Classificação de corpos localmente compactos

Davi Souza [1] Prof. Dr. Rodrigo Gondim [2]

[1]UFPE, bolsista de mestrado CAPES, davi.crg@gmail.com

[2]UFRPE e UFPE, rodrigo.gondim@ufrpe.br

Workshop de verão ICMC, 2024

Roteiro

Definição

*Um **valor absoluto** em um corpo K é uma função*

$$| \ | : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo as seguintes propriedades

1. $|x| \geq 0, \ \ e \ |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$

E vamos sempre supor que $| \ |$ não é o trivial, ou seja, não é tal que $|x| = 1, \forall x \neq 0$. Definimos a distância entre 2 pontos $x, y \in K$ por

$$d(x, y) = |x - y|$$

isso torna K um espaço métrico e portanto um espaço topológico.

Definição

Dois valores absolutos em K são equivalentes se induzem a mesma topologia em K.

Proposição

Sejam $|\ |_1$ e $|\ |_2$ valores absolutos num corpo K. Então $|\ |_1$ e $|\ |_2$ são valores absolutos equivalentes se, e somente se existe um número real $s > 0$ tal que

$$|x|_1 = |x|_2^s, \ \forall x \in K$$

Definição

Um valor absoluto $|\ |$ é chamado não arquimediano se $|n|$ se mantém limitado $\forall n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, é chamado de arquimediano.

Proposição

Uma valor absoluto $|\ |$ num corpo K é não arquimediano se, se somente se vale a desigualdade triangular forte, ou seja,

$$|x+y| \leq max\left\{|x|,|y|\right\},\ \forall x,y \in K$$

Definição

Uma valoração exponencial num corpo K é uma função

$$v : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

satisfazendo

1. $v(x) = \infty \Longleftrightarrow x = 0$
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$
3. $v(x+y) \geq min\left\{v(x), v(y)\right\}$

Desconsideramos o caso trivial em que $v\,(K) = \{0, \infty\}$. É fácil ver que se q é um número real fixado e maior que 1, então

$$|x| = q^{-v(x)}$$

define um valor absoluto em K não arquimediano. Reciprocamente se tivermos um valor absoluto não arquimediano definido em K e q é um número real fixado maior que 1, então

$$v(x) = -log_q|x|$$

define uma valoração exponencial em K. Dizemos que duas valorações exponenciais v_1, v_2 são equivalentes, se e $v_1 = sv_2$ para algum $s > 0$.

Proposição

Se K é um corpo com valor absoluto $|\ |$ não arquimediano e v é uma valoração associada, então o subconjunto

$$\mathcal{O} = \{x \in K : v(x) \geq 0\} = \{x \in K : |x| \leq 1\}$$

é um anel local, chamado anel de valoração, com grupo de unidades

$$\mathcal{O}^* = \{x \in K : v(x) = 0\} = \{x \in K : |x| = 1\}$$

e único ideal maximal

$$\mathfrak{p} = \{x \in K : v(x) > 0\} = \{x \in K : |x| < 1\}$$

e tais conjuntos são invariantes por valores absolutos equivalentes ou valorações exponenciais equivalentes.

Demonstração:

- Note que $0, 1 \in \mathcal{O}$ e se $x, y \in \mathcal{O}$, então $|xy| = |x||y| \leq 1$ e $|x + y| \leq max\{|x|, |y|\} \leq 1$, logo xy e $x + y \in \mathcal{O}$.
- Se $x \in \mathcal{O}^*$, o grupo das unidades de $\mathcal{O}$, então $x, x^{-1} \in \mathcal{O}$, logo $|x| \leq 1$ e $|x|^{-1} \leq 1$, logo $1 \leq |x| \leq 1$, logo $|x| = 1$. Reciprocamente, se $|x| = 1$, então $|x^{-1}| = 1$ também e temos $x, x^{-1} \in \mathcal{O}$, logo $x \in \mathcal{O}^*$.
- É fácil ver que $\mathfrak{p}$ é um ideal de $\mathcal{O}$ e provaremos primeiro que é de fato um ideal maximal. Com efeito, se I é um ideal de $\mathcal{O}$ que contém $\mathfrak{p}$ estritamente, então I contém uma unidade de $\mathcal{O}$, logo $I = \mathcal{O}$, logo $\mathfrak{p}$ é maximal. Agora, se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal e como ele é próprio, temos que ele não possui unidades, logo $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ e como $\mathfrak{m}$ é maximal e $\mathfrak{p}$ é próprio, concluimos que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$.

$\square$

Uma valoração exponencial é dita **discreta** se admite um menor valor positivo s. Neste caso temos que

$$v(K^*) = s\mathbb{Z}$$

e é dita **normalizada** se $s = 1$. Note que podemos sempre passar uma valoração discreta para uma normalizada dividindo por s sem mudar os invariantes $\mathcal{O}, \mathcal{O}^*, \mathfrak{p}$. Feito isso, um elemento

$$\pi \in \mathcal{O} \text{ tal que } v(\pi) = 1$$

é dito *primo* e é fácil perceber que todo elemento $x \in K^*$ admite uma única representação

$$x = u\pi^m$$

com $m \in \mathbb{Z}$ e $u \in \mathcal{O}^*$ e neste caso, claramente $m = v(x)$.

Proposição

Se v é uma valoração exponencial discreta em K, então

$$\mathcal{O} = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$$

é um domínio de ideais principais. Se v é normalizada, então os ideais não nulos de $\mathcal{O}$ são

$$\mathfrak{p}^n = \pi^n \mathcal{O} = \{x \in K : v(x) \geq n\}, \ n \geq 0$$

onde π é um elemento primo.

