrow q(t) = \sum_r \eta_r(t)\, \xi^r$, portanto: $\dot q = \sum_r \dot\eta_r\, \xi^r$

(como acima, sem fator $\sqrt{2}$)

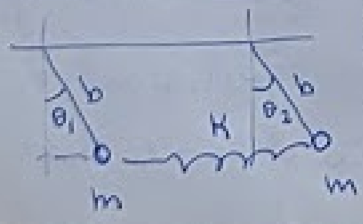
Temos então: $L = \frac{1}{2}\dot q^T m \dot q - \frac{1}{2} q^T A q = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\dot\eta_r \dot\eta_s \underbrace{\xi^{rT} m \xi^s}_{=\delta_{rs}} - \frac{1}{2}\sum_{r,s}\eta_r \eta_s \underbrace{\xi^{rT} A \xi^s}_{=\omega_s^2 \underbrace{\xi^{rT} m \xi^s}_{=\delta_{rs}}}$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_r \left(\dot\eta_r^2 - \omega_r^2 \eta_r^2\right)}$$

η_r são os modos normais

Eq. Lag. $\ddot\eta_r + \omega_r^2 \eta_r^2 = 0$

Pêndulos Acoplados: $L = \frac{m}{2}(b\dot\theta_1)^2 + \frac{m}{2}(b\dot\theta_2)^2 - \left[mg\underbrace{b(1-\cos\theta_1)}_{y_1} + mg\underbrace{b(1-\cos\theta_2)}_{y_2} + \frac{K}{2}\ell^2\right]$



$\ell = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = b\sqrt{(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + \underbrace{(\cancel{1} - \cos\theta_2 - \cancel{1} + \cos\theta_1)^2}_{\sim\theta^2}} \approx b(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2$

supondo ângulos pequenos: $\sin\theta \sim \theta$

$\cos\theta \sim 1 - \theta^2/2$

$$\Rightarrow L = \frac{mb^2}{2}(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) - \left[\frac{mgb}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{Kb^2}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2\right] = \frac{1}{2}\sum m_{jk}\dot q_j \dot q_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k$$

$$R\xi = 0 \quad \text{com} \quad R = -\overset{\text{matriz } m}{m}\omega^2 + A = -mb^2\omega^2 \mathbb{1} + \begin{pmatrix} mgb + Kb^2 & -Kb^2 \\ -Kb^2 & mgb + Kb^2 \end{pmatrix}$$

$$\det R = 0 \longrightarrow (mgb + Kb^2 - mb^2\omega^2)^2 - (Kb^2)^2 = 0$$

$$mgb + Kb^2 - mb^2\omega^2 = \pm Kb^2 \Rightarrow mb\omega^2 = mg + Kb \mp Kb$$

$$\boxed{\omega_1^2 = g/b} \qquad \boxed{\omega_2^2 = \frac{g}{b} + \frac{2K}{m}}$$

autovetores: $\begin{pmatrix} mgb + Kb^2 - mb^2\omega_r^2 & -Kb^2 \\ -Kb^2 & mgb + Kb^2 - mb^2\omega_r^2 \end{pmatrix} \xi^r = 0$

$r=1$ $\quad Kb^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\xi^1 = 0 \rightarrow \xi^1 = \frac{1}{b\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pois assim $\xi^{r\,T} mb^2 \mathbb{1}\, \xi^r = 1$ (normalizado)

$r=2$ $\quad Kb^2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\xi^2 = 0 \rightarrow \xi^2 = \frac{1}{b\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Como acima: $\overset{\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}} = \eta_1\xi^1 + \eta_2\xi^2 = \frac{1}{b\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \theta_1(t) = \frac{1}{b\sqrt{2m}}(\eta_1 + \eta_2) \\ \theta_2(t) = \frac{1}{b\sqrt{2m}}(\eta_1 - \eta_2) \end{array}\right.$

sendo $\eta_{1,2}$ solução de $\ddot\eta_r + \omega_r^2 \eta_r^2 = 0$

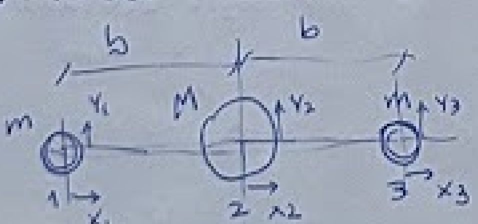
$\Rightarrow$ modos normais $\left[\begin{array}{l} \eta_1 = \frac{b\sqrt{2m}}{2}(\theta_1 + \theta_2) \\ \eta_2 = \frac{b\sqrt{2m}}{2}(\theta_1 - \theta_2) \end{array}\right.$

como p/ molas, 1 modo simétrico
outro antisimétrico

modo η_1 (quando $\eta_2 = 0$) corresp. a $\theta_1 = \theta_2$ oscilam juntos com $\omega_1 = \sqrt{g/b}$ ← pêndulo simples!

