

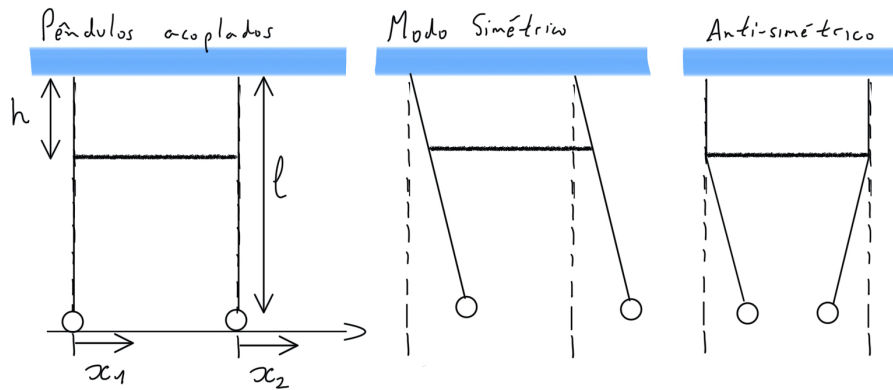
Prova 1 - 4302112 - Física II - 18/09/2023

1) [3,3] Um sistema é composto por dois pêndulos com cordas de comprimento ℓ , que estão presas entre si por uma haste a uma altura h do teto, como mostra a figura. Como vimos, temos dois modos de oscilação conjunta: um modo anti-simétrico (no qual o deslocamento $x_+ = x_1 + x_2 = 0$), e outro simétrico, onde $x_- = x_1 - x_2 = 0$.

a) Qual a frequência angular de oscilação para os modos simétrico x_+ e anti-simétrico x_- ?

b) Se começamos com a massa 1 deslocada de um valor A , com a massa 2 em deslocamento nulo, e ambas as massas em repouso, qual a função do movimento final para os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$? Há algum batimento na oscilação de cada pêndulo? Se houver, qual a frequência?

c) A partir da condição inicial, quanto tempo leva para que a massa 1 pare, e transfira a energia para a massa 2?



2) [3,4] Em um oscilador harmônico amortecido, a massa m é submetida a uma força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, em regime estacionário, apresentando um deslocamento dado por $x(t) = A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$, onde

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad \text{e} \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

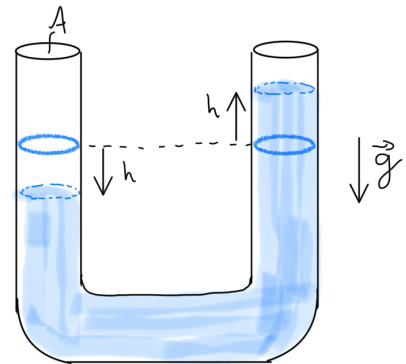
a) Qual frequência angular ω que maximiza a energia potencial média $\bar{U} = \frac{m\omega_0^2}{4} A^2(\omega)$? Qual o valor da energia potencial média neste caso?

b) Qual frequência angular ω que maximiza a energia cinética média $\overline{K} = \frac{m\omega^2}{4}A^2(\omega)$? Qual o valor da energia cinética média neste caso?

c) Qual frequência angular ω que iguala a energia cinética média $\overline{K}$ e a energia potencial média $\overline{U}$? Como esta situação se relaciona com o oscilador harmônico sem amortecimento?

Dê suas respostas em termo da frequência angular do oscilador harmônico livre ω_0 , da taxa de amortecimento γ , da amplitude da força aplicada F_0 e da massa do corpo.

3) [3,3] Um tubo em U, e seção reta A , contém uma massa m de um fluido ocupando um volume V . Se há um deslocamento inicial h do nível do fluido em um momento inicial, o líquido começa a oscilar dentro do tubo. Considere g a aceleração gravitacional



a) Qual seria a frequência de oscilação ω_0 do fluido, em função dos parâmetros acima?

b) Se a frequência angular observada ω for $\omega_0/3$, qual a taxa de amortecimento γ advinda da viscosidade do fluido no tubo, em função de ω_0 ?

c) Qual a função do movimento $x(t)$ da altura do líquido no tubo neste caso? Considere que a velocidade inicial da coluna de líquido é nula.

