PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 15 DE JANEIRO

SEGUNDA PROVA

2) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

a) Sejam $u, v, w \in V$. O conjunto $\{u,v,w\}$ é LI se, e somente se, $\{u,v\}$, $\{u,w\}$ e $\{v,w\}$ o são.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é falsa, pois, se $V=\mathbb{R}^2$, $u=(1,0)$, $v=(0,1)$, e $w=(1,1)$, então, embora $\{u,v\}$, $\{u,w\}$ e $\{v,w\}$ sejam LI, $\{u,v,w\}$ é LD (pois $1.u+1.v+(-1).w=(0,0)$).

b) Se V tem um conjunto gerador com n vetores, então nenhum subconjunto de V com menos do que n vetores pode gerar V.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é falsa. De fato, se $V=\mathbb{R}^2$, então, embora exista um conjunto gerador de V com 3 elementos (tal como $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$), existe também um conjunto gerador de V com menos do que 3 elementos (por exemplo, $\{(1,0),(0,1)\}$).

c) Suponha que $\dim(V)=n$, e que U e W sejam subespaços de V tais que $\dim(U)+\dim(W)>n$. Então $U\cap W\neq\{0_V\}$.

RESOLUÇÃO.

Como $U+W$ é um subespaço de V, $\dim(U+W)\leq\dim(V)=n$. Consequentemente,

$$\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)>n-\dim(U+W)\geq 0,$$

e, portanto, $U\cap W\neq\{0_V\}$.

d) Se S é um subconjunto LI de V, então todo subconjunto de S é LI.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é verdadeira. Para mostrar isso, suponhamos que A seja um subconjunto de S e notemos que, se A fosse LD, então existiriam $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $v_1, \ldots, v_n \in A$ dois a dois distintos e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V$. Logo, como todo elemento de A é também um elemento de S, nesse caso, existiriam $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $v_1, \ldots, v_n \in S$ dois a dois distintos e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V$, e, portanto, S seria LD.

TERCEIRA PROVA DA TURMA DO IME

3) Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, e sejam $T \in L(V, W)$ e $S \in L(W, V)$.

a) Se $S \circ T$ é injetora, então T é injetora.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é verdadeira, pois, se $S \circ T$ é injetora, e se $u_1, u_2 \in V$ são tais que $T(u_1) = T(u_2)$, então $(S \circ T)(u_1) = S(T(u_1)) = S(T(u_2)) = (S \circ T)(u_2)$, e, portanto, resulta da injetividade de $S \circ T$ que $u_1 = u_2$.

b) Se $\dim(W) > \dim(V)$, então $S \circ T$ não é sobrejetora.

RESOLUÇÃO.

A afirmação é falsa. De fato, se $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^2$,

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \; x \mapsto (x, 0) \quad \text{e} \quad S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto x,$$

então, embora $\dim(W) > \dim(V)$, $S \circ T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação identidade e, portanto, é sobrejetora.

SEGUNDA PROVA

4)

a) Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, seja $T \in L(V, W)$, e sejam $v_1, \ldots, v_k \in V$ tais que $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ seja LI. Então $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é LI.

RESOLUÇÃO.

Sejam $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0_V$. Como $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0_V$,

$$0_V = T(0_V) = T(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1T(v_1) + \cdots + a_kT(v_k).$$

Logo, resulta do fato de que $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ é LI que $a_1 = \cdots = a_k = 0$ — a partir do que concluímos, em vista da arbitrariedade de $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0_V$, que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é LI.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[T]_{can} = [I]_{B,can} [T]_B \cdot [I]_{can,B}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$= [I]^{-1}_{B,can} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ em $M_2(\mathbb{R})$ é tal que $\det(A) \neq 0$, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$B = ((3,1),(4,2))$

