PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 8 DE JANEIRO

EXERCÍCIOS SUGERIDOS

LISTA 7: 4, 8, 15.

LISTA 6: 10, 13-c), 5, 16.

LISTA 6

5) Construa uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Ker(T) = Im(T)$.

RESOLUÇÃO.

Consideremos a transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$, $T(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$, $T(0,0,1,0) = (1,0,0,0)$, e $T(0,0,0,1) = (0,1,0,0)$. É fácil ver que

$$Im(T) = [\underbrace{T(1,0,0,0)}_{=(0,0,0,0)}, \underbrace{T(0,1,0,0)}_{=(0,0,0,0)}, \underbrace{T(0,0,1,0)}_{=(1,0,0,0)}, \underbrace{T(0,0,0,1)}_{=(0,1,0,0)}]$$

$$= [(1,0,0,0), (0,1,0,0)].$$

Por sua vez, como $\dim(Im(T)) = 2$, resulta do teorema do núcleo e da imagem que $\dim(Ker(T)) = 2$. Sendo assim, como $(1,0,0,0), (0,1,0,0) \in Ker(T)$, e como o conjunto $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$ é LI, podemos concluir que

$$Ker(T) = [(1,0,0,0), (0,1,0,0)] = Im(T).$$

10) Sejam $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ transformações lineares.

a) Mostre que $S \circ T$ não é inversível.

b) Dê um exemplo em que $T \circ S$ é inversível e outro em que $T \circ S$ não é inversível.

RESOLUÇÃO.

a) Como $\dim(Im(T)) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ (pois $Im(T)$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$), e como

$$\dim(Ker(T)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(Im(T)) = 4 - \dim(Im(T)),$$

$\dim(Ker(T)) \geq 4 - 3 = 1$, e, portanto, T não é injetora. Por sua vez, como T não é injetora, $S \circ T$ também não é injetora (pois, como $Ker(T) \neq \{(0,0,0,0)\}$, e como $Ker(T) \subseteq Ker(S \circ T)$,

$\ker(S\circ T) \neq \{(0,0,0,0)\}$. Logo, em particular, $S\circ T$ não é inversível.

b) Se

$$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad e \quad T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,$$
$$(x,y,z) \mapsto (x,y,z,0) \qquad (x,y,z,t) \mapsto (x,y,z)$$

então $T\circ S = I_{\mathbb{R}^3}$ (pois, para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $T(S(x,y,z)) = T(x,y,z,0) = (x,y,z)$), e, portanto, nesse caso, $T\circ S$ é inversível. Por sua vez, se

$$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad e \quad T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,$$
$$(x,y,z) \mapsto (0,0,0,0) \qquad (x,y,z,t) \mapsto (0,0,0)$$

então $T\circ S$ é a função nula de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ e, por conseguinte, não é inversível.

16) Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

em que $B := ((1,1,1), (1,2,1), (1,1,3))$. Determine $[T]_{can}$.

RESOLUÇÃO.

Inicialmente, notemos que

$$[T]_{can} = [I\circ T\circ I]_{can} = [I]_{B,can} [T]_B \underbrace{[I]_{can,B}}_{=[I]^{-1}_{B,can}}.$$

Logo, como

$$[I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

13)

c) $T \in L(P_n(\mathbb{R}))$, e, para cada $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = p'(t)$.

RESOLUÇÃO.

Como $p(t) = a_n t^n + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$,
$p'(t) = n a_n t^{n-1} + \dots + 2a_2 t + a_1$,
e, portanto, $p'(t) = 0 \iff a_n = \dots = a_1 = 0$

NÚCLEO DE T

Como, para cada $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$, $p'(t) = 0 \iff p(t)$ é constante, $\ker(T) = \{a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\} = [1]$.

IMAGEM DE T:

$$Im(T) = [T(1), T(t), \dots, T(t^n)] = [1, 2t, 3t^2, \dots, nt^{n-1}]$$
$$= [1, t, t^2, \dots, t^{n-1}].$$

Logo, $\{1\}$ é uma base de $\ker(T)$, e $\{1, \dots, t^{n-1}\}$ é uma base de $Im(T)$. Além disso,

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

(em que $can = (1, t, \dots, t^n)$.)

V esp. vet. de dim. finita
$T \in L(V)$.