Energia potencial: aprox. quadrática- $U(x) = \frac{kx^2}{2}$. Energia Cinética: $K(v) = \frac{mv^2}{2}$

Sistema conservativo: $E = U(x) + K(v) = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\omega_0^2 x^2 + v^2)$

Equação de movimento do oscilador harmônico amortecido forçado:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t); \text{ com } \omega_0^2 = k/m, \gamma = \rho/m.$$

Soluções homogêneas (para $F_0 = 0$)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \exp[-\gamma t/2] = [B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)] \exp[-\gamma t/2]; \omega^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2$$

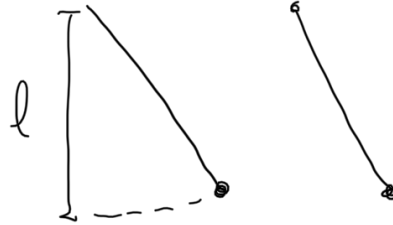
$$x(t) = A \exp[-\gamma_+ t/2] + B \exp[-\gamma_- t/2]; \gamma_{\pm} = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2};$$

$$x(t) = (a + bt) \exp[-\gamma t/2].$$

P1 2023

1) a) Modo simétrico:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



Antissimétrico $\omega_- = \sqrt{\frac{g}{lh}}$



Lembrando da eq. do pêndulo simples

$$P_t = mg \sin \theta \approx mg \theta$$

$$m \ddot{\theta} \cdot l = -mg \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta = -\omega^2 \theta$$

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

b) $x_+ = a \sin(\omega_+ t) + b \cos(\omega_+ t) = x_1 + x_2$

$$x_- = c \sin(\omega_- t) + d \cos(\omega_- t) = x_1 - x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1(0) = A, \quad x_2(0) = 0 \\ x_1(0) = A, \quad x_2(0) = A \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_+(0) = A \\ x_-(0) = A \end{array} \Rightarrow b = d = A$$

$$\dot{x}_+ = \omega_+ A \cos(\omega_+ t) - \omega_+ B \sin(\omega_+ t) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_- = \omega_- C \cos(\omega_- t) - \omega_- D \sin(\omega_- t) = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_+(0) = 0 \\ \dot{x}_-(0) = 0 \end{array} \Rightarrow a = c = 0$$

$$x_+ = A \cos(\omega_+ t) \quad x_- = A \cos(\omega_- t)$$

$$x_1 = \frac{x_+ + x_-}{2} = \frac{A}{2} [\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)]$$

$$x_2 = \frac{x_+ - x_-}{2} = \frac{A}{2} [\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)]$$

Chamando $\omega_0 = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$ $\Delta\omega = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2}$

$$\Rightarrow \omega_+ = \omega_0 + \Delta\omega, \quad \omega_- = \omega_0 - \Delta\omega$$

$$\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega_+ t} + e^{i\omega_- t}]$$

$$\begin{aligned} e^{i\omega_+ t} + e^{i\omega_- t} &= e^{i\omega_0 t} e^{i\Delta\omega t} + e^{i\omega_0 t} e^{-i\Delta\omega t} \\ &= e^{i\omega_0 t} (e^{i\Delta\omega t} + e^{-i\Delta\omega t}) = e^{i\omega_0 t} \cdot 2 \cos(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [e^{i\omega_+ t} + e^{i\omega_- t}] &= \operatorname{Re} [e^{i\omega_0 t} \cdot 2 \cos(\Delta\omega t)] \\ &= 2 \cos(\Delta\omega t) \operatorname{Re} [e^{i\omega_0 t}] = 2 \cos(\Delta\omega t) \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$x_1(t) = A \cos(\Delta\omega t) \cos(\omega_0 t)$$

$\hookrightarrow$ batimento $\Delta\omega = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l-h}} \right)$

Para $x_2 \Rightarrow \cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega_+ t} - e^{i\omega_- t}]$

$$\begin{aligned} e^{i\omega_+ t} - e^{i\omega_- t} &= e^{i\omega_0 t} e^{i\Delta\omega t} - e^{i\omega_0 t} e^{-i\Delta\omega t} \\ &= e^{i\omega_0 t} (e^{i\Delta\omega t} - e^{-i\Delta\omega t}) = e^{i\omega_0 t} \cdot 2i \sin(\Delta\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} [e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_2 t}] &= \operatorname{Re} [e^{i\omega_0 t} \cdot 2i \sin(\omega_0 t)] = \\
 &= 2 \sin(\omega_0 t) \operatorname{Re} [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] \cdot i \\
 &= 2 \sin(\omega_0 t) \cdot [-\sin(\omega_0 t)]
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_2(t) = -A \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)$$

c) Parada quando $\cos(\omega_0 t) = 0 \Rightarrow \omega_0 t = \frac{\pi}{2}$

$$t = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\frac{g}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l-h}}} = \pi \left(\sqrt{\frac{g}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l-h}} \right)^{-1}$$

