PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 22 DE NOVEMBRO

EXERCÍCIOS SUGERIDOS.

LISTA 4:

LISTA 5: 15.

LISTA 6:

PROPOSIÇÃO.

Se S e T são subconjuntos de um espaço vetorial V, então

$$[S] = [T] \Leftrightarrow (S \subseteq [T], \text{ e } T \subseteq [S]).$$

OBSERVAÇÕES.

a) Todo conjunto que contém um conjunto gerador de um subespaço é também gerador desse subespaço.

b) Todo subconjunto de um conjunto LI é também LI.

PROPOSIÇÃO.

Se U e W são subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial V, então $U+W$ e $U \cap W$ têm dimensão finita, e, além disso,

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

PROPOSIÇÃO.

Se U e W são subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V tais que $U \subseteq W$, e $\dim(U) = \dim(W)$, então $U = W$.

DEFINIÇÃO.

Sejam V e W espaços vetoriais e $T: V \to W$ uma transformação linear. Nessas condições,

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(T)}_{\substack{\text{NÚCLEO DE } T \\ \text{(É SUBESPAÇO DE } V)}} := \{v \in V : T(v) = 0_W\} \subseteq V, \text{ e } \underbrace{\mathrm{Im}(T)}_{\substack{\text{IMAGEM DE } T \\ \text{(É SUBESPAÇO DE } W)}} := \{T(v) : v \in V\} \subseteq W.$$

PROPOSIÇÃO.

Sejam V e W espaços vetoriais e $T: V \to W$ uma transformação linear. Nessas condições, se B é uma base de V, então

$$T(B) := \{T(v) : v \in B\}$$

gera $Im(T)$.

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, W um espaço vetorial qualquer e $T: V \to W$ uma transformação linear. Nessas condições, $Ker(T)$ e $Im(T)$ têm dimensão finita, e, além disso,

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)).$$

LISTA 6

1)

d) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x-y, x)$

RESOLUÇÃO.

A aplicação T é linear, pois:

- para quaisquer (x_1,y_1) e (x_2,y_2) em $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) &= ((x_1+x_2)-(y_1+y_2), x_1+x_2) \\ &= ((x_1-y_1)+(x_2-y_2), x_1+x_2) \\ &= (x_1-y_1, x_1) + (x_2-y_2, x_2) \\ &= T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2); \end{aligned}$$

- para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda(x,y)) = T(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x - \lambda y, \lambda x) \\ &= (\lambda(x-y), \lambda x) = \lambda(x-y, x) \\ &= \lambda T(x,y). \end{aligned}$$

2) (VERSÃO ESTENDIDA)

Encontre, se possível, uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (1,0)$, e $T(1,-1,1) = (0,1)$.

RESOLUÇÃO.

Inicialmente, notemos que $S := \{(1,1,1),(1,-1,1)\}$ é LI. Em seguida, vamos estender S a uma base de $\mathbb{R}^3$. Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2' := L_2 - L_1 \\ L_3' := L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{-2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B := \{(1,1,1),(1,-1,1),(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Logo, resulta do teorema que discutimos que podemos fixar uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de modo que $T(1,1,1) = (1,0)$, $T(1,-1,1) = (0,1)$, e $T(1,0,0) = (0,0)$. Feito isso, vamos determinar a lei de correspondência de T. Para tanto, precisamos, antes de qualquer coisa, descobrir como escrever um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos elementos da base B.

Seja (x,y,z) em $\mathbb{R}^3$. Como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \underset{\substack{L_2' := L_2 - L_1 \\ L_3' := L_3 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \alpha - \beta = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ -2\beta - \gamma = y - x \\ -\gamma = z - x \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha = \dfrac{y+z}{2} \\ \beta = \dfrac{z-y}{2} \\ \gamma = x - z \end{cases},$$

e, portanto,

$$(x,y,z) = \left(\frac{y+z}{2}\right)(1,1,1) + \left(\frac{z-y}{2}\right)(1,-1,1) + (x-z)(1,0,0).$$

Consequentemente,

$$T(x,y,z) = \left(\frac{y+z}{2}\right)\underbrace{T(1,1,1)}_{=(1,0)} + \left(\frac{z-y}{2}\right)\underbrace{T(1,-1,1)}_{=(0,1)} + (x-z)\underbrace{T(1,0,0)}_{=(0,0)} = \left(\frac{y+z}{2}, \frac{z-y}{2}\right).$$

OBSERVAÇÃO.