- $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de T se existe $v \in V \setminus \{0_V\}$ tal que $T(v) = \lambda v$.
- $v \in V$ é autovetor de T se $v \neq 0_V$, e se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$.

$$V(\lambda) = \{v \in V : T(v) = \lambda v\} = \{v \in V : (T - \lambda I)(v) = 0_V\} = \ker(T - \lambda I).$$

↳ autoespaço associado ao autovalor λ

$$P_T(t) := (-1)^n \det([T - \lambda I]_B)$$
↳ pol. característica de T

as raízes de $P_T(t)$ são os autovalores de T.

$ma(\lambda)$

$mg(\lambda) = \dim(\underbrace{V(\lambda)}_{= \ker(T - \lambda I)}) = \dim(\ker(T - \lambda I))$

$P_T(t) = (t-1)^2 (t-5)(t-7)^5$
$ma(1) = 2$
$ma(5) = 1$
$ma(7) = 5$

$\underline{mg(\lambda) \leq ma(\lambda)}$

LISTA 6

8) HIPÓTESE: $T \circ T = T$.

IDEIA PARA MOSTRAR QUE $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

Precisamos mostrar duas coisas:

1) $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0_V\}$.

2) $V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$.

PROVA DE 1.

Como $0_V \in \text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T)$, para concluirmos que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0_V\}$, basta mostrarmos que, se $v \in \text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T)$, então $v = 0_V$.

Seja $v \in \text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T)$. Como $v \in \text{Im}(T)$, podemos fixar $u \in V$ de modo de $v = T(u)$. Feito isso, notemos que, como $v \in \text{Ker}(T)$,

$$0_V = T(v) = T(T(u)) = (T \circ T)(u) = T(u) = v.$$

Logo, resulta da arbitrariedade de v em $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T)$ que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0_V\}$.

PROVA DE QUE $V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$.

Para cada $v \in V$,

$$v = (v - T(v)) + T(v).$$

Sendo assim, como, para cada $v \in V$, $T(v) \in \text{Im}(T)$, e $v - T(v) \in \text{Ker}(T)$ (pois $T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = T(v) - (T \circ T)(v) = T(v) - T(v) = 0_V$), podemos concluir que $v \in \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$ qualquer que seja $v \in V$. Logo, $V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$.

$$\underline{\mathbb{R}^n = \ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T)}$$

Sejam $B := \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de $\ker(T)$ e $C := \{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ uma base de $\operatorname{Im}(T)$.

Como $\mathbb{R}^n = \ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$,

$B \cup C$ é uma base de V.

$D := (v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n)$

$$\underline{I \circ T = T}$$

$$T(v_i) = 0_V$$

$$T(\overbrace{w_i}^{\in \operatorname{Im}(T)}) = T(T(u_i)) = (T \circ T)(u_i) = T(u_i) = w_i$$

$$w_i = T(u_i)$$

$$[T]_D = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{k} & \overbrace{}^{n-k} \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & & & 0 & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \hline & & & 1 & & 0 & \\ & 0 & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & & 1 \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cc} \underbrace{}_{k} & \underbrace{}_{n-k} \end{array} \end{array}$$

$$[T]_D = \left[\begin{array}{c|c} 0_k & 0_{n-k,k} \\ \hline 0_{k,n-k} & I_{n-k} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0_k & \\ \hline & I_{n-k} \end{array}\right]$$

$$B = [I]^{-1}_{C,\mathrm{can}} \, A \, \underbrace{[I]_{\mathrm{can},C}}_{=:P} = P^{-1}AP$$

$$B = P^{-1}AP \iff A = PBP^{-1}$$

$$A = [T]_{\mathrm{can}} = [I \circ T \circ I]_{\mathrm{can}} = [I]^{-1}_{\mathrm{can},C} [T]_C \underbrace{[I]_{\mathrm{can},C}}_{=:Q}$$

$$= Q^{-1}BQ \qquad Q = P^{-1}$$

EXERCÍCIO.

1) V.

$\rightsquigarrow A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$

(IDEIA: se $B = P^{-1}AP$, então $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}).\det(A).\det(P)$
$= \det(A)$)

$\det(P).\det(P^{-1}) = \det(P.P^{-1})$
$= \det(I_n) = 1.$

2) F

De fato, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ possuem mesmo determinante, mas não semelhantes — pois $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável.

