Prova substitutiva de Álgebra Linear I

Denis de Assis Pinto Garcia

5 de fevereiro de 2024

Exercício 1.

As matrizes

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C := \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

têm o mesmo polinômio característico, $p(t) := (t-1)^2(t-3)$. Quais delas são diagonalizáveis? Para a que for diagonalizável, determine uma matriz inversível $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}XP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

em que $X = A$ ou $X = C$.

Resolução.

Como $p(t) = (t-1)^2(t-3)$,

$$m_a^A(3) = m_g^A(3) = 1 = m_a^C(3) = m_g^C(3),$$

e $m_a^A(1) = m_a^C(1) = 2$. Logo, A será diagonalizável se, e somente se, $m_g^A(1) = 2$, e, analogamente, C será diagonalizável se, e somente se, $m_g^C(1) = 2$. Por sua vez, como

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_2^{(1)} := L_2 + L_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_3^{(2)} := L_3^{(1)} + L_2^{(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$C - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2^{(1)} := L_2 + L_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} V_A(1) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - I_3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3z, \text{ e } y = -4z \right\} \\ &= \left\{ (3z, -4z, z) : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z(3,-4,1) : z \in \mathbb{R} \right\} = \left[(3,-4,1) \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_C(1) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (C - I_3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -3y \right\} \\ &= \left\{ (-3y, y, z) : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y(-3,1,0) + z(0,0,1) : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left[(-3,1,0), (0,0,1) \right]. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$m_g^A(1) = \dim\big(V_A(1)\big) = 1 < 2 = \dim\big(V_C(1)\big) = m_g^C(1),$$

e, portanto, C é diagonalizável, e A não o é.[1]

Seja $T_C \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T_C]_{can} = C$. Como $C = [T_C]_{can}$, para encontrarmos uma matriz inversível $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

basta encontrarmos uma base ordenada B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T_C]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (pois, se o fizermos, então, como $[T_C]_B = [I]_{can,B} \cdot [T_C]_{can} \cdot [I]_{B,can} = [I]_{B,can}^{-1} \cdot C \cdot [I]_{B,can}$, $[I]_{B,can}$ será uma tal P). Para tanto, vamos, inicialmente, encontrar bases de $V_C(1)$ e de $V_C(3)$. Como $V_C(1) = \big[(-3,1,0),(0,0,1)\big]$, e como $B_1 \coloneqq \big\{(-3,1,0),(0,0,1)\big\}$ é LI, B_1 é uma base de $V_C(1)$. Analogamente, como

$$\begin{aligned} V_C(3) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (C - 3I_3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x, \text{ e } z = 0\big\} = \big\{(x,-x,0) : x \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x(1,-1,0) : x \in \mathbb{R}\big\} = \big[(1,-1,0)\big], \end{aligned}$$

e como $B_3 \coloneqq \big\{(1,-1,0)\big\}$ é LI, B_3 é uma base de $V_C(3)$. Seja $B \coloneqq \big((-3,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\big)$. Como B_1 e B_3 são bases de $V_C(1)$ e de $V_C(3)$, respectivamente, B é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T_C]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Logo, se $P \coloneqq [I]_{B,can} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, então P é inversível, e

$$P^{-1}CP = [I]_{B,can}^{-1} \cdot [T_C]_{can} \cdot [I]_{B,can} = [T_C]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.

(a) Estenda o conjunto $S \coloneqq \big\{(1,2,1),(1,2,3)\big\}$ a uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Defina um operador linear $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $\ker(T) = \big[(1,2,1),(1,2,3)\big]$, e $\operatorname{Im}(T) = \big[(1,1,1)\big]$.

(c) Determine $[T]_{can}$, em que T é a transformação linear que você definiu no item anterior.

Resolução.