$I(4,2) = (4,2) = 4(1,0) + 2(0,1).$

$I(3,1) = (3,1)$

$= 3(1,0) + 1.(0,1)$

$$P^{-1}[T]_{can}P = [T]_B$$

$$[I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = [I]_{can,B}[T]_{can}[I]_{B,can} = P^{-1}[T]_{can}P$$

$$[I]_{B,can} =: P$$

$$[I]_{can,B} = [I]^{-1}_{B,can} = P^{-1}$$

$B := (v_1, \ldots, v_n)$

I

$I(v_1) = v_1 = 1.v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$

$$[I]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = I_n.$$

$$[I]_{can,B}[I]_{B,can} = [I]_{B,B} = I_n, \text{ e } [I]_{B,can} \cdot [I]_{can,B} = [I]_{can,can} = I_n.$$

$I(v_2) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \cdots + 0 \cdot v_n$

$(-2,4) = T(1,0)$

$(-1,2) = T(0,1)$

$$[T \circ T]_{can} = [T]_{can} \cdot [T]_{can} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T \circ T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]_{can} \Rightarrow T \circ T = 0$$

$$T : \underset{B}{\overset{n}{V}} \to \underset{C}{\overset{m}{W}} \qquad \underline{[T]_{B,C}} = \underline{[S]_{B,C}} \iff T = S$$

$S : V \to V$

Quero encontrar $P \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\det(P) \neq 0$, e $P^{-1}[T]_{can} P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [T]_{\underline{B}} = \underbrace{[I]_{can,B}}_{= [I]^{-1}_{B,can}} [T]_{can} [I]_{B,can} = [I]^{-1}_{B,can} [T]_{can} \underbrace{[I]_{B,can}}_{= P}$$

Se $B := (v_1, v_2)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$, então, como $T \circ T = 0$,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} T(v_1) = 0v_1 + 1 \cdot v_2 = v_2 \\ T(v_2) = 0v_1 + 0v_2 = (0,0) \end{cases}$$

$\iff v_2 = T(v_1)$.

$$v_2 = T(v_1) \Rightarrow T(v_2) = T(T(v_1)) = (T \circ T)(v_1) = (0,0).$$

$$B := \underline{((1,0), (-2,4))} = ((1,0), T(1,0)) \qquad P = [I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\{(1,0), (-2,4)\}$ é LI

2º método.

Quero encontrar $P \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\det(P) \neq 0$, e $P^{-1}[T]_{can}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$P^{-1}[T]_{can}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \iff \underline{[T]_{can}P = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$P := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2a - c = b \\ -2b - d = 0 \Rightarrow \underline{d = -2b} \\ 4a + 2c = d \leftarrow \\ 4b + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a - c = b \Rightarrow \underline{c = -2a - b} \\ 4a + 2c = -2b \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -2a-b & -2b \end{bmatrix}$$

$\det(P) \neq 0$

$ad - bc \neq 0$

$$\det(P) = \det\begin{bmatrix} a & b \\ -2a-b & -2b \end{bmatrix} = -2ab - b(-2a-b) = -2ab + 2ab + b^2 = b^2$$

$a = 0,\ b = 1$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := ((0,-1), \underbrace{(1,-2)}_{=T(0,-1)})$$

$$T(0,-1) = T(-(0,1)) = -T(0,1) = -(-1,2) = (1,-2).$$

$T: V \to W$
$S: W \to U$ lineares

- Se T não é injetora, então $\underline{S \circ T}$ não é injetora.
  $\underbrace{(\text{pois } \underline{\ker(T)} \subseteq \underline{\ker(S \circ T)})}$

Dizer isso é o mesmo que dizer que, se $S \circ T$ é injetora, então T é injetora.

- Se $S \circ T$ é sobrejetora, então S é sobrejetora.
  (já que $\operatorname{Im}(S \circ T) \subseteq \operatorname{Im}(S)$)
  pois
  $U = \operatorname{Im}(S \circ T) \subseteq \operatorname{Im}(S) \subseteq U \Rightarrow \operatorname{Im}(S) = U.$

Dizer isso é o mesmo que dizer que, se S não é sobrejetora, então $S \circ T$ não é sobrejetora.

$$\underset{B}{\overset{n}{V}} \xrightarrow{T} \underset{C}{\overset{m}{W}} \xrightarrow{S} \underset{D}{\overset{p}{U}} \qquad \left(S \circ T : \underset{B}{\overset{n}{V}} \longrightarrow \underset{D}{\overset{p}{U}}\right)$$

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D} \cdot [T]_{B,C}$$

Se $S \circ T$ é ~~sobrejetora~~, então T é sobrejetora. → FALSO!