2) a) Max $\bar{U} \Rightarrow \frac{d\bar{U}}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dm} A^2 = 0$

$$\frac{d}{dm} A^2 = \frac{d}{dm} \frac{F_0^2 / m^2}{(\omega_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2} = F_0^2 / m^2 \cdot \frac{d}{dm} \frac{1}{(\omega_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dm} \left(\frac{1}{(\omega_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2} \right) = \frac{-1}{[(\omega_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2]^2} \frac{d}{dm} [(\omega_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dm} [(\omega_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2] = 2(\omega_0^2 - m^2) \cdot (-2m) + 2m\gamma^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m(-2(\omega_0^2 - m^2) + \gamma^2) = 0$$

$$\gamma^2 = 2(\omega_0^2 - m^2) \Rightarrow m^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow m = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

$$b) \text{ M\u00f3x } \bar{K} \Rightarrow \frac{d\bar{K}}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dm} (m^2 A^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} (m^2 A^2) &= \left(\frac{d}{dm} m^2 \right) A^2 + m^2 \frac{d}{dm} A^2 = \\ &= 2m A^2 + m^2 \frac{d}{dm} A^2 \end{aligned}$$

$$= 2m \cdot \frac{F_0^2/m^2}{(m_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2} + m^2 \cdot \frac{-F_0^2/m^2}{[(m_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2]^2} 2m [\gamma^2 - 2(m_0^2 - m^2)]$$

$$= \frac{2m F_0^2}{m^2} \cdot \frac{[(m_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2] - m^2 [\gamma^2 - 2(m_0^2 - m^2)]}{[(m_0^2 - m^2)^2 + \gamma^2 m^2]^2} = 0$$

$$(m_0^2 - m^2)^2 + \cancel{\gamma^2 m^2} - \cancel{m^2 \gamma^2} + 2m^2(m_0^2 - m^2) = 0$$

$$(m_0^2 - m^2)(m_0^2 - m^2 + 2m^2) = 0$$

$$(m_0^2 - m^2)(m_0^2 + m^2) = 0 \Rightarrow m_0^2 = m^2 \Rightarrow \underline{m = m_0}$$

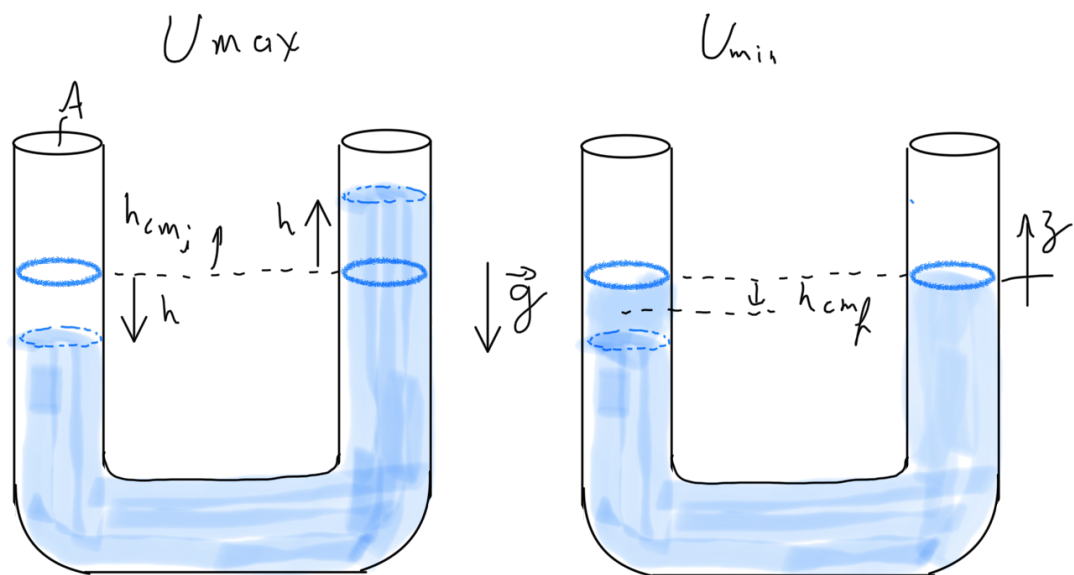
$$c) \bar{K} = \bar{U} \Rightarrow \frac{\cancel{m} \cancel{m^2} A^2}{\cancel{4}} = \frac{\cancel{m} m_0^2 A^2}{\cancel{4}}$$