Se V e W são espaços vetoriais, e se $T: V \to W$ é linear, então T é injetora se, e somente se, $Ker(T) = \{0_V\}$.

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$Im(T) = [(1,0,1), (1,2,2)]$

$B := \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$Im(T) = [\underbrace{T(1,0,0)}_{=(1,0,1)}, \underbrace{T(0,1,0)}_{=(1,2,2)}, \overbrace{T(0,0,1)}^{=(0,0,0)}]$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(1,0,0) = (1,0,1), \ T(0,1,0) = (1,2,2), \ T(0,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ &= x\underbrace{T(1,0,0)}_{=(1,0,1)} + y\underbrace{T(0,1,0)}_{=(1,2,2)} + z\underbrace{T(0,0,1)}_{=(0,0,0)} \\ &= x(1,0,1) + y(1,2,2) = (x+y, 2y, x+2y). \end{aligned}$$

5)

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Ker(T) = Im(T)$.

$B := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$.

$e_1 := (1,0,0,0)$ | $e_3 := (0,0,1,0)$

$e_2 := (0,1,0,0)$ | $e_4 := (0,0,0,1)$

Defino $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linear de modo que $\{e_1, e_2\} \subseteq Ker(T)$

$T(e_1) = (0,0,0,0) = T(e_2)$, $T(e_3) = e_1$, e $T(e_4) = e_2$. $Ker(T) = [e_1, e_2]$

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(Ker(T)) + \underbrace{\dim(Im(T))}_{= \dim(Ker(T))} = 2\dim(Ker(T)) \Rightarrow \dim(Ker(T)) = 2.$$

$\dim(Ker(T)) = \dim(Im(T)) = 2$.

$$Im(T) = [T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)] = \underbrace{[T(e_3), T(e_4)]}_{\underset{\text{quero}}{=} [e_1, e_2] = Ker(T)}$$

10) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$
$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineares

$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$

$\Downarrow$

$\dim(Ker(T)) = 4 - \underbrace{\dim(Im(T))}_{\leq 3} \geq 4 - 3 = 1$

$\Downarrow$

$Ker(T) \neq \{(0,0,0)\}$

$\Downarrow$

T não é injetora.

a) Mostre que $S \circ T$ não tem inversa.

$T: V \to W$

1) T não é injetora $\Rightarrow$ $S \circ T$ não é injetora.

DEM.

T não é injetora $\Rightarrow (\exists\, v_1, v_2 \in V)(v_1 \neq v_2$, e $T(v_1) = T(v_2))$

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow \underbrace{S(T(v_1)) = S(T(v_2))}$$

$$\Rightarrow (S \circ T)(v_1) = (S \circ T)(v_2)$$

ARGUMENTO ALTERNATIVO.

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \underbrace{\dim(\ker(S))}_{\geq 0} + \dim(\operatorname{Im}(S)) \geq \dim(\operatorname{Im}(S))$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Im}(S) \neq \mathbb{R}^4$$

$$\Downarrow$$

S não é sobrejetora.

2) S não é sobrejetora $\Rightarrow$ $S \circ T$ não é sobrejetora (pois $\operatorname{Im}(S \circ T) \subseteq \operatorname{Im}(S)$).

$T: V \to W$ linear

T não é injetora $\Rightarrow$ $\underbrace{\ker(T) \neq \{0_V\}}_{\Rightarrow \ker(S \circ T) \neq \{0_V\}}$

(pois $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$).

b) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineares.
$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

Exemplo em que $T \circ S$ não tem inversa: $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z,t) \mapsto (0,0,0)$ e $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,z) \mapsto (0,0,0,0)$.

Nesse caso, $T \circ S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
$(x,y,z) \mapsto (0,0,0)$

Exemplo em que $T \circ S$ tem inversa: $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, e $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.
$(x,y,z) \mapsto (x,y,z,0)$ $\quad (x,y,z,t) \mapsto (x,y,z)$

Nesse caso, $T \circ S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
$(x,y,z) \mapsto (x,y,z)$

$f: A \to B$, $g: B \to C$

$g \circ f: A \to C$.
$x \mapsto g(f(x))$