Se

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x,0)$$ e se $$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x$$

então $S \circ T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a identidade e, portanto, é sobrejetora. Apesar disso,

↳ pois, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)) = S(x,0) = x.$$

nesse caso, T não é sobrejetora (pois $(0,1) \notin Im(T)$).

DEFINIÇÕES.

- Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $P_A(t) := (-1)^n \det(A - tI_n)$.
- Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, e se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A, então

$$V(\lambda) := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

- Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, e se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A, então $mg(\lambda) = \dim(V(\lambda))$.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável $\Leftrightarrow T_A \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que $[T_A]_{can} = A$ é diagonalizável

$\Leftrightarrow$ A é semelhante a uma matriz diagonal.

LISTA 7

10)

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

RESOLUÇÃO.

Como

$$P_T(t) = (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 1-t & 0 \\ -1 & 2-t \end{bmatrix} = (1-t)(2-t) = (t-1)(t-2),$$

os autovalores de T são 1 e 2. Logo, como T possui dois autovalores distintos, T é diagonalizável.

SEGUNDA PROVA

1) Seja

$$W := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x+2y+z=0, \text{ e } x+2y+3t=0\}.$$

a) Determine uma base de W.

RESOLUÇÃO.

Como

$$\begin{cases} x+2y+3t=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y+3t=0 \\ -4y+z-9t=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x=-2y-3t \\ z=4y+9t \end{cases},$$

$$\begin{aligned} W &= \{(-2y-3t, y, 4y+9t, t) : y,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2,1,4,0) + t(-3,0,9,1) : y,t \in \mathbb{R}\} \\ &= [(-2,1,4,0),(-3,0,9,1)]. \end{aligned}$$

Logo, resulta do fato de que $B_W := \{(-2,1,4,0),(-3,0,9,1)\}$ é L.I. que B_W é uma base de W.

b) Estenda a base de W que você obteve no item anterior a uma base de $\mathbb{R}^4$.

RESOLUÇÃO.

Como

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

$B_W \cup \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém B_W.

c) Use o item b para determinar um subespaço U de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$.

RESOLUÇÃO.

Se $B_U := \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$, e se $U := [B_U]$, então

$$W + U = [B_W] + [B_U] = [\underbrace{B_W \cup B_U}_{\text{é base de } \mathbb{R}^4}] = \mathbb{R}^4,$$

e, consequentemente, $\dim(W \cap U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W+U) = 2+2-4 = 0$. Logo, nesse caso, $\mathbb{R}^4 = W + U$, e $W \cap U = \{(0,0,0,0)\}$, ou, equivalentemente, $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$.

Se $U := [(1,0,0,0), (0,1,0,0)]$, então $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$.

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus U \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^4 = W + U \\ \underline{W \cap U = \{(0,0,0,0)\}} \end{cases}$$

$B_W = \{v_1, v_2\}$

$U = [e_1, e_2]$

$$\begin{cases} v \in W \cap U \\ \underbrace{a v_1 + b v_2}_{} = v = c e_1 + d e_2 \\ \Downarrow \\ a v_1 + b v_2 + (-c) e_1 + (-d) e_2 = (0,0,0,0) \\ \Downarrow \\ a = b = -c = -d = 0 \end{cases}$$

$v = (0,0,0,0)$

$$v = [\underbrace{a v_1 + b v_2}_{\in W}] + [\underbrace{c e_1 + d e_2}_{\in U}] \in W + U$$

$\mathbb{R}^4 = W + U$.

$$\dim(W \cap U) = \underbrace{\dim(W)}_{=2} + \underbrace{\dim(U)}_{=2} - \underbrace{\dim(W+U)}_{=4} = 0 \Rightarrow W \cap U = \{(0,0,0,0)\}$$