[1] Poderíamos ter chegado à mesma conclusão observando que, como

$$A - I_3 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad C - I_3 \sim \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\operatorname{posto}(A) = 2$, e $\operatorname{posto}(C) = 1$, e, por conseguinte,

$$m_g^A(1) = \dim\big(V_A(1)\big) = 3 - \operatorname{posto}(A) = 3 - 2 = 1 < 2,$$

e

$$m_g^C(1) = \dim\big(V_C(1)\big) = 3 - \operatorname{posto}(C) = 3 - 1 = 2.$$

(a) Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2^{(1)}:=L_2-2L_1 \\ L_3^{(1)}:=L_3-L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2^{(2)}:=L_3^{(1)} \\ L_3^{(2)}:=L_2^{(1)}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

o conjunto $B := \big\{(1,2,1),(1,2,3),(1,0,0)\big\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(1,2,1) = T(1,2,3) = (0,0,0)$, e $T(1,0,0) = (1,1,1)$ (como B é uma base de $\mathbb{R}^3$, um tal T certamente existe). Decorre da definição de T e do fato de que B é uma base de $\mathbb{R}^3$ que

$$\mathrm{Im}(T) = \big[\underbrace{T(1,2,1)}_{=(0,00)}, \underbrace{T(1,2,3)}_{=(0,0,0)}, \underbrace{T(1,0,0)}_{=(1,1,1)}\big] = \big[(1,1,1)\big].$$

Sendo assim, podemos concluir, em particular, que

$$\dim\big(\ker(T)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3 - 1 = 2.$$

E, como $\big\{(1,2,1),(1,2,3)\big\}$ é um subconjunto LI de $\ker(T)$ com 2 elementos, disso resulta, por fim, que $\ker(T) = \big[(1,2,1),(1,2,3)\big]$.

(c) Para obtermos $[T]_{can}$, vamos, antes de qualquer coisa, descobrir qual é a lei de correspondência de T. Para tanto, notemos, inicialmente, que, para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e quaisquer a, b e c em $\mathbb{R}$,

$$(x,y,z) = a(1,2,1) + b(1,2,3) + c(1,0,0)$$

se, e somente se, $a+b+c = x$, $2a+2b = y$, e $a+3b = z$. Como, para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & x \\ 2a+2b & = & y \\ a+3b & = & z \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & x \\ -2c & = & y-2x \\ 2b & = & z-x \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{x+y-z}{2} \\ b & = & \frac{z-x}{2} \\ c & = & x-\frac{y}{2} \end{array}\right.,$$

disso concluímos, por sua vez, que, para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) = \left(\frac{x+y-z}{2}\right)(1,2,1) + \left(\frac{z-x}{2}\right)(1,2,3) + \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,0,0).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T\left(\left(\frac{x+y-z}{2}\right)(1,2,1) + \left(\frac{z-x}{2}\right)(1,2,3) + \left(x-\frac{y}{2}\right)(1,0,0)\right) \\ &= \left(\frac{x+y-z}{2}\right)\underbrace{T(1,2,1)}_{=(0,0,0)} + \left(\frac{z-x}{2}\right)\underbrace{T(1,2,3)}_{=(0,0,0)} + \left(x-\frac{y}{2}\right)\underbrace{T(1,0,0)}_{=(1,1,1)} \\ &= \left(x - \frac{y}{2}\right)(1,1,1) \end{aligned}$$

qualquer que seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e, portanto,

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.

As afirmações a seguir são **verdadeiras** ou **falsas**? **JUSTIFIQUE!**

(a) Sejam $T \in L(\mathbb{R}^{20}, \mathbb{R}^{10})$ e $S \in L(\mathbb{R}^{10}, \mathbb{R}^{20})$. Então $S \circ T$ não pode ser bijetora.

(b) A matriz real

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

é diagonalizável quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(c) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $T \in L(V)$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ tais que $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ seja LI. Então $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI.

(d) Suponha que um espaço vetorial V tenha um conjunto gerador G com m vetores. Se B é um subconjunto LI de V com m vetores, então B é uma base de V.

Resolução.

