

Um Estudo de “Os Elementos” de Euclides

Alyson Rodrigo de Olinda Mendes
Orientador: Djeison Benetti

Universidade Federal de Mato Grosso
Workshop de Verão - USP

22 de janeiro de 2024

- Conhecimento matemático herdado dos povos antigos do Egito e da Babilônia;
- A experiência cotidiana não bastava como forma de validação;
- Influência da filosofia eleática.

[...] o que satisfazia egípcios e babilônios não bastou para contentar a exigência grega. Com os matemáticos da Grécia, a razão suplanta a empeiria como critério de verdade e a matemática ganha características de uma ciência dedutiva (Bicudo, 2009).

Algumas definições

- I.1 Ponto é aquilo de que nada é parte.
- I.2 E linha é comprimento sem largura.
- I.23 Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.
- III.6 Um segmento de círculo é a figura contida tanto por uma reta quanto por uma circunferência de círculo.
- III.7 E ângulo de um segmento é o contido tanto por uma reta quanto por uma circunferência de círculo.

Noções comuns (Axiomas)

- 1 As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
- 2 E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
- 3 E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
- 4 E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
- 5 E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
- 6 E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
- 7 E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
- 8 E o todo [é] maior do que a parte.
- 9 E duas retas não contêm uma área.

Postulados

Postulado I

Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

Postulado II

Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

Postulado III

E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

Postulado IV

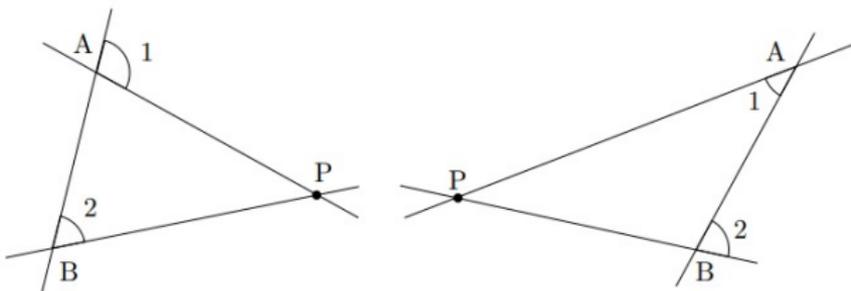
E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

Postulado V

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Axioma V

Por um ponto fora de uma reta m pode se traçar uma única reta paralela a reta m .



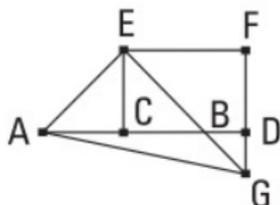
- Livro I: Triângulos e retas paralelas;
- Livro II: Paralelogramos;
- Livro III: Círculos e circunferências;
- Livro IV: Inscrição e circunscrição de polígonos;
- Livro V: Magnitudes (razão e proporção).

Exemplo de proposição

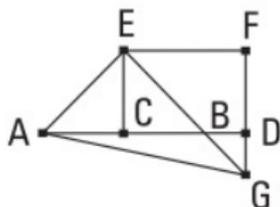
Proposição II.10

Caso uma linha reta seja cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, os quadrados ambos juntos, o sobre a toda com a adicionada e o sobre a adicionada, são o dobro tanto do sobre a metade quanto do quadrado descrito sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada, como sobre uma única

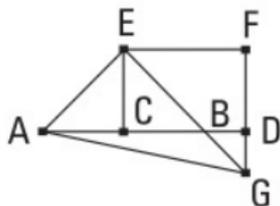
Demonstração: Fique, pois, cortada alguma reta, a AB , em duas no C , e fique adicionada a ela alguma reta, a BD , sobre uma reta; digo que os quadrados sobre as AD , DB são o dobro dos quadrados sobre as AC , CD .



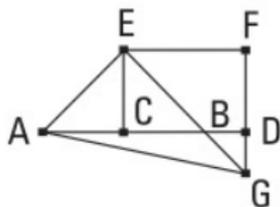
Fique, pois, descrita, a partir do ponto C, a CE em ângulos retos com a AB, e fique posta igual a cada uma das AC, CB, e fiquem ligadas as EA, EB; e, por um lado, pelo E, fique traçada a EF paralela à AD, e, por outro lado, pelo D, fique traçada a FD paralela à CE. E, como alguma reta, a EF, caiu sobre as retas paralelas EC, FD, portanto, os sob CEF, EFD são iguais a dois retos; portanto, os sob FEB, EFD são menores do que dois retos; mas as que são prolongadas a partir de menores do que dois retos encontram-se; portanto, as EB, FD, sendo prolongadas do lado de B, D, encontrar-se-ão.



Fiquem prolongadas e encontrem-se no G, e fique ligada a AG. E, como a AC é igual à CE, também o ângulo sob EAC é igual ao sob AEC; e, o junto ao C é reto; portanto, cada um dos sob EAC, AEC [é] metade de um reto. Pelas mesmas coisas, então, cada um dos sob CEB, EBC é metade de um reto; portanto, o sob AEB é reto. E, como o sob EBC é metade de um reto, portanto, também o sob DBG é metade de um reto. Mas também o sob BDG é reto; pois, é igual ao sob DCE; pois, alternos; portanto, o sob DGB restante é metade de um reto; portanto, o sob DGB é igual ao sob DBG; desse modo, também o lado BD é igual ao lado GD.

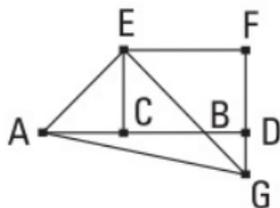


De novo, como o sob EGF é metade de um reto, mas o junto ao F é reto; pois, é igual ao oposto, o junto ao C; portanto, o sob FEG restante é metade de um reto; portanto, o ângulo sob EGF é igual ao sob FEG; desse modo, também o lado GF é igual ao lado EF. E, como [a EC é igual à CA], [também] o quadrado sobre a EC é igual ao quadrado sobre a CA; portanto, os quadrados sobre as EC, CA são o dobro do quadrado sobre a CA. Mas o sobre a EA é igual aos sobre as EC, CA; portanto, o quadrado sobre a EA é o dobro do quadrado sobre a AC.



Mas os sobre as AD, DG são iguais ao sobre a AG; portanto, os [quadrados] sobre as AD, DG são o dobro dos [quadrados] sobre as AC, CD. Mas a DG é igual à DB; portanto, os [quadrados] sobre as AD, DB são o dobro dos quadrados sobre as AC, CD.

Portanto, caso uma linha reta seja cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, os quadrados ambos juntos, o sobre a toda com a adicionada e o sobre a adicionada, são o dobro tanto do sobre a metade quanto do quadrado descrito sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada, como sobre uma única; o que era preciso provar.



“Previno, por fim, a quem possa interessar, que é preciso fôlego para acompanhar muitíssimas das demonstrações que aqui se encontram, e determinação. Garanto, no entanto, que, vencida a inércia, ultrapassado o obstáculo, alcançado o objetivo com a compreensão do resultado, cabe a recompensa de ter mergulhado no próprio processo do que denominamos 'pensar' e de haver podido apreendê-lo em toda a sua abrangência”(Bicudo, 2009).

Referências



Euclides

Os Elementos

Editora UNESP, 2009.



Irineu Bicudo

Platão e a Matemática

Letras clássicas, n. 2, p.301-315, 1998.



Irineu Bicudo

Prefácio e Introdução. In: Euclides. Os Elementos.

Editora UNESP, 2009.



João Lucas Marques Barbosa

Geometria Euclidiana Plana

Coleção do Professor de Matemática. SBM, 2006.