Proposição

Seja K é um corpo com valor absoluto não arquimediano, $\mathcal{O}$ seu anel de valoração e $\mathfrak{p}$ seu ideal maximal. Se $\hat{K}$ é o completamento de K, $\hat{\mathcal{O}}$ o seu anel de valoração e $\hat{\mathfrak{p}}$ seu ideal maximal, então

$$v(K^*) = \hat{v}(\hat{K}^*)$$

onde $\hat{v}$ é a valoração de $\hat{K}$. Em particular, se v é discreta, então $\hat{v}$ também é.

Definição

Um corpo com valor absoluto K é dito ***corpo local*** *se é completo, a valoração é discreta e seu corpo de resíduos é um conjunto finito.*

Proposição

Todo corpo local K é localmente compacto.

Roteiro

1. Corpos com valor absoluto
2. p - ádicos
3. Corpos localmente compactos

Definição

Fixado um número primo $p \in \mathbb{Z}$, a valoração p - ádica é a função

$$v_p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

definida como $v_p(0) = \infty$ e se $n \neq 0$, escreva sua fatoração em potência de primos

$$n = \pm p_1^{e_1} \dots p_l^{e_l}$$

se p não aparece na fatoração de n, definimos $v_p(n) = 0$ e se aparece, com $p = p_j$, definimos $v_p(n) = e_j$.

Estendemos v_p para os racionais como $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$ e é fácil verificar que essa definição é consistente, ou seja

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$$

Proposição

v_p é uma valoração exponencial em $\mathbb{Q}$, ou seja, para todos $x, y \in \mathbb{Q}$, temos

1. $v_p(x) = \infty \Longleftrightarrow x = 0$
2. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$
3. $v_p(x + y) \geq min\,\{v_p(x), v_p(y)\}$

Ademais, $v_p(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$, ou seja, v_p é discreta e normalizada.

Definição

Para cada $x \in \mathbb{Q}$, definimos o valor absoluto p - ádico de x como

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}$$

Note que a função $|\ |_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um valor absoluto não arquimediano.

Proposição

Todo valor absoluto em $\mathbb{Q}$ *é equivalente a um dos* $|\ |_p$ *ou* $|\ |_\infty$.

Definição

Definimos o corpo $\mathbb{Q}_p$ *dos números* p *- ádicos como o completamento de* $\mathbb{Q}$ *com respeito ao valor absoluto* p *- ádico e denotamos seu anel de valoração por* $\mathbb{Z}_p$.

Proposição

$\mathbb{Q}_p$ *é corpo local, e em particular, é localmente compacto.*

Roteiro

Proposição (Ostrowski)

Se $(K, \| \, \|)$ *é um corpo com valor absoluto arquimediano e completo então existe um isomorfismo* σ *de* K *em* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *satisfazendo*

$$\|a\| = |\sigma a|^s, \forall a \in K$$

para algum $s \in (0, 1]$ *fixado, com* $| \, |$ *o valor absoluto usual de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Em particular,* σ *também é homeomorfismo.*

Proposição

Seja K completo com respeito ao valor absoluto $|\ |$ e V um espaço vetorial normado n-dimensional sobre K. Então para toda base $v_1, \ldots, v_n$ de V, a norma do máximo

$$\|x_1 v_1 + \cdots x_n v_n\| = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

é equivalente a norma dada em V. Em particular, V é completo e o isomorfismo

$$K^n \longrightarrow V,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 v_1 + \cdots x_n v_n$$

é um homeomorfismo.

Proposição

Seja V *espaço vetorial sobre* $\mathbb{Q}_p$*, normado e localmente compacto. Então* $dim(V) < \infty$.

Proposição

Se $(K, |\ |)$ *é um corpo com valor absoluto localmente compacto, então é completo.*

Proposição

Se $(K, |\ |)$ *é corpo com valor absoluto localmente compacto e de característica* 0*, então existe um isomorfismo, que também é homeomorfismo, entre*

1. $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, se* $(K, |\ |)$ *é arquimediano.*
2. *uma extensão finita de* $\mathbb{Q}_p$*, para algum primo* p*, se* $(K, |\ |)$ *é não arquimediano.*

Demonstração:

- Da Análise, sabemos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos localmente compactos. Agora se $K|\mathbb{Q}_p$ é extensão finita de grau n, do Teorema de Completude de espaços de dimensão finita, segue que $K \simeq \mathbb{Q}_p^n$ tanto algebricamente quanto topologicamente e já que $\mathbb{Q}_p$ é localmente compacto, segue que K é localmente compacto.
- Agora seja $(K, |\ |)$ como no enunciado. Se o valor absoluto é arquimediano, por Ostrowski, temos o caso 1. Se o valor absoluto é não arquimediano, como $char(K) = 0$, temos que $\mathbb{Q} \subseteq K$ e como o valor absoluto é não arquimediano, sua restrição é equivalente a um valor absoluto p-ádico. Como K é completo, segue da unicidade do completamento que o fecho topológico de $\mathbb{Q}$ em K é $\mathbb{Q}_p \subseteq K$. Concluimos então pelo teorema de espaços normados localmente compactos, que K é extensão finita de $\mathbb{Q}_p$.

$\square$

Referências

Jürgen Neukirch, Algebraic Number Theory, Springer, Germany, 1999.

Fernando Q. Gouvêa, p - adic Numbers: An Introduction, Springer, New York, 2003.