$$\underline{m = m_0}$$

Situa\u00e7\u00e3o id\u00eantica ao oscilador harm\u00f4nico livre.

\(\Rightarrow\) Dissipa\u00e7\u00e3o = Trabalho de for\u00e7a externa

3) A massa de l\u00edquido acima da linha de equil\u00edbrio est\u00e1 com uma energia potencial inicial $U_i = \Delta m \cdot g \cdot h_{cm}$, onde h_{cm} \u00e9 a altura do centro de massa: $h_{cm} = h/2$



No mínimo, a energia potencial será $U_f = \Delta m g \cdot (-h_{cm})$

Variação de energia potencial: $\Delta U = U_f - U_i = -2 \Delta m g h_{cm}$

$$\Delta U = -\Delta m g h$$

$$\text{Com } \frac{\Delta m}{h \cdot A} = \frac{m}{V} \Rightarrow \Delta U = -m \cdot \frac{A}{V} g h^2$$

transferida para energia cinética $K = \frac{m}{2} \dot{z}^2$

$$\text{Equação de energia: } E = m \cdot \frac{A}{V} g z^2 + \frac{m}{2} \dot{z}^2$$

$$= \frac{m}{2} \left(\dot{z}^2 + \frac{2Ag}{V} \cdot z^2 \right) = \frac{m}{2} \left(\dot{z}^2 + \omega_0^2 z^2 \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2Ag}{V}}$$

$$b) \quad m = \frac{m_0}{3}$$

$$m^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{p}{2} \right)^2$$

$$\frac{m_0^2}{9} = \omega_0^2 - \left(\frac{p}{2} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{p}{2} \right)^2 = \frac{8m_0^2}{9}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{8m_0^2}{9}} = \frac{2}{3} m_0 \sqrt{2} \Rightarrow \gamma = \frac{4\sqrt{2}}{3} m_0$$

$$c) \quad x(t) = [B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)] \exp(-\gamma t/2)$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = [B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)] \frac{d}{dt} \exp(-\gamma t/2)$$

$$+ \exp(-\gamma t/2) \frac{d}{dt} [B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)]$$

$$= -\frac{\gamma}{2} [B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)] \exp(-\gamma t/2)$$

$$+ m \exp(-\gamma t/2) [-B \sin(\omega t) + C \cos(\omega t)]$$

$$x(0) = B = h$$

$$v(0) = -\frac{\gamma}{2} B + mC = 0 \Rightarrow C = \frac{\gamma}{2m} B = \frac{\gamma h}{2m} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{m_0}{2} \frac{h}{m_0} = \frac{2\sqrt{2}}{3} h$$

$$C = 2\sqrt{2} h$$

$$x(t) = h [\cos(\omega t) + 2\sqrt{2} \sin(\omega t)] \exp(-\gamma t/2)$$

$$\text{con } \omega = m_0/3, \quad \gamma = \frac{4\sqrt{2}}{3} m_0$$

$$\text{Usando } x = A \cos(\omega t + \varphi) e^{-\gamma t/2}$$

$$A^2 = h^2 [1 + 4 \cdot 2] = h^2 \cdot 9 \quad A = 3h$$

$$\text{by } \varphi = 2\sqrt{2} \quad \cos \varphi = \frac{1}{3}$$

$$x(t) = 3h \cos(\omega t + \varphi) e^{-\gamma t/2}$$

Note quão dramático é o amortecimento!

$$\eta = 4\sqrt{2} \frac{m_0}{3}; \quad m = \frac{m_0}{3}; \quad \eta = 4\sqrt{2} m = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{2}}{T}$$

$$\frac{\eta}{2} = \overline{\delta}_a^{-1} \quad \frac{2\sqrt{2}}{T} = \overline{\delta}_a^{-1} \quad \frac{\overline{\delta}_a}{T} = 2\sqrt{2}$$