3) V.
4) F.
5) V.
6) V.
7) V.

LISTA 7

5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, e seja $T \in L(V)$ tal que $\text{posto}(T) = 1$. Mostre que, ou T é diagonalizável, ou $T^2 = 0$.

RESOLUÇÃO.

Seja $n := \dim(V)$. Como $\text{posto}(T) = 1$, $\dim(\ker(T)) = n-1$. Seja $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ uma base de $\ker(T)$, seja $v \in V$ tal que $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v\}$ seja uma base de V, e seja $B := (v_1, \dots, v_{n-1}, v)$. Nessas condições, é fácil ver que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix},$$

em que $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ são tais que $T(v) = a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v$. Logo,

$$P_T(t) := (-1)^n \det \begin{bmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n - t \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^n (-t)^{n-1} (a_n - t) = t^{n-1}(t - a_n).$$

Há duas possibilidades: ou $a_n = 0$, ou $a_n \neq 0$.

1) Se $a_n \neq 0$, então $ma(a_n) = 1 = mg(a_n)$, e $ma(0) = n-1 = \dim(\ker(T)) = mg(0)$. Logo, nesse caso, T é diagonalizável.

2) Se $a_n = 0$, então $P_T(t) = t^n$. Logo, nesse caso, $ma(0) = n > n-1 = mg(0)$, e, portanto, T não é diagonalizável. Apesar disso, é fácil ver que, se $a_n = 0$, então

$$[T^2]_B = [T \circ T]_B = [T]_B \cdot [T]_B = 0_n$$

— a partir do que concluímos que, nesse caso, $T^2 = 0$.

15)

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$B := ((2,1), (1,-2))$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$

3) V.

(IDEIA: se $B = P^{-1}AP$, então

$$P_B(t) = (-1)^n \det(B - \lambda I_n) = (-1)^n \det(P^{-1}AP - \underbrace{\lambda I_n}_{= P^{-1}(\lambda I_n)P})$$
$$= (-1)^n \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I_n)P)$$
$$= (-1)^n \det((P^{-1}A - P^{-1}\lambda I_n)P)$$
$$= (-1)^n \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P)$$
$$= (-1)^n \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det(P)$$
$$= (-1)^n \det(A - \lambda I_n) = P_A(t).$$
)

6) Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, se B e C são bases ordenadas de V e de W, respectivamente, e se $T: V \to W$ é um isomorfismo, então $[T]_{B,C}$ tem inversa.

RESOLUÇÃO. V.

IDEIA: $[T]_{B,C} \cdot [T^{-1}]_{C,B} = [T \circ T^{-1}]_C = [I]_C = I_n$, e
$[T^{-1}]_{C,B} \cdot [T]_{B,C} = [T^{-1} \circ T]_B = [I]_B = I_n$. $(n = \dim(W) = \dim(V))$

Logo, $[T]_{B,C}$ tem inversa, e $[T]_{B,C}^{-1} = [T]_{C,B}$.

7) Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, se $T \in L(V,W)$, e se existem uma base ordenada B de V e uma base ordenada C de W tais que $[T]_{B,C}$ possua inversa, então T é um isomorfismo.

RESOLUÇÃO. V.

IDEIA

Seja D a inversa de $[T]_{B,C}$, e seja $S \in L(W,V)$ tal que $[S]_{C,B} = D$. Como $[T]_{B,C}$ tem inversa, $\dim(V) = \dim(W)$. Seja $n := \dim(V) = \dim(W)$. Como

$$[T \circ S]_C = [T]_{B,C} \cdot \underbrace{[S]_{C,B}}_{=D} = [T]_{B,C} \cdot D = I_n = [I_W]_C \Rightarrow T \circ S = I_W,$$

e como

$$[S \circ T]_B = \underbrace{[S]_{C,B}}_{=D} [T]_{B,C} = D \cdot [T]_{B,C} = I_n = [I_V]_B \Rightarrow S \circ T = I_V,$$

podemos concluir que T possui inversa, e que $T^{-1} = S$.

OBS.: se $D := (d_{ij})$, se $B := (v_1, \ldots, v_n)$, e se $C := (w_1, \ldots, w_n)$, então S é tal que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$S(w_j) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} v_i.$$