modo η_2 (quando $\eta_1 = 0$) corresp. a $\theta_1 = -\theta_2$ oscilam em direções opostas, com $\omega_2 > \omega_1$ (como acima p/ molas)

5) Molécula de CO_2



Vamos considerar apenas vibrações, descontando translações e rotações

eixo x: tomo CM em repouso (na origem)

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{m}{M}(x_1 + x_3)$$

$\therefore$ só graus de liberd. x_1, x_3

eixo y: p/ não haver rotação imponho $y_1 = y_3$

além de $m(y_1 + y_3) + My_2 = 0 \rightarrow y_2 = -\frac{m}{M}(y_1 + y_3)$
$\rightarrow$ só grau de liberd. y_2

Eixo x: $L(x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3) = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m^2}{2M}(\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2 - \frac{k_1}{2}\left[(x_2-x_1)^2 + (x_3-x_2)^2\right]$

$x_2 = -\frac{m}{M}(x_1+x_3)$

Supondo molas c/ k_1

$= \frac{m^2}{M^2}\left[\left(x_3 + \frac{M+m}{m}x_1\right)^2 + \left(x_1 + \frac{M+m}{m}x_3\right)^2\right]$

escolho coord. gen. $q_1 \equiv x_3 + x_1$, $q_2 \equiv x_3 - x_1$

$= \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2}$

$$= \frac{m}{4}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{m^2}{2M}\dot{q}_1^2 - \frac{k_1 m^2}{2M^2}\left[\left(q_1 + \frac{M}{m}x_1\right)^2 + \left(q_1 + \frac{M}{m}x_3\right)^2\right]$$

$= \frac{q_1^2+q_2^2}{2}$

$$= 2q_1^2 + 2q_1\frac{M}{m}\underbrace{(x_1+x_3)}_{=q_1} + \frac{M^2}{m^2}(x_1^2 + x_3^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{m}{4}\dot{q}_2^2 + \frac{m}{4M}(M+2m)\dot{q}_1^2 - \frac{k_1}{4}q_2^2 - \frac{k_1(2m+M)^2}{4M^2}q_1^2}$$

já foram desacoplados ☺

$\frac{m}{\cancel{2}}\ddot{q}_2 = -\frac{k_1}{\cancel{2}}q_2$ → oscilação simples com $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$

$\frac{m}{\cancel{2M}}(M+2m)\ddot{q}_1 = -\frac{k_1(2m+M)^2}{\cancel{2M^2}}q_1$ → idem com $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1(2m+M)}{mM}}$

∴ modos normais: $q_1 \rightarrow x_1 = x_3$, $x_2 = -\frac{2m}{M}x_1$
(i.e. $q_2 = 0$)

$q_2 \rightarrow x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$
(i.e. $q_1 = 0$)

Eixo y: $L(y_2, \dot{y}_2) = \cancel{2}\cdot\frac{m}{\cancel{2}}\frac{M^2}{4m^2}\dot{y}_2^2 + \frac{M}{2}\dot{y}_2^2 - \frac{k_2}{2}(2y_2 - 2y_1)^2$

$y_1 = y_3 = -\frac{M}{2m}y_2$

Supondo força restauradora c/ k_2
em cada mola "vertical"
∴ força $-k_2(\underbrace{2y_2-2y_1}_{\ell})$
corresp. a $U = \frac{k_2 \ell^2}{2}$

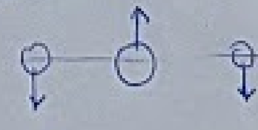
→ não são 2 molas indep. ∴ penso em 1 força só

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{M}{4m}(M+2m)\dot{y}_2^2 - \frac{k_2}{2}\frac{(2m+M)^2}{m^2}y_2^2}$$

→ oscilação simples com $\omega_2 = \sqrt{\frac{2(M+2m)}{Mm}}$

Eq. Lag. $\frac{M}{2\cancel{m}}(M+2m)\ddot{y}_2 = -k_2\frac{(M+2m)^2}{m^2}y_2$

∴ modo normal "vertical":



a freq. p/ y_1, y_3 é a mesma

$y_1 = y_3 = \underbrace{-}\frac{M}{2m}y_2$

sentido contrário, amplitude um pouco menor