(a) A afirmação é verdadeira. Para constatar isso, notemos, inicialmente, que, como $\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) \leq 10$ (pois $\operatorname{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{10}$),

$$\dim\big(\ker(T)\big) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^{20})}_{=20} - \underbrace{\dim\big(\operatorname{Im}(T)\big)}_{\leq 10} \geq 20 - 10 = 10,$$

e, portanto, $\ker(T) \neq \{0_{\mathbb{R}^{20}}\}$. Como $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$, disso resulta, por sua vez, que $\ker(S \circ T) \neq \{0_{\mathbb{R}^{20}}\}$ — a partir do que concluímos, por fim, que $S \circ T$ não é bijetora (pois não é injetora).[2]

(b) A afirmação é verdadeira. Para demonstrá-la, fixemos a, b e c em $\mathbb{R}$ de modo arbitrário e vamos mostrar que a matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ é diagonalizável. Para isso, observemos, de início, que, como

$$(-1)^2 \det \begin{bmatrix} a - t & c \\ c & b - t \end{bmatrix} = (a - t)(b - t) - c^2 = t^2 - (a + b)t + (ab - c^2),$$

o polinômio característico da matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ é $t^2 - (a+b)t + (ab - c^2)$. Por sua vez, como o discriminante associado à equação do segundo grau $t^2 - (a + b)t + (ab - c^2) = 0$ é $\Delta \coloneqq (a + b)^2 - 4(ab - c^2)$, e como

$$(a + b)^2 - 4(ab - c^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2 = (a - b)^2 + 4c^2,$$

é fácil ver que $\Delta \geq 0$, e que $\Delta = 0$ se, e somente se, $c = 0$, e $a = b$. Consequentemente, se $c \neq 0$ ou $a \neq b$, a equação $t^2 - (a + b)t + (ab - c^2) = 0$ possuirá duas raízes distintas, e, portanto, nesse caso, a matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ será diagonalizável (pois terá dois autovalores distintos). Sendo assim, resta-nos, pois, somente analisar o caso em que $a = b$, e $c = 0$. Nesse caso, porém, a matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ é diagonal e, portanto, é, em particular, diagonalizável.[3]

(c) A afirmação é verdadeira. Para mostrar isso, comecemos fixando $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ de modo que

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V.$$

Como $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V$,

$$0_V = T(0_V) = T(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \ldots + a_n T(v_n).$$

Logo, resulta do fato de que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ é LI que $a_1 = \ldots = a_n = 0$ — a partir do que concluímos, em vista da arbitrariedade de $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0_V$, que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é LI.

[2] Alternativamente, pode-se demonstrar isso notando-se que, como

$$\dim\big(\operatorname{Im}(S)\big) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^{10})}_{=10} - \underbrace{\dim\big(\ker(S)\big)}_{\geq 0} \leq 10 < 20 = \dim\big(\mathbb{R}^{20}\big),$$

$\operatorname{Im}(S) \neq \mathbb{R}^{20}$, e, em seguida, observando-se que, como $\operatorname{Im}(S \circ T) \subseteq \operatorname{Im}(S) \subseteq \mathbb{R}^{20}$, disso resulta que $S \circ T$ não é bijetora (pois não é sobrejetora).

[3] De fato, se $a = b$, e se $c = 0$, então $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

(d) A afirmação é verdadeira. Para nos convencermos disso, observemos, inicialmente, que, como G é um conjunto gerador de V com m vetores, qualquer base de V possui, no máximo, m elementos. Em seguida, suponhamos que B seja um subconjunto LI de V com m vetores e notemos que, como B é LI, qualquer base de V possui, pelo menos, m elementos. Dessas duas observações, resulta que qualquer base de V possui exatamente m elementos. Para concluirmos, a partir disso, que B é uma base de V, fixemos, agora, uma base C de V de modo que $B \subseteq C$ (como, por hipótese, B é LI, uma tal base certamente existe). Como $B \subseteq C$, e tanto B quanto C possuem m elementos, $B = C$, e, portanto, B é, de fato, uma base de V.