PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 12 DE JANEIRO

TERCEIRA PROVA

1)

a) Como

$$[T]_{can} = [I\circ T\circ I]_{can} = [I]_{B,can}[T]_B[I]_{can,B} = [I]_{B,can}[T]_B[I]_{B,can}^{-1},$$

e como

$$[I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Além disso, como

$$[T]_B = [I]_{B,can}^{-1}[T]_{can}[I]_{B,can},$$

uma matriz inversível P em $M_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}[T]_{can}P = [T]_B$ é a matriz $[I]_{B,can}$.

b) Como

$$[T\circ T]_{can} = [T]_{can}[T]_{can} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$= (-2,4)$

$T\circ T = 0$. Além disso, é fácil ver que $\{(1,0), T(1,0)\}$ é LI, e, portanto, é uma base de $\mathbb{R}^2$, e que, se $B := ((1,0), T(1,0))$, então

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, se $B := ((1,0), T(1,0))$, então, como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [T]_B = [I]_{B,can}^{-1}[T]_{can}[I]_{B,can},$$

uma matriz inversível P em $M_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}[T]_{can}P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz

$[I]_{B,can}$ — isto é, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

REVISÃO.

- v é combinação linear de $v_1, \dots, v_n \Leftrightarrow \exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.
- v é combinação linear dos elementos de um conjunto $S \Leftrightarrow$ existem $n \in \{1, 2, \dots\}$ e $v_1, \dots, v_n \in S$ tais que v seja combinação linear de $v_1, \dots, v_n$.
- Se $S \subseteq V$ é tal que $S \neq \emptyset$, então $[S]$ = Conjunto das combinações lineares de elementos de S.

- $[\emptyset] = \{0_v\}$.

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD $\Leftrightarrow \exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_v$.
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ não é L.D.

- Se S é infinito, então S é LI $\Leftrightarrow$ todo subconjunto finito de S é LI).

Seja V um espaço vetorial.

- $B \subseteq V$ é base de V se, e somente se, B é LI, e $[B] = V$.

- B é base de $V \Leftrightarrow$ todo vetor de V pode ser escrito de modo único como comb. linear dos elementos de B.

- $S \subseteq T \Rightarrow [S] \subseteq [T]$.
- $[S \cup T] = [S] \cup [T]$.

$[S \cap T] \neq [S] \cap [T]$

$V = \mathbb{R}^2$

$S := \{(1,0)\}$

$S \cap T = \emptyset \Rightarrow [S \cap T] = [\emptyset] = \{0_V\}$

$T := \{(2,0)\}$

$[S] = [T] = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V.

$U + W := \{u + w : u \in U, \text{ e } w \in W\}$.

- Dizemos que a soma $U + W$ é direta se $U \cap W = \{0_V\}$.

NOTAÇÃO PARA INDICAR QUE A SOMA É DIRETA: $U \oplus W$.

$$V = U \oplus W \Leftrightarrow \begin{cases} V = U + W \\ U \cap W = \{0_V\}. \end{cases}$$

- $M_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$, em que

$U := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}$, $\rightsquigarrow$ conjunto das matrizes simétricas de ordem n

e

$W := \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = -B\}$.

$\downarrow$ conjunto das matrizes antissimétricas de ordem n

- $U \cap W = \{0_n\} \rightsquigarrow$ Se $A \in U \cap W$, então $A \underset{\downarrow}{=} A^t \underset{\downarrow}{=} -A$, e, portanto, nesse caso, $A = 0_n$.

$A \in U \quad A \in W$

- $U + W = M_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow$ Para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = \underbrace{\frac{A + A^t}{2}}_{\in U} + \underbrace{\frac{A - A^t}{2}}_{\in W}$.

EXERCÍCIO.

Dados $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, determine uma base de $[v_1, \ldots, v_n]$.

$\mathbb{R}^3$

$v_1 = (3, 1, 2)$

$v_2 := (4, 1, 5)$ $\qquad [v_1, v_2, v_3]$

$v_3 := (7, 2, 9)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2'' := L_2' - 3L_1' \\ L_3'' := L_3' - 2L_1'}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3''' := L_3'' - 3L_2''}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $[v_1, v_2, v_3]$.

Se V é um espaço vetorial de dimensão n, então:

- todo subconjunto LI de V com n elementos é uma base de V; e
- todo subconjunto de V com n elementos que gere V é necessariamente uma base de V.